UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

BENEDITA ROSILENE BELTRÃO BACELAR
MARCIELE DO AMARAL DA SILVA

ESTUDOS DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS E APLICAÇÕES

Macapá-AP
2016

BENEDITA ROSILENE BELTRÃO BACELAR
MARCIELE DO AMARAL DA SILVA

ESTUDOS DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do Prof^{o}. Dr. GUZMÁN EULALIO ISLA CHAMILCO.

Macapá-AP
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

515.35
B116e
Bacelar, Benedita Rosilene Beltrão.
Estudos da equações de diferenças e aplicações / Benedita Rosilene Beltrão Bacelar, Marciele do Amaral da Silva; orientador, Guzmán Eulálio Isla Chamilco.--Macapá, 2016.
39p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

3. Equações diferenciais lineares. 2. Equações diferenciais não lineares. 3. Aplicações. I. Silva, Marciele do Amaral da. II. Chamilco, Guzmán Eulálio Isla, orientador. III. Fundação Universidade Federal do Amapá. IV. Título.

BENEDITA ROSILENE BELTRÃO BACELAR
MARCIELE DO AMARAL DA SILVA

ESTUDOS DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS E APLICAÇÕES

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado e aprovado pela comissão avaliadora do Colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá. Composta pelos integrantes abaixo-relacionados:

AVALIADORES:

Prof. Dr. Guzman Eulalio Isla Chamilco
Orientador - Universidade Federal do Amapá

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil
1º Membro - Universidade Federal do Amapá

João Socorro Pinheiro Ferreira

Prof. Esp. João Socorro Pinheiro Ferreira.
2º Membro - Universidade Federal do Amapá

Avaliado em: 22/09/2016

Macapá-AP
2016

Dedico este trabalho a Deus meu criador, a minha inspiração a seguir esta carreira.

AGRADECIMENTOS

Eu, Benedita, agradeço ao todo-poderoso Deus (minha fonte de vida e sabedoria) que no dia-a-dia me enche de Graça, Bondade e Benção.

À pessoa e profissional (que é!) que norteou minha pesquisa, Prof. Dr. Gusmán Eulalio Isla Chamilco, que aceitou compartilhar comigo um ”pouco”do vasto saber que possui que sempre se manteve ético, coerente e sempre comprometido com minha pesquisa.

Aos meus pais Manoel das Graças Sousa Bacelar e Raimunda Beltrão Bacelar que sempre acreditaram que poderia vencer.

Ao meu esposo Hubersandro de Lima Dias e meu filho João Samuel Bacelar Dias, que sempre me manteve motivada na realização deste trabalho.

Eu, Marciele, agradeço a Deus, que me permitiu ter e saúde e força para superar as dificuldades no decorrer do curso.

Ao professor Prof. Dr. Gusmán Eulalio Isla Chamilco, pela sábia orientação, apoio e empenho dedicado à elaboração deste trabalho.

A todos os professores do colegiado por me proporcionarem o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional.

Aos meus pais, sobretudo à minha Mãe, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

Aos amigos pela força nos momentos difíceis.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigada.

Esforço-me para que eles sejam fortalecidos em seus corações, estejam unidos em amor e alcance toda a riqueza do pleno entendimento, a fim de conhecerem plenamente o mistério de Deus, a saber, Cristo. Nele estão escondidos todos os tesouros da sabedoria e do conhecimento.

(COLOSSENSES 2:2-3)

RESUMO

O trabalho de conclusão de curso apresentado, trata-se do estudo das equações de diferença linear e não linear (de primeira e segunda ordem), sistemas de equações lineares e sistemas de equações não lineares e aplicações, as equações de diferença tem um papel importante (fundamental), pois ao construir um modelo matemático interessa escolher uma variável que assumi valores discretos. Assim ocorre, como exemplo, com o tempo, já que é comum realizar medições regulares na hora de controlar um experimento. Estes dados constituem um conjunto finito, ou infinito contável, de valores da variável independente. Para este tipo de modelos determinístico discreto, as ferramentas matemáticas mais adequadas para analisarmos são as equações de diferença e os sistemas de diferença. O presente tema é uma breve introdução a seu estudo. Começaremos com os conceitos e definições básicas e vamos nos concentrar no estudo das equações de diferença lineares de primeira e segunda ordem com coeficientes constantes, assim como nos sistemas de equações diferenciais de primeira ordem e segunda ordem com coeficientes constantes e aplicações das equações de diferença não linear e sistemas não linear usaremos o modelo de Nicholson-Bailey que é um modelo para a resolução do sistema hospedeiro-parasita.
Palavras-chave: equações de diferença linear, não linear, primeira e segunda ordem, sistemas lineares e não lineares, modelo de Nicholson-Bailey e aplicações.

ABSTRACT

The present paper, is the study of equations of linear and non-linear difference (of first and second order), systems of linear and non-linear equations in applications, the equations apart has an important part (fundamental), because when building a mathematical model interests to choose an variables that assumed discreet values. It occurs, for instance, in time, since it is common to perform regular measurements time controlling an experiment. This data constitute a finite set, or the accounting infinite, values from the independent variables. For this discreet kind of models, more appropriate the mathematical tools to analyze the equations apart and the systems of difference. The subject is a short introduction to your study. We will start with the concepts and basic definitions and concentrate on the study of linear equations apart from first and second order with constant coefficients greater, as well as in the system of differential equations first and second order with constant coefficients and applications of linear and non-linear equations difference systems, we will use the model of Nicholson-Bailey that is model for the resolution of the host-parasite system.
KEY WORDS: equations of linear, non-linear difference, first and second order, linear and non-linear systems, model of Nicholson-Bailey and applications.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Com este trabalho, objetivamos a conclusão de graduação em licenciatura em matemática, e foi feito utilizando o eixo temático as equações de diferenças em aplicações.

A teoria de equações de diferença é rica em aplicações para ramos das ciências naturais. As equações de diferença na maioria dos casos , descrevem fenômenos ao longo do tempo, este tempo é medido em intervalos de a ser interpretado como uma variável discreta. Como por exemplo, se tiver que estudar o crescimento de uma determinada população de espécies, cada unidade de tempo poderá ser algumas horas, dias, semanas, meses ou anos, para o cálculo de uma cultura de bactérias, poderá ser dias, para a medição de caudais de rios, poderá ser semanas, para o produto nacional bruto, poderá ser anos, etc.

O primeiro problema envolvendo as equações de diferença aparece por volta do ano de 1202, pelo matemático Leonardo de Pisa (FIBONACCI). O problema foi o seguinte:

> ”quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?”

Todo este problema considera que os coelhos estão permanentes em um local fechado e que não ocorrem mortes. Se n representar o número de meses, então.

n	Pares de coelhos	
0	1	
1	2	O ”velho”par mais o ”novo”par
2	3	dois ”velhos”pares mais o ”novo”par
3	5	Três ”velhos”pares mais o ”novo”
4	8	Cinco ”velhos”pares mais os três ”novos”pares
⋮	⋮	⋮
12	377	

Assim, 377 é a resposta ao problema proposto for Fibonacci. Nota-se que o novo número pode ser determinado adicionando os dois últimos valores, ou seja, se n representa o números de pares de coelhos do mês, então.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Mais tarde foi acrescentado no inicio da sequência um 1, o que originou o número de Fibonacci: {1,1,2,3,5,8,13,21,...}

Mais de 600 anos depois (1843), Jacques Binet publicou uma fórmula que permite determinar o n-ésimo número de Fibonacci, sem se determinar todos os outros números anteriores da sequência. Essa fórmula da equação de diferença anterior é dada por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Esta expressão denomina-se por solução particular da equação de Fibonacci. Para poder determinar a solução particular de equação de diferenças, é necessário ter condições iniciais. Para cada condição inicial tem-se uma solução particular distinta, pode-se querer escrever a solução geral da equação. Esta solução depende de constantes arbitrárias, tantas quanto a ordem da equação de diferenças. Para determinar esta solução é necessário desenvolver métodos apropriados para cada caso das equações que estão a se tratar de modo coerente e explícito.

Os capítulos apresentados a seguir serão organizados por temas de modo a apresentar os assuntos que são necessários para determinar as equações de diferenças em aplicações.

Nas preliminares veremos as equações de diferenças de primeira ordem, equações de diferenças de segunda ordem, os sistemas de equações de diferenças linear, definições de cada item subtendido. No capitulo 3 teremos um breve comentário e definições de equações de diferença não - linear e sistema de diferenças não - linear, no capítulo 4 teremos as aplicações de equações de diferenças de ambos os capítulos para os sistema de equações não linear utilizaremos o modelo Nicholson-Bailey.

Capítulo 2

PRELIMINARES E CONCEITOS

Ao longo deste capitulo chamaremos t a variável independente, e suponhamos que só leva valores inteiros t = 0,1,2,3, ... Geralmente, t representa um número de gerações (anos, trimestre, meses, dias,...) que tem transcorrido desde um momento inicial t = 0. Do mesmo modo que, $\{y_0; y_1; y_2, ...\}$ é uma sucessão onde $y_t = y(t)$ é o valor no ponto t

2.1 Equações de diferenças lineares

Definição 2.1.1 *Equações de diferenças são equações de recorrência. Uma equação geral de diferença de ordem n, tem a seguinte forma:*

$$y_{t+n} = f(y_{t+n-1}, y_{t+n-2}, ..., y_{t+1}, y_t) \tag{2.1}$$

Onde $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Uma solução da mesma, e toda sucessão que verifica 2.1. [4]

O conjunto de todas as soluções recebe o nome de solução geral. Esta solução geral representa certo número de parâmetros, podem-se determinar a partir das condições iniciais, dando lugar as diferentes soluções particulares.

2.1.1 Equações de diferença linear de primeira ordem

Definição 2.1.2 *Uma equação de diferenças linear de primeira ordem, é uma equação que pode ser expressa como:*

$$p_1(t)y_{t+1} + p_2(t)y_t = q(t) \tag{2.2}$$

Onde $p_i(t)$, i=1,2 e $q(t)$ são funções de variável discreta t. Se a sucessão $q(t)$ for nula, então a equação linear recebe o nome de Equação Homogênea. Quando as funções $p_1(t)$ e $p_2(t)$ são constantes, se diz que a equação linear (2.2) é de coeficientes constantes.

Esse tipo de equações são muito interessantes no estudo da dinâmica de populações aparecem escritas como:

$$y_{t+1} = p(t)y_t + q(t) \tag{2.3}$$

Onde $p(t)y_t$ representa o crescimento da população no tempo t e $q(t)$ é o número de indivíduos que no tempo t se incorporam na população como consequência da imigração.[4]

2.1.2 Equações de diferenças lineares homogêneas

Dada uma equação linear do tipo:

$$y_{t+k} + \alpha_{t+k-1}y_{t+k-1} + \alpha_{t+k-2}y_{t+k-1} + \cdots + \alpha_{t+1}y_{t+1} + \alpha_t y_t = 0 \tag{2.4}$$

Seja $y_t = c\lambda^t$ uma solução de 2.4 e substituindo y_t, temos:

$$c\lambda^{t+k} + \alpha_{t+k-1}c\lambda^{t+k-1} + \alpha_{t+k-2}c\lambda^{t+k-2} + \cdots + \alpha_{t+1}c\lambda^{t+1} + \alpha_t c\lambda^t = 0$$

$$\Downarrow$$

$$c\lambda^t(\lambda^k + \alpha_{t+k-1}\lambda^{k-1} + \alpha_{t+k-2}\lambda^{k-2} + \cdots + \alpha_{t+1}\lambda + \alpha_t) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c\lambda^t = 0 \\ P_k(x) = \lambda^k + \alpha_{t+k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + \alpha_{t+1}\lambda + \alpha_t = 0 \end{cases}$$

Dessa equação tiramos que:

$$p_k(\lambda) = 0$$

Portanto: λ^t é uma solução de (2.4) $\Leftrightarrow$ λ é uma solução de $p_k(\lambda)$ e $p_k(\lambda)$ é chamado de polinômio característico.[4]

Teorema 2.1.1 *O conjunto solução da equação (2.4) é um espaço de dimensão k.*

Logo, $(v_t + \beta_t x_t)$ é solução da equação (2.4).

Se $\lambda^t = 0$, então λ^t também é solução da equação (2.4), portanto o espaço solução da equação (2.4) é um espaço vetorial de dimensão k.

Corolário 2.1.1 *Se o polinômio $p_k(x)(\lambda)$ tiver k raízes simples, então $\lambda_1^t, \lambda_2^t, ..., \lambda_k^t$ formam uma base do conjunto solução.*

Proposição 2.1.1 *Se α for uma raíz de $p_k(\lambda)$ com multiplicidade m então $\lambda^t, t\lambda^t, t^2\lambda^t, ..., t^{m-1}\lambda^t$ são solução linearmente independente.*

Assim a solução geral da equação (2.4) tem a forma:
$y_t = c_1^t\lambda^t + c_2^t t + \cdots + c_m(i)t^{m_1-1}\lambda_1^t + c_1^2\lambda_2^t + c_{m_2}t^{m_2-1}\lambda_2^t c_1^n\lambda_1^t + \cdots + C_{m_n}t^{m_{n-1}}\lambda_n^t$
em que $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k$[4]

2.1.3 Equações de diferença linear de segunda ordem

Definição 2.1.3 *Equações de diferença de segunda ordem são equações que dependem de duas gerações anteriores.[4]*
Fórmula geral de uma equação linear de segunda ordem:

$$y_{t+2} + by_{t+1} + cy_t = 0 \tag{2.5}$$

ou

$$y_t + by_{t-1} + cy_{t-2} = 0$$

Suponha que $y_t = k\lambda^t$ seja uma solução geral para a equação (2.5). Substituindo $y_t = k\lambda^t$ em (2.5) teremos:

$$p_2(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

2.1.4 Tipos de soluções para equações de segunda ordem

- se $\lambda_1 \neq \lambda_2$: a solução de $p_2(\lambda)$ é dada pela forma $y_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t$.

- se $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$; a solução de $p_2(\lambda)$ é dada pela forma $y_t = c_1\alpha^t + c_2 t\alpha^t r$.

- se λ_i com i=1,2 forem complexos, teremos $\lambda_1 = a + b_i$ e $\lambda_2 = a - b_i$, a solução complexa vem sempre em par conjugado.

No caso de soluções complexas podemos transformá-las na forma trigonomérica, ou seja, $y_t = c_1(a+b_i)^t + c_2(a-b_i)^t$, onde $(a-b_i)^t = r^t(cos\theta t + isen\theta t)$, $r^t = \sqrt{a^2+b^2}$, $\theta = arctg(\frac{a}{b})$; $a \neq 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ se a=0. Portanto teremos que, $y_t = r^t(arcs(\theta t) + bisen(\theta t))$ onde $A = c_1 + c_2$ e $B = c_1 - c_2$.[4]

2.2 Sistema de Equações de Diferenças Lineares

Um sistema de equações de diferenças de primeira ordem ou equivalentes a equações de diferenças de segunda ordem. Para entender tais equações vamos momentaneamente voltar a nossa atenção para o sistema linear na forma:[4]

$$\begin{cases} x_{t+1} = a_{11}x_t + a_{12}y_t \\ y_{t+1} = a_{21}x_t + a_{22}y_t \end{cases} \tag{2.6}$$

onde a_{ij} são constantes.

O sistema de equações de diferença acima pode ser escrito da seguinte forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

A solução do sistema (2.6) faremos por meio de equações de diferenças de segunda ordem. Considerando a equação seguinte e da primeira equação do sistema (2.6), temos:

$$x_{t+2} = a_{11}x_{t+1} + a_{12}y_{t+1}$$

Utilizando y_{t+1} da segunda equação e substituindo na equação anterior, teremos:

$$\begin{aligned}
x_{t+2} &= a_{11}x_{t+1} + a_{12}a_{21}x_t + a_{12}a_{22}y_t \\
x_{t+2} &= a_{11}x_{t+1} + a_{12}a_{21}x_t + a_{12}a_{22}(x_{t+1} - a_{11}x_t) \\
x_{t+2} &= a_{11}x_{t+1} + a_{12}a_{21}x_t + a_{12}a_{22}x_{t+1} - a_{22}a_{11}x_t \\
x_{t+2} &= (a_{11} + a_{22})x_{t+1} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_t \\
0 &= x_{t+2} - (a_{11} + a_{22})x_{t+1} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_t \\
0 &= x_{t+2} - (trM)x_{t+1} + (detM)x_t
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\text{Onde}, M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Outra forma de resolver o sistema (2.6) é através do seguinte teorema:

Teorema 2.2.1 *Se λ_1 e λ_2 são autovalores de M com autovetores associados*

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \; e \; U = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

então

$$x_t = V\lambda^t = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \lambda_1^t$$

e

$$y_t = U\lambda^t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \lambda_2^t$$

é uma solução do sistema (2.6).

Seja λ autovalor M e

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

, autovetor associado a λ. Então temos:

$$Mv = \lambda v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

desse sistema temos que:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (trM)\lambda + detM \tag{2.8}$$

Como λ é um autovalor de M, temos que se $p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (trM)\lambda + detM = 0$ e comparando (2.7) e (2.8), temos que $x_{t+2} = \lambda$ é solução do sistema (2.6), portanto, a solução do sistema (2.6) é dado por:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \lambda_1^t + c_2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \lambda_2^t$$

Proposição 2.2.1 *O conjunto solução do sistema (2.6) é um espaço vetorial de dimensão 2*

Proposição 2.2.2 *Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ forem autovetores associados a v e u, então v e u são linearmente independentes.*

Demostração:

Suponha que $\vec{v}$ e $\vec{u}$ sejam vetores linearmente dependentes, isto é, $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, logo temos:

$$\lambda_1\vec{v} = M\vec{v} = M(\alpha\vec{u}) = \alpha M\vec{u} = \alpha\lambda_2\vec{u} = \lambda_2\alpha\vec{u} = \lambda_2\vec{v}$$

Portanto, podemos ver que:

$$\lambda_1\vec{v} = \lambda_2\vec{v} \Rightarrow \lambda_1\vec{v} - \lambda_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{v} = 0$$

Como v é um autovetor, então $\vec{v} \neq 0$, e $\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, mas por hipótese temos $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Portanto, $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são vetores linearmente independentes.

Capítulo 3

Equação de Diferença Não Linear

3.1 Conceito

Desenvolveremos a equação de diferença não linear de primeira ordem na forma:

$$y_{n+1} = f(y_n) \tag{3.1}$$

Onde $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função dependente das combinações não lineares de y_n.

Dado um valor inicial y_0, então as sequências de iterações sobre f

$$\{y_0, f(y_0), f^2(y_0), ..., f^n(y_n), ...\}$$

É a solução ou órbitas de y_0, isto é, $y_n = f^n(y_n)$ é a solução de (3.1).

O estudo desta equação (3.1) se faz qualitativamente encontrando um ponto de equilíbrio, isto é, definimos um ponto fixo $\overline{y}$ tal que $f(\overline{y}) = \overline{y}$.

A estabilidade da equação de diferença não linear pode ser definida da seguinte forma:

Definição 3.1.1 *Seja $\overline{y}$ um ponto de equilíbrio para (2.7) então $\overline{y}$ é dito estável se,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que se } |y_0 - \overline{y}| < \delta \Rightarrow |f^n(y_0) - \overline{y}| < \epsilon$$

$\overline{y}$ é dito instável se não é estável

$\overline{y}$ é assintóticamente estável se for estável e existe $\gamma > 0$ tal que

$$|y_0 - \overline{y}| < \gamma \Rightarrow (\lim f^n(y_0) \to \overline{y})$$ *[4]*

Teorema 3.1.1 *Critério de estabilidade: Seja f de classe C^1 e $\overline{y}$ ponto de equilibrio, então, f é assintoticamente estável se*

$$\left|\frac{df(\overline{y})}{dy}\right| < 1$$

e é instável se

$$\left|\frac{df(\overline{y})}{dy}\right| > 1$$

Prova

$\overline{y}$ é um ponto de equilíbrio de (3.1) se, e somente se

$$y_{n+1} = g(y_n) \tag{3.2}$$

Onde $g(y) = f(\overline{y} + y) - f(\overline{y}) = f(\overline{y} + y) - \overline{y}$

Portanto, as propriedades de estabilidade para $\overline{y}$ são as mesmas, que para o ponto de origem $(0,0)$ então para (3.2) temos $g'(y) = f'(\overline{y} + y)$, logo $g'(0) = f'(\overline{y})$, supondo que zero é um ponto de equilíbrio e fazendo a expansão através de série de taylor obtemos que

$$g(y_n) + g(0) + g'(0)y_n + 0((y_n)^2)$$

Então o sistema (2.8) é linearizado , assim $y_{n+1} = g'(0)y_n$, portanto a solução é

$$y_{n+1} = c_1(\lambda)^n$$

onde $\lambda = g'(0)$.

Se $|g'(0)| < 1$, o equilíbrio nulo é assintoticamente estável, e instável se $|g'(0)| > 1$. A solução y_n da equação (3.1) pode ser constituida por um número finito de valores, isto é, $y_n^* = y_{n+\Gamma}$, $\Gamma = 0, 1, 2, ...$ e $y_{n+j}^* \neq y_n^*$ para $j = 1, 2, ..., \Gamma - 1$ tal que a solução é chamada ciclo limite ou ciclo de período Γ.

O ponto de equilíbrio $\overline{y}$ pode ser encontrado fazendo a interseção da bissetriz com $f(y)$. Isto significa que $y_n = \overline{y}$ e portanto, satisfaz $\overline{y} = f(\overline{y})$. Usando o diagrama de Lamery para demonstrar e garantir a existência do ponto de equilíbrio de acordo com o gráfico seguinte.[4]

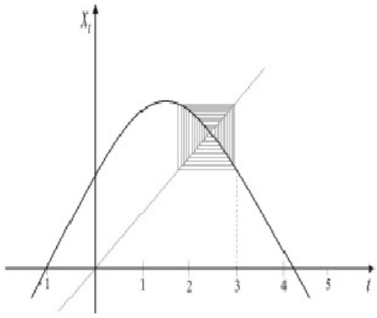

Figura 3.1: Lamery
Fonte: Notas de aula

3.2 Sistema de Equação de Diferença Não Linear

Seja o sistema de n equações de diferença não lineares dada na forma

$$X_{t+1} = F(x_t)$$

Onde $F : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, consideremos primeiro um sistema de duas equações de diferença não linear, isto é, $n = 2$, então o sistema é

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t) \end{cases}$$

Com $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ os pontos de equilíbrio ou pontos fixos estão definidos por $f(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{X}$ e $g(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{Y}$.

Agora analisaremos a estabilidade local destes pontos de equilíbrio, isto é, dado um valor (x_t, y_t) próximo ao ponto $(\overline{x}, \overline{y})$, portanto teremos $x_t = \overline{x} + x'_t$ e $y_t = \overline{y} + y'_t$ e desenvolvendo encontraremos,

$$x'_{t+1} = x_{t+1} - \overline{x} = f(x_t) - \overline{x} = f(\overline{x} + x'_t) - \overline{x}$$
$$y'_{t+1} = y_{t+1} - \overline{y} = f(y_t) - \overline{y} = f(\overline{y} + y'_t) - \overline{y}$$

fazendo expansão pela série de taylor de f na vizinhança deste ponto, teremos que

- $f(\overline{x} + x'_t, \overline{y} + y'_t) = f(\overline{x}, \overline{y}) + f_x(\overline{x}, \overline{y})x'_t + f_y(\bar{(}x, \overline{y})y'_t + O(x'^2_t, y'^2_t)$

- $g(\overline{x}+x'_t, \overline{y}+y'_t) = g_x(\overline{x},\overline{y})x'_t + g_y(\overline{x},\overline{y})y'_t + O(x'^2_t, y'^2_t)$

O novo sistema linearizado é

$$\begin{cases} x'_{t+1} = a_{11}x'_t + a_{12}y'_t \\ y'_{t+1} = a_{21}x'_t + a_{22}y'_t \end{cases}$$

Podemos escrever este sistema na forma matricial do tipo $X'_{t+1} = AX'_t$, onde

$$A = \begin{bmatrix} f_x(\overline{x},\overline{y}) & f_y(\overline{x},\overline{y}) \\ g_x(\overline{x},\overline{y}) & g_y(\overline{x},\overline{y}) \end{bmatrix} \text{ e } X'_t = \begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \end{pmatrix}$$

a matriz A é chamada Jacobiana do sistema, para analisar a estabilidade do sistema linearizado obtemos o polinomio característico, fazendo

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$$

Então teremos $\lambda 2 - \beta + \gamma = 0$, com $\beta = trA = f_x + g_y$ e $\gamma = detA = f_x g_y - g_x f_y$.

Agora vamos determinar as raízes desta equação, ou seja, os autovalores, são em magnitude menores que a unidade.[4]

O segundo critério é suficiente e necessário para a estabilidade do sistema, portanto, como critério de estabilidade, podemos dizer que $(\overline{x},\overline{y})$ é estável se, e somente se

$$2 > 1 + \gamma > |\beta| \qquad (3.3)$$

Prova

Seja γ um ponto estável, isto é, $\gamma < 1$, temos que:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \beta\lambda + \gamma = 0 \to \lambda = \frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{(-\beta)^2 - 4\gamma}}{2}$$

como $|\beta| < 2 \to \dfrac{|\beta|}{2} < 1$

$$1 - \frac{|\beta|}{2} > \frac{\sqrt{(-\beta)^2 - 4\gamma}}{2} \to \left(1 - \frac{|\beta|}{2}\right)^2 > \left(\frac{\sqrt{(-\beta)^2 - 4\gamma}}{2}\right)^2$$

$$1 - |\beta| + \frac{|\beta^2|}{4} > \frac{\beta^2}{4} - \frac{4\gamma}{4} \to 1 - |\beta| > -\gamma$$

$$\gamma > |\beta| - 1$$

Portanto, encontramos que $\gamma < 1$ e $\gamma > |\beta|, -1 \to> \gamma > |\beta| - 1$, ou seja:

$$2 > \gamma + 1 > |\beta|$$

Capítulo 4

Exemplo e Aplicações

4.1 Aplicação para Equação de Diferenças de 1º Ordem

Suponhamos que uma determinada população de insetos com 100 indivíduos duplica em cada geração, e também 10 novos indivíduos se incorporam em cada geração procedente de outro lugar. Vamos construir uma equação em diferenças que modele esta situação e posteriormente resolveremos. O enunciado segue-se:

$$y_t = 2y_{t-1} + 10,\; y_0 = y(0) = 100$$

O que nos permite escrever

$$\begin{aligned}
y_1 &= 2 \times 100 + 10 \\
y_2 &= 2(2 \times 100 + 10) + 10 = 2 \times 2 \times 100 + 2 \times 10 + 10 \\
y_3 &= 2 \times 2 \times 2 \times 100 + 2 \times 2 \times 10 + 2 \times 10 + 10 \\
&\vdots \\
y_t &= \underbrace{2 \times ... \times 2}_{t} \times 100 + \underbrace{2 \times ... \times 2}_{t-1} \times 10 + \underbrace{2 \times ... \times 2}_{t-2} \times 10 + \cdots + 2 \times 10 + 10 \\
&= 2^t \times 100 + 2^{t-1} \times 10 + 2^{t-2} \times 10 + \cdots + 2 \times 10 + 10 \\
&= 2^t \times 100 + (2^{t-1} + 2^{t-2} + \cdots + 2^1 + 2^0) \times 10 \\
&= 2^t \times 100 + (2^t - 1) \times 10 = 110 \times 2^t - 10
\end{aligned}$$

Onde o último dos termos utilizados que nos dá a soma de t termos de uma progressão geométrica de razão 2. Portanto a solução é:

$$y_t = 100 \times 2^t - 10$$

4.2 Exemplo: Equação de diferença linear de segunda ordem

1. $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 0$

   Seja $y_t = \lambda^t$ substituindo na equação linear acima, encontramos $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ obtemos um polinômio de segunda grau e usando a fórmula de Báskara temos:

   $$\Delta = b^2 - 4ac$$

   $$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

   Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então a solução é da forma:

   $$y_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t \Leftrightarrow y_t = c_1 2^t + c_2 3^t$$

2. Consideramos agora uma equação de diferença linear de segunda ordem com condições iniciais

   $$\begin{cases} x_{t+1} - 5x_t + 4x_{t-1} = 0 \\ x_1 = 9 \\ x_2 = 23 \end{cases}$$

O polinômio característico associado é:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 4$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\neq \lambda_2 \\ x_t &= c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t \\ x_t &= c_1 + c_2 4^t \end{aligned}$$

Para $x_1 = 9$ e para $x_2 = 23$ temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 9 = c_1 + 4c_2 \\ 23 = c_1 + 16c_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima encontramos:

$$c_1 = \frac{26}{6} \text{ e } c_2 = \tfrac{7}{6}$$

Então temos:

$$x_t = \frac{26}{6} + \left(\frac{7}{6}\right) 4^t$$

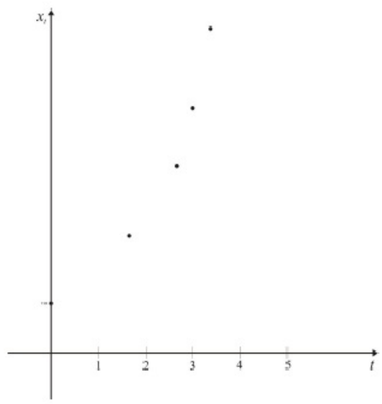

Figura 4.1: Gráfico solução da questão 2
Fonte: Notas de aula

4.3 Aplicação de equação de diferenças de 2ª ordem

Em um determinado ecossistema é suposto que em uma determinada população não influenciam fatores que modifiquem seu crescimento, se observa que, partindo de 100 indivíduos, o primeiro ano atinge 110, e que a cada ano se duplica o crescimento do ano anterior e se acrescentam 10 indivíduos de fora. Desejamos determinar a equação geral de evolução de efetivos.

Temos

$$y_{t+2} - y_{t+1} = 2(y_{t+1} - y_t) + 10, \; y_0 = 100, \; y_1 = 110$$

Teremos que resolver a equação em diferencial de segunda ordem, daí:

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 10$$

Com as condições iniciais $y_0 = 100$ e $y_1 = 110$. Para fazer isso, precisamos encontrar as raízes da equação característica

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 2$$

Quer dizer que a solução geral da equação homogênea é

$$y_t = k_1 + k_2 2^t$$

Para resolver a equação completa, utilizaremos o método de variação das constantes.

$$\begin{cases} k_1(t+1) - k_1(t) = -10 \\ k_2(t+1) - k_2(t) = \frac{10}{2^{t+1}} \end{cases}$$

Da primeira lei de recorrencia obtemos

$$\begin{aligned} k_1(1) &= k_1(0) - 10 \\ k_1(2) &= k_1(1) - 10 = k_1(0) - 2 * 10 \\ &\vdots \\ k_1(t) &= k_1(0) - 10t \end{aligned}$$

De maneira similar, da segunda equação

$$\begin{aligned} k_2(1) &= k_2(0) + \frac{10}{2} \\ k_2(2) &= k_2(1) + \frac{10}{2^2} = k_2(0) + \frac{10}{2} + \frac{10}{2^2} \\ &\vdots \\ k_2(t) &= k_2(0) + \frac{10}{2} + \frac{10}{2^2} + \frac{10}{2^3} + ... + \frac{10}{2^t} \\ &= k_2(0) + \frac{10}{2} + \frac{10}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \cdots + 2^t \\ &= k_2(0) + 10(1 - \frac{1}{2^t}) \end{aligned}$$

Em consequência, da solução geral, a solução completa é

$$y_t = k_1(0) - 10 * t + [k_2(0) + 10(1 - \tfrac{1}{2^t})]2^t$$

As constantes $k_1(0)$ e $k_2(0)$ podem encontrar-se fazendo uso das condições iniciais

$y_0 = 100$ e $y_1 = 110$ em y_t,

$$100 = k_1(0) + k_2(0),\ 110 = k_1(0) - 10 + (k_2(0) + 5)2$$

Dando como solução $k_1(0) = 90$, $k_2(0) = 10$.

A equação dos efetivos da população é:

$$y_t = 80 - 10t + 10 * 2^{t+1},\ \text{t=0,1,2,....}$$

4.4 Aplicação para sistemas de equações de diferenças linear

Sejam x_t e y_t o número de indivíduos de duas populações de animais em um mês t, que convivem em um ecossistema e que é realizado um controle cada mês, suponhamos que inicialmente teremos $x_0 = 150$ e $y_0 = 325$, e que o desenvolvimento de convivência está governado por um sistema de equações em diferenças.

$$\begin{cases} x_{t+1} = 3x_t - y_t + 1 \\ y_{t+1} = -x_t + 2y_t + 3 \end{cases} \Rightarrow y_t = -x_{t+1} + 3x_t + 1$$

Para encontrar o valor de $x(t)$ e $y(t)$ procederemos de maneira seguinte, da primeira das equações

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} - y_{t+1} + 1$$

Substituir a segunda das equações na expressão anterior

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} - (-x_t + 2y_t + 3) + 1 = 3x_{t+1} + x_t - 2y_t - 2$$

Que segue dependendo de $y(t)$, por isso podemos utilizar a primeira equação e substituir esse valor na equação anterior.

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} + x_t - 2(-x_{t+1} + 3x_t + 1) - 2 = 5x_{t+1} - 5x_t - 4$$

Que é uma equação de diferença de segunda ordem com coeficientes constantes, que pode ser escrita da forma:

$$x_{t+2} - 5x_{t+1} + 5x_t = -4$$

E fácil ver que as raízes da equação característica de sua equação homogênea é:

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Dando lugar à seguinte solução geral da equação homogênea.

$$x_t^h = k_1 \left[\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]^t + k_2 \left[\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]^t$$

Para encontrar uma solução particular da solução completa, ao ser o termo independente uma constante, tomamos $x_t^h = a$.

Substituimos então:

$$a - 5a + 5a = -4 \Rightarrow a = -4$$

A solução da equação completa será: $x_t = x_t^h + x_t^p$.

$$x_t = k_1 \left[\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]^t + k_2 \left[\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]^t - 4$$

Agora teremos que substituir na primeira equação do sistema

$$y_t = -x_{t+1} + 3x_t + 1 = -k_1 \left[\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]^{t+1} - k_2 \left[\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]^{t+1} + 4 + 3k_1 \left[\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]^t + 3k_2 \left[\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]^t - 12 + 1$$

$$y_t = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) k_1 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) k_2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 7$$

Para encontrar os valores de k_1 e k_2 vamos impor as condições iniciais.

$$\begin{cases} 150 = k_1 + k_2 - 4 \\ 325 = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) k_1 + \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) k_2 - 7 \end{cases}$$

O sistema de equações lineares que tem como solução $k_1 = 77 - 51\sqrt{5}$ e $k_2 = 77 + 51\sqrt{5}$. Em consequência da solução particular para estas condições iniciais é:

$$\begin{aligned} x_t &= (77 - 51\sqrt{5}) \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + (77 + 51\sqrt{5}) \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 4 \\ y_t &= (166 - 64\sqrt{5}) \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + (166 + 64\sqrt{5}) \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 7 \end{aligned}$$

4.5 Aplicação de Equações de Diferença Não Linear

4.5.1 Interações entre duas espécies: sistema hospedeiro - parasita

Modelos de equação de diferença discreta aplica-se mais facilmente a grupos, como populações de insetos onde existe uma divisão natural de tempo entre as gerações discretas. Nesta seção, analisaremos um modelo particular de duas espécies que tem recebido uma atenção considerada para os biólogo, tanto nas áreas experimentais como nas áreas teóricas, que é o sistema hospedeiro - parasita.[4]

Encontrado quase exclusivamente no mundo dos insetos, na qual o sistema de duas espécies têm várias características distintas. Essa espécie têm um número de fases no seu ciclo de vida que inclui as fases de ovos, Larvas, Pupa e adultos. Uma delas é chamada de parasita, explora a segunda da seguinte forma: Uma fêmea adulta parasita estuda o hospedeiro na qual a oviposita (deposita seus ovos). Em alguns casos, os ovos são anexados à superfície exterior do hospedeiro durante seu estágio de pupa ou larva. Em outros casos, os ovos são injetados no corpo (na carne) do hospedeiro. As larvas do parasita se desenvolve e cresce à custa do seu hospedeiro, consumindo-o e eventualmente acaba matando. Os ciclos de vida das duas espécies, mostrado na figura abaixo, são, portanto, intimamente interligados.[4]

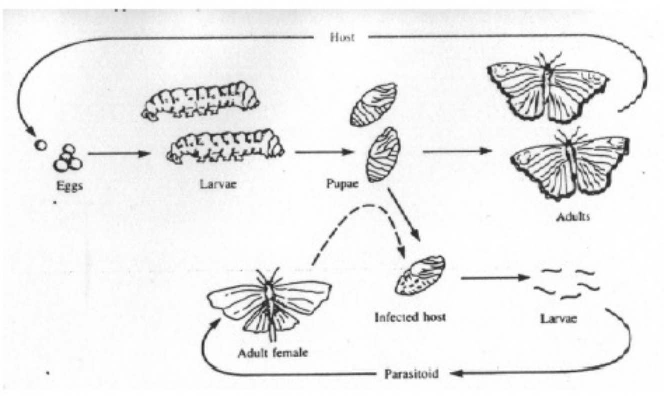

Figura 4.2: Hospedeiro-Parasita
Fonte:Notas de aula

Um modelo simples para este sistema tem o seguinte conjunto de restrições:

1. Hospedeiro que foram parasitados darão origem à próxima geração de parasitas;

2. Hospedeiro que não foram parasitados darão origem à sua própria prole;

3. A fração dos hospedeiros que são parasitados depende da taxa de encontro das duas espécies em geral, esta fração pode depender da densidade de uma ou de ambas as espécies.

Enquanto outros efeitos provocam mortalidade encontrada em todo o sistema natural, é instrutivo considerar apenas este conjunto mínimo de primeiro encontros e examinar as suas consequências. Estamos, portanto, definindo o seguinte:

- N_t= quantidade de hospedeiro na geração t;

- P_t= quantidade de parasitas na geração t;

- $f = f(N_t, P_t)$= fração dos hospedeiros não parasitados;

- λ= taxa reprodução do hospedeiro;

- c= número médio de ovos depositados por um parasita em um único hospedeiro.

Esses pressupostos conduzem a:

N_{t+1}= número de hospedeiros na anterior geração $\times$ fração não parasitados $\times$ taxa reprodutiva(λ).

P_{t+1}= número de hospedeiros parasitados na anterior geração $\times$ fecundidade de parasitóides(c).

Observando que $1 - f$ é a fração de hospedeiros que são parasitados, obtemos:

$$S = \begin{cases} N_{t+1} = \lambda N_t f(N_t, P_t) \\ P_{t+1} = cN_t(1 - f(N_t, P_t)) \end{cases}$$

Essa equações esboçam um quadro geral do modelo hospedeiro-parasita. Para proseguir, é necessário especificar em termos de $f(N_t, P_t)$ e como ele depende de duas populações. Examinaremos a seguir uma determinada forma sugerida pelo Nicholson E Bailey (1935).

4.5.2 O Modelo de Nicholson - Bailey

A.J. Nicholson foi um dos primeiros a biólogos a sugerir o sistema hospedeiro-parasita que poderia ser entendida utilizando um modelo teórico, embora apenas com a ajuda do físico V.A. Bailey que seus argumentos foram desenvolvidos com o rigor matemático.
Nicholson e Bailey estruturaram mais duas hipóteses sobre o número de encontro e a taxa de parasitismo de um hospedeiro:

- Encontros ocorrem aleatoriamente. O número médio de encontros N_e dos hospedeiros com os parasitas é, portanto, proporcional ao produto da sua densidade.

  $$N_e = aN_tP_t$$

  Onde a é uma constante, que representa a busca da eficiência dos parasitas.

- Apenas o primeiro encontro entre o hospedeiro e o parasita é levado em conta.

A distribuição de Poisson é a que descreve a probabilidade de ocorrência de eventos discretos, aleatoriamente (como o encontro entre um predador e suas presas). A probabilidade de certo número de eventos irá ocorrer em algum intervalo de tempo (como o tempo de vida do hospedeiro) é dado pelos sucessivos termos nesta distribuição. Por exemplo, a probabilidade de r eventos é:

$$P_r = \frac{e^{-u}\mu^r}{r!}$$

Onde μ é o número de eventos de um determinado intervalo de tempo.

No caso de encontros entre hospedeiro-parasita, o número médio de encontros por hospedeiro por unidade de tempo é:

$$\mu = \frac{N_e}{N_t} = aP_t$$

Assim, por exemplo, a probabilidade de exatamente dois encontros seria dada por

$$P_2 = \frac{e^{-aP_t\mu^r}}{2!}$$

A probabilidade de um parasita escapar é a mesma que a probabilidade de zero encontros durante o acolhimento da vida, ou seja, $p(0)$. Assim,

$$f(N_t, P_t) = p(0) = \frac{e^{-aP_t}(-aP_t)^0}{0!} = e^{-aP_t}$$

Portanto, substituindo no sistema teremos

$$S = \begin{cases} N_{t+1} = \lambda N_t e^{-aP_t} \\ P_{t+1} = cN_t(1 - e^{-aP_t}) \end{cases}$$

Vamos agora analisar esse modelo, os passos incluem:

- Encontrar os coeficientes da matriz jacobiana (para o sistema linearizado);

- Analisar a estabilidade do sistema.

Modelo de Nicholson-Bailey: Equilíbrio e Estabilidade. Seja

$$F(N_t, P_t) = \lambda N_t e^{-aP_t}$$

$$G(N_t, P_t) = cN_t(f - e^{-aP_t}).$$

Ao estudar os estágios estáveis, obtemos a solução trivial $P = N = 0$, para outro ponto de equilíbrio, pelo ponto fixo, teremos que,

$$\begin{cases} F(\overline{N_t}, \overline{P_t}) = \overline{N_t} \\ G(\overline{N_t}, \overline{P_t}) = \overline{P_t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \overline{N_t} e^{-a\overline{P_t}} = \overline{N_t} \\ c\overline{N_t}(f - e^{-a\overline{P_t}}) = \overline{P_t}. \end{cases}$$

Desenvolvendo este sistema encontramos:

$$\lambda e^{-a\overline{P_t}} = 1 \Rightarrow e^{-a\overline{P_t}} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow -a\overline{P_t} = \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) \Rightarrow -a\overline{P_t} = -\ln(\lambda) \Rightarrow \overline{P_t} = \left(\frac{\ln(\lambda)}{a}\right) \text{ e}$$

$$c\overline{N_t}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = \overline{P_t} \Rightarrow c\overline{N_t}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = \left(\frac{\ln(\lambda)}{a}\right) \Rightarrow \overline{N_t} = \left(\frac{\lambda \ln(\lambda)}{ac(\lambda - 1)}\right)$$

$$\overline{N_t} = \left(\frac{\lambda \ln(\lambda)}{ac(\lambda - 1)}\right)$$
$$\overline{P_t} = \left(\frac{\ln(\lambda)}{a}\right)$$

Portanto temos dois pontos de equlíbrio $P_1 = (0,0)$ e $p_2 = (\overline{N}, \overline{P})$, para analisarmos a estabilidade desses pontos, devemos encontrar o traço e o determinante da matriz Jacobiana, que são encontradas através das derivadas parciais das funções $F(N_t, P_t) = \lambda N_t e^{-aP_t}$ e $G(N_t, P_t) = cN_t(1 - e^{aP_t})$, onde teremos:

1. $\dfrac{\partial F}{\partial N} = \lambda e^{-aP}$

2. $\dfrac{\partial F}{\partial P} = -a\lambda N e^{-aP}$

3. $\dfrac{\partial G}{\partial N} = c(1 - e^{-aP})$

4. $\dfrac{\partial G}{\partial P} = acNe^{-aP}$

Para o primeiro ponto $P_1 = (0,0)$, encontramos:

$$\frac{\partial F}{\partial N}(0,0) = \lambda \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial P}(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial N}(0,0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial P}(0,0) = 0$$

A matriz Jacobiana é,

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

desta matriz temos que: $det(J_1) = \gamma_1 = 0$

$$tr(J_1) = \beta_1 = \lambda$$

Portanto temos que P_1 é estável $\Leftrightarrow |\lambda| \leq 1$, mas $\lambda < 1 \Rightarrow \overline{P} < 0$.

Para o segundo ponto $P_2(\overline{N}, \overline{P})$, encontraremos:

$$\frac{\partial F}{\partial N}(\overline{N},\overline{P}) = 1 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial P}(\overline{N},\overline{P}) = -a\overline{N}$$
$$\frac{\partial G}{\partial N}(\overline{N},\overline{P}) = c\left(1-\frac{1}{\lambda}\right) \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial P}(\overline{N},\overline{P}) = \frac{ca\overline{N}}{\lambda}$$

A matriz Jacobiana é,

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & -a\overline{N} \\ c\left(1-\frac{1}{\lambda}\right) & \frac{ca\overline{N}}{\lambda} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

desta matriz temos que:

$$det(J_2) = \gamma_2 = \frac{ca\overline{N}}{\lambda} - (-a\overline{N})\left(c\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right) \tag{4.3}$$

e

$$tr(J_2) = \beta_2 = 1 + \frac{ca\overline{N}}{\lambda} \tag{4.4}$$

Podemos desenvolver a equação (4.3) para verificar o a estabilidade, γ_2 será:

$$\gamma_2 = \frac{ca\overline{N}}{\lambda} - (-a\overline{N})\left(c\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$
$$\gamma_2 = \frac{ca\left(\frac{\lambda\ln(\lambda)}{ac(\lambda-1)}\right)}{\lambda} - \left(-a\left(\frac{\lambda\ln(\lambda)}{ac(\lambda-1)}\right)\right)\left(c\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$
$$\gamma_2 = \frac{\ln(\lambda)}{\lambda-1} + \left(\frac{\lambda\ln(\lambda)}{(\lambda-1)}\right)\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)$$
$$\gamma_2 = \frac{\ln(\lambda)}{\lambda-1} + \ln(\lambda)$$
$$\gamma_2 = \frac{\ln(\lambda) + (\lambda-1)\ln(\lambda)}{\lambda-1}$$
$$\gamma_2 = \frac{\ln(\lambda) + (\lambda\ln(\lambda)) - \ln(\lambda)}{\lambda-1}$$
$$\gamma_2 = \frac{\lambda\ln(\lambda)}{\lambda-1}$$

e β_2 temos,

$$\beta_2 = 1 + \frac{ca\overline{N}}{\lambda}$$
$$\beta_2 = 1 + \frac{ca\left(\frac{\lambda\ln(\lambda)}{ac(\lambda-1)}\right)}{\lambda}$$

$\beta_2 = 1 + \dfrac{\ln(\lambda)}{\lambda - 1}$

Vamos mostrar que $\gamma_2 > 1$, para isto precisamos mostrar que $\frac{\lambda \ln(\lambda)}{\lambda - 1} > 1$, ou seja, $H(\lambda) = \lambda - 1 - \lambda \ln(\lambda) < 0$.

Observe ainda que $H(1) = 1 - 1 - 1\ln(1) = 0$ e $H'(\lambda) = 1 - \ln(\lambda) - \lambda\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) = -\ln(\lambda) < 0$, para $\lambda \geq 1$, portanto a função $H(\lambda)$ é decrescente e $H(\lambda) < 0$ para $\lambda \geq 1$, mas por γ_2 e β_2 $\lambda \neq 1$, então $\lambda > 1$.

Pelo critério de estabilidade (3.1.1), temos que $2 > 1 + \gamma > |\beta|$, mas $\lambda \geq 1$, logo o ponto P_2 não é estável.

Portanto, os pontos de equilíbrio $(\overline{N}, \overline{P})$ não são estáveis.[4]

Considerações Finais

Este trabalho teve por objetivo ampliar nossos conhecimentos matemáticos obtidos no decorrer da Graduação, bem como estender e compreender conceitos que envolvem equações de diferença linear, entendendo que, para estas, existem inúmeras aplicações desde a matemática elementar às ciências experimentais, neste caso, ciências biológicas, a engenharias, dentre outras.

Os resultados aqui apresentados demonstram que, para o estudo de Equações de diferença linear, torna-se fundamental uma sólida base cálculos matemáticos, posto que para as demonstrações de conceitos e teoremas, por vezes, recorremos às anotações previamente coletadas em sala de aula no decorrer das disciplinas desta graduação. No primeiro capítulo explanamos as definições de Equações de diferenças lineares de primeira ordem, homogêneas, bem como Conceito e Tipos de soluções de Equações de diferença linear de segunda ordem. Também, Sistema de Equações de Diferenças Lineares, onde utilizamos diversos conceitos previamente assimilados, como a resolução de sistemas lineares, dimensão de espaço vetorial, e a noção de autovalores e autovetores.

Para o estudo de Equações e de Sistemas de equações de diferença não linear, abordadas no segundo capítulo, relembramos conceitos de Critérios de estabilidade de ponto de equilíbrio, o que nos propiciou a interligação entre assuntos distintos, a fim de ampliarmos nosso conhecimento acerca deste importante estudo.

Por fim, após conceituar, exemplificamos aplicações relevantes para o estudo de Equações de diferença linear de primeira e segunda ordem, e de Diferença Não Linear, onde, analisamos um modelo particular de Interações entre duas espécies: sistema hospedeiro - parasita, em que as duas espécies têm várias características distintas, e seus comportamentos são estudados através do reconhecido Modelo de Nicholson - Bailey.

Portanto, os resultados apresentados mostraram que, como toda a matemática, as Equações de Diferença Linear e Não Linear tem seu valor relevante perante a sociedade, visto que sua descoberta foi um dos maiores avanços, tanto para a matemática quanto para o mundo. O uso de suas aplicações, sem dúvida, irão se propagar, podendo ser estudadas e desenvolvidas em qualquer área de conhecimento.

Referências Bibliográficas

[1] Costa M.R.N. *Equações de Diferenças finitas, FEUP. 1995.*

[2] Navario, Gustavo Adolfo Juarez Silviaines. Ecuaciones en Diferenciais de Primer Ordem.

[3] Elayde, Saber N., An Introduction to Difference Equations, Springer Verlag, New York, 1996.

[4] Barros, Prof. Dr. Laécio Carvalho de, Notas de aula; Campinas-SP, dezembro de 2007. http://www.ime.unicamp.br/laeciocb/notas%20de%20aula_mt624%20(1).pdf