UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

PRO-REITORIA DE ENSINO E GRADUACÃO

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Arlediane de Nazaré Lobato Ribeiro

Dayla Silva Botelho

Estudo do Cálculo de Raízes de Equações Polinomiais

MACAPÁ-AP

2016

Arlediane de Nazaré Lobato Ribeiro

Dayla Silva Botelho

Estudo do Cálculo de Raízes de Equações Polinomiais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado apresentado ao colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco

MACAPÁ-AP

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

511
R484e Ribeiro, Arlediane de Nazaré Lobato.

Estudo do cálculo de raízes de equações polinomiais / Arlediane de Nazaré Lobato Ribeiro, Dayla Silva Botelho; orientador, Guzmán Eulálio Isla Chamilco. -- Macapá, 2016.

47 p.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Polinômios. 2. Polinômios – Métodos e Fórmulas. 3. Equações polinomiais. I. Botelho, Dayla Silva. II. Chamilco, Guzmán Eulálio Isla, orientador. III. Fundação Universidade Federal do Amapá. IV Título.

Arlediane de Nazaré Lobato Ribeiro

Dayla Silva Botelho

Trabalho de Conclusão de curso apresentado como pré-requisito para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

AVALIADORES

Orientador: Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
UNIFAP

Gilberlândio Jesus Dias

Membro: Prof. Dr. Gilberlândio Jesus Dias
UNIFAP

Membro: Prof. Dr. Jose Walter Cárdenas Sotil
UNIFAP

Macapá, 23 de setembro de 2016

Agradecimentos

Em primeiro lugar, a Deus, por ter me dado força e capacidade de executar esse trabalho.

Aos meus familiares, que contribuíram de forma prática na formação do meu caráter, com seus exemplos de dignidade e honestidade.

A todos os professores e colegas de curso pelo crescimento intelectual proporcionado e em especial ao professor Dr.Guzmán Eulalio Isla Chamilco pela paciência com minhas limitações e dificuldades que foram superadas com o seu apoio e dedicação e a minha amiga e companheira de TCC Dayla da Silva Botelho por ter se dedicado a esse trabalho.

(Arlediane de Nazaré Lobato Ribeiro)

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Antônio Carlos Botelho e Raimunda Nonata Cardoso, pela determinação e luta na minha formação e dos meus irmãos, com seus exemplos de vida e dignidade, fazendo amparar os ensinamentos que lhes foi dado. Agradeço aos meus irmãos David Botelho, Carlos Willy Botelho, que por mais difícil que fossem as circunstâncias, sempre tiveram paciência e confiança em mim. Agradeço a minha mana Damid Botelho, pois foi meu maior exemplo, a quem tenho imenso orgulho.

Agradeço a meu colegas da turma 2012, que de alguma maneira tornam minha vida acadêmica cada dia mais desafiante e com certeza se tornaram excelentes profissionais. Peço a Deus que os abençoe grandemente, preenchendo seus caminhos com muita paz, amor, saúde e prosperidade.

Agradeço a minhas amigas, por cada lembrança, cada alegria, sorriso tirado. Amizade que fortalece a cada dia que passa. Se hoje estou e cheguei ate aqui, um de meus motivos maiores são vocês.

Agradeço a todos os professores do curso em especial ao professor Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco pela paciência e por ter acreditado em mim. Quero expressar o meu reconhecimento e admiração pela sua competência profissional, por ser uma profissional extremamente qualificado e pela forma humana que conduziu minha orientação.

Agradeço a minha companheira de TCC e amiga Arlediane Lobato. Uma amiga que levarei por todo a vida. Obrigada pela paciência que não foi pouca, puxões de orelha, por ser essa pessoa verdadeira que é.

E finalmente agradeço a Deus, por proporcionar estes agradecimentos à todos que tornaram minha vida mais afetuosa, além de ter me dado uma família maravilhosa e amigos sinceros. Deus, que a mim atribuiu alma e missões pelas quais já sabia que eu iria batalhar e vencer, agradecer é pouco. Por isso lutar, conquistar, vencer e até mesmo cair e perder, e o principal, viver é o meu modo de agradecer sempre.

(Dayla da Silva Botelho)

"Saibam, portanto, que o Senhor, o seu Deus, é Deus; ele é o Deus fiel, que mantém a aliança e a bondade por mil gerações daqueles que o amam e obedecem aos seus mandamentos.

(Deuteronômio 7:9)

RESUMO

Desde a antiguidade, há mais de 4000 anos, vários povos já resolviam equações polinomiais no seu cotidiano através de problemas e construções praticas, levou mais de 3000 anos da resolução da equação de grau 2 para a que a equação de grau 3 fosse resolvida e a solução desta ficou conhecida como a formula de Cardano, naquela época era comum haver disputas matemáticas e em uma dessas disputas Fior propôs a Tartaglia 30 questões de equações do terceiro grau onde mesmo antes da disputa o mesmo conseguiu resolver, isso se deu devido ao fato do mesmo ser capaz de resolver equações da forma $y^3 + py + q = 0$ já a equação de grau 4 foi encontrada pouco depois por Ludovico Ferrari e foram publicadas em 1545 por Gerolano Cardano no livro Ars Magna. Apresentaremos de forma detalhada a solução por meios de radicais das equações de grau ≤ 4, para a isso iremos apresentar definições,teoremas e as relações de Girard que são muito importantes para o estudo do cálculo de raízes, e tendo como objetivo central apresentar o a formula de Gerolano Cardano para o calculo de raízes de equações de grau 3 da forma e a formula de Ludovico Ferrari para equações de grau 4, além disso iremos abordar o Método da Bisseção, método de Newton- Raphson e o Método da Secante para o calculo de raízes aproximadas, fazendo comparações entre estes três métodos mencionados.

Palavras-Chave: Equações polinomiais. Formula. Métodos. Raízes.

ABSTRACT

Since ancient times, for over 4000 years, several people have solved polynomial equations in their daily lives through problems and practical buildings, took over 3000 years the resolution of equation of degree 2 for the equation of degree 3 were resolved and the solution of this became known as the formula of Cardano, at that time it was common to mathematical disputes and in one of these Fior disputes proposed Tartaglia 30 issues of third degree equations where even before the dispute it managed to solve, this is was due to the fact that it is able to solve equations of the form $y^3+py+q=0$ since the equation of degree 4 found shortly after by Ludovico Ferrari and were published at 1545 per Gerolano Cardano in the book Ars Magna. We present in detail the solution by means of radicals of equations of degree ≤ 4, for this we will present definitions, theorems and relations Girard that are very important to study the calculation of roots, and with the central objective to present oa formula Gerolano Cardan for calculating grade 3 equations roots fashion and formula Ludwig Ferrari to equations of degree 4 additionally we will address the bisection method, Newton Raphson method and the method of drying for calculating approximate roots, making comparisons between these three methods mentioned.

Keywords: Polynomial equations. Formula. Method. Roots.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Iniciamos as nossa introdução falando um pouco sobre a história das equações e principalmente de como surgiu os métodos de resoluções de equações polinomiais, as equações do segundo grau já eram manuseadas no Antigo Egito a cerca de 1700 anos A.C., somente no século XII que foi posta na atual forma que conhecemos isso se deve a grande contribuição de Bháskara (matemático hindu) que a escrevera em versos.

As equações de terceiro e quarto graus tiveram suas formulas estabelecidas no século XVI pela escola italiana representada por Scipicione Del Fior (1465-1562), foi quem descobriu a forma de resolução de equações cúbicas não se sabe como ou quando o mesmo descobriu a forma de resolução da cúbica, o mesmo fez questão de guardar segredo, antes de sua morte revelou o seu método de resolução aos discípulos Antonio Maria Fior e Annibale Della Nave.

Ao saber do acontecido Nicollo Tartaglia (Gago em italiano) e se dedicou a acha o método por si, seja de modo independente ou por uma sugestão, Tartaglia conseguiu aprender e quando isso aconteceu a noticia se espalhou e foi organizada uma disputa matemática que era muito comum naquela época, essa disputa era entre Fior e Tartaglia onde cada um propunha 30 questões para seu oponente resolver em um intervalo de tempo fixado.

No dia da decisão Tartaglia havia resolvido as 30 questões proposta por Fior enquanto o mesmo não havia resolvido se quer uma questão proposta por seu oponente, isso ocorreu devido ao fato de Fior saber resolver equações com p e q positivos, que Scipicione Del Fio havia lhe ensinado, enquanto que Tartaglia era capaz de resolver estas equações, possivelmente reduzindo ao caso independente.

Ao saber do ocorrido Gerolano Cardano (1501-1576), além de medico foi astrônomo, persuadiu Tartaglia a contar-lhe seu método de solução das cúbicas em troca disso trataria de arranjar um encontro entre Tartaglia e um possível patrono, como Tartaglia não tinha nem uma fonte substancial de recursos, ao contrário Cardano lograra sucesso como médico, depois de muita insistência o mesmo conseguiu que Tartaglia lhe ensinasse a regra (embora não lhe ensinará a demonstração), em troca de juramento de que Cardano jamais publicara esse segredo, após uma visita a Della Nave Cardano ficou sabendo do manuscrito de Del Fior contendo a regra de Tartaglia há 30 anos se sentiu livre do juramento e então publicou os métodos em seu famoso livro Ars Magna, em 1545 que não deixou de fazer referencia a seus descobridores embora a contra gosto de Tartaglia que se sentiu traído.

Após a descoberta da demonstração Cardano motivou seu discípulo Ludovico Ferrari (1522-1565) a descobrir solução para equações do quarto grau, aos 14 anos tornou-se servo de Cardano, Ferrari escreveu todos os manuscritos de Cardano e ao completar 18 anos começou a dar aula, após ter obtido conhecimento da resolução da cúbica e da quartica Ferrari escreveu varias cartas desafiando Tartaglia e em 10 de agosto de 1548 ocorrerá o tão esperado combate onde Tartaglia ao ver que seu oponente estava com vantagens ao saber resolver quarticas decidiu deixar Millan durante a noite, sem esperar a conclusão do debate, sendo assim Ferrari tornou-se vencedor. Para o cálculo das raízes de equações polinomiais não exatas iremos utilizar alguns métodos estudados em cálculo numérico como o Método da Bissecção,Método de Newton-Raphson e o Método da Secante.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

Neste capítulo iremos apresentar algumas definições, teoremas e propriedades que serão necessárias para a resolução de equações polinomiais.

1.1 Polinômio em uma Variável

Definição 1.1 *Um* **polinômio com coeficientes em $\mathbb{R}$ (corpo dos números reais) na variável** x *é uma expressão formal do tipo:*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

onde $n \in \mathbb{N}$ *e* $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ *são números reais, chamados* **coeficientes de polinômio**. *Se* $a_n \neq 0$, *dizendo que* n *é o* **grau de polinômio**. *Neste caso,* a_n *é chamado de* **coeficiente líder** *do polinômio.*

Observação: Um polinômio sobre o corpo de números complexos $\mathbb{C}$ se define de forma análoga.

1.2 Raíz de uma equação polinomial ou algébrica

Definição 1.2 *Denomina-se* **raíz ou zero** *da equação algébrica*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

onde α substituindo no lugar de x satisfaz a igualdade, ou seja, o valor α tal que

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0 = 0$$

1.3 Multiplicidade de raízes

Definição 1.3 *Se um polinômio*

$$p(x) = (x-a)^m q(x)$$

com $q(\alpha) \neq 0$. Dizemos que α é raíz de multiplicidade m da equação $p(x) = 0$

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental da Algebra) *Qualquer polinômio $p(x)$ de grau n com coeficientes complexo,tem alguma raíz complexa. Isto é o corpo dos números complexos é algebricamente fechado e, portanto, tal como qualquer outro corpo algebricamente fechado, a equação $p(x) = 0$ tem* **n** *soluções não necessariamente distintas.*

Teorema 1.2 (Teorema da Decomposição) *Todo polinômio com coeficientes complexos, $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$ pode ser decomposto num produto de n fatores de 1º grau, ou seja:*

$$p(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n)$$

1.4 Raízes complexas não reais numa equação polinomial de coeficientes reais

O estudo das relações entre raízes complexas de um polinômio é útil na determinação de seu conjunto solução.

Definição 1.4 *Se $Z = a + bi$ com $(b \neq 0)$ é um número complexo não real, chamamos de $\bar{Z} = a - bi$, seu conjugado.*

Teorema 1.3 *Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite o número complexo $Z = a+bi$ como raíz, então essa equação admite como raíz o número $\bar{Z}$, conjugado de z.*

Teorema 1.4 *Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite a raíz Z com multiplicidade p, então admite a raíz $\bar{Z}$, com multiplicidade p.*

Teorema 1.5 (Teorema de Bolzano) *Se $p(x) = 0$ é uma equação polinomial com coeficientes reais e $]a, b[$ um intervalo real aberto então:*

1º) Se $P(a)$ e $P(b)$ tem mesmo sinal, existe um número par de raízes reais ou não existem raízes no intervalo real $]a, b[$.

2º) Se $P(a)$ e $P(b)$ tem sinais contrários, existe um número ímpar de raízes reais da equação em $]a, b[$.

1.5 Relações de Girard

Considere a equação polinomial:

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

sendo $a_0 \neq 0$ e $n \geq 1$ Considerando o teorema da decomposição podemos representar

$$p(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2).....(x - r_n)$$

Empregando a propriedade distributiva, tornando redutíveis os termos semelhantes, e ordenando o polinômio temos:

$$p(x) = a_0x^n - a_0(r_1 + r_2 + ... + r_n)x^{n-1} + a_0(r_1r_2 + r_1r_3 + ...)x^{n-2}...$$

Se igualarmos os coeficientes deste último polinômio, dois a dois, respectivamente, como os coeficientes iniciais $a_0, a_1, a_2...a_n$, obtemos n relações entre as raízes e os coeficientes de P, tais relações são denominadas **Relações de Girard**, e são as seguintes:

$r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n = -\dfrac{a_1}{a_0}$

$r_1r_2 + r_1r_3 + ... + r_{n-1}r_n = \dfrac{a_2}{a_0}$

$r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + ... + r_{n-2}r_{n-1}r_n = \dfrac{a_3}{a_0}$

$r_1r_2r_3...r_n = (-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}$

1.5.1 Relação de Girard para equação de grau 2

A equação $a_0x^2 + a_1x + a = 0$ possuem como raízes os termos r_1 e r_2, nesse caso:

$r_1 + r_2 = -\dfrac{a_1}{a_0}$

$r_1r_2 = \dfrac{a_2}{a_0}$

1.5.2 Relações de Girard para uma equação de grau 3

A equação $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ possui como raízes os termos r_1, r_2 e r_3, nesse caso:

$r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{a_1}{a_0}$

$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \dfrac{a_2}{a_0}$

$r_1r_2r_3 = -\dfrac{a_3}{a_0}$

1.5.3 Relações de Girard para uma equação de grau 4

A equação $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ possui como raízes os termos r_1, r_2, r_3 e r_4, nesse caso:

$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\dfrac{a_1}{a_0}$

$r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \dfrac{a_2}{a_0}$

$r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r - r_3r_4 = -\dfrac{a_3}{a_0}$

$r_1r_2r_3r_4 = \dfrac{a_4}{a_0}$

1.6 Métodos para obter raízes aproximadas

I. Método da Bissecção

Seja a função $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ e tal que $f(a)f(b) < 0$ Supondo que o intervalo $[a, b]$ contenha uma única raíz da equação $f(x) = 0$; este método tem como objetivo reduzir a amplitude do intervalo que contém a raíz até se atingir a precisão desejada: $(b - a) < \alpha$, usando para isto a sucessiva divisão do intervalo $[a, b]$ ao meio.

II.Método de Newton-Raphson

Este método consiste em escolher uma função $\varphi(x)$ tal que $\varphi(\alpha)' = 0$ onde α é a raíz de $f(x)$ e $\alpha \in [a, b]$. Com isso, temos $\mid \varphi'(x) \mid < 0$ desde que não nos afastamos muito do valor de α no processo de resolução.

III.Método da Secante

Dada uma equação f e duas aproximações iniciais x_0 e x_1 da raiz x de f, defina a sequência par $k = 1; 2; ... :$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Capítulo 2

Métodos de resolução de equações polinomiais

Neste capítulo veremos os métodos de resolução de equações polinomiais de forma algébrica por meio de radicais envolvendo coeficientes das equações e dando destaque para os principais métodos de resolução que são: Bháskara, Cardano e Ferrari que contribuíram bastante com o estudo das equações polinomiais.

2.1 Equação polinomial de grau 1

Chama-se equação polinomial de grau do , toda equação que pode ser colocada na forma:

$$ax + b = 0$$

O primeiro indicio das equações já visto, foi aproximadamente, ao ano de 1650 a.C., no documento denominado Papiro de Rhind. O Papiro de Rhind também recebe o nome de Ahmes, um escriba que relata a solução de problemas relacionados a matemática. Como os egípcios não utilizam a notação algébrica, os métodos de resolução de uma equação eram complexos e cansativos.

Os gregos, resolviam equações através de Geometria, mas foram os árabes, que cultivando a Matemática dos gregos, promoveram um acentuado progresso na resolução de equações. Por serem desconhecidos, esses valores são representados por letras. Por isso, na língua portuguesa existe uma expressão chamada "o x da questão". Ela é utilizada quando temos um problema dentro de uma determinada situação. Matematicamente, dizemos que esse x é o valor que não se conhece. Hoje, chamamos o termo desconhecido ou incógnita. A incógnita é um símbolo que ocupa o lugar de um elemento desconhecido de uma equação.

Toda equação polinomial de 1º grau pode ser escrita algebricamente da seguinte forma $ax + b = 0$, com a e $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Para resolver essa equação soma-se o oposto de b nos dois lado da igualdade e obtém-se: $ax + b + (-b) = 0 + (-b)$, que implica $ax = -b$. Posteriormente, multiplicando pelo inverso de a, chega-se a $a^{-1}ax = -b + a^{-1}$, que implica

$$x = \frac{-b}{a}$$

Exemplo 2.1

Resolver a equação

$$2x + 6 = 0$$

Solução: Aplicando o principio aditivo, vamos adicionar (-6) aos dois membros da equação, isolando o termo que contém a incógnita x no 1º membro.

$$2x + 6 = 0$$

$$2x + 6 + (-6) = 0 + (-6)$$

$$2x = -6.$$

Aplicando o principio multiplicativo, vamos multiplicar os dois membros da equação por $\frac{1}{2}$, descobrindo assim o valor do número x.

$$2x.\frac{1}{2} = -6.\frac{1}{2} \Rightarrow x = -3.$$

Como $-3 \in \mathbb{R}$, temos que -3 é a solução da equação.

Observação: Podemos resolver a equação acima isolando o valor da incógnita x de forma prática: Aplicando o principio aditivo,

$$2x = 0 - 6$$

$$2x = -6$$

Agora, aplicando o principio multiplicativo,

$$x = \frac{-6}{2} \Rightarrow x = -3.$$

2.2 Equação polinomial de grau 2

Chama-se equação polinomial de grau do 2, toda equação que pode ser colocada na forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

em que x é a variável e a,b,c são coeficientes com $a \neq 0$. Por outro lado, o coeficiente a, ou seja o coeficiente x^2, não poderá ser negativo. Se isso acontecer, multiplicamos os dois membros por -1. A equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ se diz completa. Entretanto, as constantes b e c poderão ser nulas, e daí resultam equações incompletas, assim:

1º) se $b = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0$

2º) se $c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = 0$

3º) se $b = c \Rightarrow ax^2 = 0$

2.2.1 Equação polinomial de grau 2 e a Fórmula de Bháskara

Foi resolvida algebricamente (solução por radicais) pelo matemático hindu Sridhara, mas a fórmula para resolver essa equação acaba levando o nome de Bháskara, pelo fato da solução ser publicado por esse matemático. Sua demonstração hoje é considerada bem simples, pois basea-se no método de completamento de quadrados.

Solução de Completamento de Quadrados: Completamento de quadrado nada mais é que encontrar os lados de um quadrado que resulte em determinada área. Entretanto, a equação algébrica completa $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ é feita mediante o completamento de quadrados, com isso, o seu processo é feito multiplicando a equação pelo inverso de a, a^{-1}, e subtraindo $-\frac{c}{a}$ de ambos os lados da igualdade. Tem-se

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

Agora, pode-se pensa o que acrescenta nessa equação para que seu lado esquerdo posse a ser um quadrado perfeito. Perceba que, $\frac{b^2}{4a^2}$ é esse elemento e então se tem:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

que implica

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

donde temos,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

solução algébrica de Bháskra.

Discriminante da Equação de 2º Grau: Como vimos anteriormente que dada uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ com coeficientes reais e $a \neq 0$ podemos encontrar as raízes pela Fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, onde$$

$\Delta = b^2 - 4ac.$

Analisando o Δ junto com a Fórmula de Bháskara, concluímos que:

- Se $\Delta > 0$, a equação do 2º grau possui duas raízes reais e distintas;
- Se $\Delta = 0$, a equação do 2º grau possui duas raízes reais e iguais;
- Se $\Delta < 0$, a equação do 2º grau possui duas raízes complexas e conjugadas.

Vamos resolver as equações abaixo utilizando a Fórmula de Bháskara

Exemplo 2.2

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Solução: temos na equação $x^2 - 5x + 4 = 0$ que, $a = 1$, $b = -5$ e $c = 4$. Calculando o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$, obtemos que $\Delta = 0$. Substituindo na fórmula de Bháskara temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2.1} = \frac{5 \pm 3}{2} =$$

Logo as raízes da equação são:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ \\ x_2 = 1 \end{cases}.$$

Notamos que as raízes são reais e diferentes.

Exemplo 2.3

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

Solução: temos na equação $x^2 - 4x + 4 = 0$ que, $a = 1$, $b = -4$ e $c = 4$. Calculando o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$, obtemos que $\Delta = 9 > 0$ e substituindo na fórmula de Bháskara temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2.1} = \frac{4 \pm 0}{2} =$$

Logo as raízes da equação são:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ \\ x_2 = 2 \end{cases}.$$

Neste caso temos 2 raízes reais e iguais

Exemplo 2.4

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

Solução: temos na equação $x^2 - 2x + 2 = 0$ que, $a = 1$,$b = -2$ e $c = 2$. Calculando o $\Delta = b^2 - 4ac$,obtemos que $\Delta = -4 < 0$ e substituindo na fórmula de Bháskara temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2.1} =$$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2} =$$

Logo as raízes da equação são:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + i \\ \\ x_2 = 1 - i \end{cases}.$$

Neste caso temos duas raízes complexas e conjugadas

Agora iremos fazer 3 exemplos de equações polinomiais de grau 3 aplicando a Formula de Cardano

2.3 Equação polinomial de grau 3

Chama-se equação polinomial de grau 3, toda equação que pode ser colocada na forma:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0(a \neq 0)$$

2.3.1 Equação polinomial de grau 3 e a formula de Cardano

Por volta de 1700 AC, os babilônios já resolviam equações do segundo grau. Mas foi no final do século XV, com a Renascença, que a equação do terceiro grau foi efetivamente atacada. Nessa época, com o surgimento dos números complexos pois os números reais não eram suficientes. Porém, a historia da equação de 3º grau foi por repletas intrigas, disputas e acusações, envolvendo Tartaglia (Nicollò Fontana Tartaglia, (1499-1557) e Cardano (Girolamo Cardano, 1501-1576). Sabe-se que Tartaglia resolveu primeiro a equação de terceiro grau e após um duelo revelou, sob juramento, a solução a Cardano, que acabou publicando em 1545 o método de Ars Magna que seria seu livro. Por se sentir traído Tartaglia publica o livro Quesiti et Inventioni Diverse, no qual ataca duramente Cardano por quebra de juramento. A partir daí, iniciou-se uma enorme inimizade, com ásperas discussões e grandes polêmicas que ficaram conhecidas por toda a Europa. Uma equação cúbica ou equação de terceiro grau é uma equação polinomial de grau três.

A equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, (a \neq 0) \tag{2.1}$$

Ela pode ser escrita na forma

$$0 = x^3 + 3\left(\frac{b}{3a}\right)x^2 + 3\left(\frac{b}{3a}\right)^2 x + \left(\frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{c}{a}x - 3\left(\frac{b}{3a}\right)^2 x + \frac{d}{a} - \left(\frac{b}{3a}\right)^3$$

$$= \left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\left(\frac{c}{a}-3\Big(\frac{b}{3a}\Big)^2\right)x+\frac{d}{a}-\left(\frac{b}{3a}\right)^3$$

Fazendo y=x+ $\frac{b}{3a}, aultimaequac\tilde{a}osetornay^3+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)\left(y-\frac{b}{3a}\right)+\frac{d}{a}-\frac{b^3}{27a^3}=0$e esta pode ser escrita na forma reduzida

$$y^3+py+q=0 \tag{2.2}$$

Comparando com a forma reduzida $y^3+py+q=0$, concluímos que

$$p=\frac{-b^2}{3a^2}+\frac{c}{a}$$

$$p=\frac{3ac-b^2}{3a^2}$$

e

$$q=\frac{d}{a}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{b^3}{9a^2}$$

$$q=\frac{27a^2d+2b^3-9abc}{27a^3}$$

Evidentemente, sabendo a solução da equação (2.2), sabemos a solução da equação (2.1). Para resolvermos a equação $y^3+py+q=0$ (2.2) vamos supor que y é a soma de duas parcelas, ou seja $y=u+v$. Substituindo $y=u+v$ em $y^3+py+q=0$ temos:

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$$

que implica

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)+q=0$$

reescrevendo a mesma fica

$$u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$$

reescrevendo novamente a equação anterior temos

$$(u^3+v^3+q)+(3uv+p)(u+v)=0$$

Esta ultima igualdade estará cumprida se conseguirmos acha u e v tais que

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$uv = \frac{-p}{3}$$

isto é,

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

$$u^3 + v^3 = -q$$

tal que

$$3u^3 + v^3 = -q$$

$$uv = \frac{-q}{3}$$

Temos que u^3 e v^3 são números que se conhece a soma e o produto e é a solução da equação de grau 2 que temos a seguir

$$z^2 + qz - p^3 27 = 0 \tag{2.3}$$

Logo,

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$
$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

e portanto

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$
$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{p^3} + \frac{p^3}{27}}}$$

Para obtermos as soluções da equação (2.2) devemos escolher u e v sujeitos á condição $uv = -\frac{p}{3}$ e tomarmos $y = u + v$. Escolhida a primeira raíz $y_1 = u + v$ e denotado as raízes cúbicas da unidade por 1 e ω, ω^2, temos que as outras raízes são:

$$y_1 = \omega u + \omega^2 v$$

$$y_3 = \omega^2 u + \omega v$$

A equação (2.3) é chamada de resolvente da equação (2.1) e a expressão

$$\triangle = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

de discriminante da equação (2.2) Logo temos que

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Esta formula ficou conhecida como a formula de Cardano

A solução da equação completa $ax^3 + bx^2 + cx + d + 0$ é dada por

$$x = y + m = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{b}{3a}$$

Se nossa equação tem coeficientes reais, com $\triangle$ podemos fazer uma discussão completa sobre as raízes da equação e portanto da equação (2.2) e da equação (2.1)

1º caso: $\triangle > 0$

Neste caso, u e $v \in \mathbb{R}$ e escolhemos u_1 e v_1 suas raízes cúbicas reais. Logo as soluções da equação (2.2) são:

$$y_1 = u_1 + v_1;$$

$$y_2 = \omega u_1 + \omega^2 v_1;$$

$$y_3 = \omega^2 u_1 + \omega v_1.$$

Observamos que $y_1 \in \mathbb{R}$ enquanto que y_2 e y_3 são números complexos conjugados.

2º caso: $\triangle = 0$

Neste caso, $u^3 = v^3$. Escolhendo $u_1 = v_1$ em $\mathbb{R}$ e lembrando que

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, temos:$$

$$y_1 = u_1 + v_1 = 2u_1;$$

$$y_2 = y_3 = \omega u_1 + \omega u_2 = -u_1.$$

Logo as 3 raízes da equação (2.2) são reais, sendo 2 iguais.

3º caso: $\triangle < 0$

Neste caso temos $p < 0$ e u^3 e v^3 são números complexos conjugados. Sejam

$$u^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\triangle} = \rho\Big(\cos\theta + i\sin\theta\Big) \tag{2.4}$$

e

$$v^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-\triangle} = \rho\Big(\cos\theta - i\sin\theta\Big) \tag{2.5}$$

As três raízes de u e v são:

$$u_1 = \sqrt[3]{\rho}\Big(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\Big);$$

$$u_2 = \sqrt[3]{\rho}\Bigg(\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right)\Bigg);$$

$$u_3 = \sqrt[3]{\rho}\Bigg(\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right)\Bigg);$$

$$v_1 = \sqrt[3]{\rho}\Big(cos\frac{\theta}{3} - i\sin\frac{\theta}{3}\Big);$$

$$v_2 = \sqrt[3]{\rho}\Bigg(\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right)\Bigg);$$

$$v_3 = \sqrt[3]{\rho}\Bigg(\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right)\Bigg).$$

Observamos que $v_i = \bar{u}_i$, $i = 1$, 2 e 3. Logo as três raízes da equação (2.2) são:

$$y_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta}{3};$$

$$y_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right);$$

$$y_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right).$$

Vamos agora determinar ρ e $\cos\theta$. Multiplicando membro a membro , os termos centrais e os da direita das equações (2.4) e (2.5) obtemos

$$\rho^2 = \left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{-\triangle}\right)^2 = \frac{q^2}{4} - \triangle = -\frac{q^3}{27}.$$

Logo

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$$

Somando, membro a membro, os termos centrais e os da direita das equações (2.4) e (2.5) obtemos

$$\cos\theta = -\frac{q}{2\rho}$$

Temos nesse caso três raízes reais que foram obtidas após a uma inclusão dos números complexos.

Agora iremos aplicar a Formula de Cardano nos exemplos a seguir

Exemplo 2.5

$$x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$$

Solução: temos na equação $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$ que, $a = 1$, $b = -3$, $c = 1$ e $d = 5$. Substituindo na fórmula de Cardano temos: fazendo a substituição

$$x = t + 1$$

e os coeficientes da equação em t

$$t^3 - 2t + 4 = 0$$

em que

$$p = \frac{1}{1} - \frac{(-3^2)}{3} = -2$$

e

$$q = \frac{2(-3^3)}{27} - \frac{-3}{3} + \frac{5}{1} = 4$$

Uma solução da equação em t é dada pela fórmula resolvente

a que corresponde a solução da equação em x :

$$x_1 = -2 - \frac{-3}{3} = -2 + 1 = -1$$

As restantes soluções da equação em t são

$$t_2 = -\frac{-2}{2} + \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{4}{-2}} = 1 + \sqrt{-1} = 1 + i$$

$$t_3 = -\frac{-2}{2} - \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{4}{-2}} = 1 + \sqrt{-1} = 1 - i$$

$$x_2 = 1 + i + 1 = 2 + i$$

$$x_3 = 1 - i + 1 = 2 - i$$

Portanto as raízes da equação são

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ \\ x_2 = 2 + i \\ \\ x_3 = 2 - i \end{cases}$$

Este resultado se deu devido ao caso 3 citado anteriormente, onde o discriminante e $\Delta < 0$, logo a equação possui 1 raíz real e duas raízes complexas conjugadas.

Exemplo 2.6

$$x^3 - 6x + 4 = 0$$

Solução: Podemos perceber que esta é da forma $x^3 + px + q = 0$ e que uma das raízes é -2

Fazendo $x = u - v$ de modo que o produto de uv seja igual a um terço do coeficiente de x é -2. Obtém-se o sistema

$$(u - v)^3 - 6(u - v) + 4 = 0$$

$$u.v = -2$$

fazendo $u.v = -2$ na primeira equação e isolando v na segunda

$$u^3 - v^3 + 4 = 0$$

$$v = -\frac{2}{3}$$

$$u^3 - \left(\frac{-2}{u}\right)^3 + 4 = 0$$
$$u^3 - \left(\frac{-8}{u^3}\right) + 4 = 0$$
$$u^3 + \frac{8}{u^3} + 4 = 0$$

obtendo

$$u^6 + 4u^3 + 8 = 0$$

Chamando $u^3 = t$, temos

$$t^2 + 4t + 8 = 0$$

onde temos que $\Delta = -16$ logo vamos encontrar as outras raízes da equação

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{-16}}{2}$$
$$t = \frac{-4 \pm 4i}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ \\ x_2 = 2 + 2i \\ \\ x_3 = 2 - 2i \end{cases}$$

2.4 Equação polinomial de grau 4

Chama-se equação polinomial de grau 4, toda equação que pode ser colocada na forma:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, (a \neq 0)$$

2.4.1 Equação polinomial de grau 4 e a Fórmula de Ferrari

Por volta de 1700 AC, os babilônios já resolviam equações do segundo grau. Mas, foi no final do século XV, com a Renascença, que a equação do terceiro grau foi efetivamente atacada. Nessa época, com o surgimento dos números complexos, pois, os números reais já não eram suficientes. Porém, a historia da equação de 3º grau foi marcada por repletas intrigas, disputas e acusações, envolvendo Tartaglia (Nicollò Fontana Tartaglia, 1499-1557) e Cardano (Girolamo Cardano, 1501-1576). Sabe-se que Tartaglia resolveu primeiro a equação de terceiro grau e após um duelo revelou, sob juramento, a solução a Cardano, que acabou publicando em 1545 o método de Ars Magna que seria seu livro. Por se sentir traído Tartaglia publica o livro Quesiti et Inventioni Diverse, no qual ataca duramente Cardano por quebra de juramento. A partir daí, iniciou-se uma enorme inimizade, com ásperas discussões e grandes polêmicas que ficaram conhecidas por toda a Europa. Uma equação cúbica ou equação de terceiro grau é uma equação polinomial de grau três.

A equação do quarto grau se deu graça ao matemático, Ludovico Ferrari. Ferrari se tornou aluno de Girolamo Cardano onde em sua casa residi-o. como naquela época era comum os duelo uns aos outros através de resoluções de questões. O matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi propôs a Cardano que resolvesse um problema, após varias tentativas sem obter êxito, Cardano desafiou seu aluno Ferrari a resolvê-la. Muito inteligente que era acabou encontrando a solução, assim obteve uma solução geral para equação de quarto grau. Mas, Ferrari não foi reconhecido pela resolução e o mérito acabou sendo todo de Cardano, pos com sua esperteza assim como fez com Tartaglia, acabou publicando também em seu nome as equações de quarto grau. Que veio a público no ano de 1545, na obra de Cardano. Em matemática, uma equação do quarto grau é uma equação polinomial monováriavel de grau quatro. A forma geral de uma equação do quarto grau é dada por:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, (a \neq 0) \tag{2.6}$$

Multiplicando esta equação por $\frac{1}{a}$ e fazendo $y = x + \frac{b}{4a}$, reduzimos a equação (2.6), onde p, q e r são

$$y^4 + py^2 + qy + r = o \tag{2.7}$$

onde p, q e r são:

$$p = \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2},$$
$$q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{3a^3},$$

Iremos introduzir α como parâmetro para auxiliar, da seguinte forma

$$y^4 + py^2 + qy + r = \left(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 + qy + r - 2y^2\alpha - \frac{p^2}{4} - p\alpha - \alpha^2 = o,$$

Ou seja,

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 = 2y^2\alpha - qy + \left(\alpha^2 + p\alpha + \frac{p^2}{4} - r\right) \tag{2.8}$$

Vamos escolher α de modo que o membro da direita da equação (2.8) seja um quadrado perfeito. Para isso o discriminante da equação de grau 2 em y

$$2^2 - qy + \left(\alpha^2 + p\alpha + \frac{p^2}{4} - r\right) = 0 \tag{2.9}$$

deve ser nulo, isto é

$$\Delta = q^2 - 4.2\alpha\left(\alpha^2 + p\alpha + \frac{p^2}{4} - r\right) = 0 \tag{2.10}$$

Logo podemos perceber que a equação (2.10) é uma equação de grau 3 em α e escolhemos α_0 uma de suas raízes. Assim, a equação (2.9) duas raízes iguais. A equação (2.8) passa então a ser

$$y^2 - \sqrt{2\alpha_0 y} + \left(\frac{p}{2} + \alpha_0 + \frac{q}{2\sqrt{2}\alpha_0}\right) = 0 \tag{2.11}$$

$$y^2 + \sqrt{\alpha_0 y} + \left(\frac{p}{2} + \alpha_0 - \frac{q}{2\sqrt{2}\alpha_0}\right) = 0 \tag{2.12}$$

As soluções das equações (2.11) e (2.12), em números de quatro, são as soluções da equação (2.8) e portanto da equação (2.7), uma vez que passamos da equação (2.7) às equações (2.11) e (2.12) através de transformações que preservam as raízes. A equação (2.10) é chamada resolvente da equação (2.7)

Agora iremos aplicar a Formula de Ferrari nos exemplos a seguir

Exemplo 2.7

$$x^4 - 12x^2 + 24x - 5 = 0$$

Solução: Por essa equação não a ver o termo 3. Repeti-se o x^4 e joga-se o restante para o segundo membro da igualdade

$$x^4 = 12x^2 - 24x + 5$$

Completando o quadrado, temos:

$$(x^2)^2 + 2x^2y + y^2 = 12x^2 - 24x + 5 + y^2 + 2yx^2$$

$$(x^2 + y)^2 = \underbrace{(12 + 2y).x - 24x + 5 + y^2}$$

Agora primeiro acharemos o $\triangle$ da equação após a igualdade

$$\triangle = 24^2 - 4(12 + 2y).(5 + y^2) \qquad (\div 4)$$

$$\triangle = 144 - (60 + 12y^2 + 10y + 2y^3) \qquad (\div 2)$$

$$\triangle = 72 - (30 + 6y^2 + 5y + y^3 \qquad \times(-1)$$

$$y^3 + 6y^2 + 5y - 42 = 0 \qquad onde\ 2\ \acute{e}\ raiz.$$

Agora substituindo o y por 2

$$(x^2 + 2)^2 = (12 + 4).x^2 - 24x + 5 + 4$$

$$(x^2 + 2)^2 = 16x^2 - 24x + 9 \qquad \Rightarrow (4x)^2 - 2.(4x)(3) + 3^2$$

$$(x^2 + 2)^2 = (4x - 3)^2$$

$$x^2 + 2 = 4x - 3 \quad ou$$

x$^2 + 2 = -4x + 3$

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \qquad x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\triangle = 16 - 4.1.5 \Rightarrow \triangle = -4 \qquad \triangle = 16 - 4.1.(-1) \Rightarrow \triangle = 20$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \qquad x = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2\imath}{2} \qquad x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$x = 2 \pm i \qquad x = -2 \pm \sqrt{5}$$

Portanto a raízes da equação são:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + i \\ \\ x_2 = 2 - i \\ \\ x_3 = -2 + \sqrt{5} \\ \\ x_4 = -2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Exemplo 2.8

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

Solução: Primeiramente, sera completado os quadrados

$$x^4 - 2x^3 = -2x^2 + x + 2$$

Com isso, foi somado x^2 no primeiro e segundo membro

$$(x^2)^2 - 2.(x^2).(x + x^2) = -2x^2 + x + 2 + x^2$$

$$(x^2 - x)^2 = -x + x + 2$$

$$y^2 + 2y.(x^2 - x)^2 = -x^2 + x + 2 + y^2 + 2y(x^2 - x)$$

$$(y + (x^2 - x))^2 = \underbrace{(-1 + 2y).x^2 + (1 - 2y).x + 2 + y^2}$$

Resolvendo a equação do 2 grau do segundo membro, sendo que $\triangle = 0$

$$\triangle = (1 - 2y)^2 - 4.(-1 + 2y).(2 + y^2)$$

$$\triangle = (1 - 2y)[(1 - 2y) + 4.(2 + y^2)] \qquad onde \;\; y = \frac{1}{2}$$

Substituindo o $y = \dfrac{1}{2}$ na equação do segundo membro, temos:

$$\left(\frac{1}{2} + x^2 - x\right) = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad = \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2} + x^2 - x\right) = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \quad = \pm\frac{3}{2}$$

$$x^2 - x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad ou \qquad x^2 - x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad\qquad x^2 - x + 2 = 0$$

$$\triangle = 1 - 4.1.(-1) \Rightarrow \triangle = 5 \qquad \triangle = 1 - 4.1.2 \Rightarrow \triangle = -7$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad\qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

Portanto, as raízes da equação são:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \\ x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ \\ x_3 = \dfrac{1 + \sqrt{7}i}{2} \\ \\ x_4 = \dfrac{1 - \sqrt{7}i}{2} \end{cases}$$

Capítulo 3

Métodos Interativos para obter raízes aproximadas

A obtenção da solução de um problema pela aplicação de método numérico; a solução do problema será caracterizada, então, por um conjunto de números, exatos ou aproximados e passaremos a usar a notação $f(x)$ no lugar de $p(x)$, utilizado no capitulo anterior . O método numérico é um algoritmo composto por um número finito de operações envolvendo apenas números (operações aritméticas elementares, cálculo de funções, consulta a uma tabela de valores, consulta a um gráfico, arbitramento de um valor, etc.). Como vimos, o problema de calcular as raízes de uma equação sempre foi objeto de estudo da matemática ao longo dos séculos. Já era conhecida, a fórmula para o cálculo das raízes exatas de uma equação geral do segundo grau.

No século XVI, matemáticos italianos descobriram fórmulas para o cálculo de soluções exatas de equações polinomiais do terceiro e do quarto grau. Essas fórmulas são muito complicadas e por isso são raramente usadas nos dias de hoje. Nesses casos, e mesmo em casos mais simples, muitas vezes é necessário recorrer a métodos numéricos para calcular aproximações para as raízes reais de uma dada equação. Com isso utilizaremos o método de bisseção, que também é chamado de método da pesquisa binária, trata-se de um método simples e robusto, relativamente lento quando comparado a outros dois métodos que também será citado aqui.

Por este motivo, ele é usado frequentemente para obter uma primeira aproximação de uma solução, a qual é então utilizada como ponto inicial para métodos que convergem mais rapidamente. O método de Newton (ou Método de Newton-Raphson), desenvolvido por Isaac Newton e Joseph Raphson, tem o objetivo de estimar as raízes de uma equação. Entretanto, será abortado o Método da Secante que é um algoritmo em busca de raízes que usa uma sequência de raízes de linhas secantes para aproximar cada vez melhor a raiz de uma equação.

3.1 Método da Bissecção

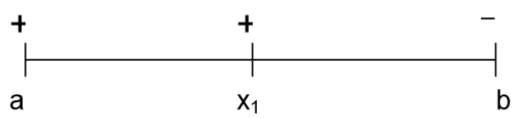
O método da bissecção é a forma mais intuitiva de se obter a raíz aproximada de uma equação polinomial. Dada a função $f(x)$ contínua num intervalo $[a, b]$, e α uma raíz de $f(x)$ isolada neste intervalo.

Primeiramente iremos subdividir esse intervalo em duas metades, sendo:

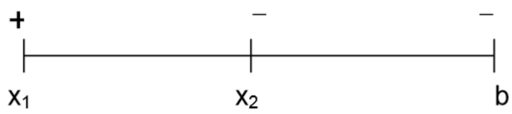
$$[a; \frac{a+b}{2}] e [\frac{a+b}{2}, b]$$

Usando o teorema (1.5). Ou seja se $f(x)$ mudar de sinal entre a e $\frac{a+b}{2}$ teremos que a raíz esta nessa metade do intervalo $[a, b]$. Caso $f(x)$ mude de sinal entre $\frac{a+b}{2}$ e b a raíz esta nessa segunda parte do intervalo $[a, b]$ Repetimos o mesmo processo dividindo ao meio o intervalo quem contém a raíz de $f(x)$ e assim repetimos esse processo indefinidamente até obtermos a raíz mais aproximada. A estimativa da raíz α será o ponto médio do intervalo em estudo no qual sabemos que tem uma raíz. Temos que estima o erro no resultado obtido, neste caso o erro será dado pela metade do comprimento do intervalo em estudo.

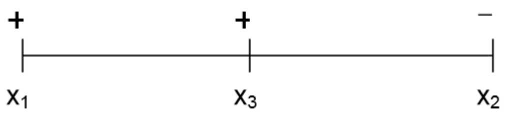
Logo temos a seguinte ilustração



$$x_1 = \left(\frac{a+b}{2}\right) \pm \frac{| b - a |}{2}$$



$$x_2 = \left(\frac{x_1 + b}{2}\right) \pm \frac{\mid b - x_1 \mid}{2}$$



$$x_3 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \pm \frac{\mid x_2 - x_1 \mid}{2}$$

3.2 Método de Newton- Raphson

O método de Newton- Raphson é um caso particular do método de interação linear. Este método consiste em estimar a raíz de $f(x)$ usando o processo interativo:

$$X_{n+1} = \varphi(x_n) \tag{3.1}$$

Escrevendo uma forma geral temos

$$\varphi(x) = x + A(x).f(x) \tag{3.2}$$

Pois, para x igual à raiz de $f(x)$, tem-se $f(x) = 0$, ou seja $x = \phi(x)$ para qualquer $A(x) \neq 0$. Para haver convergência neste método é preciso que $\mid \varphi'(x) \mid < 1$ em um intervalo $[a, b]$ que contém a raíz de $f(x)$.Portanto, o método de Newton- Raphson consiste em escolher $\varphi(x)$ tal que $\varphi'(x) = 0$ onde α é a raíz de $f(x)$ e $\alpha \in [a, b]$. Com isso teremos $\mid \varphi(x) \mid < 1$, é muito importante que não nos afastemos muito do valor de α durante o processo de resolução. Derivando $\varphi(x)$ dada pela expressão (3.2) em relação a x, temos:

$$\varphi' = 1 + A(x)f(x) + A(x)f'(x)$$

Por exigência temos que $\varphi(x) = 0$, então

$$0 = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x)$$

Portanto:

$$1 + A'(x)f(x) - A(x)f'(x) = 0$$
$$A(x)f'(x) = -1$$
$$A(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

Escolhendo:

$$A(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

De (3) em (2)

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Este método consiste em usar o processo interativo $\varphi(x) = x_{n+1}$, logo, temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x)}$$

3.2.1 Convergência do Método de Newton-Raphson

Apesar de obtermos a forma da função $\varphi(x)$ procurando garantir a convergência do processo interativo, nem sempre esta garantida para este método. A convergência no método de Newton-Raphson esta sempre garantida para um certo intervalo $[a, b]$ que contém a raíz de $f(x)$, desde que $f(x)$ e $f'(x)$ sejam contínuas nesse intervalo e que $f'(\alpha) \neq 0$, onde α é a raíz de $f(x)(f(\alpha) = 0)$. Se usarmos uma estimativa inicial x_0 tal que $x_0 \in [a, b]$, a convergência estará garantida, ou seja para o Método de Newton-Raphson convergir é preciso que nossa estimativa inicial esteja próximo da raíz de $f(x)$, a convergência não estará garantida se $f'(x) = 0$.

3.2.2 Interpretação Geométrica

Dado x_n, o ponto x_{n+1} será dado pela intercessão da reta tangente a $f(x)$ no ponto x_n com o eixo das abscissas. A reta tangente a $f(x)$ em x_n é dada por:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n-1}}$$

A partir dessa expressão, obtemos a formula de Newton-Raphson, ou seja:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x)}$$

A cada interação do nosso processo, nos aproximamos cada vez mais da raíz de $f(x)$ através da tangente (ou seja da derivada) de $f(x)$.

3.3 Método da Secante

O método da secante é muito parecido com o Método de Newton-Raphson o que o diferencia é a substituição da derivada por um quociente de diferença, não é difícil obter a função de iteração. Do método de Newton-Raphson temos que:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3.3}$$

Para a aproximação da derivada temos que:

$$f'(x_n) \cong \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \tag{3.4}$$

Onde x_n e x_{n-1} são duas aproximações para a raíz

Então a função de iteração para o método da secante fica:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \tag{3.5}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{3.6}$$

Para $n > 1$

Neste método partimos das duas aproximações iniciais x_0 e x_1 e determinamos a reta que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. A intersecção desta reta com o eixo x

fornece o ponto x_2. Em seguida é calculado uma nova aproximação para a raiz a partir dos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. O processo se repete até que se obtenha o resultado mais aproximado.

A convergência deste método é mais rápido que o método da bisseção e o da falsa posição, contudo, pode ser mais lento que o método de Newton-Raphson.

Agora iremos aplicar os três métodos no exemplo a seguir

Exemplo 3.1

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

onde

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$$

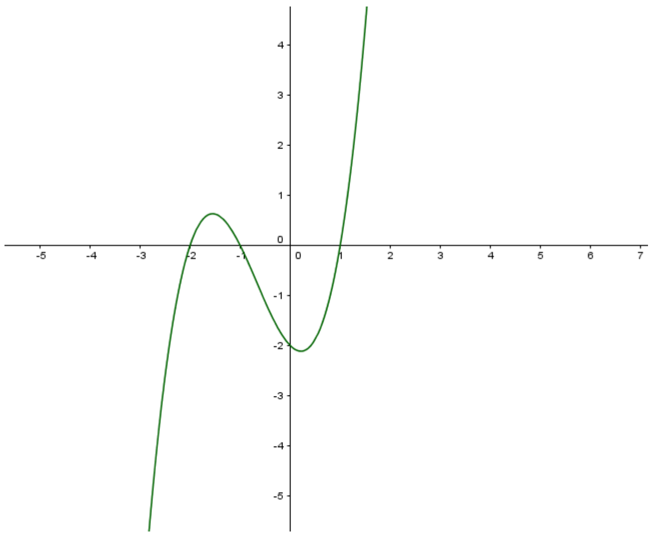


Figura 3.1: A representação da Equação de Grau 3

i	a	b	$(\frac{a+b}{2})$	$f(a)$	$f(b)$	$f(b\frac{a+b}{2})$
0	0,00000	3,00000	1,50000	-2,00000	40,000000	4,37500
1	0,000000	1,50000	0,75000	-2,00000	4,37500	-1,20313
2	0,75000	1,50000	1,12500	-1,20313	4,37500	0,83008
3	0,75000	1,12500	0,93750	-1,20313	0,83008	-0,35571
4	0,93750	1,12500	1,03125	-0,35571	0,83008	0,19241
5	0,93750	1,03125	0,98438	-0,35571	0,19241	-0,09253
6	0,98438	1,03125	1,00782	-0,09250	0,19241	0,04720
7	0,98438	1,00782	0,99610	-0,09250	0,04723	-0,02332

Tabela 3.1. Calculo das Raízes Aproximadas pelo Método da Bissecção

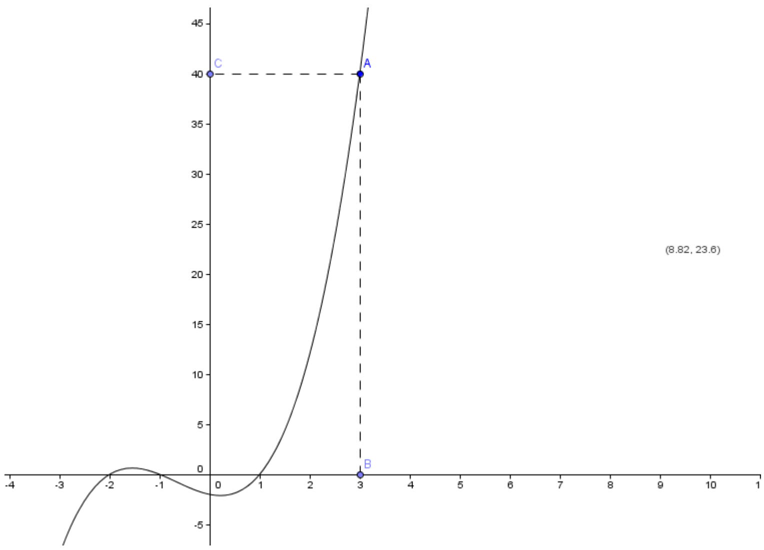


Figura 3.2: A representação do Método da Bissecção

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}
0	0,50000	-1,87500	1,75000	1,57143
1	1,57143	5,24781	12,69388	1,15802
2	1,15802	1,07688	7,65506	1,01734
3	1,01734	0,10555	6,17430	1,00025
4	1,00025	0,00147	6,00245	1,00000
5	1,00000	0,00000	6,00000	1,00000
6	1,00000	0,00000	6,00000	1,00000
7	1,00000	0,00000	6,00000	1,00000

Tabela 3.2. Calculo das Raízes Aproximadas pelo Método de Newton.

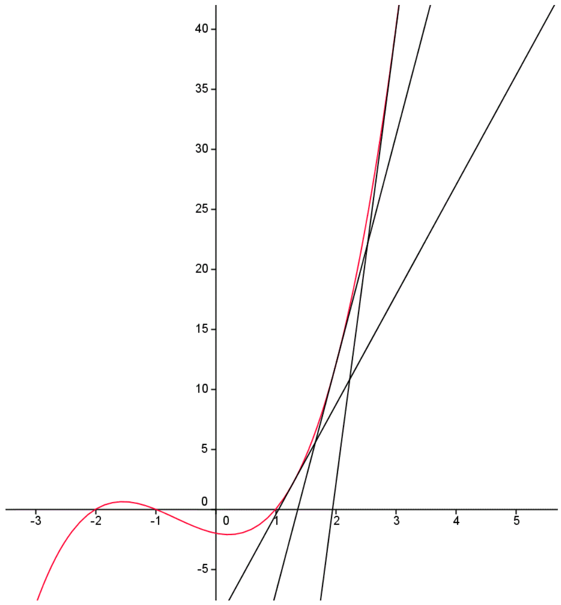


Figura 3.3: A representação do Método de Newton

i	x_{i-1}	x_i	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	x_{i+1}
0	0,20000	1,60000	-2,11200	5,61600	0,58261
1	1,60000	0,58261	5,61600	-1,70599	0,81966
2	0,58261	0,81966	-1,70599	-0,92531	1,10062
3	0,81966	1,10062	-0,92531	0,65536	0,98413
4	1,10062	0,98413	0,65536	-0,09397	0,99874
5	0,98413	0,99874	-0,09397	-0,00757	1,00002
6	0,99874	1,00002	-0,00757	0,00010	1,00000
7	1,00002	1,00000	0,00010	0,00000	1,00000

Tabela 3.3 Calculo das Raízes Aproximadas pelo Método da Secante

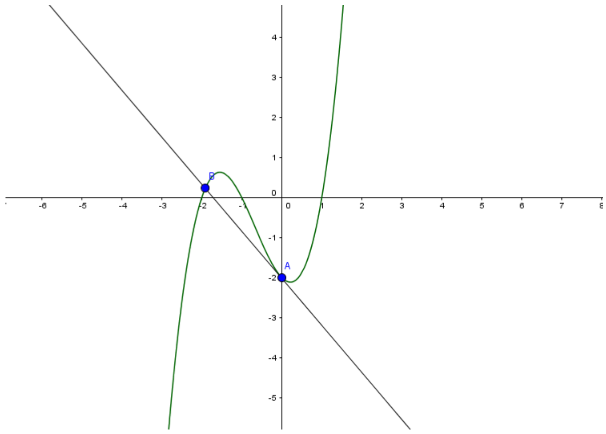


Figura 3.4: A representação do Método da Secante

Observação: No exemplo anterior aplicamos os métodos da Bisseção, Newton e o método da Secante, fazendo uma comparação entre os mesmos e percebemos que entre os três métodos aplicados o único método que chegou a uma das raízes da equação foi o método de Newton sendo que os outros dois métodos apenas chegaram a uma aproximação de uma das raízes.

CONCLUSÃO

A realização desse trabalho proporcionou-me um amplo conhecimento nas questões que envolve as equações matemáticas. Pretendo como professor, um melhor aperfeiçoamento com um ensino adequado a cada aluno.

Por tanto apresentamos neste trabalho, o estudo das equações polinomiais. Começando com as definições de cada método utilizado. Cada equação foi demonstrado sua forma algébrica. Onde foi usado a Relação de Girard para um melhor entendimento. Após citado um breve conceito de equação de grau 1, passamos a ir mais fundo em equação de grau 2, que para resolve-las foi usado Fórmula de Bháskara, forma usada no Ensino Médio com uma facilidade de entendimento de suas regras. Seguindo, abordamos equação de grau 3 e grau 4, utilizando a Formula de Cardano e Ferrari, onde cada formula foi usada a cada um.

Com isso, entramos nos métodos interativos para obter raízes aproximadas (calculo numérico). Abordando três métodos que são Método de Bissecção Método de Newton - Raphson e por ultimo Método da Secante, onde aplicando os obteremos uma solução exata ou aproximada. Concluindo assim, que esse trabalho possa servir a algum professor, ou futuro professor um entendimento melhor, não como uma pequena dica, mas para ajudar o leitor a refletir sobre esse ensino. Ajudando assim, na compreensão de resolução de equações polinomiais utilizando formulas e métodos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ANDRADE, José Fernandes Silva. **Tópicos especiais em álgebra** / José Ferandes Silva Andrade. 1 edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[2] ARENALES, Selma. **Cáculo numérico: aprendizagem com apoio de software** / Selma Arenales, Artur Darezzo. 2 edição. rev. e ampl. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

[3] FILHO, Frederico Ferreira Campos. **Algoritmos Numericos** / Frederico Ferreira Campos Filho. 2 edição. Belo Horizonte, 2007.

[4] HEFES, Abramo. **Polinômios e Equações Algébricas** / Albramo Hefez, Maria lucia Torres Villela. Capa de Pablo Diego Regino. 1 edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[5] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar: complexos polinomios equações** / Gelson Iezzi. 2 edição. São Paulo, 1977.

[6] LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 01. 9 edição. Rio de Janeiro, 2006.

[7] PONTES, Ronaldo da Silva. **Equações Polinomiais: soluções algébricas, geometricas e com auxilio de derivadas** / Ronaldo da Silva Pontes. João Pessoa, 2013.