UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

ADEMILTON BARRETO FACUNDES

FABIO GEAN CARDOSO REGO

# UM ESTUDO SOBRE MÁXIMO, MÍNIMO, PONTOS DE SELA E EXTREMOS CONDICIONADOS DE FUNÇÕES DE DUAS E TRÊS VARIÁVEIS COM O AUXÍLIO DO *SOFTWARE MATHEMATICA - WOLFRAM*

Macapá-AP, 2016

ADEMILTON BARRETO FACUNDES

FABIO GEAN CARDOSO REGO

# UM ESTUDO SOBRE MÁXIMO, MÍNIMO, PONTOS DE SELA E EXTREMOS CONDICIONADOS DE FUNÇÕES DE DUAS E TRÊS VARIÁVEIS COM O AUXÍLIO DO ***SOFTWARE MATHEMATICA - WOLFRAM***

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para a integralização do curso e obtenção do grau de Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Prof. Espec. João Socorro Pinheiro Ferreira.

Macapá-AP, 2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

512.5
F143e Facundes, Ademilton Barreto.

Um estudo sobre máximo, mínimo, pontos de sela e extremos condicionados de funções de duas e três variáveis com o auxílio do software Mathematica-Wolfram / Ademilton Barreto Facundes, Fábio Gean Cardoso Rêgo; orientador, João Socorro Pinheiro Ferreira. -- Macapá, 2016.
80 p.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Polinômio. 2. Lagrange – Funções de. I. Rêgo, Fábio Gean Cardoso. II. Ferreira, João Socorro Pinheiro, orientador. III. Fundação Universidade Federal do Amapá. IV Título.

ADEMILTON BARRETO FACUNDES
FABIO GEAN CARDOSO REGO

# UM ESTUDO SOBRE MÁXIMO, MÍNIMO, PONTOS DE SELA E EXTREMOS CONDICIONADOS DE FUNÇÕES DE DUAS E TRÊS VARIÁVEIS COM O AUXÍLIO DO *SOFTWARE MATHEMATICA - WOLFRAM*

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado e aprovado pela banca avaliadora do Colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, composta pelos integrantes abaixo relacionados:

João Socorro Pinheiro Ferreira
___________________________________________
Orientador: Prof. Espec. João Socorro Pinheiro Ferreira - UNIFAP

Edivaldo P. Santos
___________________________________________
Membro: Prof. Me. Edivaldo Pinto dos Santos - UNIFAP

Sérgio Barbosa de Miranda
___________________________________________
Membro: Prof. Me. Sérgio Barbosa de Miranda - UNIFAP

Macapá-AP, 30 de maio de 2016

Eu, Ademilton Barreto, dedico este trabalho aos meus pais Antônio Facundes e Conceição Facundes, pelo esforço, dedicação e compreensão em todos os momentos desta caminhada, em que com a graça de Deus está sendo vencida. A minha namorada Valéria Priscilla, que sempre esteve comigo me estimulando e encorajando. E a todosos meus amigos que direta e indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Eu, Fabio Rego, dedico este trabalho às pessoas mais importantes da minha vida: meus pais, Francisco e Enilba, meus irmãos e a minha namorada Cleliane, que confiaram no meu potencial para esta conquista. Não conquistaria nada se não estivessem ao meu lado. Obrigado, por estarem sempre presentes em todos os momentos, me dando carinho, apoio, incentivo, determinação, fé, e principalmente pelo amor de vocês.

# AGRADECIMENTO

Agradecemos primeirmente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de nossas vidas, e não somente como universitários, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer. À Universidade Federal do Amapá, pela oportunidade de fazermos o curso de Licenciatura em Matemática.

À todo corpo docente do colegiado.

Ao professor João Socorro Pinheiro Ferreira, pela orientação e apoio na elaboração deste trabalho.

Aos nossos familiares e amigos, pelo carinho, incentivo e apoio incondicional.

A todos que direta e indiretamente fizeram parte da nossa formação, o nosso muito obrigado!.

Aos professores Sérgio Barbosa de Miranda e Edivaldo Pinto dos Santos por terem aceitado o nosso convite para participarem da banca e pea grande contribuição durante o curso.

Não fui eu que ordenei a você? Seja forte e corajoso! Não se apavore nem desanime, pois o Senhor, o seu Deus, estará com você por onde você andar.

(Bíblia Sagrada - Josué 1:9)

# RESUMO

Esta monografia abordou o estudo de extremos locais de funções de duas e três variáveis independentes, partindo-se de definições de funções de duas variáveis para então expandirmos suas definições para funções de três variáveis. Durante o nosso trabalho juntamos todos os conhecimentos que foram necessários para o estudo de máximos e mínimos locais. Este estudo se baseia no fato de que nos pontos extremos, as primeiras derivadas parciais são nulas, ou seja, pontos críticos. Para a classificação da natureza dos pontos foram utilizados alguns métodos que permitiram determinar se os pontos eram máximos, mínimos ou sela. Utilizamos o polinômio de Taylor para aproximar a funçao ao redor dos pontos, bem como, encontrar seus pontos de máximos e mínimos. Nos extremos de funções que apresentaram restrições foi utilizado o método de multiplicadores de Lagrange. Utilizamos tambem o software Wolfram para a construção dos gráficos 3D, curva de nível, superficíe de nível e vetor gradiente durante o trabalho. E por fim, fizemos uma aplicação ao final de cada capítulo.

**Palavras-chaves:** Extremos. Pontos críticos. Polinômio. Lagrange.

# ABSTRACT

This paper discusses the study of extreme locations on two and three independent variables functions, starting then two variables function definitions to expand your settings for functions of three variables. During our work we gathered all the knowledge that was necessary for the study of local maximum and minimum. This study is based on the fact that the extreme points, the first partial derivatives are zero, i.e., critical points. For the classification of the nature of the points were used some methods that could determine if the points were maximum, minimum or saddle. We use the Taylor polynomial to approximate the function around the points, as well as find their points of maximum and minimum. At the extremes of functions we presented restrictions was used Lagrange multiplier method. Also we use Wolfram software for building 3D graphics, contour, level surface and gradient vector at work. Finally, we made an application to the end of each chapter.

**Keywords:** Extremes. Critical points. Polynomial. Lagrange.

# LISTA DE FIGURAS

# Sumário

# INTRODUÇÃO

Este trabalho trata de um estudo de funções de duas e três variáveis independentes, que será aplicado em problemas que envolvem máximos e mínimos condicionados e não condicionados, sendo que será indispensável, importantes teoremas, como por exemplo do determinante de menor principal e dos autovalores da hessiana, e definições que darão suporte necessário durante todo o trabalho.
A construção dos gráficos são de extrema importância para compreendermos o comportamento das funções, para isso usaremos como auxílio o *Software Wolfram Mathematica*, sendo que estamos utilizando a licença do orientador, cedida pela UNICAMP. A primeira versão desse *software* foi lançada em 1988 por um jovem físico teórico, Stephen Wolfram, depois de um ano da fundação da *Wolfram Research Inc.*A grande construção do *Mathematica* para a computação reside na descoberta de uma linguagem computacional capaz de pela primeira vez, manipular uma grande variedade de objetos utilizando somente um conjunto básico de instrução. A primeira grande utilidade era nas ciências físicas, engenharia e matemática. Evoluindo sempre hoje é uma ferramenta útil nas áreas de ciências biológicas, sociais, econômica e finanças. Além de uma sólida base de usuários nas áreas técnicas é também muito utilizado pelos professores de matemática do ensino básico e universitário[10].
Muitos foram os matemáticos que auxiliaram no desenvolvimento do Cálculo, porém, para o nosso trabalho as mais significativas contribuições vieram de Fermat, Otto Hesse, Taylor, Lagrange e Laplace, motivo este que nos levou a tê-los como condutores deste trabalho.
No primeiro capítulo, faremos um estudo sobre funções de duas variáveis independentes e no segundo capítulo o estudo será restrito à funções de três variáveis independentes. Este trabalho tem como o objetivo determinar os pontos críticos de uma função polinomial e classificar a sua natureza através do Teste da segunda derivada e o Determinante de menor principal.
Quando uma função tem mais de duas variáveis, os pontos de máximos e mínimos não são tão simples de localizá-los, por isso o estudo realizado também tem como objetivo encontrar estes pontos através do polinômio de Taylor. Para encontrar os valores extremos de uma função com restrição utilizaremos os multiplicadores de lagrange e por último faremos uma aplicação ao final de cada capítulo.

# Capítulo 1

# FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Neste capítulo estudaremos alguns conceitos preliminares, tais como pontos críticos, curvas de nível, matriz hessiana, polinômio de Taylor e multiplicadores de Lagrange, para funções de duas variáveis independentes.
A seguir definiremos função de duas variáveis independentes.

## 1.1 Algumas definições

**Definição 1.1.1** *Uma função de duas variáveis reais é uma lei que associa um único par ordenado $(x, y)$ (ponto do espaço numérico bidimensional) a um número real $z$, cuja notação usual é: $z = f(x, y)$. Simbolicamente temos:*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$z = f(x, y)$$

Chamamos os pontos do espaço bidimensional $(x, y)$ de variáveis independentes, que são as variáveis de entrada da função e chamamos ao número real $z$ de variável dependente, que é a variável de saída da função.
Ao conjunto de todos os pontos do espaço bidimensional $(x, y)$ chamamos domínio da função, e ao conjunto de todos os números reais $z$ chamamos imagem de função.
Tomamos como função escolhida:

$$f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 6x - 6y \tag{1.1}$$

**Definição 1.1.2** *Se $f$ é uma função de duas variáveis com domínio $D$, então o gráfico de $f$ é o conjunto de todos os pontos $(x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ tais que $z = f(x, y)$ com $(x, y) \in D$.*

A seguir, construiremos o gráfico $3D$ da função (1.1) através do software wolfram Mathematica, utilizando-se para isso o seguinte comando:

$$Plot3D[f(x,y), \{x, x_{min}, x_{max}\}, \{y, y_{min}, y_{max}\}]$$

Para este exemplo, utilizou-se o comando seguinte:

$$Plot3D[2x^3 - 6y^3 - 6x - 6y, \{x, -5, 5\}, \{y, -5, 5\}]$$

cujo gráfico está construído na Figura 1.1.

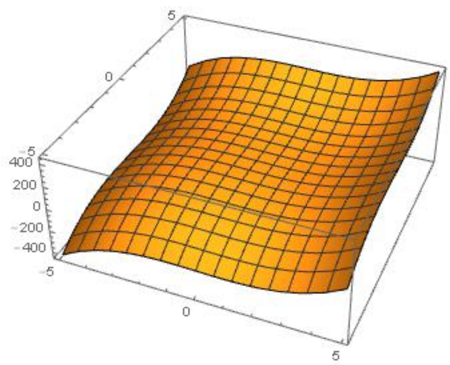



Figura 1.1: Gráfico da função $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 6x - 6y$.
Fonte:Dos autores, plotado com o *Mathematica*, (2016).

## 1.2 Derivadas parciais de primeira ordem

**Definição 1.2.1** *Seja $z = f(x,y)$ uma função de duas variáveis reais, a derivada parcial de $f(x,y)$ em relação a $x$ no ponto $(x_0, y_0)$, designada por $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$ é a derivada dessa função em relação a $x$ aplicada no ponto $(x_0, y_0)$, mantendo-se $y$ constante, analogamemte, em relação a $y$ aplicada no ponto $(x_0, y_0)$, designada por $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$, mantendo-se $x$ constante.*
*Estas derivadas são em geral denotadas por:*

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y); \qquad f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

A seguir, determinaremos as derivadas parciais de primeira ordem da função (1.1), de acordo com a definicão (1.2.1)

$$\begin{cases} f_x &= \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \\ f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 + 2y^3 - 6x - 6y) \\ f_x &= \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 6x^2 - 6 \end{cases} \quad \begin{cases} f_y &= \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \\ f_y &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 + 2y^3 - 6x - 6y) \\ f_y &= \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 6y^2 - 6 \end{cases}$$

### 1.2.1 Pontos críticos

**Definição 1.2.2** *Chama-se gradiente de f(x,y) no ponto* $(x_0, y_0)$ *e é representado por grad* $f(x_0, y_0)$ *ou* $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$, *o vetor:*

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\vec{i} + f_y(x_0, y_0)\vec{j}$$

**Definição 1.2.3** *Seja a função* $z = f(x, y)$ *definida num conjunto aberto. Um ponto* $(x_0, y_0)$ *desse conjunto é um ponto crítico de* $f$ *se as derivadas parciais* $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$ *e* $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$ *são iguais a zero ou se* $f$ *não é diferenciável em* $(x_0, y_0)$, *ou seja, o ponto* $(x_0, y_0)$ *tal que* $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ *ou* $\nabla f(x_0, y_0)$ *não existe respectivamente.*

Sabendo que $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 6x^2 - 6$ e $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 6y^2 - 6$. Vamos determinar os pontos críticos de $f$. Pela definição (1.2.3), basta fazermos $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0$ e $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0$. Assim temos:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= 0 \\ \nabla f(x, y) &= (6x^2 - 6, 6y^2 - 6) = (0, 0) \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6 = 0 \\ 6y^2 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 = 6 \\ 6y^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Segue que a solução do sistema é o conjunto S:{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)}.
Fazendo $P_1 = (1, 1), P_2 = (1, -1), P_3 = (-1, 1)$ e $P_4 = (-1, -1)$.
Vamos ver se os pontos anulam seu gradiente, se isso acontecer é porque são pontos críticos.

$$\nabla f(x, y) = (6x^2 - 6, 6y^2 - 6) = (0, 0)$$

- Para $P_1 = (1, 1)$ temos:
  $\nabla f(P_1) = \nabla f(1, 1) = (6.(1)^2 - 6, 6.(1)^2 - 6) = (0, 0)$
  Logo $P_1$ é um ponto crítico.

- Para $P_2 = (1, -1)$ temos:
  $\nabla f(P_2) = \nabla f(1, -1) = (6.(1)^2 - 6, 6.(-1)^2 - 6) = (0, 0)$
  Logo $P_2$ é um ponto crítico.

- Para $P_3 = (-1, 1)$ temos:
  $\nabla f(P_3) = \nabla f(-1, 1) = (6.(-1)^2 - 6, 6.(1)^2 - 6) = (0, 0)$
  Logo $P_3$ é um ponto crítico.

- Para $P_4 = (-1, -1)$ temos:
  $\nabla f(P_4) = \nabla f(-1, -1) = (6.(-1)^2 - 6, 6.(-1)^2 - 6) = (0, 0)$
  Logo $P_4$ é um ponto crítico.

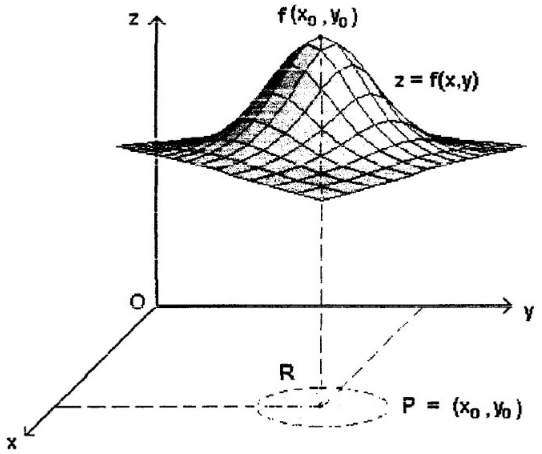
Sendo assim, todos os pares ordenados do conjunto são pontos críticos da função $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 6x - 6y$.
A seguir definiremos pontos extremos. Um dos grandes colaboradores desse estudo foi:
O matemático Pierre Fermat, que nasceu no dia 17 de Agosto de 1601 em Beaumant-de-Lamages, França e morreu no dia 12 de janeiro de 1665 em Castres, França. Foi advogado e oficial do governo em Toulousse pela maior parte de sua vida. O trabalho de Fermat estava baseado em uma reconstrução do trabalho de Apollonus, usando álgebra de Viéte. Um trabalho semelhante conduziu Fermat para descobrir métodos similares para diferenciação e integração por máximos e mínimos.

> É possível que Fermat desde 1629 estivesse de posse de sua geometria analítica, pois por essa época ele fez duas descorbertas significativas que se relacionam de perto com seu trabalho sobre lugares. A mais importante dessas foi descrita alguns anos depois em um tratado, também não publicado durante sua vida, chamado método para achar máximos e mínimos. (BOYER, [1], 2002, p.239)

Fermat em toda a sua vida, não publicou quase nada de suas obras, pois suas exposições era muito sistemática. Além disso, sua geometria analítica se asemelha com a de hoje, onde as ordenadas usualmente tomadas perpendicularmente ao eixo das abscissas, Fermat percebia a existência de uma geometria analítica a mais que duas dimensões, pois em outra conexão ele escreveu:

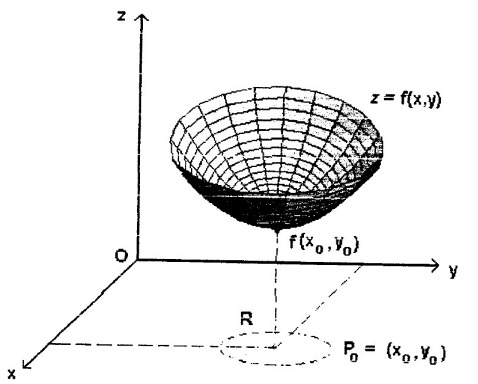
> Há certos problemas que envolvam só uma incógnita e que podem ser chamado determinados, para distiguí-las dos problemas de lugares. Há outros que envolvam duas incógnitas e que nunca podem ser reduzidos a uma só, e esses são problemas de lugares.
> Nos primeiros problemas, procuramos um ponto único, nas segundas uma curva. Mas se o problemas proposto envolve três incógnitas, devesse achar, para satisfazer à equação, não apenas um ponto de curva, mas toda uma superfície. Assim aparecem superfícies como lugares, etc.(BOYER,[1], 2002, p.239).

**Definição 1.2.4** *Dizemos que a função $z = f(x, y)$ admite máximo local no ponto $(x_0, y_0)$, se existe um disco aberto $R$ contendo $(x_0, y_0)$ tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, para todo ponto $(x, y)$ em $R$, conforme ilustra a figura a seguir:*




Fonte: pdf:apostila de cálculo II, prof. José Donizzetti de Lima

**Definição 1.2.5** *Dizemos que a função $z = f(x, y)$ admite mínimo local no ponto $(x_0, y_0)$, se existe um disco aberto $R$ contendo $(x_0, y_0)$ tal que $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, para todo ponto $(x, y)$ em $R$, conforme ilustra a figura a seguir:*

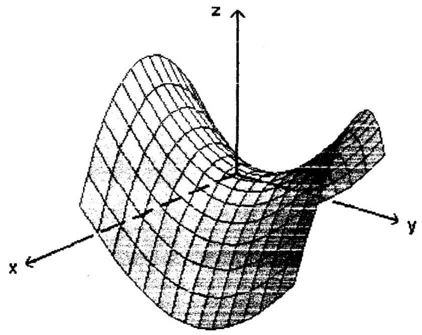



Fonte: pdf:apostila de cálculo II, prof. José Donizzetti de Lima

**Observacao 1.2.1** *Todo ponto extremo de uma função é um ponto crítico, mas nem todo ponto crítico é um ponto extremo. O ponto crítico que não é extremante é chamado* ***ponto de sela****.*

### 1.2.2 Valor numérico ou valor crítico

**Definição 1.2.6** *Dada a função z=f(x,y), temos que f(a,b) é o valor numérico ou crítico de f(x,y), para x=a e y=b. A imagem do ponto crítico é denominado de valor crítico.*




Fonte: pdf:apostila de cálculo II, prof. José Donizzetti de Lima

## 1.3 Curvas de nível

**Definição 1.3.1** *As curvas de nível de uma função f de duas variáveis são aquelas com equação f(x,y)=k, onde k é uma constante ( na imagem de f).*

As curvas de nível de uma função são obtidas basicamente fazendo-se a superposição de que a superfície $z = f(x, y)$ seja interceptada por um plano $z = k$ e a curva originada desta interseção seja projetada no plano xy. A curva projetada tem por equação $f(x, y) = C$ e é chamada de curva de nível ou curva de contorno de f em C. Considerando diferentes valores para a constante e obtemos um conjunto de curvas de nível que também pode ser denominado mapa de contorno. Um mapa de contorno ou de curvas de níveis mostra variações de $z$ com $x$ e $y$.

As curvas de nível possibilitam estudar os gráficos em 2D encontrando intervalos de crescimento e decrescimento, máximos e mínimos, no plano do papel.
A representação geométrica de uma função de duas variáveis não é uma tarefa fácil. Quando se pretende ter visões geométricas da função, utiliza-se as suas curvas de nível, por ser mais fácil de se obter sua representação geométrica.
O *wolfram Mathematica* possibilita a construção de tais curvas utilizando-se para isso o comando *contourPlot* a seguir:

$$ContourPlot[f(x, y), \{x, x_{min}, x_{max}\}, \{y, y_{min}, y_{max}\}]$$

Para desenhar as curvas de níveis deste exemplo, utilizou-se o seguinte comando:

$$ContourPlot[2x^3 + 2y^3 - 6x - 6y, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}]$$

Pode-se observar na Figura (1.2), que o ponto mínimo está localizado na região mais escura da curva de nível à direta superior (I quadrante), os pontos de sela estão localizados

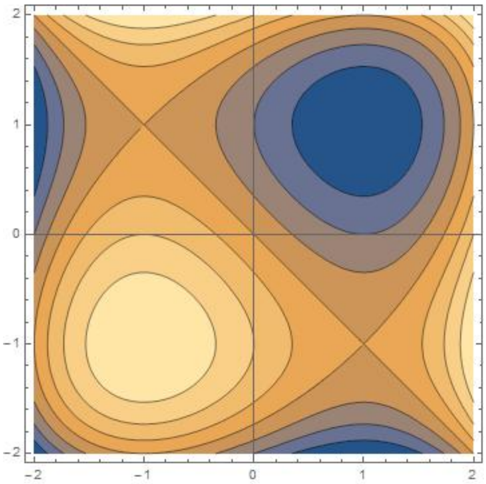


Figura 1.2: Curvas de nível da função $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 6x - 6y$.
Fonte: Dos autores (2016).

à esquerda superior (II quadrante) e à direita inferior (IV quadrante) e o ponto de máximo está na região mais clara na parte inferior à esquerda (III quadrante) do gráfico.

### 1.3.1 Vetores gradientes

O vetor gradiente de uma função permite obter a taxa de crescimento de uma função de duas ou mais variáveis.
O *Wolfram Mathematica* possibilita a construção do gráfico do campo direcional de uma função, através do comando:

$$\text{VectorPlot}[\{f_x, f_y\}, \{x, x_{min}, x_{max}\}, \{y, y_{min}, y_{max}\}]$$

Encontramos o gráfico do campo direcional da nossa função, digitando o comando:

$$VectorPlot[\{6x^2 - 6, 6y^2 - 6\}, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}]$$

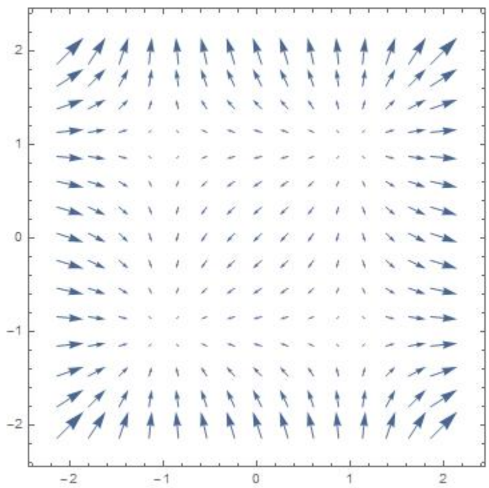


Figura 1.3: Campo de vetores da função.
Fonte:Dos autores (2016).

Notamos na Figura 1.4, que em volta do ponto de mínimo local, os vetores gradientes estão indicando que a função cresce em todas direções, em volta dos pontos de sela alguns vetores crescem e outros decrescem, já em volta do ponto de máximo local, os vetores gradientes estão indicando que a função decresce em todas direções. Observamos também que todos pontos críticos o vetor gradiente se anula.

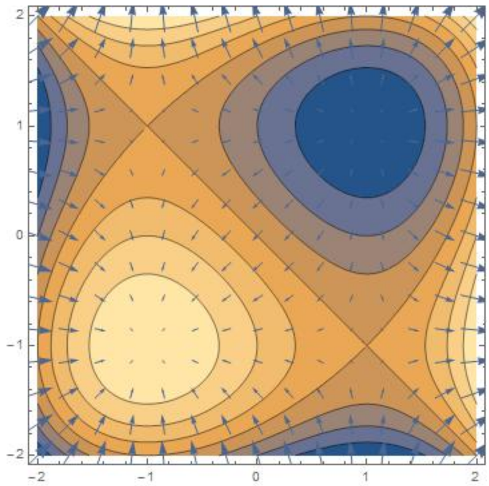



Figura 1.4: Em um mesmo gráfico, as curvas de níveis e os campos de vetores.
Fonte:Dos autores (2016).

## 1.4 Derivadas parciais de segunda ordem

**Definição 1.4.1** *Quando derivamos uma função f(x,y) duas vezes, produzimos suas derivadas de segunda ordem. Essas derivadas são em geral denotadas por:*

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\
f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\
f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

Sabendo que a primeira derivada da função (1.1) em relação a x é $f_x = 6x^2 - 6$, e em relação a y é $f_y = 6y^2 - 6$. De acordo com a definição (1.4.1), encontramos as derivadas de segunda ordem:

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2-6) = 12x \\
f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(6y^2-6) = 0 \\
f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(6x^2-6) = 0 \\
f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(6y^2-6) = 12y
\end{aligned}
$$

Com todas as derivadas parciais da função f, nós escrevemos uma matriz denominada de matriz hessiana. Este nome é em homenagem ao matemático:
Ludwing Otto Hesse, que nasceu no dia 22 de abril de 1811 em Königsberg, e morreu no dia 04 de agosto de 1874 em Munique na Alemanha. Foi um matemático alemão, filho de Johann Gottlieb Hesse, comerciante e dono de cervejaria, e Anna Karoline Reiter. Estudou em sua cidade natal na Universidade de Königsberg, orientado por Carl Gustav Jakob Jacobi. Alguns de seus mestres foram Friedrich Wilhelm Bessel, Carl Neumann e Friedrich Julius Richelt. Dedicou-se especialmente à geometria analítica e à teoria matemática dos determinantes. Definiu e introduziu na literatura matemática a matriz hessiana de superfícies planas.
A matriz hessiana foi desenvolvida no século XIX pelo alemão Ludwing Otto Hesse, razão porque mas tarde James Joseph Sylvester lhe deu este nome. O próprio Hesse, ao contrário, usava o termo "Determinantes Funcionais".

## 1.5 Matriz hessiana

Analiticamente, podemos classificar a natureza dos pontos críticos de uma função de várias variáveis, em pontos de mínimo e máximo (local ou global) ou de sela, estudando o comportamento da matriz hessiana.

**Definição 1.5.1** *Considere a matriz diferencial, ou seja, a matriz de todas as derivadas parciais de segunda ordem de f. A esta matriz chamamos Matriz Hessiana de f e denotaremos por Hess(f).*
*Seja f uma função de duas variáveis reais definimos a Matriz Hessiana de f como:*

$$
Hessf(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}
$$

De acordo com as derivadas parciais de segunda ordem encontradas, e de acordo com a definição (1.5.1), teremos a seguinte matriz Hessiana:

$$Hessf(x,y) = \begin{bmatrix} 12x & 0 \\ 0 & 12y \end{bmatrix}$$

### 1.5.1 A função hessiana

O determinante da matriz hessiana

$$Hess\ f(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

é chamado de determinante hessiano da função $z = f(x,y)$, ou função hessiana.Como mostra a seguir:

$$det\ hess\ f(x,y) = f_{xx}.f_{yy} - f_{xy}^2$$

Deste modo temos:

$$det\ Hess\ f(x,y) = 12x.12y - 0 = 144xy$$

Para enunciar o teorema de classificação dos pontos críticos, precisamos definir o determinante dos menores principais, a seguir:

## 1.6 Determinante dos menores principais

**Definição 1.6.1** *O determinante do menor principal de*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

*de ordem i é definido como*

$$\Delta_i = \Delta_i(A) = det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{bmatrix}$$

*que é o determinante do bloco de tamanho $i \times i$ localizada na posição superior esquerda de $A$.*
*No caso de $Hess\ f(x,y)$ ser contínua em $P$, a matriz hessiana é simétrica e podemos*

*mostrar que:*

**Teorema 1.6.1** *Seja $P$ um ponto crítico não degenerado da função*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

*($\nabla f(P) = 0$) e det $Hessf(P) \neq 0$, com todas as derivadas parcias de segunda ordem contínuas, então:*

1. *$\Delta_i$ (Hess $f(P)$) $> 0$ para todo $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ (todos os $\Delta_i$ são estritamente positivos). Se, e somente se $P$, é um ponto de mínimo local estrito (função cresce em todas as direções).*

2. *$(-1)^i \Delta_i$ ( Hess $f(P)$) $> 0$ para todo $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ (sinal de $\Delta_i$ é alternado, começando do negativo). Se , e somente se, $P$ é um ponto de máximo local estrito ( função decresce em todas as direções).*

3. *Se não ocorre nenhum dos casos anteriores. Então é ponto de sela. ( tem direção em que a função cresce e outra direção em que a função decresce).*

**Observacao 1.6.1** *Se $\Delta_i(Hessf(P)) = 0$ para i=n nada se pode afirmar.*

De acordo com a definição (1.6.1), encontraremos os determinantes dos menores principais para cada ponto crítico aplicado na matriz hessiana, logo:

- Para $P_1 = (1, 1)$, a matriz hessiana é:

  $$Hess\ f(P_1) = \begin{bmatrix} 12(1) & 0 \\ 0 & 12(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

  O determinante de menor principal de ordem 1 é:
  $\Delta_1 = [12] > 0$
  E o determinante de menor principal de ordem 2 é:

  $$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = 144 > 0$$

  Pelo teorema (1.6.1) como $\Delta_1$ e $\Delta_2$ são estritamente positivos, logo enquadra-se no caso 1 (ponto de mínimo local estrito);

- Para $P_2 = (1, -1)$:
  A matriz hessiana é:

  $$Hessf(P_2) = \begin{bmatrix} 12(1) & 0 \\ 0 & 12(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$$

O determinante de menor principal de ordem 1 é:
$\Delta_1 = [12] = 12 > 0$;
E o determinante do menor principal de ordem 2 é:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} = -144 < 0$$

Pelo teorema (1.6.1) como $\Delta_1 > 0$ e $\Delta_2 < 0$ então temos o caso 3. (Ponto de sela);

- Para $P_3 = (-1, 1)$ :
  A matriz hessiana é:

$$Hessf(P_3) = \begin{bmatrix} 12(-1) & 0 \\ 0 & 12(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

O determinante de menor principal de ordem 1 é:
$\Delta_1 = [-12] = -12 < 0$;
E o determinante do menor principal de ordem 2 é:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = -144 < 0$$

Pelo teorema (1.6.1) como $\Delta_1 < 0$ e $\Delta_2 < 0$ então temos o caso 3. (Ponto de sela);

- Para $P_4 = (-1, -1)$:
  A matriz hessiana é:

$$Hessf(P_4) = \begin{bmatrix} 12(-1) & 0 \\ 0 & 12(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$$

O determinante de menor principal de ordem 1 é:
$\Delta_1 = [-12] = -12 < 0$;
E o determinante do menor principal de ordem 2 é:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} = 144 > 0$$

Pelo teorema (1.6.1) como $\Delta_1 < 0$ e $\Delta_2 > 0$ logo em $P_4$ temos o caso 2 (ponto de máximo local estrito).

Vejamos a seguir a tabela com a classificação dos pontos críticos quanto à sua natureza:

**Resumo dos pontos críticos da função de duas variáveis.**

| Pontos Críticos | Natureza |
|---|---|
| $P_1$ | Ponto de mínimo |
| $P_2$ | Ponto de sela |
| $P_3$ | Ponto de sela |
| $P_4$ | Ponto de máximo |

Uma outra forma para classificar a natureza do ponto crítico é através do teste da segunda derivada, que veremos a seguir.

## 1.7 Teste da segunda derivada

No caso da classificação dos pontos críticos não degenerados da função real de duas variáveis, a expressão de $\Delta_i$ é relativamente simples.

**Exemplo 1.7.1** *O critério para mínimo local restrito ficaria:*

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \ e \ \Delta_2 = detHessf(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

$$Hessf(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

*Analogamente, o ponto de máximo local restrito.*

$$(-1)^i \Delta_i > 0, ficaria \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \ e \ detHessf(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0.$$

O teorema a seguir fornece uma condição suficiente, sob determindas condições, para decidir se um ponto crítico é um ponto de máximo local, mínimo local ou ponto de sela.

**Teorema 1.7.1** *Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , tem segundas derivadas parciais contínuas e $P$ é um ponto critico, então:*

1. *Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ e $detHessf(P) > 0$ implica que $P$ é um ponto de mínimo local de $f$.*

2. *Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ e $detHessf(P) > 0$, implica que $P$ é um ponto de máximo local de $f$.*

3. *Se $detHessf(P) < 0$ implica que $P$ é um ponto de sela de $f$.*

4. *Se* $detHessf(P) = 0$ *não podemos afirmar nada sobre a natureza do ponto crítico* $P$.

$$detHessf(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2$$

Dada a matriz hessiana:

$$Hess\ f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x & 0 \\ 0 & 12y \end{bmatrix}$$

- Para o ponto $P_1 = (1,1)$, temos:

$$Hess\ f(1,1) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = 144$$

  Pelo teorema (1.7.1), como $det\ Hess\ f(1,1) = 144 > 0$ e $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$, no ponto; logo em $P_1$ temos um ponto de mínimo local estrito.

- Para o ponto $P_2 = (1,-1)$, temos:

$$Hessf(1,-1) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} = -144$$

  Pelo teorema (1.7.1), como $det\ Hess\ f(1,-1) = -144 < 0$ e $f_{xx}(1,-1) = -12 < 0$, no ponto; logo em $P_2$ temos um ponto de sela.

- Para o ponto $P_3 = (-1,1)$, temos:

$$Hessf(-1,1) = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = -144$$

  Pelo teorema (1.7.1), como $det\ Hess\ f(-1,1) = -144 < 0$ e $f_{xx}(-1,1) = -12 < 0$, no ponto; logo em $P_3$ temos um ponto de sela.

- Para o ponto $P_4 = (-1,-1)$, temos:

$$Hessf(-1,-1) = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} = 144$$

  Pelo teorema (1.7.1), como $detHessf(-1,-1) = 144 > 0$ e $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$, no ponto; logo em $P_1$ temos um ponto de Máximo local estrito.

O estudo que veremos a seguir tem como objetivo encontrar os pontos críticos através do polinômio de Taylor. Vale destacar que Taylor foi um grande matemático.

Brosk Taylor nasceu no dia 18 de agosto de 1685 em Edmanton na Inglaterra e morreu no dia 29 de dezembro de 1731 em Londres na Inglaterra. Filho de John Taylor da casa d Bifrons e de Alinea, filha de Nicholas Tempest. Sua família era moderadamente rica e estava ligada a baixa nobreza.
Taylor teve aulas particulares em casa antes de entrar para o Saint John's College em 1701, onde os catedráticos em matemática eram John Machin e John Keill. Taylor recebeu seu diploma de Bacharelado em 1709, foi eleito para Royal Society de Londres em 1712 e recebeu o diploma de Doutorado em 1714. Ele foi eleito secretário da Royal Society em janeiro de 1714, mas se demitiu em outubro de 1718 em virtude de sua saúde e talvez também perda de interesse nesta tarefa cansativa e extenuante.

> "Um dos trabalhos de Taylor, a chamada série de Taylor, publicada em (1683-1731), em 1715 em seu Methodus incementarum directa et inversa. Taylor era um entusiástico administrador de Newton. Interessava-se muito por perspectiva: Sobre esse assunto publicou dois livros em 1715 e 1719, no segundo dos quais deu o primeiro enunciado geral do princípio dos pontos de desaparecimento.
> No entanto, seu nome hoje é lembrado quase exclusivamente em conexão com a série que apareceu em seu Methodus incrementarum. Essa série se torna a familiar série de Maclaurin substituindo "a"por zero."
> (Boyer [1], 2002, p.296)

## 1.8 Polinômio de Taylor de ordem 2

A Fórmula de Taylor ou Polinômio de Taylor é uma expressão que permite o cálculo do valor de uma função por aproximação local através de uma função polinomial. Com essa ferramenta, podemos moldar funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas em polinômios, ou seja, podemos aproximar funções mais complicadas por funções polinomiais.
Para este capitulo, vamos utilizar a Formula de Taylor a qual nos fornece uma regra para determinar o polinômio de grau $\leq 2$ que melhor vai aproximar a função ao redor dos pontos. Vejamos a definição seguinte:

**Definição 1.8.1** *Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função que tenha derivadas até a ordem 2 no ponto x=a e y=b, associamos a $f$ o polinômio $P(x,y)$ de grau $\leq 2$ dado por:*

$$P(x,y) = f(a,b) + f'(a,b).(x-a, y-b) + \frac{1}{2!}f''(a,b).(x-a,y-b)^2 \tag{1.2}$$

Fazendo $x - a = v_1$ e $y - b = v_2$, temos

$$P(x,y) = f(a,b) + f'(a,b)\cdot(v_1,v_2) + \frac{1}{2!}f"(a,b)\cdot(v_1,v_2)^2$$

A expressão acima pode ser reduzida, pois já sabemos que o ponto (a,b) é um ponto crítico:
Então:

$$f'(a,b) = (f_x(a,b), f_y(a,b)) = (0,0)$$

e consequentemente:

$$f'(a,b).(v_1,v_2) = (0,0).(v_1,v_2) = (0,0)$$

Além disso, reescrevendo $f''(a,b)$ na forma matricial, nota-se a presença da matriz Hessiana da função f aplicada no ponto (a,b). Temos:

$$f"(a,b) \cdot (v_1,v_2)^2 = (v_1,v_2) \cdot \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Portanto o polinômio de Taylor se resume a:

$$P(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2!}\left[(v_1,v_2)\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right]$$

Determinaremos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_1 = (1,1)$;
De acordo com a definição 1.2.6, como $f(a,b)$ é o valor numérico de $f(x,y)$, temos que $f(1,1) = -8$ é o valor numérico da função 1.1.
Pela definção 1.2.3, $f_x(a,b) = 0$ e $f_y(a,b) = 0$ temos que $f_x(1,1) = 0$ e $f_y(1,1) = 0$.
E como o ponto $P_1 = (1,1)$ aplicado na matriz Hessiana é

$$Hessf(1,1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(1,1) & f_{xy}(1,1) \\ f_{yx}(1,1) & f_{yy}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Fazendo a substituição dos valores encontrados, no polinômio temos:

$$P(x,y) = -8 + \frac{1}{2!}\left[(v_1,v_2)\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right]$$

Resolvendo a expressão:

$$P(x,y) = -8 + \frac{1}{2!}\left[(12v_1 + 12v_2)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= -8 + \tfrac{1}{2!}[(12v_1^2, 12v_2^2)] = -8 + 6v_1^2 + 6v_2^2$$

$$\Downarrow$$

Como $v_1 = x - a$ e $v_2 = y - b$ a=1 e b=1. temos

$$P(x,y) = -8 + 6(x-1)^2 + 6(y-1)^2$$

$$\Downarrow$$

$$P(x,y) = -8 + 6(x^2 - 2x + 1) + 6(y^2 - 2y + 1) = -8 + 6x^2 - 12x + 6 + 6y^2 - 12y + 6$$

$$\Downarrow$$

O polinômio de Taylor em volta do ponto $P_1$ é:

$$P(x,y) = 6x^2 + 6y^2 - 12x - 12y + 4 \tag{1.3}$$

Observação: substituindo $P(1,1)$ no polinômio (1.3) encontramos seu valor numérico -8.
Derivando $P(x,y)$ em relação a x e $P(x,y)$ em relação a y, temos:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = 12x - 12 \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 12y - 12$$

Sabendo que os pontos críticos de $P(x,y)$ são aqueles que anulam o seu gradiente, para $P(x,y)$, temos:

$$\nabla P(x,y) = 0$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 12x - 12 &= 0 \\ 12y - 12 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Portanto encontramos o ponto crítico $P_1 = (1,1)$ através do polinômio de Taylor.
O polinômio de Taylor em volta do ponto $P_2 = (1,-1)$ é:
De acordo com a definição 1.2.6, como $f(a,b)$ é o valor numérico de $f(x,y)$, temos que $f(1,-1) = 0$ é o valor numérico da função 1.1.
Pela definição 1.2.3, $f_x(a,b) = 0$ e $f_y(a,b) = 0$ temos que $f_x(1,-1) = 0$ e $f_y(1,-1) = 0$.
E como o ponto $P_2 = (1,-1)$ aplicado na matriz Hessiana é

$$Hessf(1,-1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(1,-1) & f_{xy}(1,-1) \\ f_{yx}(1,-1) & f_{yy}(1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Fazendo a substituição dos valores encontrados, no polinômio temos:

$$P(x,y) = 0 + \frac{1}{2!}\left[(v_1, v_2)\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right]$$

Resolvendo a expressão:

$$P(x,y) = \frac{1}{2!}\left[(12v_1 - 12v_2)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$=\frac{1}{2!}[(12v_1^2 - 12v_2^2)] = 6v_1^2 - 6v_2^2$$
$$\Downarrow$$
Como $v_1 = x - a$ e $v_2 = y - b$ a=1 e b=-1. temos

$$P(x,y) = 6(x-1)^2 - 6(y+1)^2$$
$$\Downarrow$$
$$P(x,y) = 6(x^2 - 2x + 1) - 6(y^2 + 2y + 1) = 6x^2 - 12x + 6 - 6y^2 - 12y - 6$$
$$\Downarrow$$

O polinômio de Taylor em volta do ponto $P_2$ é:

$$P(x,y) = 6x^2 - 6y^2 - 12x - 12y \tag{1.4}$$

Substituindo $P(1,-1)$ no polinômio (1.4) encontramos seu valor numérico 0.
Derivando $P(x,y)$ em relação a x e $P(x,y)$ em relação a y, temos:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = 12x - 12 \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 12y - 12$$

Sabendo que os pontos críticos de $P(x,y)$ são aqueles que anulam o seu gradiente, para $P(x,y)$, temos:

$$\nabla P(x,y) = 0$$

Resolvendo o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 12x - 12 & = & 0 \\ -12y - 12 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 1 \\ y = -1 \end{array} \right.$$

Portanto encontramos o ponto crítico $P_2 = (1,-1)$ através do polinômio de Taylor.
O polinômio de Taylor em volta do ponto $P_3 = (-1,1)$;
De acordo com a definição 1.2.6, como $f(a,b)$ é o valor numérico de $f(x,y)$, temos que $f(-1,1) = 0$ é o valor numérico da função 1.1.
Pela defincão 1.2.3, $f_x(a,b) = 0$ e $f_y(a,b) = 0$ temos que $f_x(-1,1) = 0$ e $f_y(-1,1) = 0$.
E como o ponto $P_3 = (-1,1)$ aplicado na matriz Hessiana é

$$Hessf(-1,1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(-1,1) & f_{xy}(-1,1) \\ f_{yx}(-1,1) & f_{yy}(-1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Fazendo a substituição dos valores encontrados, no polinômio temos:

$$P(x,y) = 0 + \frac{1}{2!}\left[(v_1, v_2)\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right]$$

Resolvendo a expressão:

$$P(x,y) = \frac{1}{2!}\left[(-12v_1 + 12v_2)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2!}[(-12v_1^2 + 12v_2^2)] = -6v_1^2 + 6v_2^2$$

$$\Downarrow$$

Como $v_1 = x - a$ e $v_2 = y - b$ a=-1 e b=1. temos

$$P(x,y) = -6(x+1)^2 + 6(y-1)^2$$

$$\Downarrow$$

$$P(x,y) = -6(x^2+2x+1) + 6(y^2-2y+1) = -6x^2 - 12x - 6 + 6y^2 - 12y + 6$$

$$\Downarrow$$

O polinômio de Taylor em volta do ponto $P_3$ é:

$$P(x,y) = -6x^2 + 6y^2 - 12x - 12y \tag{1.5}$$

Substituindo $P(-1,1)$ no polinômio (1.5) encontramos seu valor numérico 0.
Derivando $P(x,y)$ em relação a x e $P(x,y)$ em relação a y, temos:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = -12x - 12 \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 12y - 12$$

Sabendo que os pontos críticos de $P(x,y)$ são aqueles que anulam o seu gradiente, para $P(x,y)$, temos:

$$\nabla P(x,y) = 0$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} -12x - 12 &= 0 \\ 12y - 12 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Portanto encontramos o ponto crítico $P_3 = (-1,1)$ através do polinômio de Taylor.
O polinômio de Taylor em volta do ponto $P_4 = (-1,-1)$;
De acordo com a definição 1.2.6, como $f(a,b)$ é o valor numérico de $f(x,y)$, temos que $f(-1,-1) = 8$ é o valor numérico da função 1.1.
Pela defínção 1.2.3, $f_x(a,b) = 0$ e $f_y(a,b) = 0$ temos que $f_x(-1,-1) = 0$ e $f_y(-1,-1) = 0$.

E como o ponto $P_4 = (-1,-1)$ aplicado na matriz Hessiana é

$$Hessf(-1,-1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(-1,-1) & f_{xy}(-1,-1) \\ f_{yx}(-1,-1) & f_{yy}(-1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Fazendo a substituição dos valores encontrados, no polinômio temos:

$$P(x,y) = 8 + \frac{1}{2!}\left[(v_1, v_2)\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right]$$

Resolvendo a expressão:

$$P(x,y) = 8 + \frac{1}{2!}\left[(-12v_1 - 12v_2)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$=8+\tfrac{1}{2!}[(-12v_1^2 - 12v_2^2)] = 8 - 6v_1^2 - 6v_2^2$$

$$\Downarrow$$

Como $v_1 = x - a$ e $v_2 = y - b$ a= -1 e b= -1. Temos:

$$P(x,y) = 8 - 6(x+1)^2 + 6(y+1)^2$$

$$\Downarrow$$

$$P(x,y) = 8 - 6(x^2 + 2x + 1) + 6(y^2 + 2y + 1) = 8 - 6x^2 - 12x - 6 - 6y^2 - 12y - 6$$

$$\Downarrow$$

O polinômio de Taylor em volta do ponto $P_4$ é:

$$P(x,y) = -6x^2 - 6y^2 - 12x - 12y - 4 \tag{1.6}$$

Substituindo $P(-1,-1)$ no polinômio (1.6) encontramos seu valor numérico 8.
Derivando $P(x,y)$ em relação a x e $P(x,y)$ em relação a y, temos:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = -12x - 12 \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -12y - 12$$

Sabendo que os pontos críticos de $P(x,y)$ são aqueles que anulam o seu gradiente, para $P(x,y)$, temos:

$$\nabla P(x,y) = 0$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 12x - 12 &= 0 \\ 12y - 12 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Portanto encontramos o ponto crítico $P_4 = (-1,-1)$ através do polinômio de Taylor.

O método dos multiplicadores de Lagrange permite encontrar extremos (máximos e mínimos) de funções suscetíveis a uma ou mais restrições. O nome Lagrange vem do grande matemático:
Joseph Louis Lagrange, que nasceu no dia 25 de janeiro de 1736 em Tunim e faleceu no dia 10 de abril de 1813 em Paris. Geômetra francês, foi professor da Escola de Artilharia de Tunim e acadêmico e Berlim. Obteve o primeiro prêmio da Academia de Ciências de Paris, por suas teorias sobre a Libertação da Lua e do Satélie de Júpter. Em 1764, foi Presidente da Academia de Berlim como sucessor de Ruler, que havia sido o primeiro a compreender o seu gênio. Em 1787, mudou-se para Paris, convidado por Luis XVI, que lhe concedeu uma pensão.

> "Lagrange é em geral considerado o mais notável matemático do século XVIII, sendo somente Euler um sério rival, e há aspectos de sua obra que não são fáceis de descrever numa exposição histórico elementar. Entre esses está a primeira e talvez a maior contribuição de Lagrange - O cálculo de variações. Esse era um ramo novo da matemática, cujo nome se origina de notações usadas por Lagrange aproximadamente a partir de 1760."
> (Boyer[1], 2002, p.338)

## 1.9 Multiplicadores de Lagrange

A diferença entre os problemas de máximos e mínimos não condicionado e os condicionados, é que nos condicionados não temos critérios simples para distinguir os pontos de mínimo dos de máximo. Cada ponto obtido pelo método de Lagrange deve ser examinado separadamente, utilizando os dados do problema ou argumentos geométricos.

**Teorema 1.9.1** *Dada a função objetiva $z = f(x, y)$ sujeita à restrição $g(x, y) = 0$ (ou $k$, em alguns casos), os pontos de máximo ou de mínimo da função $f$ são as soluções do sistema:*

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g; \\ g = C \end{cases}$$

*Onde $\lambda$ é chamado de multiplicadores de lagrange. Então:*

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g; \\ g = C \end{cases} \quad \lambda > 0 \quad ou \quad \lambda \neq 0$$

**Exemplo 1.9.1** *Determinar os valores extremos da função $f(x, y) = xy$, sujeita a restrição $x^2 + y^2 = 25$.*

**Solução 1.9.1**

Primeiro vamos calcular os valores das funções $f$ e $g$. Fazendo isso, obtemos que $\nabla f(x,y) = (y,x)$ e $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$.
Com isso chegamos a conclusão de que $(y,x) = \lambda(2x, 2y)$.
Aplicando - se a propriedade distributiva, obtemos que $(y,x) = (\lambda 2x, \lambda 2y)$.
Podemos mostrar o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{c} y = \lambda 2x \\ x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda = \frac{y}{2x} \\ \lambda = \frac{x}{2y} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array}\right.$$

Como $\lambda = \frac{y}{2x}$ e $\lambda = \frac{x}{2y}$, daí chegamos a conclusão que $y^2 = x^2$. Com o resultado anterior, podemos reescrever a equação de restrição $x^2 + y^2 = 25$, como $x^2 + x^2 = 25$. Com isso obtemos que $x = \pm\frac{5}{\sqrt{2}}$ e $y = \pm\frac{5}{\sqrt{2}}$
Assim:

$$x = \{\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\} \text{ e } y = \{\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\}$$

Com isso temos a solução dos pares ordenados, que são os pontos:

$$(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}), (\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}), (-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}), (-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}})$$

Sabendo que a função $f(x,y) = xy$, temos:
$f(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}) = \frac{5}{\sqrt{2}}.\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{25}{2}$
$f(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}) = \frac{5}{\sqrt{2}}.(-\frac{5}{\sqrt{2}}) = -\frac{25}{2}$
$f(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}) = (-\frac{5}{\sqrt{2}}).\frac{5}{\sqrt{2}} = -\frac{25}{2}$
$f(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}) = (-\frac{5}{\sqrt{2}}).(-\frac{5}{\sqrt{2}}) = \frac{25}{2}$
Com isso temos que o mínimo da função é $\frac{-25}{2}$ e o máximo é $\frac{25}{2}$.
A figura (1.5), apresenta o gráfico da função $f(x,y) = xy$, sujeita a restriçaõ $x^2 + y^2 = 25$, utilizando-se para isso o comando:

a=plot3D[$x * y, \{x, -5, 5\}, \{y, -5, 5\}$]

e

b=plot3D[$x^2 + y^2 - 25, \{x, -5, 5\}, \{y, -5, 5\}$]

e para a união dos gráficos usa-se o comando:

Show[a,b]

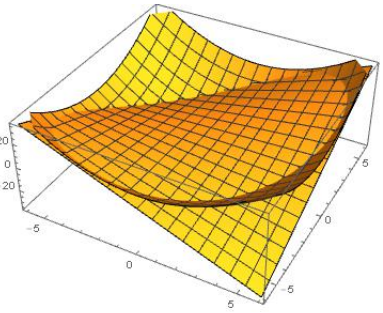
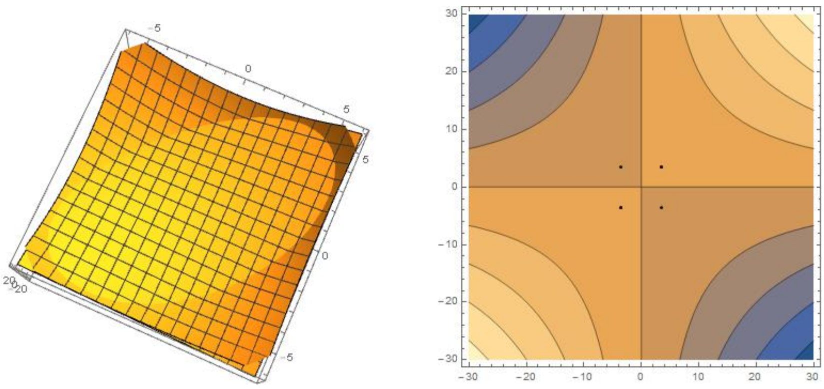


Figura 1.5: Gráfico da função $f(x, y) = xy$ sujeita a restrição $x^2 + y^2 = 25$
Fonte: Dos autores, plotado com o *Mathematica (2016)*



(a) (b)

Figura 1.6: A Figura (a: Função com restrição) e (b: Curvas de nível com pontos críticos)

Iremos classificar a cônica originada pela interseção de $f(x, y)$ com $g(x, y)$. Para isso veremos a seguinte definição:

**Definição 1.9.1** *Forma Quadrática Matricial de uma cônica: Uma forma de classificar o tipo de cônica representada por uma equação* $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ *é escrevendo essa equação na forma matricial.*

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

De fato:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ax + \frac{b}{2}y \\ \frac{b}{2}x + cy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx & ey \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$ax^2 + \frac{b}{2}xy + \frac{b}{2}xy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

$$\Downarrow$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

**Definição 1.9.2** *Classificação: Dada uma cônica cuja forma matricial quadrática seja escrita como* $X^tAX$, *onde a matriz* $A$ *tem uma forma digonalizada dada por*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

*onde $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são autovalores de a, então podemos classificá-lo usando a seguinte regra:*

- *Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ então a equação é de uma parábola ou de sua forma degenerada (uma reta ou duas retas paralelas).*

- *Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ então a equação é de uma elepse ou de sua forma degenerada (um ponto ou o vazio).*

- *Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ então a equação é de uma hipérbole ou de sua forma degenerada (duas retas concorrentes).*

Sabendo que $f(x,y) = xy$ e a restrição é $g(x,y) = x^2 + y^2 - 25$. Vamos verificar qual a cônica originada pela interseção de $f(x,y)$ com $g(x,y)$. Então:

$$f(x) = g(x)$$
$$xy = x^2 + y^2 - 25$$

$$x^2 + y^2 - xy - 25 = 0 \tag{1.7}$$

Temos a equação geral de uma cônica:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

De 1.7, temos que $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = e = 0$ e $f = -25$. Pela definição 1.9.1 substituindo na forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 25 = 0$$

Calculamos os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

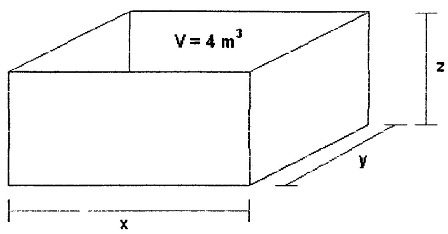
$$\Downarrow$$
$$(1-\lambda)(1-\lambda)-\tfrac{1}{4}=0$$
$$\Downarrow$$
$$1^2-2\lambda+\lambda^2-\tfrac{1}{4}=\lambda^2-2\lambda+\tfrac{3}{4}=0$$

As raízes desse polinômio são os autovalores de A dados por $\lambda_1=\frac{3}{4}$ ou $\lambda_2=\frac{1}{2}$. Como $\lambda_1\cdot\lambda_2=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}>0$, logo a equação 1.7 é uma elipse.

## 1.10 Aplicação

**Problema 1.10.1** *Quais as dimensões de uma caixa retangular sem tampa com volume $4m^3$ e com a menor área de superfície possível?*

**Solução 1.10.1** *Vamos considerar a caixa, conforme ilustra a figura a seguir:*




Fonte: Autores

*Sendo $x$ e $y$ as arestas da base e $z$ a altura, da geometria elementar (plana e espacial), temos:*

- *Volume da caixa $V=xyz$*

- *Área da superfície total: $A=xy+2xz+2yz$*

*Nosso objetivo é minimizar $A=xy+2xz+2yz$ sabendo que $xyz=4$ e $x,y,z>0$.*

$$min\ A=xy+2xz+2yz$$

*Podemos simbolicamente escrever:*

$$S\cdot a\begin{cases} xyz=4\\ x,y,z>0\end{cases}$$

*Costumamos, ao usar essa notação, chamar a função $A=xy+2xz+2yz$ de função objetivo e as equações e/ou inequações de restrições. O símbolo $S\cdot a$ lê-se "sujeito a".*

*Como, pelo volume, xyz=4, temos:* $z = \frac{4}{xy}$*, e a área a ser minimizada pode ser expressa como função de duas variáveis x e y,* $A = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}$.
*Procuramos um ponto crítico dessa função, isto é, um ponto em que:*

$$\frac{\partial A}{\partial x} = y - \frac{8}{x^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial A}{\partial y} = x - \frac{8}{y^2} = 0$$

*Dessa equação resulta que x=2 e y=2, ou seja, o ponto crítico é o ponto (2,2). Usando o hessiano, podemos confirmar se o mesmo é ponto de mínimo.*

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{16}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{16}{y^3} \end{bmatrix} \Rightarrow H(2,2) = \begin{bmatrix} \frac{16}{8} & 1 \\ 1 & \frac{16}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4-1 = 3 > 0 \text{ e } \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(2,2) = 2 > 0$$

*Assim, (2,2) é um ponto de mínimo.*
*Portanto, as dimensões da caixa são: x=2 metros, y=2 metros e* $z = \frac{4}{xy} = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1$ *metro.*

**Conclusão:** A caixa de volume dado, sem tampa, com área de superfície mínima, tem uma base quadrada e altura medindo metade do valo da aresta da base.

Até o momento, fez-se necessário o estudo prévio de máximos e mínimos de funções de duas variáveis independentes, abordando uma série de métodos e definições descritos no corpo do trabalho.

No capítulo seguinte, estudaremos funções de três variáveis independentes.

# Capítulo 2

# FUNÇÕES DE TRÊS VARIÁVEIS

## 2.1 Definição

**Definição 2.1.1** *Uma função de três variáveis reais, definida em* $A \subset \mathbb{R}^3$*, é uma função que associa a cada terno* $(x, y, z) \in A$*, um único número real* $w = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$*. O domínio é todo o* $\mathbb{R}^3$ *ou parte dele. Matematicamente temos:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ w &= f(x, y, z) \end{aligned}$$

Tomamos como função escolhida:

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2 \tag{2.1}$$

## 2.2 Derivadas parciais de primeira ordem

**Definição 2.2.1** *Sejam* $A \subset \mathbb{R}^3$ *um conjunto aberto e* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função. A derivada parcial de* $f$ *em relação à variável* $x$*, no ponto* $(x_0, y_0, z_0) \in A$ *é denotada por* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$*, a derivada parcial de* $f$ *em relação à variável* $y$*, no* $(x_0, y_0, z_0) \in A$*, é denotada por* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$*. Por último, a derivada parcial de* $f$ *em relação à variável* $z$*, no ponto* $(x_0, y_0, z_0) \in A$*, é denotada por* $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$*.*

Como no caso de uma função de duas variáveis, as três derivadas parciais da função $f(x, y, z)$ podem ser interpretadas como sendo derivadas de funções de uma variável, já que se mantém constantes duas das três variáveis enquanto deriva-se a função $f(x, y, z)$ em ordem à outra variável.
Essas derivadas são denotadas em geral por:

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = f_x(x,y,z)\\
f_y &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = f_y(x,y,z)\\
f_z &= \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = f_z(x,y,z)
\end{aligned}$$

Pela definição (2.2.1), vamos determinar as derivadas parciais de primeira ordem da função (2.1):

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^3+z^3-3x-3y-3z+2) = 3x^2-3\\
f_y &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(x^3+y^3+z^3-3x-3y-3z+2) = 3y^2-3\\
f_z &= \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}(x^3+y^3+z^3-3x-3y-3z+2) = 3z^2-3
\end{aligned}$$

### 2.2.1 Pontos críticos

Os conceitos de máximo e de mínimo de uma função de mais de duas varáveis em um domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ podem se definidas de modo análogo ao já apresentado no caso de duas variáveis no Capítulo 1.

Os pontos críticos de uma função de três variáveis ocorrem em pontos nos quais se anulam todas as derivadas de 1ª ordem da função, ou seja, se $(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto crítico de f então:

$$\begin{aligned}
f_x(x_0,y_0,z_0) &= 0\\
f_y(x_0,y_0,z_0) &= 0\\
f_z(x_0,y_0,z_0) &= 0
\end{aligned}$$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^3-3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3y^3-3$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^3-3$. Agora vamos determinar os pontos críticos de $f$ (2.1), de acordo com a definição (1.2.3). Basta fazermos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0$$

Desta forma temos:

$$\nabla f(x,y,z)=0$$
$$\nabla f(x,y,z)=(3x^2-3,3y^2-3,3z^2-3)=(0,0,0)$$

Resolveremos o sistema:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2-3=0\\ 3y^2-3=0\\ 3z^2-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=1\\ y^2=1\\ z^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm1\\ y=\pm1\\ z=\pm1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\{1,-1\}\\ y=\{1,-1\}\\ z=\{1,-1\}\end{cases}$$

Das equações $3x^2-3=0$, $3y^2-3=0$ e $3z^2-3=0$, segue que $x=\{1,-1\}$, $y=\{1,-1\}$, $z=\{1,-1\}$ respectivamente.
A solução do sistema é o conjunto S:
$S=\{(1,1,1),(-1,-1,1),(1,-1,1),(1,1,-1),(1,-1,-1),(-1,1,1),(-1,1,-1),(-1,-1,-1)\}$
Fazendo
$P_1=(1,1,1)$; $P_2=(-1,-1,1)$; $P_3=(1,-1,1)$; $P_4=(1,1,-1)$; $P_5=(1,-1,-1)$; $P_6=(-1,1,1)$; $P_7=(-1,1,-1)$ e $P_8=(-1,-1,-1)$
Verificaremos se os pontos anulam o gradiente:

$$\nabla f(x,y,z)=(3x^2-3,3y^2-3,3z^2-3)=(0,0,0)$$

- Para $P_1=(1,1,1)$, temos:
  $\nabla f(1,1,1)=(3(1)^2-3,3(1)^2-3,3(1)^2-3)=(0,0,0)$

- Para $P_2=(-1,-1,1)$, temos:
  $\nabla f(-1,-1,1)=(3(-1)^2-3,3(-1)^2-3,3(1)^2-3)=(0,0,0)$

- Para $P_3 = (1, -1, 1)$, temos:
  $\nabla f(1, -1, 1) = (3(1)^2 - 3, 3(-1)^2 - 3, 3(1)^2 - 3) = (0, 0, 0)$

- Para $P_4 = (1, 1, -1)$, temos:
  $\nabla f(1, 1, -1) = (3(1)^2 - 3, 3(1)^2 - 3, 3(-1)^2 - 3) = (0, 0, 0)$

- Para $P_5 = (1, -1, -1)$, temos:
  $\nabla f(1, -1, -1) = (3(1)^2 - 3, 3(-1)^2 - 3, 3(-1)^2 - 3) = (0, 0, 0)$

- Para $P_6 = (-1, 1, 1)$, temos:
  $\nabla f(-1, 1, 1) = (3(-1)^2 - 3, 3(1)^2 - 3, 3(1)^2 - 3) = (0, 0, 0)$

- Para $P_7 = (-1, 1, -1)$, temos:
  $\nabla f(-1, 1, -1) = (3(-1)^2 - 3, 3(1)^2 - 3, 3(-1)^2 - 3) = (0, 0, 0)$

- Para $P_8 = (-1, -1, -1)$, temos:
  $\nabla f(-1, -1, -1) = (3(-1)^2 - 3, 3(-1)^2 - 3, 3(-1)^2 - 3) = (0, 0, 0)$

Portanto, todos os pontos do conjunto $S$ são críticos.

### 2.2.2 Valor numérico ou valor crítico

Analogamente ao caso de duas varáveis, de acordo com a definição (1.2.6) no Capítulo 1. Para a função de três variáveis, dada a função $w = f(x, y, z)$, temos que $f(a, b, c)$ é o valor numérico ou crítico de $f(x, y, z)$, para $(x, y, z) = (a, b, c)$.
Determinaremos o valor numérico de cada ponto crítico, a seguir:

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$$

$$f(P_1) = f(1,1,1) = (1)^3 + (1)^3 + (1)^3 - 3(1) - 3(1) - 3(1) + 2 = -4$$
$$f(P_2) = f(-1,-1,1) = (-1)^3 + (-1)^3 + (1)^3 - 3(-1) - 3(-1) - 3(1) + 2 = 4$$
$$f(P_3) = f(1,-1,1) = (1)^3 + (-1)^3 + (1)^3 - 3(1) - 3(-1) - 3(1) + 2 = 0$$
$$f(P_4) = f(1,1,-1) = (1)^3 + (1)^3 + (-1)^3 - 3(1) - 3(1) - 3(-1) + 2 = 0$$
$$f(P_5) = f(1,-1,-1) = (1)^3 + (-1)^3 + (-1)^3 - 3(1) - 3(-1) - 3(-1) + 2 = 4$$
$$f(P_6) = f(-1,1,1) = (-1)^3 + (1)^3 + (1)^3 - 3(-1) - 3(1) - 3(1) + 2 = 0$$
$$f(P_7) = f(-1,1,-1) = (-1)^3 + (1)^3 + (-1)^3 - 3(-1) - 3(1) - 3(-1) + 2 = 0$$
$$f(P_8) = f(-1,-1,-1) = (-1)^3 + (-1)^3 + (-1)^3 - 3(-1) - 3(-1) - 3(-1) + 2 = 8$$

## 2.3 Superfícies de níveis

**Definição 2.3.1** *O conjunto de pontos (x,y,z) no espaço onde uma função de três variáveis independentes tem um valor constante $f(x,y,z) = k$ é chamado de superfície de nível de $f$.*

O gráfico de uma função de três variáveis é um subconjunto do espaço de quatro dimensões e, como tal, não temos a possibilidade de representá-lo em um desenho, dizemos que trata de uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^4$. De modo geral, o gráfico de uma função $f : A \to \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície do espaço $\mathbb{R}^{n+1}$.

Como já foi dito não é possível visualizar o gráfico de uma função de três variáveis, pois o gráfico é em quatro dimensões. Em vez disso, consideramos suas superfícies de nível.

Para a construção de tais superfícies de nível utiliza-se o seginte comando no wolfram Mathematica:

$$\text{ContourPlot3D}[f(x,y,z), \{x, x_{min}, x_{max}\}, \{y, y_{min}, y_{max}\}, \{z, z_{min}, z_{max}\}]$$

E para desenhar a superfície de nível deste exemplo, o comando fica da seguinte forma:

$$\text{ContourPlot3D}[x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}, \{z, -2, 2\}]$$

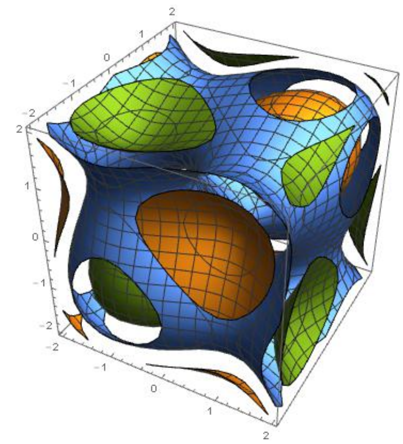


Figura 2.1: Superfícies de nível da função $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$
Fonte:Dos autores, com o auxílio do Mathematica (2016)

## 2.4 Vetores Gradiente

**Definição 2.4.1** *Seja f uma função de três variáveis o gradiente de f é definido como sendo a reta* $\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$.

Assim, o gradiente de f é um campo vetorial definido por $f(x, y, z) = \nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$ e é chamado de campo gradiente.
Para a construção do gráfico dos vetores, temos o seguinte comando:

$$VectorPlot3D[\{f_x, f_y, f_z\}, \{x, x_{min}, x_{max}\}, \{y, y_{min}, y_{max}\}, \{z, z_{min}, z_{max}\}]$$

Para nosso exemplo:

$$VectorPlot3D[\{3x^2 - 3, 3y^2 - 3, 3z^2 - 3\}, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}, \{z, -2, 2\}]$$

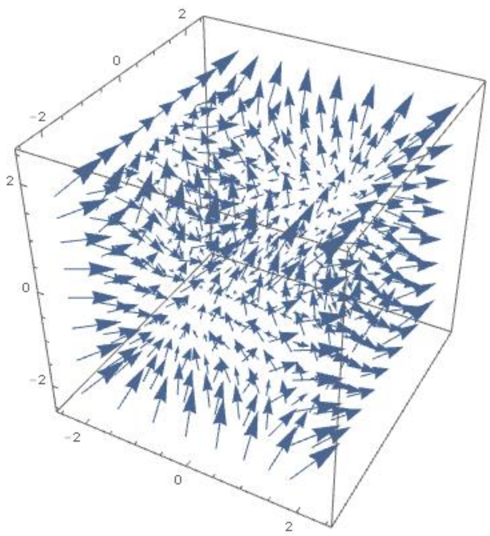


Figura 2.2: Campo de gradientes de $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$
Fonte:Dos autores, com o auxílio do Mathematica (2016).

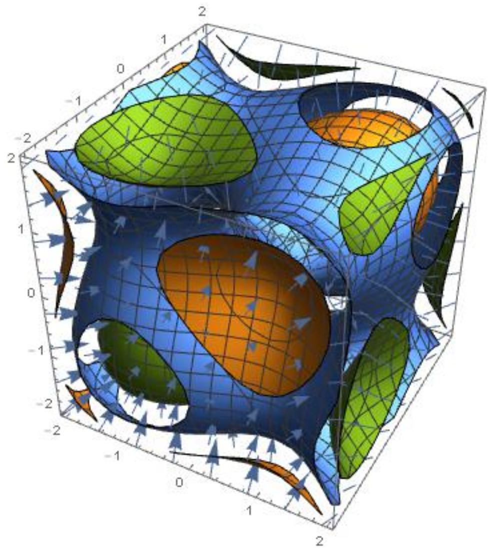



Figura 2.3: Superfícies de nível e vetores gradientes da função $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$
Fonte:Dos autores, com o auxílio do Mathematica (2016)

## 2.5 Derivadas parciais de segunda ordem

**Definição 2.5.1** *Seja f(x,y,z) uma função de três variáveis, quando derivamos esta função f(x,y,z) duas vezes, produzimos suas derivadas de segunda ordem, de forma análoga a derivada da função f(x,y).*
*As notações usuais são:*

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad f_{zx} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad f_{zy} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f_{xz} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \quad f_{yz} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \quad f_{zz} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Sabendo que a primeira derivada da função (2.1) em relação a $x$ é $f_x = 3x^2 - 3$, em relação a $y$ é $f_y = 3y^2 - 3$ e em relação a $z$ é $f_z = 3z^2 - 3$, de acordo com a definição (2.5.1) encontraremos as derivadas de segunda ordem.

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2-3)=6x \quad f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2-3)=0$$
$$f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial x}(3y^2-3)=0 \quad f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial y}(3y^2-3)=6y$$
$$f_{xz}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial z})=\frac{\partial}{\partial x}(3z^2-3)=0 \quad f_{yz}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial z})=\frac{\partial}{\partial y}(3z^2-3)=0$$
$$f_{zx}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial z}(3x^2-3)=0 \quad f_{zy}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial z}(3y^2-3)=0$$
$$f_{zz}=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial z})=\frac{\partial}{\partial z}(3z^2-3)=6z$$

## 2.6 Matriz hessiana

De acordo com a definição (1.5.1) do capítulo anterior, temos que se f é uma função de duas variáveis, sua matriz Hessiana é:

$$Hessf(x,y)=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Analogamente se f é uma função de três varáveis sua matriz Hessiana será:

$$Hessf(x,y,z)=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

Após encontrarmos as derivadas parciais de segunda ordem de $f(x,y,z)$, e fazendo a substituição na matriz hessiana de três variáveis, temos:

$$Hessf(x,y,z)=\begin{bmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{bmatrix}$$

### 2.6.1 Função hessiana

O determinante da matriz

$$Hessf(x,y,z)=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

é chamado de determinante hessiano da função $z=f(x,y,z)$ ou função hessiana.
Como mostra a seguir:
$detHessf(x,y,z)$=$(f_{xx}f_{yy}f_{zz}+f_{xy}f_{yz}f_{zx}+f_{xz}f_{yx}f_{zy})-(f_{zx}f_{yy}f_{xz}+f_{zy}f_{yz}f_{xx}+f_{zz}f_{yy}f_{xy})$

Deste modo temos:

$$detHessf(x,y,z) = (6x)(6y)(6z) = 216xyz$$

## 2.7 Determinante dos menores principais

De acordo com a definição (1.6.1) do capítulo anterior, encontraremos os determinantes dos menores principais para cada ponto crítico aplicado na matriz hessiana de ordem 3, logo:

- Para $P_1 = (1,1,1)$, a matriz hessiana é:

$$Hessf(P_1) = Hessf(1,1,1) = \begin{bmatrix} 6(1) & 0 & 0 \\ 0 & 6(1) & 0 \\ 0 & 0 & 6(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

O determinante de menor principal de ordem 1, é:

$$\Delta_1 = [6] = 6 > 0$$

O determinante de menor principal de ordem 2, é:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 36 > 0$$

O determinante de menor principal de ordem 3, é:

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 216 > 0$$

De acordo com o teorema (1.6.1), como $\Delta_1$, $\Delta_2$ e $\Delta_3$ são estritamente positivos, logo enquadram-se no caso 1(ponto de mínimo local estrito);

- Para $P_2 = (-1,-1,1)$, a matriz hessiana é:

$$Hessf(P_2) = Hessf(-1,-1,1) = \begin{bmatrix} 6(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 6(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 6(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

O determinante de menor principal de ordem 1, é:

$$\Delta_1 = [-6] = -6 < 0$$

O determinante de menor principal de ordem 2, é:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = 36 > 0$$

O determinante de menor principal de ordem 3, é:

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 216 > 0$$

De acordo com o teorema (1.6.1), como $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ e $\Delta_3 > 0$, não se enquadram no caso 1(Ponto de mínimo local estrito) nem no caso 2, como $\Delta_3 \neq 0$, temos um ponto de sela;

- Para $P_3 = (1, -1, 1)$, a mtriz hessiana é:

$$Hessf(P_3) = Hessf(1, -1, 1) = \begin{bmatrix} 6(1) & 0 & 0 \\ 0 & 6(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 6(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

O determinante de menor principal de ordem 1, é:

$$\Delta_1 = [6] = 6 > 0$$

O determinante de menor principal de ordem 2, é:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = -36 < 0$$

O determinante de menor principal de ordem 3, é:

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = -216 < 0$$

De acordo com o teorema (1.6.1), como $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$ e $\Delta_3 < 0$, não se enquadram no caso 1(Ponto de mínimo local estrito) nem no caso 2, como $\Delta_3 \neq 0$, temos um ponto de sela;

- Para $P_4 = (1, 1, -1)$, a matriz hessiana é:

$$Hessf(P_4) = Hessf(1, 1, -1) = \begin{bmatrix} 6(1) & 0 & 0 \\ 0 & 6(1) & 0 \\ 0 & 0 & 6(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

O determinante de menor principal de ordem 1,é:

$$\Delta_1 = [6] = 6 > 0$$

O determinante de menor principal de ordem 2, é:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 36 > 0$$

O determinante de menor principal de ordem 3, é:

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = -216 < 0$$

De acordo com o teorema (1.6.1), como $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ e $\Delta_3 < 0$, não se enquadram no caso 1(Ponto de mínimo local estrito) nem no caso 2, como $\Delta_3 \neq 0$, temos um ponto de sela;

- Para $P_5 = (1, -1, -1)$, a matriz hessiana é:

$$Hessf(P_5) = Hessf(1, -1, -1) = \begin{bmatrix} 6(1) & 0 & 0 \\ 0 & 6(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 6(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

O determinante de menor principal de ordem 1, é:

$$\Delta_1 = [6] = 6 > 0$$

O determinante de menor principal de ordem 2, é:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = -36 < 0$$

O determinante de menor principal de ordem 3, é:

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = 216 > 0$$

De acordo com o teorema (1.6.1), como $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$ e $\Delta_3 > 0$, não se enquadram no caso 1(Ponto de mínimo local estrito) nem no caso 2, como $\Delta_3 \neq 0$, temos um ponto de sela;

- Para $P_6 = (-1, 1, 1)$, a matriz hessiana é:

$$Hessf(P_5) = Hessf(-1,1,1) = \begin{bmatrix} 6(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 6(1) & 0 \\ 0 & 0 & 6(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

O determinante de menor principal de ordem 1, é:

$$\Delta_1 = [-6] = -6 < 0$$

O determinante de menor principal de ordem 2, é:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = -36 < 0$$

O determinante de menor principal de ordem 3, é:

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = -216 < 0$$

De acordo com o teorema (1.6.1), como $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$ e $\Delta_3 < 0$, não se enquadram no caso 1(Ponto de mínimo local estrito) nem no caso 2, como $\Delta_3 \neq 0$, temos um ponto de sela;

- Para $P_7 = (-1,1,-1)$, a matriz hessiana é:

$$Hessf(P_7) = Hessf(-1,1,-1) = \begin{bmatrix} 6(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 6(1) & 0 \\ 0 & 0 & 6(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

O determinante de menor principal de ordem 1, é:

$$\Delta_1 = [-6] = -6 < 0$$

O determinante de menor principal de ordem 2, é:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = -36 < 0$$

O determinante de menor principal de ordem 3, é:

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = 216 > 0$$

De acordo com o teorema (1.6.1), como $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$ e $\Delta_3 > 0$, não se enquadram no caso 1(Ponto de mínimo local estrito) nem no caso 2, como $\Delta_3 \neq 0$, temos um ponto de sela;

- Para $P_8 = (-1, -1, -1)$, matriz hessiana é:

$$Hessf(P_8) = Hessf(-1,-1,-1) = \begin{bmatrix} 6(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 6(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 6(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

O determinante de menor principal de ordem 1, é:

$$\Delta_1 = [-6] = -6 < 0$$

O determinante de menor principal de ordem 2, é:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = 36 > 0$$

O determinante de menor principal de ordem 3, é:

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = -216 < 0$$

De acordo com o teorema (1.6.1), como $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ e $\Delta_3 < 0$, como o determinante alterna entre negativo e positivo, começando por $\Delta_1 < 0$. Temos um ponto de máximo local.

Vejamos a seguir a tabela com a classificação dos pontos críticos quanto à sua natureza:

**Resumo dos pontos críticos da função de três variáveis.**

| Pontos Críticos | Natureza |
|---|---|
| $P_1$ | Ponto de mínimo |
| $P_2$ | Ponto de sela |
| $P_3$ | Ponto de sela |
| $P_4$ | Ponto de sela |
| $P_5$ | Ponto de sela |
| $P_6$ | Ponto de sela |
| $P_7$ | Ponto de sela |
| $P_8$ | Ponto de máximo |

## 2.8 Derivadas parciais de terceira ordem

As derivadas parciais de terceira ordem são definidas de forma análoga a derivadas parcias de segunda ordem. Seja $f(x,y,z)$ uma função de três variáveis, quando derivamos esta função $f(x,y,z)$ três vezes, produzimos suas derivadas de terceira ordem.
As suas notações são:

$$f_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad f_{xxy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

$$f_{xxz} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z} \quad f_{xyx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

$$f_{xyy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \quad f_{xyz} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$$

$$f_{xzx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial x} \quad f_{xzy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}$$

$$f_{xzz} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2} \quad f_{yxx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

$$f_{yxy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} \quad f_{yxz} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}$$

$$f_{yyx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \quad f_{yyy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

$$f_{yyz} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z} \quad f_{yzx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}$$

$$f_{yzy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial y} \quad f_{yzz} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}$$

$$f_{zxx} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x^2} \quad f_{zxy} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y}$$

$$f_{zxz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial z} \quad f_{zyx} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$$

$$f_{zyy} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y^2} \quad f_{zyz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial z}$$

$$f_{zzx} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x} \quad f_{zzy} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y}$$

$$f_{zzz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}$$

Logo há 27 derivadas possíveis.

**Observacao 2.8.1** *Da mesma maneira se define, se existirem, as* $3^k$ *derivadas parciais de ordem* $k$ *para qualquer* $k$ *natural.*

## 2.9 Autovalores da Hessiana (Teste do hessiano)

Vimos no caso de funções de duas variáveis que a natureza dos pontos críticos foi determinada pelo determinante dos menores Principais e o Teste da segunda derivada. No caso de funções de três variáveis usaremos a (generalização do teste da segunda derivada como mostra o teorema a seguir):

**Teorema 2.9.1** *(Caso Geral) Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2$ definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $P \in A$ seja um ponto crítico de f. Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os autovalores da matriz hessiana de f em P e detHessf(P) o hessiano de f em P. Temos:*

1. *Se $\lambda_j > 0$, $\forall\ 1 \leq j \leq n$ então P é um ponto de mínimo local de f.*

2. *Se $\lambda_j < 0$, $\forall\ 1 \leq j \leq n$ então P é um ponto de máximo local de f.*

3. *Se existirem dois autovalores $\lambda_i$ e $\lambda_j$ com sinais opostos então P é um ponto de sela de f.*

4. *Nos demais casos, isto é,*

   **a.** *$\lambda_j \geq 0$, $\forall\ 1 \leq j \leq n$ e existe um autovalor $\lambda_i = 0$ ou*

   **b.** *$\lambda_j \leq 0$, $\forall\ 1 \leq j \leq n$ e existe um autovalor $\lambda_i = 0$, não podemos afirmar nada sobre a natureza do ponto crítico P.*

Pelo teorema (2.9.1), encontraremos os autovalores da matriz hessiana de f em cada ponto crítico:

- $P_1 = (1, 1, 1)$, temos a seguinte matriz:

$$Hessf(P_1) = Hessf(1,1,1) = \begin{bmatrix} 6(1) & 0 & 0 \\ 0 & 6(1) & 0 \\ 0 & 0 & 6(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

E os autovalores de $Hessf(1, 1, 1)$ são as raizes da equação

$$P_1(\lambda) = det[Hessf(P_1) - \lambda I] = 0, \text{ isto é:}$$

$$P_1(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_1(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_1(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(6-\lambda)(6-\lambda)(6-\lambda) = 0 \tag{2.2}$$

Resolvendo a equação 2.2 encontramos os autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 6$. De acordo com o teorema (2.9.1), como os três autovalores tem sinais positivos, logo enquadra-se no caso 1.(Ponto de mínimo local).

- $P_2 = (-1, -1, 1)$, temos a seguinte matriz:

$$Hessf(P_2) = Hessf(-1,-1,1) = \begin{bmatrix} 6(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 6(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 6(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

E os autovalores de $Hessf(-1,-1,1)$ são as raizes da equação

$$P_2(\lambda) = det[Hessf(P_2) - \lambda I] = 0, \text{ isto é:}$$

$$P_2(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_2(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_2(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} -6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(-6-\lambda)(-6-\lambda)(6-\lambda) = 0 \tag{2.3}$$

Resolvendo a equação 2.3 encontramos os autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = -6$ e $\lambda_3 = 6$. De acordo com o teorema (2.9.1), como existem dois autovalores com sinais opostos, logo enquadra-se no caso 3.(Ponto de sela).

- $P_3 = (1, -1, 1)$, temos a seguinte matriz:

$$Hessf(P_3) = Hessf(1, -1, 1) = \begin{bmatrix} 6(1) & 0 & 0 \\ 0 & 6(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 6(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

E os autovalores de $Hessf(1, -1, 1)$ são as raizes da equação

$$P_3(\lambda) = det[Hessf(P_3) - \lambda I] = 0, \text{ isto é:}$$

$$P_3(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_3(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_3(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(6-\lambda)(-6-\lambda)(6-\lambda) = 0 \tag{2.4}$$

Resolvendo a equação 2.4 encontramos os autovalores $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -6$ e $\lambda_3 = 6$. De acordo com o teorema (2.9.1), como existem dois autovalores com sinais opostos, logo enquadra-se no caso 3.(Ponto de sela).

- $P_4 = (1, 1, -1)$, temos a seguinte matriz:

$$Hessf(P_4) = Hessf(1,1,-1) = \begin{bmatrix} 6(1) & 0 & 0 \\ 0 & 6(1) & 0 \\ 0 & 0 & 6(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

E os autovalores de $Hessf(1,1,-1)$ são as raizes da equação

$$P_4(\lambda) = det[Hessf(P_4) - \lambda I] = 0, \text{ isto é:}$$

$$P_4(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_4(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_4(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -6-\lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(6-\lambda)(6-\lambda)(-6-\lambda) = 0 \tag{2.5}$$

Resolvendo a equação 2.5 encontramos os autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ e $\lambda_3 = -6$. De acordo com o teorema (2.9.1), como existem dois autovalores com sinais opostos, logo enquadra-se no caso 3.(Ponto de sela).

- $P_5 = (1,-1,-1)$, temos a seguinte matriz:

$$Hessf(P_5) = Hessf(1,-1,-1) = \begin{bmatrix} 6(1) & 0 & 0 \\ 0 & 6(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 6(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

E os autovalores de $Hessf(1,-1,-1)$ são as raizes da equação

$$P_5(\lambda) = det[Hessf(P_5) - \lambda I] = 0, \text{ isto é:}$$

$$P_5(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_5(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_5(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -6-\lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(6-\lambda)(-6-\lambda)(-6-\lambda) = 0 \tag{2.6}$$

Resolvendo a equação 2.6 encontramos os autovalores $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = -6$. De acordo com o teorema (2.9.1), como existem dois autovalores com sinais opostos, logo enquadra-se no caso 3.(Ponto de sela).

- $P_6 = (-1, 1, 1)$, temos a seguinte matriz:

$$Hessf(P_6) = Hessf(-1,1,1) = \begin{bmatrix} 6(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 6(1) & 0 \\ 0 & 0 & 6(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

E os autovalores de $Hessf(-1,1,1)$ são as raizes da equação

$$P_6(\lambda) = det[Hessf(P_6) - \lambda I] = 0, \text{ isto é:}$$

$$P_6(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_6(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_6(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} -6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(-6-\lambda)(6-\lambda)(6-\lambda) = 0 \tag{2.7}$$

Resolvendo a equação 2.7 encontramos os autovalores $\lambda_1 = -6$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$. De acordo com o teorema (2.9.1), como existem dois autovalores com sinais opostos, logo enquadra-se no caso 3.(Ponto de sela).

- $P_7 = (-1, 1, -1)$, temos a seguinte matriz:

$$Hessf(P_7) = Hessf(-1,1,-1) = \begin{bmatrix} 6(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 6(1) & 0 \\ 0 & 0 & 6(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

E os autovalores de $Hessf(-1,1,-1)$ são as raizes da equação

$$P_7(\lambda) = det[Hessf(P_7) - \lambda I] = 0, \text{ isto é:}$$

$$P_7(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_7(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_7(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} -6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -6-\lambda \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(-6-\lambda)(6-\lambda)(-6-\lambda) = 0 \tag{2.8}$$

Resolvendo a equação 2.8 encontramos os autovalores $\lambda_1 = \lambda_3 = -6$ e $\lambda_2 = 6$. De acordo com o teorema (2.9.1), como existem dois autovalores com sinais opostos, logo enquadra-se no caso 3.(Ponto de sela).

- $P_8 = (-1, -1, -1)$, temos a seguinte matriz:

$$Hessf(P_8) = Hessf(-1,-1,-1) = \begin{bmatrix} 6(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 6(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 6(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

E os autovalores de $Hessf(-1,-1,-1)$ são as raizes da equação

$$P_8(\lambda) = det[Hessf(P_8) - \lambda I] = 0, \text{ isto é:}$$

$$P_8(\lambda) = det \left[ \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_8(\lambda) = det \left[ \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P_8(\lambda) = det \left[ \begin{pmatrix} -6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -6-\lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(-6-\lambda)(-6-\lambda)(-6-\lambda) = 0 \tag{2.9}$$

Resolvendo a equação 2.9 encontramos os autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -6$. De acordo com o teorema (2.9.1), como os três autovalores tem sinais negaivos, logo enquadra-se no caso 2.(Ponto de máximo local).

## 2.10 Polinômio de Taylor de ordem 3

**Definição 2.10.1** *Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função que tenha derivada até a ordem 3 no ponto (x,y,z)=(a,b,c), associamos à $f$ o polinômio $P(x,y,z)$ de grau $\leq 3$ dada por:*

$P(x,y,z) = f(a,b,c) + f'(a,b,c)(x-a, y-b, z-c) + \frac{1}{2!}f''(a,b,c)(x-a,y-b,z-c)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a,b,c)(x-a,y-b,z-c)^3$

*Fazendo $x-a = v_1, y-b = v_2, z-c = v_3$, temos:*

$P(x,y,z) = f(a,b,c) + f'(a,b,c)(v_1,v_2,v_3) + \frac{1}{2!}f''(a,b,c)(v_1,v_2,v_3)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a,b,c)(v_1,v_2,v_3)^3$

A expressão acima pode ser reduzida um pouco, pois já sabemos que o ponto (a,b,c) é um ponto crítico, então:

$$f'(a,b,c) = (f_x(a,b,c), f_y(a,b,c), f_z(a,b,c)) = (0,0,0)$$

e consequentemente

$$f'(a,b,c)(v_1,v_2,v_3) = (0,0,0)$$

Além disso, reescrevendo $f''(a,b,c)$ na forma matricial, nota-se a presença da matriz hessiana da função f aplicada no ponto (a,b,c).Temos

$$f''(a,b,c)(v_1,v_2,v_3)^2 = (v_1,v_2,v_3)\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b,c) & f_{xy}(a,b,c) & f_{xz}(a,b,c) \\ f_{yx}(a,b,c) & f_{yy}(a,b,c) & f_{yz}(a,b,c) \\ f_{zx}(a,b,c) & f_{zy}(a,b,c) & f_{zz}(a,b,c) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Da mesma forma para $f'''(a,b,c)$ temos:

$$f'''(a,b,c)(v_1,v_2,v_3)^3 = (v_1,v_2,v_3)^2\begin{pmatrix} f_{xxx}(a,b,c) & f_{xxy}(a,b,c) & f_{xxz}(a,b,c) \\ f_{yyx}(a,b,c) & f_{yyy}(a,b,c) & f_{yyz}(a,b,c) \\ f_{zzx}(a,b,c) & f_{zzy}(a,b,c) & f_{zzz}(a,b,c) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Como $f_{xy} = f_{xz} = f_{yx} = f_{yz} = f_{zx} = f_{zy} = 0$ é fácil verificar que as derivadas de terceira ordem são todas iguais a zero com exceção de $f_{xxx}, f_{yyy}, f_{zzz}$, ou seja:

$$f_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}) = \frac{\partial}{\partial x}(6x) = 6 \quad ; \quad f_{yyy} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial^2}{\partial y^2}) = \frac{\partial}{\partial x}(6y) = 6$$
$$f_{zzz} = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial^2}{\partial z^2}) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial z}(6z) = 6$$

Logo, temos:

$$f'''(a,b,c) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Portanto, o polinômio de Taylor se resume a:

$$P(x,y,z) = f(a,b,c) + \frac{1}{2!}\left[(v_1,v_2,v_3)\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b,c) & f_{xy}(a,b,c) & f_{xz}(a,b,c) \\ f_{yx}(a,b,c) & f_{yy}(a,b,c) & f_{yz}(a,b,c) \\ f_{zx}(a,b,c) & f_{zy}(a,b,c) & f_{zz}(a,b,c) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right] +$$
$$+\frac{1}{3!}\left[(v_1,v_2,v_3)^2\begin{pmatrix} f_{xxx}(a,b,c) & f_{xxy}(a,b,c) & f_{xxz}(a,b,c) \\ f_{yyx}(a,b,c) & f_{yyy}(a,b,c) & f_{yyz}(a,b,c) \\ f_{zzx}(a,b,c) & f_{zzy}(a,b,c) & f_{zzz}(a,b,c) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right]$$

Determinaremos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_1 = (1,1,1)$:
Pela definição 1.2.1 do capítulo anterior, temos que se $f(a,b,c)$ é o valor numérico de $f(x,y,z)$, logo $f(1,1,1) = -4$ é o valor numérico da função 2.1.

Pela definição 1.2.3, temos $f_x(a,b,c) = 0,\ f_y(a,b,c) = 0$ e $f_z(a,b,c) = 0, logo:$

$$f_x(1,1,1) = 0, f_y(1,1,1) = 0 \ \text{ e } f_z(1,1,1) = 0$$

Sabendo que a segunda derivada no ponto $P_1$ é:

$$f''(1,1,1) = \begin{bmatrix} f_{xx}(1,1,1) & f_{xy}(1,1,1) & f_{xz}(1,1,1) \\ f_{yx}(1,1,1) & f_{yy}(1,1,1) & f_{yz}(1,1,1) \\ f_{zx}(1,1,1) & f_{zy}(1,1,1) & f_{zz}(1,1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

E sabendo que a terceira derivada no ponto $P_1$ é:

$$f'''(1,1,1) = \begin{bmatrix} f_{xxx}(1,1,1) & f_{xxy}(1,1,1) & f_{xxz}(1,1,1) \\ f_{yyx}(1,1,1) & f_{yyy}(1,1,1) & f_{yyz}(1,1,1) \\ f_{zzx}(1,1,1) & f_{zzy}(1,1,1) & f_{zzz}(1,1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Fazendo a substituição dos valores encontrados no polinômio, temos:

$$P(x,y,z) = -4 + \frac{1}{2!}\left[(v_1,v_2,v_3)\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right] + \frac{1}{3!}\left[(v_1,v_2,v_3)^2\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right]$$

Resolvendo a expressão:
$P(x,y,z) = -4 + \frac{1}{2!}[6v_1^2 + 6v_2^2 + 6v_3^2] + \frac{1}{6}[6v_1^3 + 6v_2^3 + 6v_3^3]$
$P(x,y,z) = -4 + 3v_1^2 + 3v_2^2 + 3v_3^2 + v_1^3 + v_2^3 + v_3^3$
Como $v_1 = x - a$, $v_2 = y - b$ e $v_3 = z - c$. Para $P_1 = (1,1,1)$, $a = b = c = 1$. Assim temos:

$$P(x,y,z) = -4 + 3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 + 3(z-1)^2 + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3$$

Resolvendo, encontramos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_1$:

$$P(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2 \tag{2.10}$$

**Observacao 2.10.1** *Substituindo* $P_1 = (1,1,1)$ *no polinômio 2.10 encontramos seu valor numérico -4.*

Derivando $P(x,y,z)$ em relação a $x$, $y$ e $z$ temos:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 3; \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 - 3; \frac{\partial P}{\partial z} = 3z^2 - 3$$

Sabendo que os pontos críticos de $f(x,y,z)$ são aqueles que anulam seu gradiente, para $P(x,y,z)$, temos:

$$\nabla P(x,y,z) = 0$$

Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \\ 3z^2 - 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

Determinaremos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_2 = (-1, -1, 1)$:

Pela definição 1.2.1 do capítulo anterior, temos que se $f(a,b,c)$ é o valor numérico de $f(x,y,z)$, logo $f(-1,-1,1) = 4$ é o valor numérico da função 2.1.

Pela definição 1.2.3, temos $f_x(a,b,c) = 0$, $f_y(a,b,c) = 0$ e $f_z(a,b,c) = 0, logo:$

$$f_x(-1,-1,1) = 0, f_y(-1,-1,1) = 0 \text{ e } f_z(-1,-1,1) = 0$$

Sabendo que a segunda derivada no ponto $P_2$ é:

$$f''(-1,-1,1) = \begin{bmatrix} f_{xx}(-1,-1,1) & f_{xy}(-1,-1,1) & f_{xz}(-1,-1,1) \\ f_{yx}(-1,-1,1) & f_{yy}(-1,-1,1) & f_{yz}(-1,-1,1) \\ f_{zx}(-1,-1,1) & f_{zy}(-1,-1,1) & f_{zz}(-1,-1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

E sabendo que a terceira derivada no ponto $P_2$ é:

$$f'''(-1,-1,1) = \begin{bmatrix} f_{xxx}(-1,-1,1) & f_{xxy}(-1,-1,1) & f_{xxz}(-1,-1,1) \\ f_{yyx}(-1,-1,1) & f_{yyy}(-1,-1,1) & f_{yyz}(-1,-1,1) \\ f_{zzx}(-1,-1,1) & f_{zzy}(-1,-1,1) & f_{zzz}(-1,-1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Fazendo a substituição dos valores encontrados no polinômio temos:

$$P(x,y,z) = 4 + \frac{1}{2!}\left[(v_1, v_2, v_3)\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right] + \frac{1}{3!}\left[(v_1, v_2, v_3)^2\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right]$$

Resolvendo a expressão:

$P(x,y,z) = 4 + \frac{1}{2!}[-6v_1^2 - 6v_2^2 + 6v_3^2] + \frac{1}{6}[6v_1^3 + 6v_2^3 + 6v_3^3]$

$P(x,y,z) = 4 - 3v_1^2 - 3v_2^2 + 3v_3^2 + v_1^3 + v_2^3 + v_3^3$

Como $v_1 = x - a$, $v_2 = y - b$ e $v_3 = z - c$. Para $P_2 = (-1,-1,1)$, a=b=-1 e c=1. Assim temos:

$$P(x,y,z) = 4 - 3(x+1)^2 - 3(y+1)^2 + 3(z-1)^2 + (x+1)^3 + (y+1)^3 + (z-1)^3$$

Resolvendo, encontramos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_2$:

$$P(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$$

**Observacao 2.10.2** *Substituindo $P_2 = (-1,-1,1)$ no polinômio 2.10 encontramos seu valor numérico 4.*

Derivando $P(x,y,z)$ em relação a $x$, $y$ e $z$ temos:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 3; \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 - 3; \frac{\partial P}{\partial z} = 3z^2 - 3$$

Sabendo que os pontos críticos de $f(x,y,z)$ são aqueles que anulam seu gradiente, para $P(x,y,z)$, temos:

$$\nabla P(x,y,z) = \vec{0}$$

Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \\ 3z^2 - 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

Determinaremos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_3 = (1,-1,1)$: Pela definição 1.2.1 do capítulo anterior, temos que se $f(a,b,c)$ é o valor numérico de $f(x,y,z)$, logo $f(1,-1,1) = 0$ é o valor numérico da função 2.1.
Pela definição 1.2.3, temos $f_x(a,b,c) = 0$, $f_y(a,b,c) = 0$ e $f_z(a,b,c) = 0, logo:$

$$f_x(1,-1,1) = 0, f_y(1,-1,1) = 0 \text{ e } f_z(1,-1,1) = 0$$

Sabendo que a segunda derivada no ponto $P_3$ é:

$$f''(1,-1,1) = \begin{bmatrix} f_{xx}(1,-1,1) & f_{xy}(1,-1,1) & f_{xz}(1,-1,1) \\ f_{yx}(1,-1,1) & f_{yy}(1,-1,1) & f_{yz}(1,-1,1) \\ f_{zx}(1,-1,1) & f_{zy}(1,-1,1) & f_{zz}(1,-1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

E sabendo que a terceira derivada no ponto $P_3$ é:

$$f'''(1,-1,1) = \begin{bmatrix} f_{xxx}(1,-1,1) & f_{xxy}(1,-1,1) & f_{xxz}(1,-1,1) \\ f_{yyx}(1,-1,1) & f_{yyy}(1,-1,1) & f_{yyz}(1,-1,1) \\ f_{zzx}(1,-1,1) & f_{zzy}(1,-1,1) & f_{zzz}(1,-1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Fazendo a substituição dos valores encontrados no polinômio temos:

$$P(x,y,z) = \frac{1}{2!}\left[(v_1,v_2,v_3)\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right] + \frac{1}{3!}\left[(v_1,v_2,v_3)^2\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right]$$

Resolvendo a expressão:

$P(x,y,z) = \frac{1}{2!}[6v_1^2 - 6v_2^2 + 6v_3^2] + \frac{1}{6}[6v_1^3 + 6v_2^3 + 6v_3^3]$

$P(x,y,z) = 3v_1^2 - 3v_2^2 + 3v_3^2 + v_1^3 + v_2^3 + v_3^3$

Como $v_1 = x-a$, $v_2 = y-b$ e $v_3 = z-c$. Para $P_3 = (1,-1,1)$, a=c=1 e b=-1. Assim temos:

$$P(x,y,z) = 3(x-1)^2 + 3(y+1)^2 + 3(z-1)^2 + (x-1)^3 + (y+1)^3 + (z-1)^3$$

Resolvendo, encontramos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_3$:

$$P(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$$

**Observacao 2.10.3** *Substituindo $P_3 = (1,-1,1)$ no polinômio 2.10 encontramos seu valor numérico 0.*

Derivando $P(x,y,z)$ em relação a $x$, $y$ e $z$ temos:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 3; \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 - 3; \frac{\partial P}{\partial z} = 3z^2 - 3$$

Sabendo que os pontos críticos de $f(x,y,z)$ são aqueles que anulam seu gradiente, para $P(x,y,z)$, temos:

$$\nabla P(x,y,z) = 0$$

Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \\ 3z^2 - 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

Determinaremos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_4 = (1,1,-1)$: Pela definição 1.2.1 do capítulo anterior, temos que se $f(a,b,c)$ é o valor numérico de $f(x,y,z)$, logo $f(1,1,-1) = 0$ é o valor numérico da função 2.1.

Pela definição 1.2.3, temos $f_x(a,b,c) = 0$, $f_y(a,b,c) = 0$ e $f_z(a,b,c) = 0, logo:$

$$f_x(1,1,-1) = 0, f_y(1,1,-1) = 0 \text{ e } f_z(1,1,-1) = 0$$

Sabendo que a segunda derivada no ponto $P_4$ é:

$$f''(1,1,-1) = \begin{bmatrix} f_{xx}(1,1,-1) & f_{xy}(1,1,-1) & f_{xz}(1,1,-1) \\ f_{yx}(1,1,-1) & f_{yy}(1,1,-1) & f_{yz}(1,1,-1) \\ f_{zx}(1,1,-1) & f_{zy}(1,1,-1) & f_{zz}(1,1,-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

E sabendo que a terceira derivada no ponto $P_4$ é:

$$f'''(1,1,-1) = \begin{bmatrix} f_{xxx}(1,1,-1) & f_{xxy}(1,1,-1) & f_{xxz}(1,1,-1) \\ f_{yyx}(1,1,-1) & f_{yyy}(1,1,-1) & f_{yyz}(1,1,-1) \\ f_{zzx}(1,1,-1) & f_{zzy}(1,1,-1) & f_{zzz}(1,1,-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Fazendo a substituição dos valores encontrados no polinômio temos:

$$P(x,y,z) = \frac{1}{2!}\left[(v_1,v_2,v_3)\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right] + \frac{1}{3!}\left[(v_1,v_2,v_3)^2\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right]$$

Resolvendo a expressão:
$P(x,y,z) = \frac{1}{2!}[6v_1^2 + 6v_2^2 - 6v_3^2] + \frac{1}{6}[6v_1^3 + 6v_2^3 + 6v_3^3]$
$P(x,y,z) = 3v_1^2 + 3v_2^2 - 3v_3^2 + v_1^3 + v_2^3 + v_3^3$
Como $v_1 = x-a$, $v_2 = y-b$ e $v_3 = z-c$. Para $P_4 = (1,1,-1)$, a=b=1 e c=-1. Assim temos:

$$P(x,y,z) = 3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 + 3(z+1)^2 + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z+1)^3$$

Resolvendo, encontramos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_4$:

$$P(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$$

**Observacao 2.10.4** *Substituindo $P_4 = (1,1,-1)$ no polinômio 2.10 encontramos seu valor numérico 0.*

Derivando $P(x,y,z)$ em relação a $x$, $y$ e $z$ temos:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 3; \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 - 3; \frac{\partial P}{\partial z} = 3z^2 - 3$$

Sabendo que os pontos críticos de $f(x,y,z)$ são aqueles que anulam seu gradiente, para $P(x,y,z)$, temos:

$$\nabla P(x,y,z) = 0$$

Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \\ 3z^2 - 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

Determinaremos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_5 = (1, -1, -1)$: Pela definição 1.2.1 do capítulo anterior, temos que se $f(a, b, c)$ é o valor numérico de $f(x, y, z)$, logo $f(1, -1, -1) = 4$ é o valor numérico da função 2.1.
Pela definição 1.2.3, temos $f_x(a, b, c) = 0,\ f_y(a, b, c) = 0$ e $f_z(a, b, c) = 0, logo:$

$$f_x(1, -1, -1) = 0, f_y(1, -1, -1) = 0 \text{ e } f_z(1, -1, -1) = 0$$

Sabendo que a segunda derivada no ponto $P_1$ é:

$$f''(1, -1, -1) = \begin{bmatrix} f_{xx}(1, -1, -1) & f_{xy}(1, -1, -1) & f_{xz}(1, -1, -1) \\ f_{yx}(1, -1, -1) & f_{yy}(1, -1, -1) & f_{yz}(1, -1, -1) \\ f_{zx}(1, -1, -1) & f_{zy}(1, -1, -1) & f_{zz}(1, -1, -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

E sabendo que a terceira derivada no ponto $P_5$ é:

$$f'''(1, -1, -1) = \begin{bmatrix} f_{xxx}(1, -1, -1) & f_{xxy}(1, -1, -1) & f_{xxz}(1, -1, -1) \\ f_{yyx}(1, -1, -1) & f_{yyy}(1, -1, -1) & f_{yyz}(1, -1, -1) \\ f_{zzx}(1, -1, -1) & f_{zzy}(1, -1, -1) & f_{zzz}(1, -1, -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Fazendo a substituição dos valores encontrados no polinômio temos:

$$P(x, y, z) = 4 + \frac{1}{2!} \left[ (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right] + \frac{1}{3!} \left[ (v_1, v_2, v_3)^2 \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right]$$

Resolvendo a expressão:
$P(x, y, z) = 4 + \frac{1}{2!}[6v_1^2 + 6v_2^2 - 6v_3^2] + \frac{1}{6}[6v_1^3 + 6v_2^3 + 6v_3^3]$
$P(x, y, z) = 4 + 3v_1^2 + 3v_2^2 - 3v_3^2 + v_1^3 + v_2^3 + v_3^3$
Como $v_1 = x - a$, $v_2 = y - b$ e $v_3 = z - c$. Para $P_5 = (1, -1, -1)$, a=1 e b=c=-1. Assim temos:

$$P(x, y, z) = 4 + 3(x - 1)^2 + 3(y + 1)^2 + 3(z + 1)^2 + (x - 1)^3 + (y + 1)^3 + (z + 1)^3$$

Resolvendo, encontramos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_5$:

$$P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$$

**Observacao 2.10.5** *Substituindo $P_5 = (1, -1, -1)$ no polinômio 2.10 encontramos seu* *valor numérico 4.*

Derivando $P(x,y,z)$ em relação a $x$, $y$ e $z$ temos:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 3; \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 - 3; \frac{\partial P}{\partial z} = 3z^2 - 3$$

Sabendo que os pontos críticos de $f(x,y,z)$ são aqueles que anulam seu gradiente, para $P(x,y,z)$, temos:

$$\nabla P(x,y,z) = 0$$

Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \\ 3z^2 - 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

Determinaremos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_6 = (-1,1,1)$:

Pela definição 1.2.1 do capítulo anterior, temos que se $f(a,b,c)$ é o valor numérico de $f(x,y,z)$, logo $f(-1,1,1) = 0$ é o valor numérico da função 2.1.

Pela definição 1.2.3, temos $f_x(a,b,c) = 0$, $f_y(a,b,c) = 0$ e $f_z(a,b,c) = 0, logo:$

$$f_x(-1,1,1) = 0, f_y(-1,1,1) = 0 \text{ e } f_z(-1,1,1) = 0$$

Sabendo que a segunda derivada no ponto $P_6$ é:

$$f''(-1,1,1) = \begin{bmatrix} f_{xx}(-1,1,1) & f_{xy}(-1,1,1) & f_{xz}(-1,1,1) \\ f_{yx}(-1,1,1) & f_{yy}(-1,1,1) & f_{yz}(-1,1,1) \\ f_{zx}(-1,1,1) & f_{zy}(-1,1,1) & f_{zz}(-1,1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

E sabendo que a terceira derivada no ponto $P_6$ é:

$$f'''(-1,1,1) = \begin{bmatrix} f_{xxx}(-1,1,1) & f_{xxy}(-1,1,1) & f_{xxz}(-1,1,1) \\ f_{yyx}(-1,1,1) & f_{yyy}(-1,1,1) & f_{yyz}(-1,1,1) \\ f_{zzx}(-1,1,1) & f_{zzy}(-1,1,1) & f_{zzz}(-1,1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Fazendo a substituição dos valores encontrados no polinômio temos:

$$P(x,y,z) = \frac{1}{2!}\left[(v_1,v_2,v_3)\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right] + \frac{1}{3!}\left[(v_1,v_2,v_3)^2\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right]$$

Resolvendo a expressão:

$P(x, y, z) = \frac{1}{2!}[-6v_1^2 + 6v_2^2 + 6v_3^2] + \frac{1}{6}[6v_1^3 + 6v_2^3 + 6v_3^3]$
$P(x, y, z) = -3v_1^2 + 3v_2^2 + 3v_3^2 + v_1^3 + v_2^3 + v_3^3$
Como $v_1 = x - a$, $v_2 = y - b$ e $v_3 = z - c$. Para $P_6 = (-1, 1, 1)$, a-1 e b=c=1. Assim temos:

$$P(x, y, z) = -3(x + 1)^2 + 3(y - 1)^2 + 3(z - 1)^2 + (x + 1)^3 + (y - 1)^3 + (z - 1)^3$$

Resolvendo, encontramos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_6$:

$$P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$$

**Observacao 2.10.6** *Substituindo $P_6 = (-1, 1, 1)$ no polinômio 2.10 encontramos seu valor numérico 0.*

Derivando $P(x, y, z)$ em relação a $x$, $y$ e $z$ temos:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 3; \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 - 3; \frac{\partial P}{\partial z} = 3z^2 - 3$$

Sabendo que os pontos críticos de $f(x, y, z)$ são aqueles que anulam seu gradiente, para $P(x, y, z)$, temos:

$$\nabla P(x, y, z) = 0$$

Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \\ 3z^2 - 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

Determinaremos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_7 = (-1, 1, -1)$: Pela definição 1.2.1 do capítulo anterior, temos que se $f(a, b, c)$ é o valor numérico de $f(x, y, z)$, logo $f(-1, 1, -1) = 4$ é o valor numérico da função 2.1.
Pela definição 1.2.3, temos $f_x(a, b, c) = 0$, $f_y(a, b, c) = 0$ e $f_z(a, b, c) = 0, logo:$

$$f_x(-1, 1, -1) = 0, f_y(-1, 1, -1) = 0 \text{ e } f_z(-1, 1, -1) = 0$$

Sabendo que a segunda derivada no ponto $P_7$ é:

$$f''(-1, 1, -1) = \begin{bmatrix} f_{xx}(-1, 1, -1) & f_{xy}(-1, 1, -1) & f_{xz}(-1, 1, -1) \\ f_{yx}(-1, 1, -1) & f_{yy}(-1, 1, -1) & f_{yz}(-1, 1, -1) \\ f_{zx}(-1, 1, -1) & f_{zy}(-1, 1, -1) & f_{zz}(-1, 1, -1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

E sabendo que a terceira derivada no ponto $P_7$ é:

$$f'''(-1,1,-1) = \begin{bmatrix} f_{xxx}(-1,1,-1) & f_{xxy}(-1,1,-1) & f_{xxz}(-1,1,-1) \\ f_{yyx}(-1,1,-1) & f_{yyy}(-1,1,-1) & f_{yyz}(-1,1,-1) \\ f_{zzx}(-1,1,-1) & f_{zzy}(-1,1,-1) & f_{zzz}(-1,1,-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Fazendo a substituição dos valores encontrados no polinômio temos:

$$P(x,y,z) = 4 + \frac{1}{2!}\left[(v_1, v_2, v_3)\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right] + \frac{1}{3!}\left[(v_1, v_2, v_3)^2\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right]$$

Resolvendo a expressão:
$P(x,y,z) = 4 + \frac{1}{2!}[-6v_1^2 + 6v_2^2 - 6v_3^2] + \frac{1}{6}[6v_1^3 + 6v_2^3 + 6v_3^3]$
$P(x,y,z) = 4 - 3v_1^2 + 3v_2^2 - 3v_3^2 + v_1^3 + v_2^3 + v_3^3$
Como $v_1 = x - a$, $v_2 = y - b$ e $v_3 = z - c$. Para $P_7 = (-1,1,-1)$, a=c=-1 e b=1. Assim temos:

$$P(x,y,z) = 4 - 3(x+1)^2 + 3(y-1)^2 - 3(z+1)^2 + (x+1)^3 + (y-1)^3 + (z+1)^3$$

Resolvendo, encontramos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_7$:

$$P(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$$

**Observacao 2.10.7** *Substituindo $P_7 = (-1,1,-1)$ no polinômio 2.10 encontramos seu valor numérico 4.*

Derivando $P(x,y,z)$ em relação a $x$, $y$ e $z$ temos:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 3; \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 - 3; \frac{\partial P}{\partial z} = 3z^2 - 3$$

Sabendo que os pontos críticos de $f(x,y,z)$ são aqueles que anulam seu gradiente, para $P(x,y,z)$, temos:

$$\nabla P(x,y,z) = 0$$

Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \\ 3z^2 - 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

Determinaremos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_8 = (-1,-1,-1)$: Pela definição 1.2.1 do capítulo anterior, temos que se $f(a,b,c)$ é o valor numérico de $f(x,y,z)$,

logo $f(-1,-1,-1) = 8$ é o valor numérico da função 2.1.
Pela definição 1.2.3, temos $f_x(a,b,c) = 0$, $f_y(a,b,c) = 0$ e $f_z(a,b,c) = 0, logo:$

$$f_x(-1,-1,-1) = 0, f_y(-1,-1,-1) = 0 \text{ e } f_z(-1,-1,-1) = 0$$

Sabendo que a segunda derivada no ponto $P_8$ é:

$$f''(-1,-1,-1) = \begin{bmatrix} f_{xx}(-1,-1,-1) & f_{xy}(-1,-1,-1) & f_{xz}(-1,-1,-1) \\ f_{yx}(-1,-1,-1) & f_{yy}(-1,-1,-1) & f_{yz}(-1,-1,-1) \\ f_{zx}(-1,-1,-1) & f_{zy}(-1,-1,-1) & f_{zz}(-1,-1,-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

E sabendo que a terceira derivada no ponto $P_8$ é:

$$f'''(-1,-1,-1) = \begin{bmatrix} f_{xxx}(-1,-1,-1) & f_{xxy}(-1,-1,-1) & f_{xxz}(-1,-1,-1) \\ f_{yyx}(-1,-1,-1) & f_{yyy}(-1,-1,-1) & f_{yyz}(-1,-1,-1) \\ f_{zzx}(-1,-1,-1) & f_{zzy}(-1,-1,-1) & f_{zzz}(-1,-1,-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Fazendo a substituição dos valores encontrados no polinômio temos:

$$P(x,y,z) = 8 + \frac{1}{2!}\left[(v_1,v_2,v_3)\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right] + \frac{1}{3!}\left[(v_1,v_2,v_3)^2\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right]$$

Resolvendo a expressão:
$P(x,y,z) = 8 + \frac{1}{2!}[-6v_1^2 - 6v_2^2 - 6v_3^2] + \frac{1}{6}[6v_1^3 + 6v_2^3 + 6v_3^3]$
$P(x,y,z) = 8 - 3v_1^2 - 3v_2^2 - 3v_3^2 + v_1^3 + v_2^3 + v_3^3$
Como $v_1 = x - a$, $v_2 = y - b$ e $v_3 = z - c$. Para $P_8 = (-1,-1,-1)$, a=b=c=-1. Assim temos:

$$P(x,y,z) = 8 - 3(x+1)^2 - 3(y+1)^2 - 3(z+1)^2 + (x+1)^3 + (y+1)^3 + (z+1)^3$$

Resolvendo, encontramos o polinômio de Taylor em volta do ponto $P_8$:

$$P(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$$

**Observacao 2.10.8** *Substituindo $P_8 = (-1,-1,-1)$ no polinômio 2.10 encontramos seu valor numérico 8.*

Derivando $P(x,y,z)$ em relação a $x$, $y$ e $z$ temos:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 3; \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 - 3; \frac{\partial P}{\partial z} = 3z^2 - 3$$

Sabendo que os pontos críticos de $f(x,y,z)$ são aqueles que anulam seu gradiente, para $P(x,y,z)$, temos:

$$\nabla P(x,y,z) = 0$$

Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \\ 3z^2 - 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

Como estendemos a fórmula de Taylor até grau 3, aproximamos tanto a função que encontramos um único polinômio para todos os pontos críticos, coincidindo com a função 2.1, por esta razão o polinômio gerou todos os pontos.
Se tivéssemos usado a fórmula até o grau 2, encontraríamos diferentes polinômios de Taylor para os pontos críticos e cada um desses polinômios geraria um único ponto como vímos no capítulo anterior no $\mathbb{R}^2$.
O operador de Laplace ou laplaciano ($\Delta$), é o divergente do gradiente de uma função no $\mathbb{R}^n$. O gradiente já foi definido anteriormente (ver EQUAÇÃO (2.4.1)).

Seja $f = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n)) \in \mathbb{R}^n$. O seu gradiente é obtido por $\nabla f = (\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_n}{x_n}$.

O divergente de uma função no $\mathbb{R}^n$, é o produto escalar do operador diferencial ($\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$) pela função vetorial $\vec{f}$. Simbolicamente:

$$div\vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \left((\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n)) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)).$$

Sendo assim, o operador laplaciano é obtido por:

$$\Delta\vec{f} = div(grad\vec{f}) = \nabla \cdot (\nabla\vec{f}) = \nabla^2\vec{f}$$

ou seja, é um operador de segunda ordem ($\Delta = \nabla^2$), podendo ser então utilizado para classificar pontos críticos de funções no $\mathbb{R}^n$, analogamente ao teste da segunda derivada visto em Cálculo I.

$$\Delta P = \nabla^2\vec{f} = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}, \cdots, \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2}\right)$$

A seguir definiremos Operador e Equação de Laplace, equação estabelecida pelo matemático Pierre Simon Marquis de Laplace (Beaumont-en-Auge, 23 de março de 1749 - Paris, 5 de março de 1827), astrônomo e físico francês que organizou a astronomia matemática, resumindo e ampliando o trabalho de seus predecessores nos cinco volumes do seu Mécanique Céleste (Mecânica celeste) (1799-1825). Esta obra-prima traduziu o estudo geométrico da mecânica clássica usada por Isaac Newton para um estudo baseado em cálculo, conhecido como mecânica física.

Ele também formulou a equação de Laplace. A transformada de Laplace aparece em todos os ramos da física matemática - campo em que teve um papel principal na formação. O operador diferencial de Laplace, da qual depende muito a matemática aplicada, também recebe seu nome.
Ele se tornou conde do Império em 1806 e foi nomeado marquês em 1817, depois da restauração dos Bourbons.

**Definição 2.10.2** *Operador e Equação de Laplace: O operador de Laplace ou laplaciano, denotado por $\Delta^2$, para funções de três variáveis é:*

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

*A equação de Laplace é:*

$$\Delta f = 0 \text{ ou seja } \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0$$

$$\Delta^2 P = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(P(x,y,z)$$

Calcular o laplaciano de $P(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$
$\Delta P = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2) + \frac{\partial}{\partial z}(x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2)$

$$\Downarrow$$

$$\Delta P = 3x^2 - 3 + 3y^2 - 3 + 3z^2 - 3$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta \cdot \Delta P = \Delta^2 P = 6x + 6y + 6z$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta^2 P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$Hessf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{pmatrix}$$

Para $P_1 = (1,1,1)$, temos a seguinte matriz:

$$Hessf(1,1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

E os autovalores de $HessP(1,1,1)$ são as raízes da equação:

$$P_1(\lambda) = det[Hessf(P_1) - \lambda I] = 0, \text{ isto é, :}$$

$$P_1(\lambda) = det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(6-\lambda)(6-\lambda)(6-\lambda) = 0$$

Resolvendo a equação encontramos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 6$. De acordo com o teorema 1.6.1, como os três autovalores tem sinais positivos, logo enquadra-se no caso 1. (Ponto de mínimo local).

De maneira análoga, consegue-se classificar os demais pontos críticos.

## 2.11 Multiplicadores de Lagrange

Vamos estudar o problema de otimização envolvendo uma função f(x,y,z) que esteja a uma restrição g(x,y,z)=k, onde f e g são de classe $C^1$, e que $\nabla g \neq 0$.

**Teorema 2.11.1** *Sejam $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, funções diferenciáveis, tais que suas derivadas parciais de 1ª ordem sejam contínuas numa região no espaço, na qual $\nabla g(x,y,z) \neq 0$. Se f tem um extremo local $f(x_0, y_0, z_0)$ sujeito a uma restrição $g(x,y,z) = k_2$, então existe um número real $\lambda$, chamado multiplicador de Lagrange, tal que:*

$$\begin{cases} \nabla f(x_0, y_0, z_0) & = & \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) \\ g(x,y,z) & = & k \end{cases}$$

Para se estudar a função Lagrangeana, definida:

$$\Lambda(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda(g(x,y,z) - c)$$

Nessa função, o termo $\lambda$ pode ser adicionado ou subtraído. Se f(x,y,z) é um ponto de máximo para o problema original, então existe $\lambda$ tal que $(x,y,z,\lambda)$ é um ponto estacionário para o qual as derivadas parciais de $\Lambda$ são iguais a zero. No entanto, nem todos os pontos estacionários permitem uma solução para o problema original. Portanto, o método dos multiplicadores de Lagrange garante uma condição necessária para a otimização em problemas de otimização com restrição.

**Exemplo 2.11.1** *Determine os pontos extremos da função $f(x,y,z) = xyz$ tais que*

$$x^2 + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$$

*Sejam:*

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x^2 + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} - 1 \\ \nabla f(x,y,z) &= (yz, xz, xy) \\ \nabla g(x,y,z) &= (2x, \frac{y}{6}, \frac{2z}{3}) \end{aligned}$$

Devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ x^2 + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1 \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$yz = 2x\lambda \tag{2.11}$$
$$xz = \frac{y}{6}\lambda \tag{2.12}$$
$$xy = \frac{2}{3}z\lambda \tag{2.13}$$
$$x^2 + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1 \tag{2.14}$$

Multiplicando (2.11) por x, (2.12) por y e (2.13) por z, obtemos:

$$xyz = 2x^2\lambda \tag{2.15}$$
$$xyz = \frac{y^2}{6}\lambda \tag{2.16}$$
$$xyz = \frac{2}{3}z^2\lambda \tag{2.17}$$
$$x^2 + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$$

Somando 2.15, 2.16, e 2.17 e tendo em vista 2.14, temos $3xyz = 2\lambda(x^2 + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3}) = 2\lambda$; substituindo xyz por $\frac{2\lambda}{3}$ em 2.15,2.16 e 2.17:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\lambda = \lambda 2x^2 \\ \frac{2}{3}\lambda = \lambda\frac{y^2}{6} \\ \frac{2}{3}\lambda = \lambda\frac{2z^2}{3} \end{cases} \begin{cases} \lambda = \lambda 3x^2 \\ \lambda = \lambda\frac{y^2}{4} \\ \lambda = \lambda z^2 \end{cases} \begin{cases} \lambda 3x^2 - \lambda = 0 \\ \lambda\frac{y^2}{4} - \lambda = 0 \\ \lambda z^2 - \lambda = 0 \end{cases} \begin{cases} \lambda(3x^2 - 1) = 0 \\ \lambda(\frac{y^2}{4} - 1) = 0 \\ \lambda(z^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Como $\lambda \neq 0$, $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $y = \pm 2$ e $z = \pm 1$.
Assim:

$$x = \{\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\}, y = \{2, -2\}, z = \{1, -1\}$$

Com isso temos a solução dos ternos ordenados, que são os pontos:

$$(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2, 1), (\frac{\sqrt{3}}{3}, 2, -1), (\frac{\sqrt{3}}{3}, -2, 1), (\frac{\sqrt{3}}{3}, -2, -1)$$

$$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 2, 1), (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 2, -1), (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -2, 1), (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -2, -1)$$

Sabendo que a função $f(x, y, z) = xyz$

$f(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2, 1) = \frac{\sqrt{3}}{3}.2.1 = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2, -1) = \frac{\sqrt{3}}{3}.2(-1) = -2\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(\frac{\sqrt{3}}{3}, -2, 1) = \frac{\sqrt{3}}{3}.(2).1 = -2\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(\frac{\sqrt{3}}{3}, -2, -1) = \frac{\sqrt{3}}{3}.(-2).(-1) = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 2, 1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.2.1 = -2\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 2, -1) = (-\frac{\sqrt{3}}{3}).2.(-1) = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -2, 1) = (-\frac{\sqrt{3}}{3}).(-2).1 = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -2, -1) = (-\frac{\sqrt{3}}{3}).(-2).(-1) = -2\frac{\sqrt{3}}{3}$

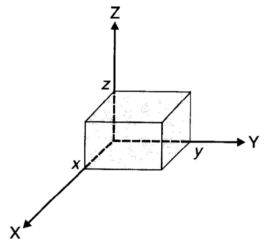
Com isso temos que o mínimo da função é $-2\frac{\sqrt{3}}{3}$ e o máximo é $2\frac{\sqrt{3}}{3}$.

## 2.12 Aplicação

**Problema 2.12.1** *Um fabricante de embalagens deve fabricar um lote de caixas retangulares de volume $V = 64cm^3$. Se o custo do material usado na fabricação da caixa é de* $\mathbb{R}\$0,50$ *por centímetro quadrado, vamos determinar as dimensões da caixa que tornem mínimo o custo do material usado em sua fabricação.*

**Solução:**

Sejam x,y,z as dimensões da caixa, conforme a figura a seguir:




Fonte: Dos autores

O volume da caixa é dado por: $V = xyz$
A sua área de superfície é: $A = 2xy + 2xz + 2yz$
O custo do material usado para a fabricação da caixa é dado por:

$$C(x, y, z) = 0,50 \cdot (2xy + 2xz + 2yz) = xy + xz + yz$$

Estamos, assim, diante do seguinte problema de otimização:

$$\begin{cases} minC(x, y, z) = xy + xz + yz \\ S \cdot a : xyz = 64 \end{cases}$$

A função lagrangeana para esse problema, é dado por:

$$L(x, y, z, \lambda) = xy + xz + yz - \lambda(xyz - 64)$$

Derivando L em relação às variáveis x,y,z e $\lambda$, e igualando a zero as derivadas, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} y + z - \lambda yz = 0 \\ x + z - \lambda xz = 0 \\ x + y - \lambda xy = 0 \\ -xyz + 64 = 0 \end{cases} \begin{cases} y + z = \lambda yz \\ x + z = \lambda xz \\ x + y = \lambda xy \\ xyz = 64 \end{cases}$$

Da última equação, segue que: $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $z \neq 0$. Das três primeiras equações, concluímos que $\lambda \neq 0$, pois em caso contrário teriámos x=0, y=0 e z=0.
Assim, sabendo que $\lambda \neq 0$ e isolando $\lambda$ nas duas primeiras equações, obtemos as seguintes equações equivalentes:
$\dfrac{x + z}{xz} = \dfrac{y + z}{yz} \Rightarrow (x + z)yz = (y + z)xz \Rightarrow xyz + xz^2 = xyz + xz^2 \Rightarrow yz^2 = xz^2 \Rightarrow y = x$
Da mesma forma, trabalhando com a segunda e a terceira equação, temos que y=z.
Substituindo esses resultados na última equação, obtemos: $x = y = z = \sqrt[3]{64} = 4$.
Portanto, o único canditado a extremante condicionado da função custo C(x,y,z) é o ponto (4,4,4). O custo do material correspondente é: $C(4, 4, 4) = 48$. Para verificarmos que é ponto de mínimo, tomemos, por exemplo: $x = 4$, $y = 16$ e $z = 1$, cujo custo é dado por: $4 \times 16 + 4 \times 1 + 16 \times 1 = 84$ reais, logo é ponto de máximo.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho nos propusemos a estudar máximos e mínimos locais de funções no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. O incentivo que tivemos para nos dedicarmos a esta linha de pesquisa foi do nosso orientador e professor que nos ministrou o curso de Cálculo III. A elaboração do trabalho foi uma tarefa que exigiu tempo e dedicação, porém foi muito gratificante. Além do mais, pudemos aplicar vários conceitos construidos durante o curso, aperfeiçoar e agregar novos conhecimentos.

No decorrer deste trabalho definiu-se $n$ como sendo o número de variáveis independentes e $k$ como sendo a ordem da derivada da função, por isso os resultados foram os seguintes:

**Domínio e imagem**

O domínio no $\mathbb{R}^2$ é uma bola aberta e $f(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow$ Im f(x,y,f(x,y)) = 3D;

O domínio no $\mathbb{R}^3$ é uma bola aberta e $\Psi(x,y,z,\Psi(x,y,z)) \in \mathbb{R}^4 \rightarrow Im\Psi(x,y,z,\Psi(x,y,z)) = 4D \rightarrow$ hiperespaço;

De um modo geral:

Domínio no $\mathbb{R}^n$ é uma bola aberta no $\mathbb{R}^n$ e $\Omega(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow Im\Omega(x_1,\cdots,x_n) = (n+1)D \rightarrow$ hiperespaço.

**Derivadas parciais de primeira ordem:** $k=1$

No $\mathbb{R}^2$, são duas 2: $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} \rightarrow 2^1$;

No $\mathbb{R}^3$, são três 3: $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ e $\frac{\partial \Psi}{\partial z} \rightarrow 3^1$;

No $\mathbb{R}^n$, são $n$: $\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial x_2}$ , $\cdots$ $\frac{\partial \Omega}{\partial x_n} \rightarrow n^1$;

**Derivadas parciais de segunda ordem:** $k=2$

No $\mathbb{R}^2$, são quatro 4: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ , $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \to 2^2$;

No $\mathbb{R}^3$, são nove 9: $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}$ , $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$ , $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x}$, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial y}$ , $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \to 3^2$;

No $\mathbb{R}^n$, são $n^k$: $\frac{\partial^k \Omega}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^k \Omega}{\partial x_1 x_2}$ , $\cdots$ $\frac{\partial^k \Omega}{\partial x_n^2} \to n^2$;

**Derivadas parciais de terceira ordem $k = 3$:**

No $\mathbb{R}^2$, são oito 8: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ , $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ , $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ , $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$ , $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$, $\to 2^3$;

No $\mathbb{R}^3$, são vinte e sete (27): conforme a Seção 2.8, $\to n^3$;

No $\mathbb{R}^n$, são $n^3$: $\frac{\partial^3 \Omega}{\partial x_1^3}, \cdots, \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x_n^3} \to n^3$;

De um modo geral para $k$ derivadas parciais no $\mathbb{R}^n$, tem-se $n^k$.

**Gradientes**

Gradiente ($\nabla$) no $\mathbb{R}^2$: $\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \to$ par ordenado;

Gradiente ($\nabla$) no $\mathbb{R}^3$: $\nabla \Psi(x, y, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \to$ terna ordenada;

Generalizando:

Gradiente ($\nabla$) no $\mathbb{R}^n$: $\nabla \Psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \right) \to$ n-upla ordenada.

**Matriz hessiana**

No $\mathbb{R}^2$ é uma matriz $2 \times 2$, por isso são necessárias 4 derivadas parciais: $2^2$;

No $\mathbb{R}^3$ é uma matriz $3 \times 3$, por isso são necessárias 9 derivadas parciais: $3^2$;

**Tensor matricial**

Para $n = 3$ e $k = 3$, tem-se 27 derivadas, porém só podemos organizá-las em matrizes $3 \times 3 \times 3$, denominadas de tensores matriciais,

O software Wolfram Mathematica foi o que nos proporcionou a construção e visualização dos referentes gráficos das funções, de forma que não nos limitássemos somente a parte abstrata dos cálculos.

Notamos que, quanto maior o numero de variáveis de uma função, torna-se mais complexo determinar os pontos críticos, classifica-los e representa-los graficamente.
Graficamente também percebemos que os pontos de máximo podem ser interpretados como um topo de uma montanha, os pontos de mínimo como um fundo de um vale, e os pontos de sela como uma passagem entre essas montanhas. Nos extremos condicionados foi mais difícil classificar a natureza dos pontos críticos, por isso que utilizamos o método dos multiplicadores de Lagrange que nos permitiu encontrar os máximos e mínimos.
Dessa forma, finalizamos o nosso estudo de máximos e mínimos, do qual tivemos pouco material de apoio para o estudo de funções de três variáveis , isso fez com que não nos aprofundássemos tanto. Deixamos caminhos para estudos mais avançados para pontos extremos de funções de mais de três variáveis. Tendo em vista que o estudo pode ser aplicado em diversas áreas, como por exemplo: Economia, Física, Química, Engenharia e até mesmo em nosso dia a dia este problema persiste, quando geralmente precisamos maximizar a utilidade de nossos bens de consumo.

# REFERÊNCIAS


[1] BOYER, Karl B. **História da matemática**. São Paulo: Edgar Blucher, 2012.

[2] CARVALHO, A N.; NUNES, W. V. L.; ZANI, S. L. **Calculo III**. Disponível em: <www.icmc.usp.br/ szani/calc.pdf >. Acesso em 02 de janeiro de 2016.

[3] CARVALHO, Alexandre Nolasco de. **Teste do Hessiano: Caso Geral**.Disponível em: <http://www.icmc.usp.br/ andcarva/calculo3/minmax/minmax/node9.html>. Acesso em 10 de Novembro de 2015.

[4] GONÇALVES, R.M. M. **Notas de aula de Funções de várias variáveis**. Maranhão, 2011. Disponível em: <www.academico.uema.br/.../CálculodeFunçõesdeVáriasVariáveis.pdf>. Acesso em 25 de Outubro de 2015.

[5] GONÇALVES, M.B.; FLEMMING, D.M. **Cálculo B: Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

[6] LIMA, José Donizzetti de. **Máximos e mínimos de funções de várias variáveis**. Disponível em:<www.pb.utfpr.edu.br/daysebatistus/maximos_minimos_donizetti.pdf >. Acesso em 01 de dezembro de 2015.

[7] MACHADO, André. **Multiplicadores de Lagrange.2012**. Disponível em: <http://www.andremachado.blog.br/artigos/759/multiplicadores-d-lagrange.html>. Acesso em 11 de janeiro de 2015.

[8] MASSAGO, Sadao. **Matriz Hessiana e Aplicações.2010**. Disponível em: <https://www.passeidireto.com/arquivo/6234423/notas-hessiana>. Acesso em 03 de dezembro de 2015.

[9] NETO, A. B. B; BEZERRA, D. C. F. **Máximos e mínimos de funções de várias variáveis reais. 2009. 52p.** Monografia (Especialização em Matemática Formação de Professores na Modalidade à Distancia) - Universidade Federal de Santa Catarina UFSC, Florianópolis.

[10] PIC INFORMÁTICA.**Wolfram Mathematica**. Disponível em: <http://www.picinfo.com.br/mathematica.php>. Acesso e 01 de janeiro de 2016.

[11] STEWART, James. **Cálculo, v. 2**. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[12] VILCHES, M. A. ; CORRÊA, M. L. **Cálculo: Volume II**. Rio de Janeiro : edição online. Disponível em: <http://www.ime.uerj.br/ calculo/calculoII.html>. Acesso em 06 de Novembro de 2015.