Cálculo I

Introdução ao Cálculo e aplicações em Ciências Ambientais

Prof. Herondino

Universidade Federal do Amapá

13 de agosto de 2024

Introdução ao cálculo

Nas ciências os dados aparecem em uma variedade de formas. Contudo elas podem ser apreciadas em duas principais categorias: Dados quantitativos ou qualitativos.

Um dado quantitativo é lembrado como uma medida (ou parâmetro). Essa medida de representação de dados independente, é associada por meio da sua relação entre si (dependência).

A relação é uma correspondencia (ou associação) entre dois conjuntos não vazios. Geralmente tem a sua relação definida, isto é, dada por alguma condição. Segue exemplo na Figura 1.

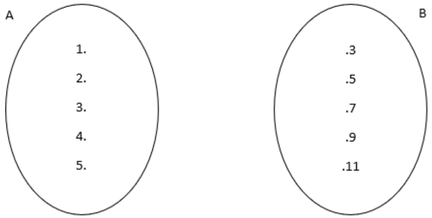

Figura 1: Relação entre os conjuntos A e B

Definições

A relação formalmente é definida no conjunto dos $\mathbb{R}$ (reais) de pares ordenados (a, b) talque a pertença ao conjunto A e b pertença ao conjunto B, ou seja: $AxB = \{(a, b)|a \in A \wedge b \in B\}$

Uma relação $f(x)$ é uma função de A em B, se e somente se, forem respeitadas as seguintes condições: todos os elementos de A possua alguma relação em B e esta seja única.
Desta forma, uma função é uma relação entre duas variáveis, onde cada valor da variável independente (entrada) está associado a um único valor da variável dependente (saída).

Obs: Toda Função é uma relação, contudo, nem toda relação é uma função.

A função linear (relação linear) é uma das mais comuns usada na ciência. Sua expressão é dada por:

$$f(x) = a \cdot x + b \tag{1}$$

onde a e b são coeficientes angular (inclinação da reta) e termo independente (intercepta o eixo y), respectivamente.

Exemplo 01: $f(x) = 2 \cdot x$

Um exemplo práticos está na relação entre a temperatura em Celsis (C) e Fahrenheit (F), a função horária do movimento uniforme e da velocidade.

$F = 1,8 \cdot C + 32$

$S = S_0 + v \cdot t$

$V = V + a \cdot t$

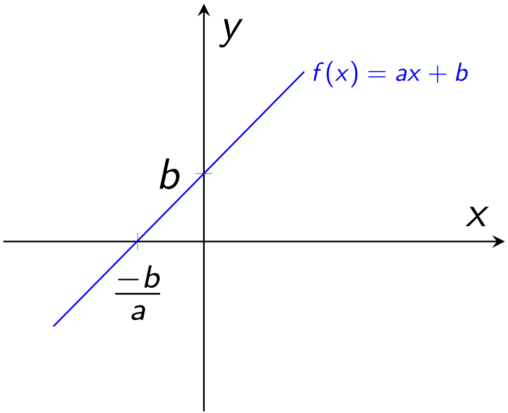

Figura 2: Função afim

- Função Quadrática
  A função quadrática é definida $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{2}$$

  onde a, b e $c \in \mathbb{R}$. Também é denominda função do 2° grau.
  Exemplo: $f(x) = x^2$ e $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

- Função Exponencial
  Definida de $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ conforme a expressão:

$$f(x) = a^x \tag{3}$$

  Será crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.
  Exemplos: a) $f(x) = 2^x$ e b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Definição de Modelos Matemáticos: Explicar como modelos matemáticos são utilizados para representar e analisar fenômenos reais.

Exemplos Práticos:

- Função Linear: Modelagem de poluição em um rio, onde a concentração de um poluente é uma função linear da distância de uma fonte
- Função Exponencial: Crescimento de populações de espécies invasoras e sua dispersão em novos ambientes.
- Função Logarítmica: Avaliação do impacto de substâncias tóxicas, onde a resposta biológica é proporcional ao logaritmo da dose.
- Discussão sobre a Importância dos Modelos: Como esses modelos ajudam a prever tendências, tomar decisões informadas e desenvolver estratégias de mitigação em contextos ambientais.

Exemplos

- A ponte da rodovia Duca Serra tem juntas de expanção, que são aberturas no asfalto. Essa Ponte tem uma abertura de 1,4cm quando a temperatura é de 22°C e a abertura se estreita a 1cm quando a temperatura sobe a 30°C. Considera-se que a largura de abertura varia linearmente com a temperatura. Calcular a temperatura que poderia fechar a abertura.
- Solução:

```
temp<-c(22,30)
abert<-c(1.4,1.0)
plot(temp,abert,col="red")
lm(abert~temp)
abline(2.5,-0.05)
text(1.2,28,expression("y=-0.05x+2.5"),col="red",cex=1.0)
```

Limites

Para a definição de derivada é importante o entendimento do conceito de limite.

Formalmente o limite é definido por:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \tag{4}$$

Para todo ε maior que zero, existe um número (δ) tal que

pertence ao intervalo aberto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ então $f(x)$

pertence ao intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, isto é,

$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta(\varepsilon) / x \neq x_0 \; e \; x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

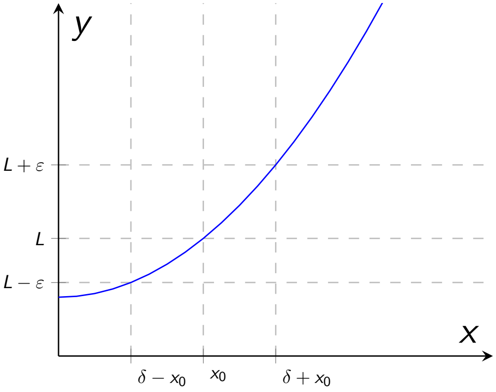

Figura 3: Limite

Derivadas

A derivada é definida por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{5}$$

ou ainda quando

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{6}$$

O diferencial dy da função $y = f(x)$ é definido pela fórmula:

$$dy = f'(x)\Delta x \tag{7}$$

Também Δx pode ser substituido por dx desta maneira temos:

$$dy = f'(x)dx \; ou \; \frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{8}$$

Gráfico dy/dx

A derivada pode ser interpretada geometricamente como sendo a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto (x, y) considerado.

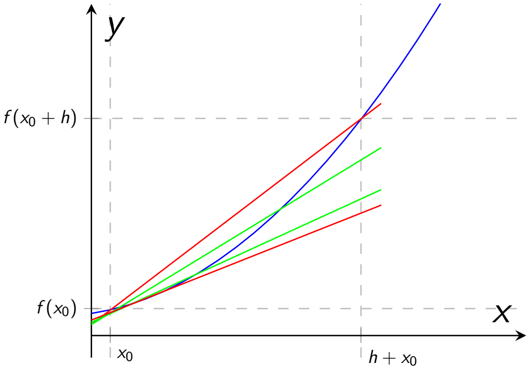

Figura 4: Função em azul e sua derivada em vermelho

n

Regras de Derivadas

A derivada de uma uma função constante tem inclinação 0, portanto deve ter $f'(x) = 0$, ou seja:

$$f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0 \tag{9}$$

Nas sequências das funções de potência $f(x) = x^n$, quando $n = 1$ o gráfico $f(x) = x$ é uma reta, que possui inclinação 1. desta forma:

$$f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1 \tag{10}$$

Outros exemplos a) $f(x) = x^2$; b) $f(x) = x^3$; c) $f(x) = x^4$; $f(x) = x^{-3}$

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \tag{11}$$

Regras básicas

Se c é uma constante e f uma função derivável, então

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \tag{12}$$

Exemplo: $f(x) = 3x^4$

Se f e g são derivaveis, então

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \tag{13}$$

Exemplos:

(a) $f(x) = x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5$

(b) A equação de movimento de uma partícula é dada por $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, em que s é medido em centímetros e t em segundos. Encontre a aceleração do movimento em função do tempo. Qual a aceleração depois de 2 segundos?

Regra do Produto e do Quociente

Se f e g são deriváveis, então

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x) \qquad (14)$$

Exemplo: Sendo $f(x) = 3x^2 - x$ e $g(x) = 2x - 1$, encontre o produto a derivada do produto, isto é, $(f(x) \cdot g(x))'$
Se f e g são deriváveis, então

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x)\dot{g}(x)'}{g(x)^2} \qquad (15)$$

Exemplo: Seja $f(x) = 1 + x^2$ e $g(x) = e^x$, encontre a derivada do quociente $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$

Tangentes e Normais

- Se a função $f(x)$ possui uma derivada $f'(x)$ no ponto $x = x_0$, a curva $y = f(x)$ tem uma tangente no ponto $P_0(x_0, y_0)$, cujo coeficiente angular é $m = \tan\theta = f'(x)$.
- Se $m = 0$ a tangente é horizontal.
- Se $f(x)$ é contínua em $x = x_0$ contudo o $\lim_{x\to 0} f'(x) = \infty$, a curva tem tangente vertical no ponto $P_0(x_0, y_0)$. A equação da tangente vertical é $x = x_0$.
- A equação da tangente (inclinada) à curva $f(x)$ no ponto $P_0(x_0, y_0)$ é definida por $m = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ou ainda $y - y_0 = m(x - x_0)$.
- Como o coeficente angular da normal é o inverso da tangente com o sinal trocado, a equação da normal é $y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$.

Exemplos:

a) Determinar a equação da reta tangente a curva com função definida por $f(x) = x^2 - 3x$, no ponto $(1, -2)$.

b) Determinar a equação normal da reta a curva dada pela função $f(x) = \frac{4}{x}, x > 0$, no ponto $(2, 2)$

b) Encontre os pontos na curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ onde a reta tangente é horizontal. Definição: Un número crítico de uma função f é um número c no domínio de f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existem.

c) Encontre as equações da reta tangente e reta normal a curva $y = x\sqrt{x}$ no ponto $(1, 1)$. Construa o grafico da curva e retas.

d) Achar as equações da tangente e normal à curva $y = x^3 - 2x^2 + 4$ no ponto $(2, 4)$.

Bibliografia

- Stewart, James (2010). Single variable calculus: concepts and contexts. Australia/ United States. 4 th ed. ISBN: 978-0-495-55972-6.
- Kaplan, Wilfred (1915). Cálculo Avançado;coordenação, Elza Gomide; tradução Tsu. São Paulo. Edgard Blücher (1972)/9ª reimpressão 1998.
- Frank Ayres, JR (1963). Cálculo Diferencial e Integral. Rio de Janeiro. Traduzido por José R. C., Ao Livro Técnico SA.
- Leithold, Louis and Leithold, Louis (1996).The calculus 7. HarperCollins: College Publishing. New York. ISBN :978-0-673-46913-7