Distribuição Normal

Prof. Herondino

Distribuição Normal

- A mais importante distribuição de probabilidade contínua em todo o domínio da estatística é a distribuição normal.
- Seu gráfico, chamado de curva normal, é a curva em forma de sino (Fig. 1) que aproximadamente descreve muitos fenômenos que ocorrem na natureza, indústria e pesquisa.

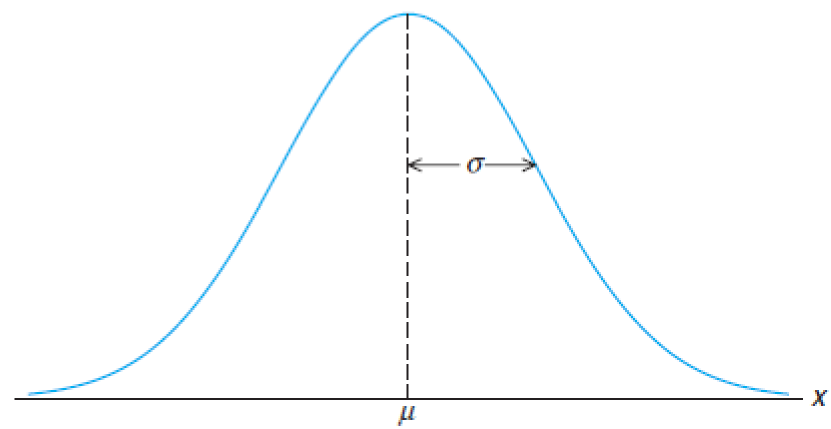
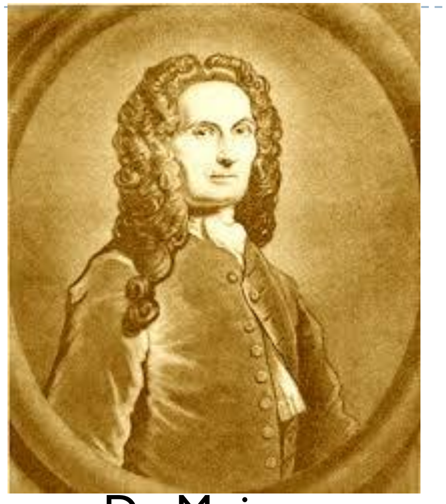


Figura 1 – Curva normal

Distribuição Normal

- Em 1733, Abraham De Moivre desenvolveu a equação matemática da curva normal.
- Ele forneceu uma base a partir da qual grande parte da teoria de estatísticas indutivas é fundamentada.
- A distribuição normal é muitas vezes referida como a distribuição de Gauss, em homenagem a Karl Friedrich Gauss que também derivou sua equação.



De Moivre

Gauss

Distribuição Normal

- A equação matemática para a distribuição de probabilidade da variável normal depende de dois parâmetros, μ e σ, a sua média e desvio padrão, respectivamente.

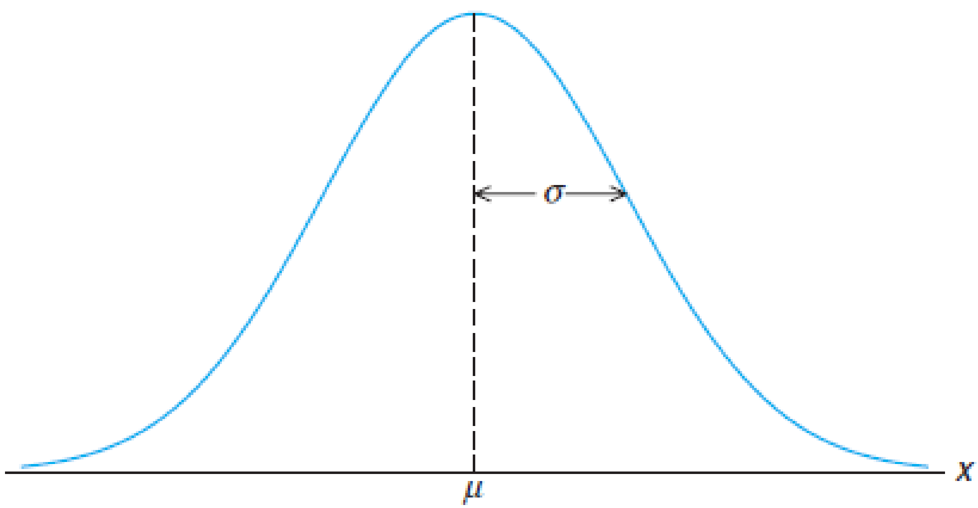


Figura 1 – Curva normal

Distribuição Normal

- A equação matemática para a distribuição de probabilidade da variável normal depende de dois parâmetros, μ e σ, a sua média e desvio padrão, respectivamente.

A densidade da variável aleatória X normal com média μ e variância σ^2, é

$$\boxed{n(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}}$$

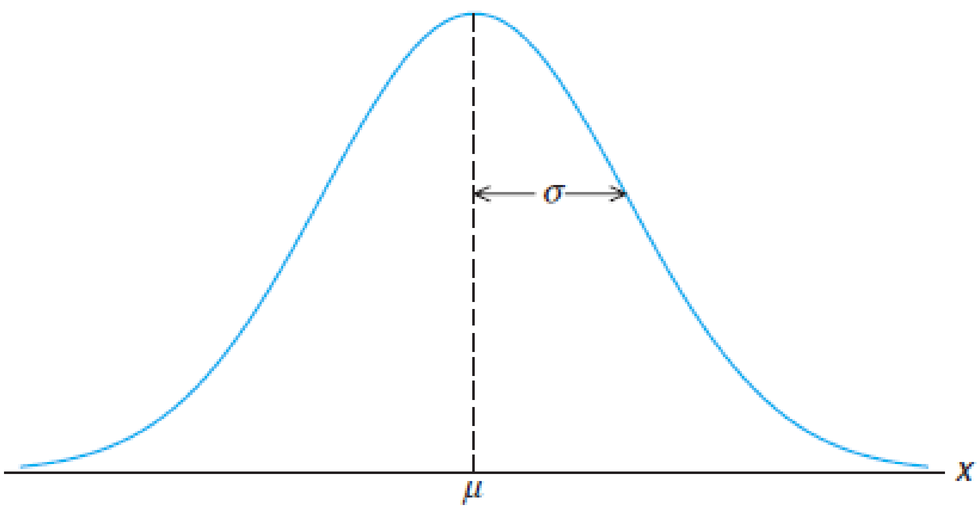


Figura 1 – Curva normal

Distribuição Normal

- A equação matemática para a distribuição de probabilidade da variável normal depende de dois parâmetros, μ e σ, a sua média e desvio padrão, respectivamente.

$$-\infty < x < \infty$$

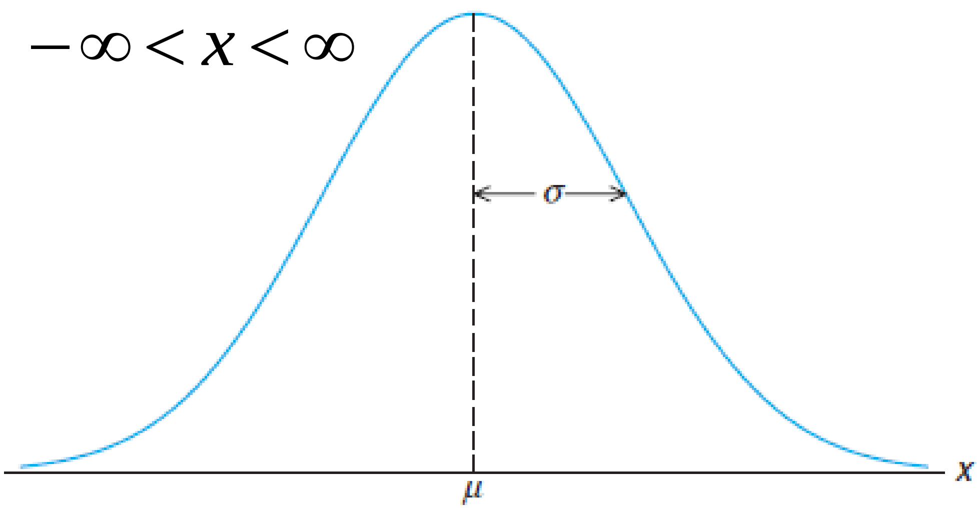


Figura 1 – Curva normal

A densidade da variável aleatória X normal com média μ e variância σ^2, é

$$\boxed{n(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}}$$

onde $\pi = 3.14159\ldots$ e $e = 2.71828\ldots$.

Distribuição Normal

- A equação matemática para a distribuição de probabilidade da variável normal depende de dois parâmetros, μ e σ, a sua média e desvio padrão, respectivamente.

$$-\infty < x < \infty$$

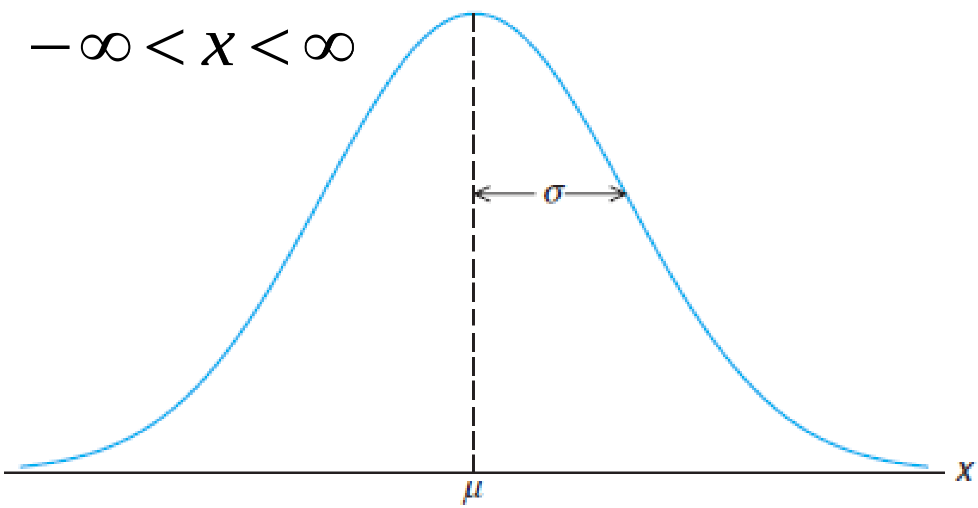


Figura 1 – Curva normal

A densidade da variável aleatória X normal com média μ e variância σ^2, é

$$\boxed{n(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}}$$

onde $\pi = 3.14159\ldots$ e $e = 2.71828\ldots.$

Daí, que denotam os valores da densidade de X por $n\ (x;\ \mu,\ \sigma)$.

Distribuição Normal - Exemplo

- Uma vez que μ e σ são especificados, a curva normal é completamente determinada. Por exemplo, se $\mu = 50$ e $\sigma = 5$, então as coordenadas $n\,(x, 50, 5)$ podem ser calculadas para vários valores de x e a curva traçada.

$$-\infty < x < \infty$$

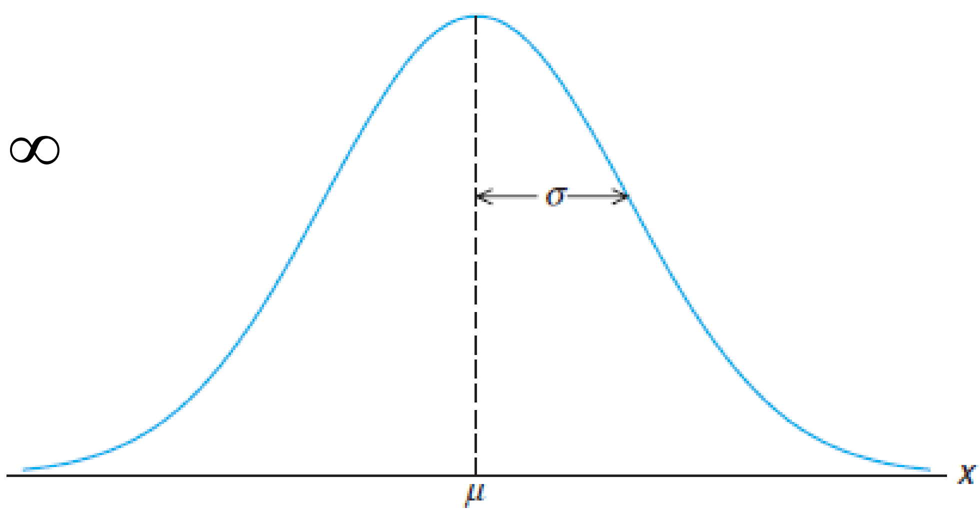


Figura 1 – Curva normal

Tipos de Curvas Normais

- Na Fig. 2, há esboçado duas curvas normais com o mesmo desvio padrão, mas diferentes meios. As duas curvas são idênticas na forma, mas são centradas em diferentes posições ao longo do eixo horizontal.

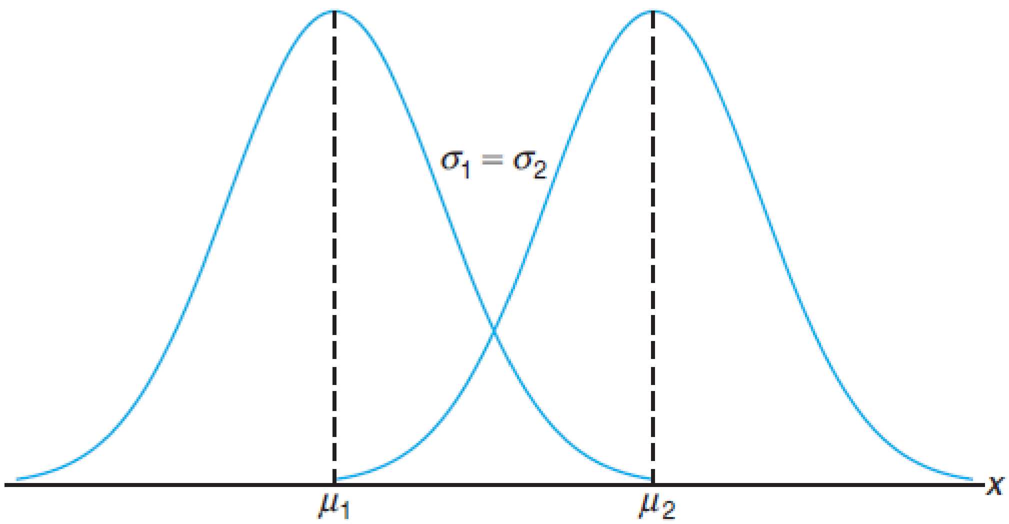


Figura 2 – Curvas Normal com $\mu_1 < \mu_2$ e $\sigma_1 = \sigma_2$.

Tipos de Curvas Normais

- Na Fig. 3, há duas curvas normais com a <u>mesma média, mas diferentes desvios-padrão.</u>

Desta vez, vemos que as duas curvas são centrados exatamente na mesma posição no eixo horizontal, mas a curva com o maior desvio padrão é menor e se espalha mais

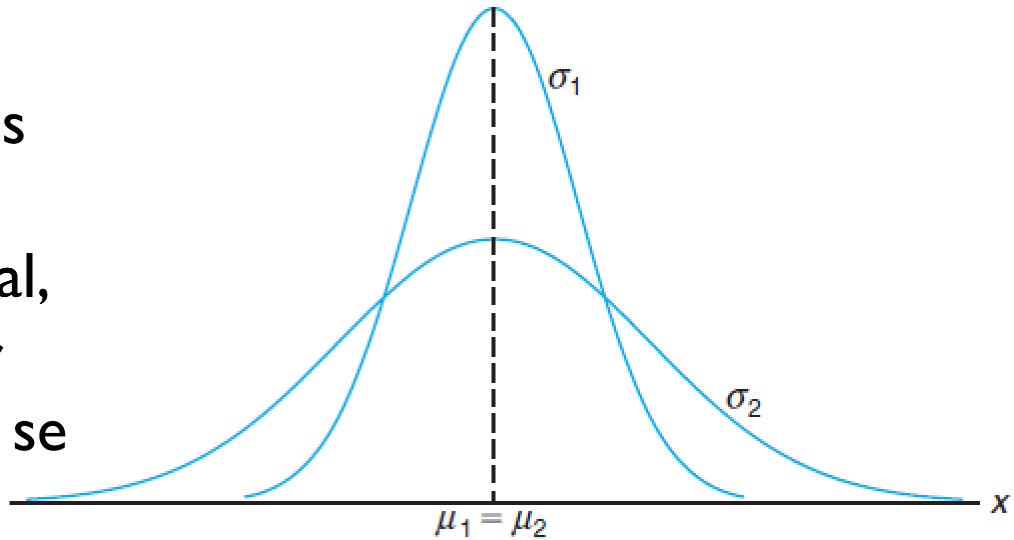


Figura 3 – Curvas Normal com $\mu_1 = \mu_2$ e $\sigma_1 < \sigma_2$.

Lembrar que a área sob a curva de probabilidade deve ser igual a 1, e, portanto, a mais variável do conjunto de observações, será a mais baixa e mais larga da curva correspondente.

Tipos de Curvas Normais

- A Fig. 4 mostra duas curvas normais com diferentes meios e desvios padrão diferentes. Claramente, estão centrados em diferentes posições no eixo horizontal e as suas formas refletem os dois valores diferentes de σ.

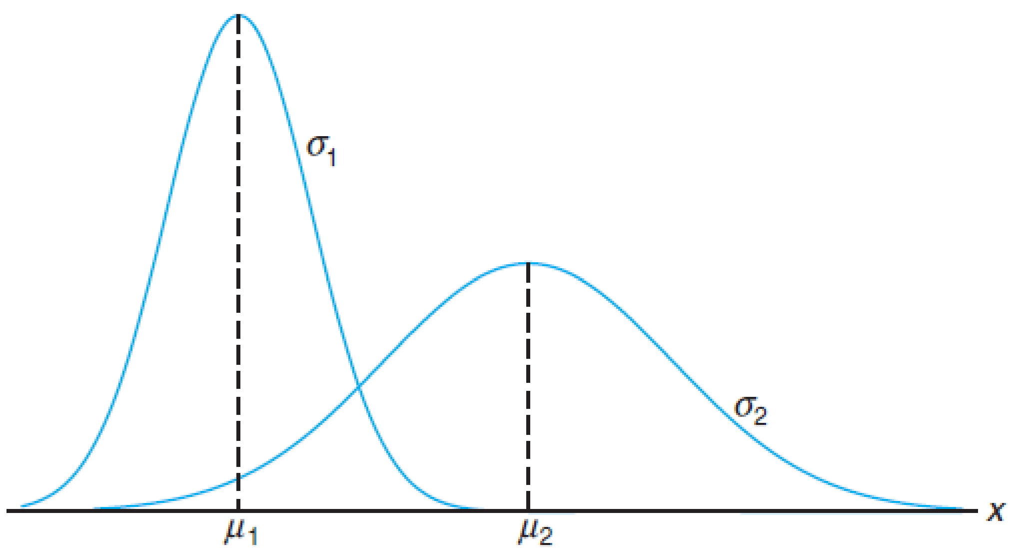


Figura 4 – Curvas Normal com $\mu_1 < \mu_2$ e $\sigma_1 < \sigma_2$.

Propriedades da Curva Normal

- Com base em uma exame das Figuras 1 a 4 e através da análise da primeira e segunda derivadas de $n(x; \mu, \sigma)$, listamos as seguintes propriedades da curva normal:

1. O ponto sobre o eixo horizontal, onde a curva tem um valor máximo, ocorre em $x = \mu$.
2. A curva é simétrica em torno de um eixo vertical que passa pelo meio μ.
3. A curva tem seus pontos de inflexão em $x = \mu \pm \sigma$; é côncava para baixo se μ-$\sigma < X < \mu + \sigma$ e é côncava para cima de outra forma
4. A curva normal se aproxima do eixo horizontal assintoticamente como derivamos em qualquer direção que se afasta a partir da média.
5. A área total sob a curva e acima do eixo horizontal é igual a 1.

Área na Curva Normal

- A curva continua de distribuição de probabilidade ou *função densidade* é construída na área dentro da curva por dois valores x_1 e x_2 para igual probabilidade da variável aleatória X ocorrer :

A área sob a curva entre quaisquer dois valores deverão então também dependem do μ valores e σ.

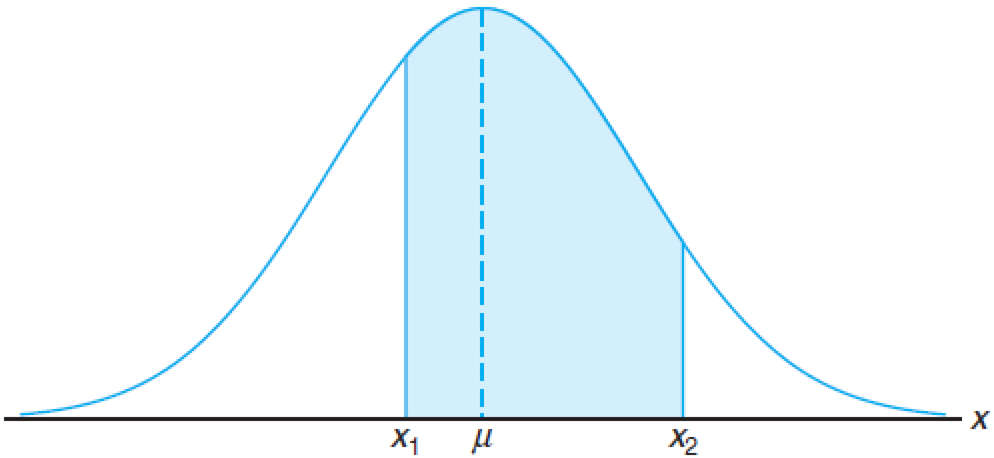


Figura 5 – P($x_1 < X < x_2$) é igual a região pintada.

Cálculo por Tabelas

- A dificuldade em resolver integrais de funções normais de densidade, requer a tabulação das áreas de curva normal para rápida referência.

Pode ser feita a transformação de todas as observações de qualquer variável aleatória X normal, em um novo conjunto de observações de uma variável aleatória Z normal com média 0 e variância 1.

Isto pode ser feito por meio da transformação

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

Integral de área

- Sempre que X assume um valor x, o valor correspondente de Z é dada por $Z = (X - \mu)/\sigma$.
- Portanto, se X cai entre os valores $x = x1$ e $x = x2$, a variável aleatória Z será entre os valores correspondentes a
- $Z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma$ e $Z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$.

Integral de área

- Sempre que X assume um valor x, o valor correspondente de Z é dada por $Z = (X - \mu)/\sigma$.
- Portanto, se X cai entre os valores $x = x1$ e $x = x2$, a variável aleatória Z será entre os valores correspondentes a
- $Z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma$ e $Z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$.
- Consequentemente podemos escrever:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$$

Integral de área

- Sempre que X assume um valor x, o valor correspondente de Z é dada por $Z = (X - \mu)/\sigma$.
- Portanto, se X cai entre os valores $x = x1$ e $x = x2$, a variável aleatória Z será entre os valores correspondentes a
- $Z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma$ e $Z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$.
- Consequentemente podemos escrever:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Integral de área

- Sempre que X assume um valor x, o valor correspondente de Z é dada por $Z = (X - \mu)/\sigma$.
- Portanto, se X cai entre os valores $x = x1$ e $x = x2$, a variável aleatória Z será entre os valores correspondentes a
- $Z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma$ e $Z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$.
- Consequentemente podemos escrever:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} n(z;0,1) dz = P(z_1 < Z < z_2)$$

A Distribuição Normal Transfomada

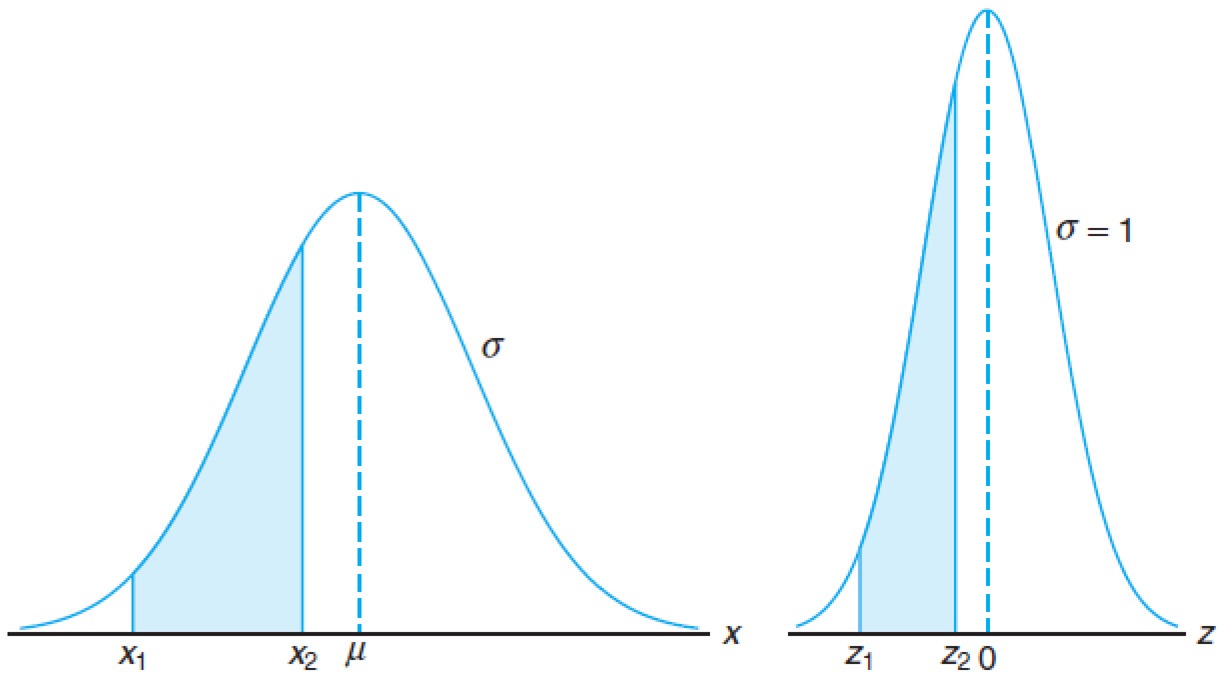


Figura 6 – a original e a distribuição normal transformada.

Tabela – Área dentro da Curva Normal

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Uso da Tabela

- Para ilustrar o uso desta tabela, vamos descobrir a probabilidade de que Z é menor a $1{,}74$, ou seja, $P(Z<1{,}74)$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599

$$P(Z<1{,}74)=0{,}9591$$

Exemplo 1:

- Dada uma distribuição normal padrão, encontre a área da curva que:
- a) encontra-se a direita de $Z = 1{,}84$
- b) está entre $Z = -1{,}97 \quad e \quad Z = 0{,}86$.

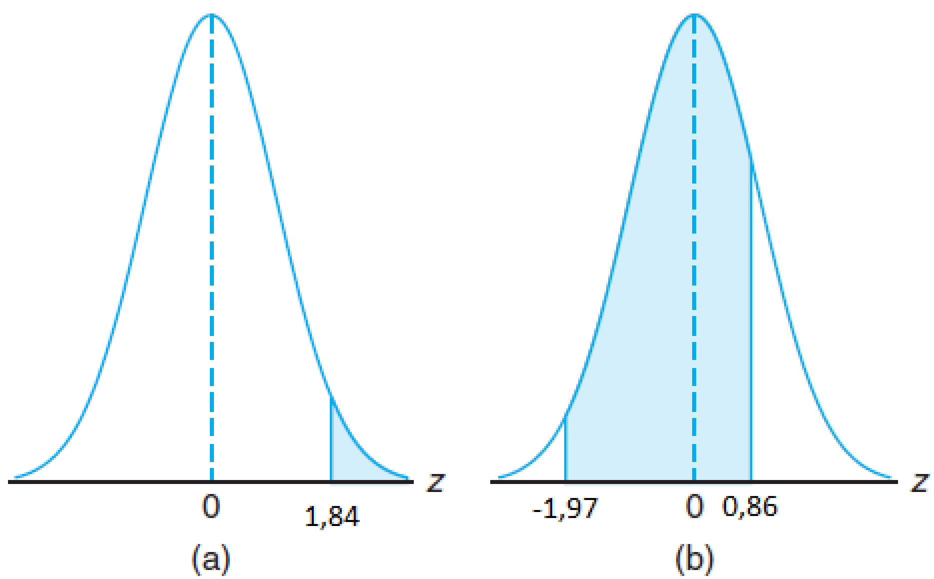
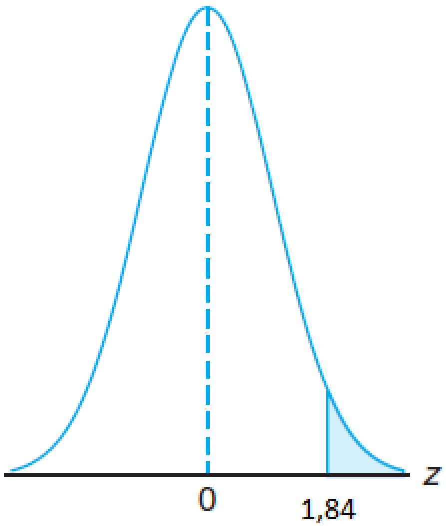


Figura 7: Área do exemplo 1.

Solução:

- Dada uma distribuição normal padrão, encontre a área da curva que:
- a) encontra-se a direita de $Z = 1{,}84$

z	.00	.01	.02	.03	.04
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738



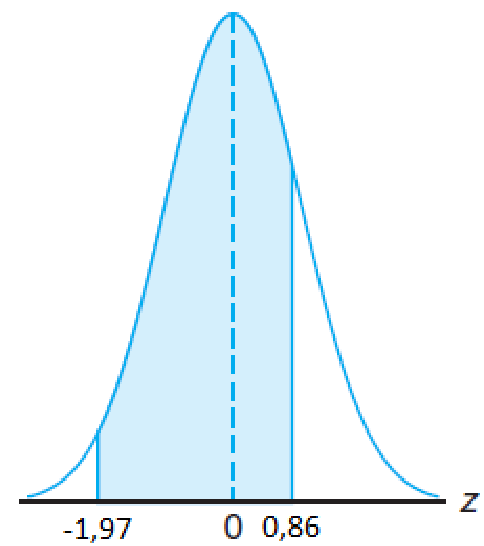
(a)

$$P(Z > 1{,}84) = 1 - 0{,}9671$$
$$P(Z > 1{,}84) = 0{,}0329$$

Exemplo1:

- Dada uma distribuição normal padrão, encontre a área da curva que:
- b) está entre $Z = -1{,}97 \quad e \quad Z = 0{,}86$.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340



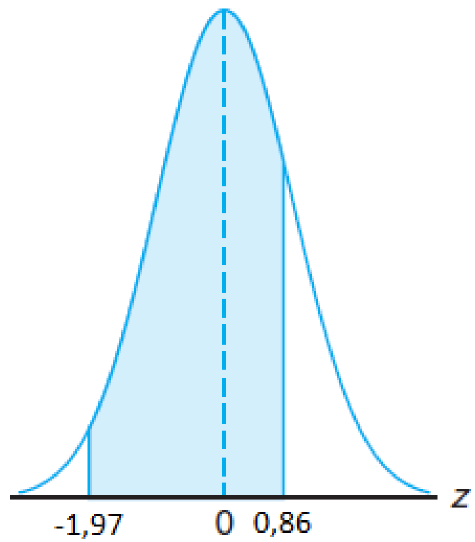
(b)

$$P(-1{,}97 < Z < 0{,}86) = 0{,}8051 - ??$$

Exemplo 1:

- Dada uma distribuição normal padrão, encontre a área da curva que:
- b) está entre $Z = -1{,}97 \quad e \quad Z = 0{,}86$.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812



(b)

$$P(-1{,}97 < Z < 0{,}86) = 0{,}8051 - 0{,}0244$$

$$P(-1{,}97 < Z < 0{,}86) = 0{,}7807$$

Exemplo 2

- Dada uma distribuição normal padrão, encontre o valor de k de forma que:
- a) $P(Z > k) = 0{,}3015$ e
- b) $P(k < Z < -0{,}18) = 0{,}4197$

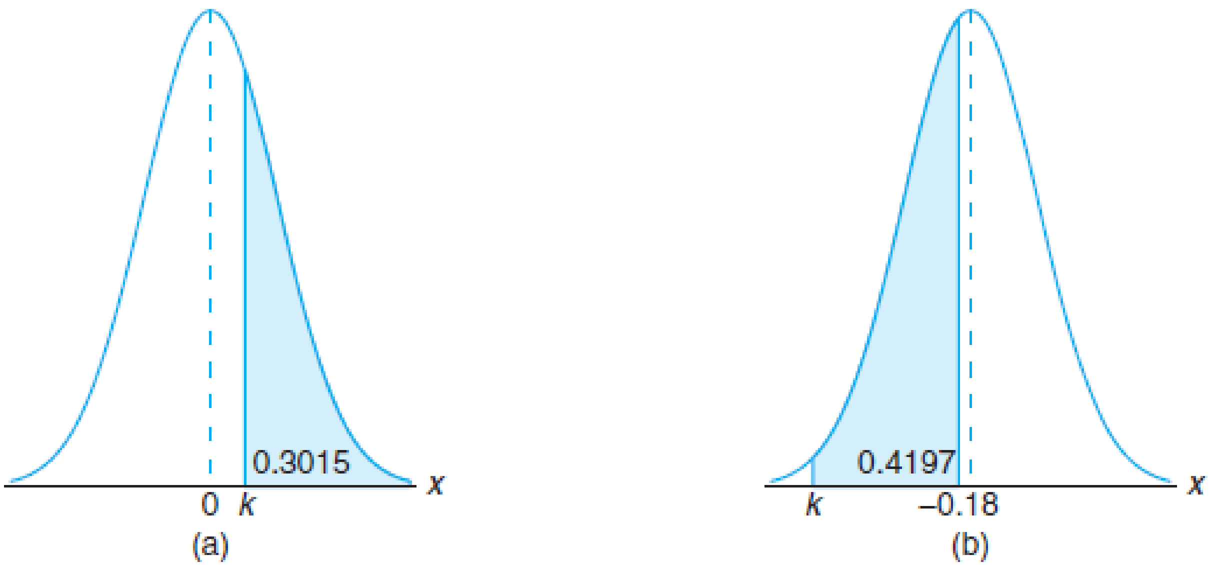
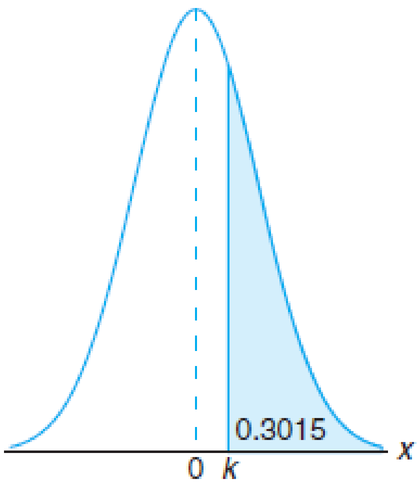


Figura 8: Área do exemplo 2.

Exemplo 2

- Dada uma distribuição normal padrão, encontre o valor de k de forma que:
- a) $P(Z > k) = 0{,}3015$ e

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289



(a)

$$k = 0{,}52$$

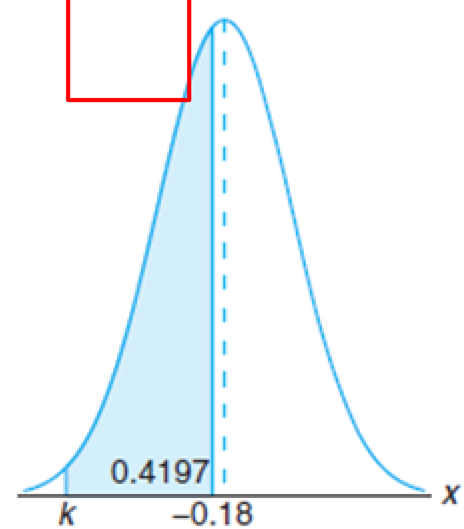
Para a esquerda a área será 0,6985. Buscando na Tabela

Exemplo 2

- Dada uma distribuição normal padrão, encontre o valor de k de forma que:
- b) $P(k < Z < -0{,}18) = 0{,}4197$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141

A área de -0,18 é 1-0,5714 =0,4286.
Então subtraindo 0,4286-0,4197=0,0089.
Para poder utilizar a tabela novamente no lado invertido 1-0,0089= 0,9911

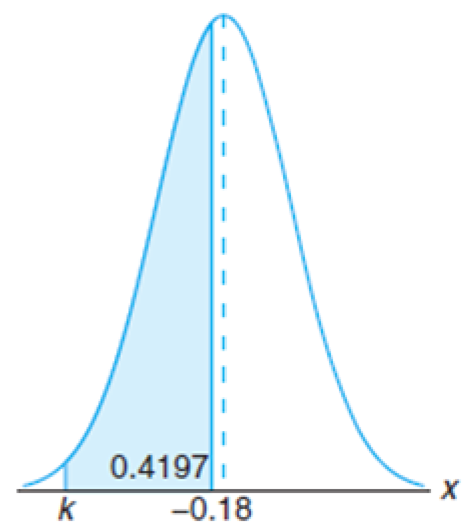


(b)

Exemplo 2

- b) $P(k < Z < -0{,}18) = 0{,}4197$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934



(b)

A Para poder utilizar a tabela novamente no lado invertido 1-0,0089= 0,9911 que informa k= -2,37

Exemplo 3:

- Dada uma variável randomica X e uma distribuição normal com $\mu = 50$ *and* $\sigma = 10$, *encontre a probabilidade de* X *assumir valores entre 45* e *62.*
- *Solução: Os valores correspondentes a z são encontrados pela transformação:*

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

Exemplo 3:

- Dada uma variável randomica X e uma distribuição normal com *$\mu = 50$ and $\sigma = 10$, encontre a probabilidade de X assumir valores entre 45* e *62.*
- *Solução: Os valores correspondentes a z são encontrados pela transformação:*

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

- *Aplicando:*
- $Z_1 = \dfrac{45 - 50}{10}$ e $Z_2 = \dfrac{62 - 50}{10}$

Exemplo 3:

- Dada uma variável randomica X e uma distribuição normal com *$\mu = 50$ and $\sigma = 10$, encontre a probabilidade de X assumir valores entre 45* e *62.*
- *Solução: Os valores correspondentes a z são encontrados pela transformação:*

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

- *Aplicando:*

$$Z_1 = \frac{45 - 50}{10} \qquad Z_2 = \frac{62 - 50}{10}$$

$$Z_1 = \frac{-5}{10} \qquad Z_2 = \frac{12}{10}$$

Exemplo 3:

- Dada uma variável randomica X e uma distribuição normal com *$\mu = 50$ and $\sigma = 10$, encontre a probabilidade de X assumir valores entre 45* e *62.*
- *Solução: Os valores correspondentes a z são encontrados pela transformação:*

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

- *Aplicando:*

$$Z_1 = \frac{45 - 50}{10}$$

$$Z_1 = \frac{-5}{10}$$

$$\boxed{Z_1 = -0{,}5}$$

$$Z_2 = \frac{62 - 50}{10}$$

$$Z_2 = \frac{12}{10}$$

$$\boxed{Z_2 = 1{,}2}$$

Exemplo 3

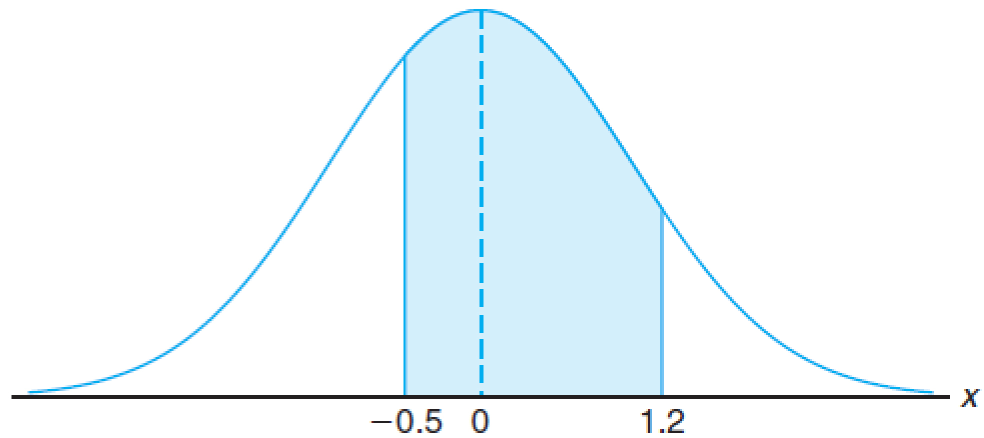


Figura 9 : Área do exemplo 3

Portanto, $P(45 < X < 62) = P(-0,5 < Z < 1,2)$.

$P(-0,5 < Z < 1,2)$ *é mostrado pela área da região pintada, ou seja,*
$P(45 < X < 62) = P(-0,5 < Z < 1,2) = P(Z < 1,2) - P(Z < -0,5)$

Exemplo 3

$$P(45 < X < 62) = P(-0{,}5 < Z < 1{,}2)$$
$$= P(Z < 1{,}2) - P(Z < -0{,}5)$$
$$= ????? \quad - \quad (1 - P(Z < 0{,}5))$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599

Exemplo 3

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599

$$
\begin{aligned}
P(45 < X < 62) &= P(-0{,}5 < Z < 1{,}2) \\
&= P(Z < 1{,}2) - P(Z < -0{,}5) \\
&= 0{,}8849 \quad - \quad (1 - P(Z < 0{,}5)) \\
&= 0{,}8849 \quad - \quad (1 - \;?????) \\
&=
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599

$$
\begin{aligned}
P(45 < X < 62) &= P(-0{,}5 < Z < 1{,}2) \\
&= P(Z < 1{,}2) - P(Z < -0{,}5) \\
&= 0{,}8849 - (1 - P(Z < 0{,}5)) \\
&= 0{,}8849 - (1 - 0{,}6915) \\
&= 0{,}8849 - 0{,}3085
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599

$$
\begin{aligned}
P(45 < X < 62) &= P(-0{,}5 < Z < 1{,}2) \\
&= P(Z < 1{,}2) - P(Z < -0{,}5) \\
&= 0{,}8849 - (1 - P(Z < 0{,}5)) \\
&= 0{,}8849 - (1 - 0{,}6915) \\
&= 0{,}8849 - 0{,}3085 \\
&= 0{,}5764
\end{aligned}
$$

Exemplo 4:

- Dado que X tem um distribuição normal com $\mu = 300$ e $\sigma = 50$, encontre a probabilidade que X assume valores maior que 362.

$$Z = \frac{362 - 300}{50} = 1{,}24$$

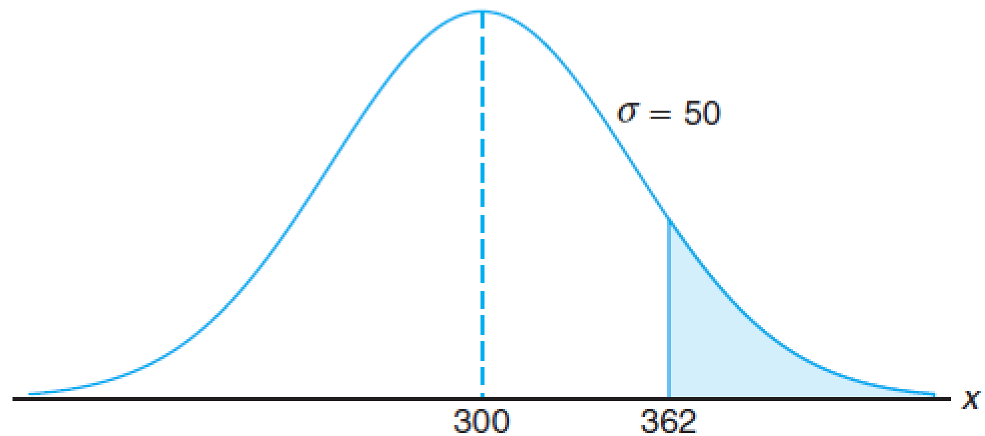


Figura 10 : Área do exemplo 4

Usando a curva normal na reversa

- Da transformação $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ obtém-se:

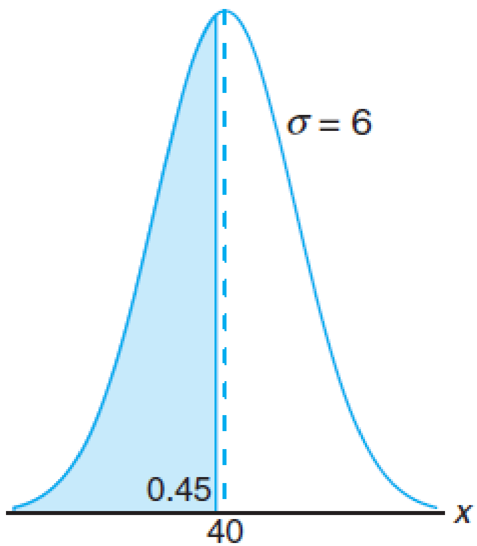
$$\boxed{x = \sigma \cdot Z + \mu}$$

Usando a curva normal na reversa

- Da transformação $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ obtém-se:

$$\boxed{x = \sigma \cdot Z + \mu}$$

- Exemplo: Dada uma distribuição normal com $\mu = 40$ e $\sigma = 6$, encontre o valor de x que tem
- a) 45% de sua área para a esquerda



(a)

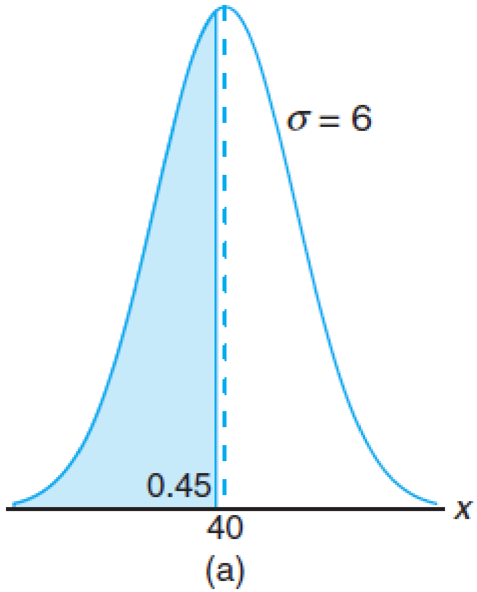
Usando a curva normal na reversa

- Da transformação $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ obtém-se:

$$\boxed{x = \sigma \cdot Z + \mu}$$

- Exemplo: Dada uma distribuição normal com $\mu = 40$ e $\sigma = 6$, encontre o valor de x que tem
- a) 45% de sua área para a esquerda

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289



Usando a curva normal na reversa

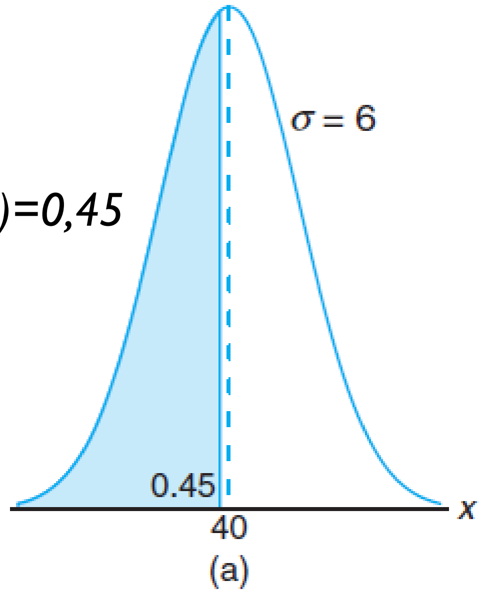
- Da transformação $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ obtém-se:

$$\boxed{x = \sigma \cdot Z + \mu}$$

- Exemplo: Dada uma distribuição normal com $\mu = 40$ e $\sigma = 6$, encontre o valor de x que tem
- a) 45% de sua área para a esquerda

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289

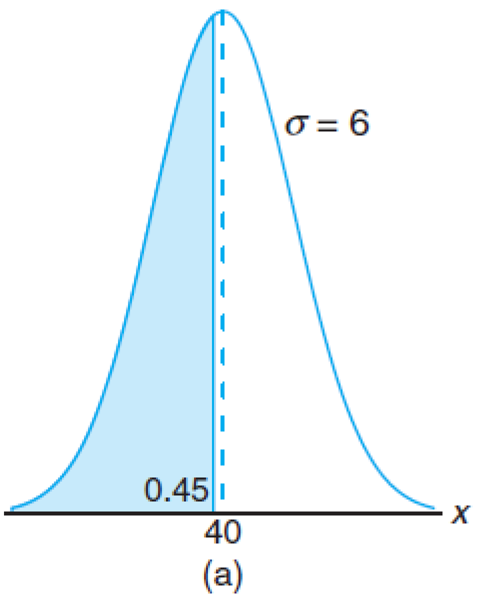
P(Z < -0,13)=0,45



Usando a curva normal na reversa

$$x = \sigma \cdot Z + \mu$$

$$x = 6 \cdot (-0{,}13) + 40$$

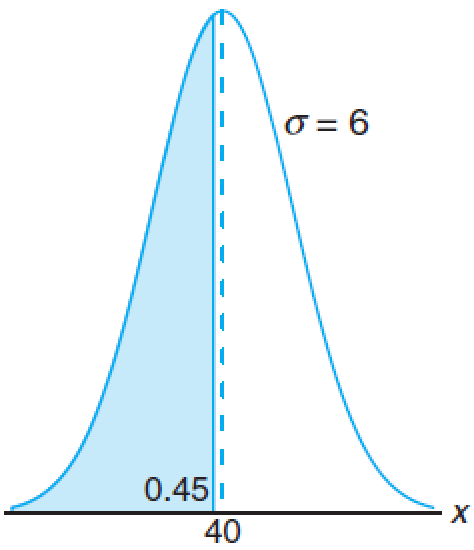


Usando a curva normal na reversa

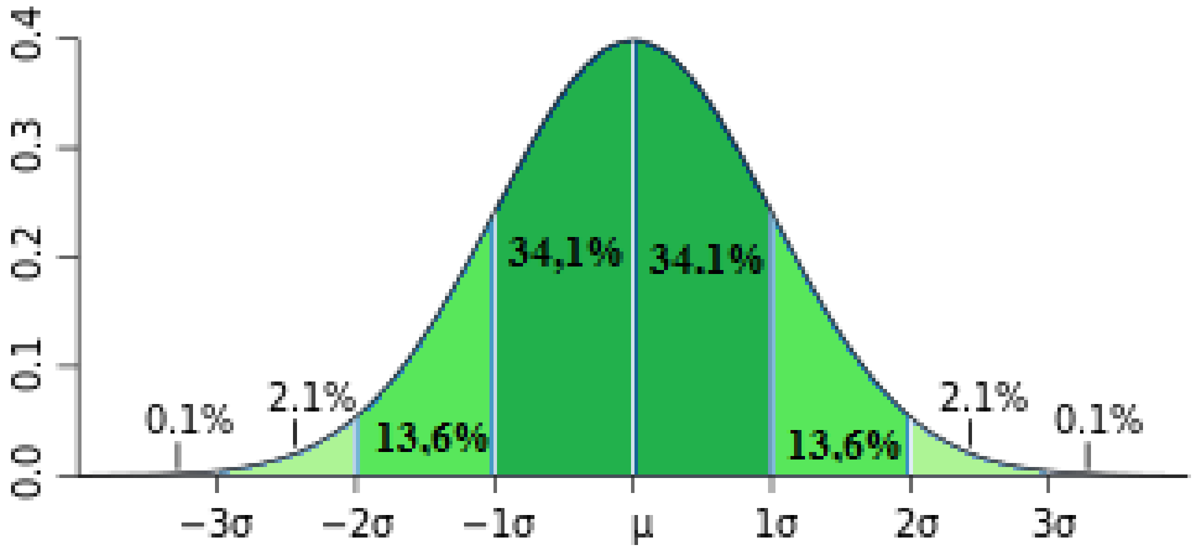
$$x = \sigma \cdot Z + \mu$$

$$x = 6 \cdot (-0{,}13) + 40$$

$$x = -0{,}78 + 40 = 39{,}22$$



(a)



A área em verde escuro está a menos de um desvio padrão(σ) da média. Em uma **distribuição normal**, isto representa cerca de 68% do conjunto, enquanto dois desvios padrões desde a média (verde médio e escuro) representam cerca de 95%, e três desvios padrões (verde claro, médio e escuro) cobrem cerca de 99.7%. Este fato é conhecido como *regra 68-95-99.7*, ou a *regra empírica*, ou a *regra dos 3-sigmas*.

Referência Bibliográfica

- Walpole, Ronald E *et al*. **Probability & statistics for engineers & scientists/Ronald E. Walpole . . . *[et al.]*** — *9th. Ed.* ISBN 978-0-321-62911-1.*Boston-USA/2011.*