UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DANILO DA SILVA MIRANDA
PATRICIO DE CASTRO CASTELO

APLICAÇÕES DE MATRIZES

MACAPÁ - AP
2016

DANILO DA SILVA MIRANDA
PATRICIO DE CASTRO CASTELO

APLICAÇÕES DE MATRIZES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao colegiado de Matemática como requisito para obtenção do grau de Licenciatura Plena em Matemática. Orientador: Prof. Dr.Guzmán Eulálio Isla Chamilco

MACAPÁ - AP
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

512.9434
M672a Miranda, Danilo da Silva.

Aplicações de matrizes / Danilo da Silva Miranda, Patrício de Castro Castelo; orientador, Guzmán Eulálio Isla Chamilco. -- Macapá, 2016.

63 p.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Matrizes. 2. Sistemas lineares. I. Castelo, Patrício de Castro. II. Chamilco, Guzmán Eulálio Isla, orientador. III. Fundação Universidade Federal do Amapá. IV Título.

DANILO DA SILVA MIRANDA
PATRICIO DE CASTRO CASTELO

APLICAÇÕES DE MATRIZES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do Grau de Licenciatura Plena em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá, campus Marco Zero, aprovado pela comissão de professores:

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
Orientador
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof(a). Msc. Naralina Viana Soares da Silva
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Naralina Viana Soares da Silva

Prof. Esp. João Socorro Pinheiro Ferreira
Colegiado de Matemática, UNIFAP

João Socorro Pinheiro Ferreira

João Socorro Pinheiro Ferreira
Professor do Magistério Superior
SIAPE: 1820609 - UNIFAP

MACAPÁ - AP

2016

A minha formação não poderia ter sido concretizada sem a insistente ajuda dos meus familiares. Minha mãe Maria do Socorro, meus irmãos: Daniela, Kléber, Simone, Patrícia, Katiane e dos meus sobrinhos: Gabriela, Riquelme, Ingrid Cássia e Pedro Henrique, que ao longo desses árduos anos me proporcionaram, além do extenso carinho e amor, os conhecimentos da integridade, da perseverança e de procurar sempre a Deus a força maior para meu desenvolvimento como ser humano. Gostaria de dedicar esta conquista e registrar minha imensa gratidão e amor por todos vocês.

A meu mestre Prof. Ayrton Góes, que conheci ainda no ensino médio, e com ele e toda sua família construir uma amizade que levarei para a vida inteira. Não poderia esquecer os inúmeros conselhos que recebi e recebo de você e sua esposa Maria Rita ao longo desta jornada, registro minha gratidão pelo constante carinho que recebo de vocês.

Ao meu amigo e companheiro de profissão Prof. Marcos Roberto, que me deu a oportunidade de conhecer a sala de aula sendo um professor sempre acreditando em minha capacidade.

Ao meu grande amigo/irmão Gério Coelho, que conheci ainda na 7ª série do ensino fundamental, e que mesmo após o término do nosso ensino médio, continuamos com nossa amizade, o admiro em sua dedicação e empenho em ajudar o próximo.

A todos os outros amigos que sempre me incentivaram nessa jornada. A ajuda de vocês foi de fundamental importância para esta conquista. A todos aqueles que de alguma forma estiveram e estão próximos de mim, fazendo esta vida valer cada vez mais a pena.

Danilo Silva

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades. A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presente.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gusman Eulálio, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos. Aos meus pais, filho e mulher, pelo amor, incentivo e apoio incondicional. E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Patrício Castelo

AGRADECIMENTOS

A Deus, que é o nosso maior mestre e que me permitiu vencer mais esta etapa da vida. A minha mãe Maria do Socorro e a todos meus irmãos e sobrinhos, que não mediram esforços para a realização deste sonho. A meus amigos que sempre estiveram comigo e que, pela presença, pela palavra, pela atenção ou pelo simples sorriso me deram coragem e determinação para seguir em frente. Agradeço a todos meus professores de nível médio ao superior por terem me proporcionado enorme conhecimento. Em especial ao meu grande mestre Prof. Ayrton Góes e ao meu orientador Prof. Dr. Gusman Eulálio. A todos que direta ou indiretamente fizeram parte de minha formação, o meu muito obrigado.

Danilo Silva

AGRADECIMENTOS

Ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá, e às pessoas com quem convivi nesses espaços de longos desses anos. A experiência de uma produção compartilhada na comunhão com amigos nesses espaços foram o melhor experiência da minha formação acadêmica, dedicar ao meu filho, que muito me esforcei pra ser um exemplo.

Patrício Castelo

Não há ramo da matemática, por mais abstrata que seja que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real

Nikolai Lobachevsky

RESUMO

O estudo e a leitura da matemática sempre se mostram como os principais subsídios para o aprimoramento da riqueza intelectual, as matrizes por serem um dos conteúdos mais antigos e possuir grande utilidade nas aplicações nos vários campos, ganharam um valor imensurável. Dessa maneira buscamos apresentar em nosso trabalho algumas destas peculiaridades; primeiro fizemos uma abordagem histórica dos povos que já utilizavam as matrizes de maneira implícita, passando pelo uso relacionado aos quadrados mágicos, que tiveram sua primeira aparição desenhado no casco de uma tartaruga, chegando ao método usado na China para resolução de sistemas lineares, chamado método Fangcheng. Definimos algumas matrizes, e por fim elencamos três aplicações que estão relacionadas à criptografia, a modelos populacionais e ao controle de trafego terrestre.

Palavras-chave:Aplicações. Matrizes. Sistemas Lineares.

ABSTRACT

The study mathematics and reading always appear as the main contribute for the improvement of intellectual wealth, the headquarters for being one of the oldest content and have great use in applications in various fields, they gained an immeasurable value. In this way we seek to present our work in some of these peculiarities; first we made a historical approach of people already using arrays implicitly, through the use related to magic squares, which had its first appearance drawn on the shell of a turtle, coming to the method used in China for solving linear systems, called Fangcheng method. We define some matrices, and finally we selected three applications that are related to encryption, the population models and control of terrestrial traffic.

Key-words:Applications, Matrices and Magic Squares.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma das ciências mais antigas que se tem conhecimento, e vem se desenvolvendo conforme as necessidades do homem. Nos séculos IX e VIII a.c os babilônios e os egípcios já utilizavam as áreas da geometria e da álgebra em situações simples do seu dia a dia, porém ela ainda era desorganizada. Foi somente a partir dos séculos VI e V a.c , com os gregos, que começou a se tornar uma ciência organizada. E com o seu desenvolvimento todos passaram a ter acesso a ela.

Em nosso processo de aprendizagem nos deparamos desde cedo com os conceitos básicos de contagem, passando a conhecer as quatro "operações básicas". Na adolescência nos deparamos com os conjuntos numéricos, fatoração, geometria plana, dentre outros. E quando enfim chegamos ao nível médio conhecemos outros conteúdos matemáticos: sequências, progressões aritmética e geométrica, funções do 1º e 2º grau, matrizes, etc.

Ao longo desses anos de educação básica (nível fundamental e médio) muitas das vezes os conteúdos da matemática nos são apresentados sem nenhuma aplicação, somente na sua forma "crua" e com fórmulas e mais fórmulas para decorarmos o que acaba intitulando a matemática como uma das disciplinas mais difíceis de aprender. É claro nem todos os conteúdos possuem uma aplicação de fácil entendimento para os alunos que ainda estão nesse nível.

Conhecendo essa realidade organizamos nosso trabalho com o objetivo de apresentar algumas aplicações simples de matrizes, conteúdo que é abordado na maioria das vezes, aos adolescentes que estão cursando o 2º ano do ensino médio.

Nosso trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro buscamos fazer uma abordagem histórica sobre o surgimento das matrizes. Passamos por sua origem, na qual os povos do oriente destacam-se como os primeiros a utilizarem esses conceitos, entretanto a tão famosa consolidação algébrica das matrizes que conhecemos hoje só veio pelas mãos dos matemáticos Arthur Cayley e James Sylvester já em torno do século XVIII. Após esse processo abordamos também um tópico sobre os quadrados mágicos, que apresentam conceitos rudimentares sobre matrizes, o quadrado mágico teve sua primeira aparição desenhado no casco de uma tartaruga (considerado um animal sagrado na China). Passando por essa abordagem apresentamos também a relação que as matrizes possuem com os sistemas lineares e com os determinantes, expondo ainda um problema prático que trata o método Fangcheng (método Chinês para resolver sistemas lineares).

No segundo capítulo baseando-nos nas obras de Boldrine 1980,Iezzi 2004, Paiva 2010 e Dante 2012, apresentamos definições referentes à teoria das matrizes, como o assunto é introduzido aos alunos do ensino médio, passando pela sua definição, representação genérica, tipos especiais, operações entre matrizes, chegando até matriz inversa. Vale ressaltar que as demonstrações das propriedades aqui apresentadas foram omitidas, devido o foco do trabalho não está se dando para tais.

Em nosso último capítulo baseamo-nos em Edwards e Penney 1998, Kilhian 2011 e Smolle e Diniz 2013, para apresentar aplicações simples de matrizes. Primeiro apresentamos dois exemplos de matrizes relacionadas à criptografia que utiliza a inversão e a multiplicação de matrizes para codificar e decodificar uma mensagem esse método ainda apresenta, de forma implícita, alguns conceitos básicos de função, que tentamos exibir através dos gráficos apresentados. Logo em seguida detalhamos a aplicação de matrizes relacionada a modelos populacionais, onde é dada certa população, que pode ser subdividida em grupos e busca-se determinar como essa população se modifica ano a ano. Após esse processo apresentamos nossa última aplicação, que está relacionada ao controle de tráfego terrestre. Nessa aplicação é dado um "cruzamento"de ruas de mão dupla e o fluxo de carros é controlado por um conjunto de três semáforos, buscamos através de um exemplo hipotético, mostrar a quantidade máxima de carros que podem passar por esse "cruzamento"sem que haja um congestionamento.

Através do exposto buscamos mostrar as diversas aplicações que o estudo da teoria das matrizes podem nos proporcionar, é claro, são inúmeras essas aplicações: tendo da mais simples a mais complexa. Nosso trabalho está longe de ser um estudo concluído ou terminado.

2 MATRIZES- UMA ABORDAGEM HISTÓRICA

2.1 Origens das matrizes

A História da matemática retrata que os estudos das matrizes em sua essência está presente desde os tempos antigos da humanidade, mas conceitos elementares foram difundidos apenas no século XIX, é indissoluvelmente relacionada aos sistemas lineares; A teoria das matrizes é consequência de uma extensa e árdua evolução. Atribui-se, portanto, acepção bastante valiosa a afirmação contida em BOURBAKI 1999 de que o tema “é um dos mais antigos e um dos mais novos da Matemática”. Podemos-nos deparar apontamento de sua origem em registros babilônicos e chineses da Antiguidade; em materiais escritos por Gottfried Leibniz; nas técnicas de cálculo de Carl F. Gauss e em apêndices de trabalhos publicados por diversos matemáticos e físicos, chegando à cobiçada consolidação algébrica pelas mãos de Arthur Cayley e James J. Sylvester. Ao longo desse período, as matrizes auferiram inovações e admiráveis acepções em diversos campos de interesse da matemática.

Intensamente utilizada as matrizes pelos povos do oriente em várias áreas, como por exemplo, os cálculos efetuados pelos chineses na contabilidade através de diagramas desenhados em bambu, este o respalda como uns dos primeiros povos a fazer uso das matrizes, aplicando no controle de armazenamento de alimentos e cálculos elementares, os chineses eram habilidosos nas áreas de resoluções de sistemas lineares, estudo de clima e quadrado mágico.

O algoritmo utilizado na China para resolução simultânea de equações (sistema de equações lineares) ficou conhecido como método Fangcheng, na qual ocupa um capitulo inteiro do livro Jiuzhang Suanshu (Nove capítulos da arte matemática). Este livro é um dos principais registros históricos de como os chineses da antiguidade praticavam a matemática.

Ergue-se no século XVII uma surpreendente e inovadora solução para os sistemas lineares até então não vista, foi utilizado os determinantes para tal resolução, fato este, apareceu nos países do oriente como no Japão transcrito pelo Takakazu Seki Kowa (1642-1708), que instituiu ao método Chinês (que ainda era limitado), toda a sua conjuntura empregada didaticamente, colocando-os em tabelas o que acarretou a sistematização do método, um grande passo para a evolução das matrizes.

Gottfrid Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) sintetizou o método de Kowa, criando um arranjo com os coeficientes e termos independentes contendo até três equações e conseguiu extrair um determinante compatível dessas notações, o estudo de um sistema linear de equações como é conhecido hoje teve início em 1678. Kline (1927:p.606) conta que, em 1693, Leibniz usou um conjunto sistemático de índices como coeficiente de um sistema de três equações lineares em duas incógnitas, x e y. Ele reescreveu as equações eliminando as incógnitas e obteve uma regra para alcançar o que hoje conhecemos como determinante de um conjunto de equações lineares.

O primeiro registro dessa notação foi encontrado em uma carta que Leibniz enviou a Guillaume François Antoine (1661-1704), o Marquês de L'Hospital (BASHMAKOVA, 2000:p.149). Na correspondência, datada de 28 de abril de 1693, Leibniz explicou que, para resolver o problema da eliminação das incógnitas do sistema usou um método parecido com que um dia seria o método de Sarry.

O ápice da conjuntura para que as tabelas e sistemas lineares se tornassem as matrizes que nos abstém no cotidiano transcorreram pelas ideologias de Arthur Cayley (1821 - 1895), pelo meio de sua inestimável obra "Memoir on The Theory of Matrices"em 1858, que além de reescrever as equações no formato que conhecemos hoje, deu nome as matrizes e introduziu os conceitos de soma, multiplicação entre matrizes e por escalares.

James Joseph Sylvester (1814 - 1897) utilizou o significado coloquial da matriz, qual seja local onde algo se gera ou cria, com efeito, via-as com um bloco retangular de termos, o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma matriz a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um numero P e escolher a vontade P linhas e P colunas artigo publicado na Philosophical magazine de 1850, pg 363-370; Sylvester ainda via as matrizes como mero ingrediente dos determinantes. É só com Cayley que elas passaram a ter vida própria e gradativamente começam a suplantar os determinantes em importância.

A maioria dos resultados básicos da teoria das matrizes fora descobertas quando os matemáticos dos séculos XVIII e XIX passaram a investigar a teoria das formas quadráticas, hoje em dia é imprescindível estudar essas formas através da notação e metodologia matricial, mas naquela época elas eram tratadas escarlamente. Um exemplo de uma forma quadrática de duas variáveis, por notação escalar e matricial ao mesmo tempo $q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

2.2 Matrizes e os quadrados mágicos

Embora a teoria de matrizes tenha sido desenvolvida a partir de meados do século XIX, conceitos elementares de matrizes remontam ao período anterior ao nascimento de Cristo, uma vez que os chineses aplicavam métodos matriciais para resolver certos sistemas de equações. Outro exemplo de aplicação do conceito rudimentar de matriz são os Quadrados Mágicos. Algumas lendas sugerem que os quadrados mágicos são originários da China, tendo sido citados pela primeira vez em um manuscrito do templo do imperador Yu, cerca de 2800 anos a. C. Santinho e Machado (2006) revelam que os quadrados mágicos surgiram desenhados no casco de uma tartaruga- considerado um animal sagrado na China.

Yu percebeu que as marcas na forma de nós, feitos num tipo de barbante, podiam ser transformadas em números e que se somássemos cada linha, cada coluna e cada diagonal obteríamos o número quinze em todas as direções, como se fossem algarismos mágicos. Santinho e Machado (2006).

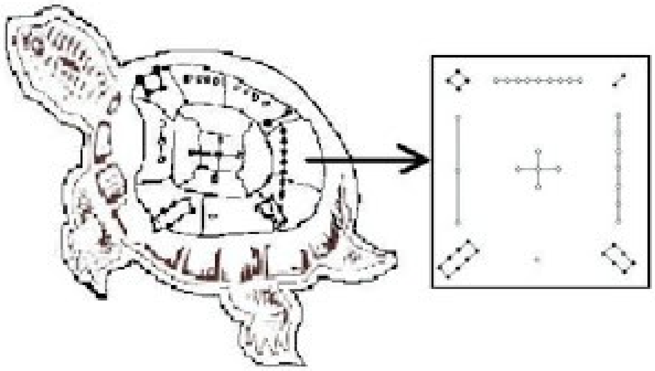

Figura 2.1: A tartaruga sagrada e o Lo Shu

Fonte: Blog do Colegião Matematica

Surgira então o primeiro quadrado mágico chamado: Quadrado Mágico de Lo-Shu. Na qual a soma das linhas, das colunas e das diagonais era sempre o número 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figura 2.2: Quadrado mágico de Lo-Shu.

Fonte: Página Jornal da Orla

Acredita-se ainda que os quadrados mágicos tenham sido inventados na Índia, chegando à Arábia no século IX, e espalharam-se pelo Japão e Oriente Médio, onde eram associados à astrologia, para cálculos dos horóscopos. O primeiro uso dos quadrados mágicos no Ocidente apareceu na gravura intitulada Melancolia I, do pintor alemão Albrecht Durer (1471-1528).

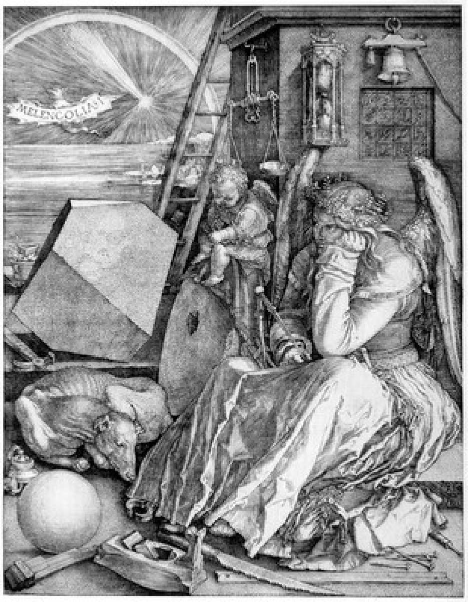

Figura 2.3: Melancolia I.

Fonte: Página Jornal da Orla

Ao ampliarmos a figura acima, somente no canto superior direito, podemos ver um quadrado formado por quatro linhas e quatro colunas e nelas estão dispostos vários números, como segue a figura abaixo.

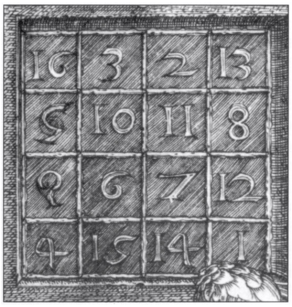

Figura 2.4: Quadrado mágico de Albrecht Durer.

Fonte:Blog Matcolegião

O número mágico desse quadrado é o 34, que resulta além da soma de suas linhas, colunas e diagonais, também da soma dos números que estão nos vértices do quadrado $(16 + 13 + 4 + 1 = 34)$. Além dessas características ainda temos:

-Deslocando-se uma casa, no sentido horário, dos números que estão nos vértices do quadrado $(16, 13, 1, 4)$ a soma desse outros números $(3, 8, 14, 9)$ também serão 34;
- O mesmo acontece se forem deslocadas duas casas a partir desses números $(16, 13, 1, 4)$ a soma deles $(2, 12, 15, 5)$ também será 34;
- A soma dos campos centrais $(10, 11, 7, 6)$ desse quadrado também é 34;
- A soma dos extremos médios $(3, 2, 14, 15)$ e $(8, 12, 9, 5)$ também resulta no número 34;
- Na última linha, nos dois números localizados ao centro $(15, 14)$ ao uni-los teremos o ano em que a obra foi realizada (1514);

Além de Albrecht Durer, o físico e teologista alemão Heinrich Cornelius Agrippa (1486- 1535) construiu sete quadrados mágicos de ordens 3 a 9, na qual representavam simbolicamente os sete planetas conhecidos até então, incluindo o Sol e a Lua.

Alguns matemáticos dentre eles Bernard Frénicle de Bessy (1602-1675), Claude-Gaspar Bachet (1581-1638), Pierre de Fermat (1601-1665) e Leonhard Euler (1707-1783), também se interessaram pelo estudo dos quadrados mágicos, devido à complexidade em sua construção, classificação e enumeração dos quadrados de uma determinada ordem.

Após passarmos um pouco pela história dos quadrados mágicos nos deparamos com uma pequena definição de QM, que pode ser encontrada no trabalho de Santinho e Machado (2006).

Um quadrado mágico de ordem n é um arranjo quadrado de n^2 elementos- inteiros distintos, dispostos de tal maneira que os números de uma linha qualquer, de uma coluna qualquer ou das diagonais têm a mesma soma chamada soma (ou constante) mágica do quadrado

A ordem de um QM é determinada pelo número de elementos existentes em uma linha, uma coluna ou de uma diagonal. Por exemplo, a ordem de um QM $4x4$ é 4, pois existem 4 elementos em cada linha, coluna e diagonal.

Se os números utilizados na construção do quadrado mágico forem os primeiros números naturais de 1 ate n^2 (usamos todos os números de 1 a n^2, sem repetição de qualquer número, para preencher o quadrado), dizemos que ele é um quadrado mágico normal, então a constante mágica ou soma mágica é dada por $K = \frac{n(n^2+1)}{2}$

O que pode ser demonstrado.

De fato:

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n^2 - 2) + (n^2 - 1) + n^2$

$S = n^2 + (n^2 - 1) + (n^2 - 2) + \cdots + 3 + 2 + 1$

$\underbrace{2S = (n^2 + 1) + (n^2 + 1) + (n^2 + 1) + \cdots + (n^2 + 1)}_{n^2 vezes}$

$2S = (n^2 + 1)n^2$

$S = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$ Se K é a soma de cada coluna e se há n colunas $S = Kn$, Então $Kn == \frac{n^2(n^2+1)}{2}$ Logo obtemos $K = \frac{n(n^2+1)}{2}$

Dessa maneira podemos dispor de uma tabela com a ordem do quadrado e a soma mágica.

Tabela 2.1: Ordem e a soma mágica dos QM

Ordem n	3	4	5	6	...	n
Soma Mágica	15	34	65	111	...	$\frac{n(n^2+1)}{2}$

Fonte:Santino e machado (2006)

Caso os números utilizados para a construção do QM não estiverem entre 1 e n^2, a soma mágica pode ser determinada realizando-se o quociente entre a soma dos números (Sn) e a ordem do QM (n). Para exemplificar, tomemos um conjunto com nove inteiros: $4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$ e queremos dispor em um quadrado mágico, porém não sabemos qual é a sua constante mágica. Basta somarmos todos os elementos desse conjunto e dividimos pela ordem do QM que nesse caso é 3.

Então temos: K é a soma mágica

$K = \frac{K}{O} \Rightarrow \frac{4+6+8+\cdots+20}{3} \Rightarrow \frac{108}{3} = 36$

Logo teremos que organizar o conjunto de números acima em um quadrado de 3x3 de maneira que a soma das linhas, colunas e diagonais sejam sempre a constante 36. O conjunto de números acima está disposto sob a forma de uma PA finita (progressão aritmética) na qual a soma de seus n primeiros elementos pode ser expressa: $K = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$. Dessa maneira podemos concluir que, qualquer conjunto de n^2 números dispostos sob a forma de uma progressão aritmética forma um quadrado mágico.

O estudo dos quadrados mágicos não se restringe apenas ao que foi apresentado no subitem do trabalho, existem diversas outras propriedades, na qual não convém menciona-las, devido à intenção que pretendemos apresentar ser apenas mostrar o uso dessa ferramenta e com o que ela contribuiu para o desenvolvimento do estudo da teoria das matrizes.

Ao longo dos tempos, os quadrados mágicos foram venerados pelas mais variadas civilizações. Há evidencias que comprovam a utilização de quadrados mágicos simples, de ordem 3 (com soma mágica 15) pelos índios maias e pelo povo hausa da África. Hoje em dia investigadores estudam estes objetos matemáticos em dimensões elevadas. Trabalham com cubos, hipercubos mágicos em diversas dimensões, em que é possível obter a constante mágica em todas as direções correspondentes.

2.3 Matrizes, determinantes e sistemas lineares

Na matemática ocidental antiga, são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto mereceu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Os sistemas de equações lineares eram especialmente usados pelos chineses para contabilidade através de diagramas escritos em pedaços de bambu. As equações eram dispostas de modo semelhante ao utilizado hoje em dia e a resolução usava um método simplificado de eliminação dos coeficientes (comparado ao método da eliminação de Gauss, apresentado somete no século XIX). Esse método é citado no livro chinês Nove Capítulos da Arte Matemática, datado entre os séculos II e III a.C.

O algoritmo utilizado na China para resolução simultânea de equações (sistema de equações lineares) ficou conhecido como método Fangcheng, na o qual ocupa um capitulo inteiro do livro Jiuzhang Suanshu (Nove capítulos da arte matemática). Este livro é um dos principais registros históricos de como os chineses da antiguidade praticavam a matemática. O termo "Fangcheng" não tem tradução exata, em geral a palavra é entendida como “equação”, porém “Fang”significa tanto 'quadrado' quanto 'retângulo'. Daí então o método ter esse nome, pois exige um arranjo de números dispostos na forma de um quadrado ou de um retângulo.

Um problema prático que trata o Método Fangcheng e pode ser encontrado no capítulo VIII do livro Nove Capítulos da Arte Matemática, é citado no livro Eves (2004). é o seguinte:

Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades?”

Segundo o método chinês, o problema deve ser representado da seguinte maneira:

	1^a	2^a	3^a
Boa Qualidade	1	2	3
Qualidade Regular	2	3	2
Má *Qualidade*	3	1	1
	26	34	39

Após a tabela disposta por linhas e por colunas ser montada, segue-se os passos:

1º **Passo:** multiplicam-se todos os termos da coluna central (2, 3, 1, 34) pelo primeiro termo da coluna à direita (3). Obtendo-se (6, 9, 3, 102).

	1^a	2^a	3^a
Boa Qualidade	1	6	3
Qualidade Regular	2	9	2
Má *Qualidade*	3	3	1
	26	102	39

2º **Passo:** subtraia-se de cada elemento da coluna central os seus respectivos valores localizados na coluna à direita (6-3=3; 9-2=7; 3-1=2; 102-39=63).

	1^a	2^a	3^a
Boa Qualidade	1	3	3
Qualidade Regular	2	7	2
Má *Qualidade*	3	2	1
	26	63	39

3° **Passo:**Repetimos continuamente o 2º passo ate que o primeiro elemento da coluna central seja eliminado ($3 - 3 = 0; 7 - 2 = 5; 2 - 1 = 5; 63 - 39 = 24$).

	1^a	2^a	3^a
Boa Qualidade	1	0	3
Qualidade Regular	2	5	2
Má *Qualidade*	3	1	1
	26	24	39

4º **Passo:** o 1º e o 2º passo são repetidos entre as colunas 1 e 3, eliminando-se o primeiro elemento da linha 1 ($3 \ . \ 1 = 3; \ 3 \ . \ 2 = 6; \ 3 \ . \ 3 = 9; \ 3 \ . \ 26 = 78 \ , \ 1^o passo)$, ($3-3=0; \ 6-2=4; \ 9-1=8; \ 78-39=39 \ , \ 2^o passo$).

	1^a	2^a	3^a
Boa Qualidade	0	0	3
Qualidade Regular	4	5	2
Má *Qualidade*	8	1	1
	39	24	39

5º **Passo:** Por ultimo repete-se o 1º e 2º passo entre as colunas 1 e 2,eliminando-se o segundo elemento da coluna de número 1. A observação que deve ser feita é em relação à multiplicação da coluna a direita (coluna 1) pelo primeiro elemento não nulo da coluna a esquerda (5). Após a multiplicação segue-se o 2º passo até o segundo elemento da coluna a direita ser zero (0).

Ao efetuar os passos acima teríamos a seguinte matriz:

$$\begin{array}{lccc} & 1^a & 2^a & 3^a \\ Boa \quad Qualidade & & & 3 \\ Qualidade \quad Regular & & 5 & 2 \\ \text{Má} \quad Qualidade & 36 & 1 & 1 \\ & 99 & 24 & 39 \end{array}$$

Com isso eles concluíam que o preço do feixe de má qualidade é $\frac{99}{36}$, o equivalente a 2,75 dou.

O preço do feixe de qualidade regular era determinado por uma substituição de valores.

$\Rightarrow (Qualidade \quad Regular) \quad \times \quad 5 + 2,75 = 24$

$\Rightarrow (Qualidade \quad Regular) \quad \times \quad 5 = 24 - 2,75$

$\Rightarrow (Qualidade \quad Regular) = \frac{21,25}{5}$

$\Rightarrow (Qualidade \quad Regular) = 4,25$

Concluindo que o preço do feixe de qualidade regular era de 4,25 dou. Para determinar o preço do feixe de boa qualidade efetuava-se o mesmo processo (substituição).

$\Rightarrow (Boa \quad Qualidade) \quad \times \quad 3 + (Qualidade \quad Regular)x \quad 2 + (Ma \quad Qualidade = 39$

$\Rightarrow (Boa \quad Qualidade) \quad \times \quad 3 + 2 \quad x \quad (4,25) + 2,75 = 39$

$\Rightarrow (Boa \quad Qualidade) \quad \times \quad 3 + 8,50 + 2,75 = 39$

$\Rightarrow (Boa \quad Qualidade) \quad \times \quad 3 + 11,25 = 39$

$\Rightarrow (Boa \quad Qualidade) \quad \times \quad 3 = 39 - 11,25$

$\Rightarrow (Boa \quad Qualidade) = \frac{27,75}{3}$

$\Rightarrow (Boa \quad Qualidade) = 9,25$

Dessa maneira tem-se que o preço do feixe de boa qualidade é de 9,25 dou. Ao atribuímos uma letra ao preço indicado para cada feixe com qualidade diferente, temos a representação algébrica do problema.

- Feixes de boa qualidade: x.
- Feixe de qualidade regular: y.
- Feixe de má qualidade: z.

Pelo enunciado do problema teríamos as seguintes igualdades:

a) Soma de 3 feixes de boa qualidade, 2 feixes de qualidade regular e 1 de má qualidade, são vendidos por 39 dou: $3x + 2y + z = 39$

b) A soma 2 feixes de boa qualidade, 3 de qualidade regular e 1 de má qualidade são vendidos por 34 dou:$2x + 3y + z = 34$

c) A soma de 1 feixe de boa qualidade, 2 de qualidade regular e 3 de má qualidade são vendidos por 26 dou:$x + 2y + 3z = 26$

Logo o problema pode ser expresso da seguinte forma:

$3x + 2y + z = 39$ (1)

$2x + 3y + z = 34$ (2)

$x + 2y + 3z = 26$ (3)

Verifica-se que os valores encontrados satisfazem as equações acima.

- Preço do feixe de boa qualidade: 9,25 dou.
- Preço do feixe de qualidade regular: 4,25 dou.
- Preço do feixe de má qualidade: 2,75 dou.

Para a equação (1):$3.(9,25) + 2.(4,25) + (2,75) = 39$

Para a equação (2):$2.(9,25) + 3.(4,25) + (2,75) = 34$

Para a equação (3):$(9,25) + 2.(4,25) + 3.(2,75) = 26$

O processo de eliminação dos coeficientes citado anteriormente só foi usado em 1809, pelo matemático alemão Gauss (1777- 1855), em um estudo feito entre 1803 e 1809 sobre a órbita do asteroide Pallas; nele aparece um sistema linear com 6 equações e 6 incógnitas.

A ideia de determinante surgiu simultaneamente na Alemanha e no Japão. Leibniz (1649- 1716), em uma carta escrita para L'Hospital (1661-1704), sugeriu usar combinações dos coeficientes para resolver sistemas de equações lineares e, além disso, encontrou uma maneira de indexar tais coeficientes com números. No mesmo ano, no Japão, o matemático Seki Kowa (1642-1708) escreveu um livro apresentando sistemas lineares sob a forma matricial, como já tinha aparecido na matemática chinesa. Seki foi o primeiro matemático a calcular determinantes. Em seu livro ele apresentou vários exemplos, mas não mostrou algo que fosse válido em casos gerais.

O uso de determinantes no Ocidente começou dez anos depois num trabalho de Leibniz, ligado também a sistemas lineares. Em resumo, Leibniz estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações a duas incógnitas em termos do determinante de ordem 3 formado pelos coeficientes e pelos termos independentes (este determinante deve ser nulo). Para tanto criou até uma notação com índices para os coeficientes: o que hoje, por exemplo, escreveríamos como a12, Leibniz indicava por 12.

O matemático escocês Maclaurin (1698-1746) também comparece na história dos determinantes. Em 1730, Maclaurin escreveu um livro chamado Um tratado sobre Álgebra, que só foi publicado em 1748, dois anos após a sua morte. Neste livro, Maclaurin apresenta o que chamou de "teorema geral"para eliminação de incógnitas de um sistema linear, faz a demonstração para matrizes de ordem 2 e 3 e explica como fazer a demonstração para matrizes de ordem 4. Maclaurin, porém, não comenta se o resultado pode ser generalizado para matrizes de ordem $n \geq 4$.

O "teorema geral de Maclaurin"é conhecido hoje como regra de Cramer, pois foi o matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752) quem publicou o resultado para matrizes de ordem n, no apêndice do seu livro Introdução à Análise de Curvas Algébricas, de 1750.

A conhecida regra de Cramer para resolver sistemas de n equações a n incógnitas, por meio de determinantes, é na verdade uma descoberta do escocês Colin Maclaurin (1698-1746), datando provavelmente de 1729, embora só publicada postumamente em 1748 no seu Treatise of algebra. Mas o nome do suíço Gabriel Cramer (1704-1752) não aparece nesse episódio de maneira totalmente gratuita. Cramer também chegou à regra (independentemente), mas depois, na sua Introdução à análise das curvas planas (1750), em conexão com o problema de determinar os coeficientes da cônica geral $A + By + Cx + Dy^2 + Exy + Fx^2 = 0$.

O francês Étienne Bézout (1730-1783), autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, sistematizou em 1764 o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. E coube a outro francês, Alexandre Vandermonde (1735-1796), em 1771, empreender a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares - embora também os usasse na resolução destes sistemas. O importante teorema de Laplace, que permite a expansão de um determinante através dos menores de r filas escolhidas e seus respectivos complementos algébricos, foi demonstrado no ano seguinte pelo próprio Laplace num artigo que, a julgar pelo título, nada tinha a ver com o assunto: "Pesquisas sobre o cálculo integral e o sistema do mundo".

O termo determinante, com o sentido atual, surgiu em 1812 num trabalho de Cauchy sobre o assunto. Neste artigo, apresentado à Academia de Ciências, Cauchy sumariou e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes, melhorou a notação (mas a atual com duas barras verticais ladeando o quadrado de números só surgiria em 1841 com Arthur Cayley) e deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes - meses antes J. F. M. Binet (1786-1856) dera a primeira demonstração deste teorema, mas a de Cauchy era superior.

Além de Cauchy, quem mais contribuiu para consolidar a teoria dos determinantes foi o alemão Carl G. J. Jacobi (1804-1851), cognominado às vezes "o grande algorista". Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta hoje elementarmente. Como algorista, Jacobi era um entusiasta da notação de determinante, com suas potencialidades. Assim, o importante conceito de jacobiano de uma função, salientando um dos pontos mais característicos de sua obra, é uma homenagem das mais justas.

A contribuição inglesa a teoria dos determinantes foi feita por Arthur Cayley (1821-1895) em 1841, na qual usou da notação de duas barras verticais para indicar determinantes. Notação que é utilizada nos dias atuais.

3 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES REFERENTES À TEORIA DAS MATRIZES

3.1 Introdução ao estudo das matrizes

Os livros didáticos, em sua maioria, começam o estudo da teoria das matrizes com uma pequena introdução. Apresentando tabelas, dispostas de linhas e colunas, sobre um determinado fato ou acontecimento do dia a dia. Para (PAIVA, 2010) "as tabelas são uma forma de organizar várias informações em pequenos espaços proporcionando uma consulta rápida, dada à simplicidade de sua representação em linhas e colunas."
Em sua obra voltada para o 2º ano do ensino médio Paiva introduz o estudo das matrizes com uma tabela que apresenta a expectativa de vida do brasileiro no ano de 2008, segundo as regiões brasileiras, Como segue na tabela 2.1.

Tabela 3.1: Expectativa de vida dos brasileiros em 2008

	[1]Norte	[2]Nordeste	[3]Sudeste	[4]sul	[5]Centro-Oeste
[1]Homens	69,1	66,5	70,4	71,6	70,6
[2]Mulheres	74,9	73,8	78,5	78,5	77,5

Fonte:www.ibge.gov.br

Os dados organizados sob a forma de tabelas apresentam uma grande simplicidade quando os interpretamos. Por exemplo, se quisemos saber qual a expectativa de vida de um homem (gênero 1) residente na região Norte (região 1), basta olhar o cruzamento da linha 1 com a coluna 1 e encontraremos 69,1 anos.

Na matemática essas tabelas são chamadas de matrizes. As definições a seguir foram baseadas nos livros:Boldrini 1980,Iezzi e Hazzan 2004, Paiva 2010, Dante 2012.

Definição 3.1 *Dados dois números m e n naturais e não nulos, chama-se matriz m por n (indica-se $m \times n$) toda tabela M formada por números distribuídos em m linhas e n colunas.*

Os elementos de uma matriz podem ser, números reais , complexos ou até mesmo expressões algrebricas e são chamados de entradas da matriz. Exemplos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 8 & 10 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3+i \\ i & 5i \end{bmatrix}$$

3.2 Representação genérica

Em uma matriz qualquer M, cada elemento é indicado por a_{ij}. O índice i indica a linha e o índice j à coluna as quais o elemento pertence. Com a convenção de que as linhas sejam numeradas de cima para baixo (de 1 até m) e as colunas, da esquerda para a direita (de i até n), uma matriz $m \times n$ é representada por:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ou} \quad M = \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\}$$

Uma matriz M do tipo $m \times n$ também pode ser indicada por : $M = (a_{ij})$; $i \in \{1, 2, 3, \cdots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ ou simplesmente $M = (a_{ij})_{m \times n}$.

Por exemplo, na matriz M acima o elemento a_{12} encontra-se na primeira linha e na segunda coluna.

3.3 Matrizes especiais

Algumas matrizes, por apresentarem uma utilidade maior nessa teoria, recebem um nome especial.

3.3.1 Matriz linha

Definição 3.2 *Matriz linha é toda matriz do tipo* $1 \times n$*, isto é, uma matriz que tem uma única linha.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1+i & i & \sqrt{2i} \end{bmatrix}$$

3.3.2 Matriz coluna

Definição 3.3 *Matriz Coluna é toda matriz do tipo* $m \times 1$*, isto é, uma matriz que tem uma única coluna.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3.3.3 Matriz nula

Definição 3.4 *Matriz nula é a matriz que apresenta todos os seus elemento iguais á zero.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.3.4 Matriz quadrada

Definição 3.5 *Consideramos uma matriz* $m \times n$*.*

Quando m=n(número de linhas é igual ao número de colunas), diz-se que a matriz é quadrada do tipo $m \times n$ *ou simplesmente de ordem n.*

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Chama-se diagonal principal de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que tem os dois índices iguais.

$\{a_{ij} \quad tal \quad que \quad i = j\}$=$\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$

Chama-se diagonal secundária de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que tem soma dos índices iguais a $n + 1$, isto é :

$\{a_{ij} \quad tal \quad que \quad i + j\}$=$\{a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}\}$

3.3.5 Matriz triangular

Consideremos uma matriz quadrada de ordem n.

Definição 3.6 *Quando os elementos acima ou a abaixo da diagonal principal são todos nulos, dizemos que a matriz é triangular. A matriz é dita triangular superior se* $a_{ij} = 0$ *quando* $i > j$*,ou seja, os elementos abaixo da diagonal são nulos. Por exemplo,*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz triangular inferior, se $a_{ij} = 0$ *quando* $i < j$*, ou seja, os elementos acima da diagonal principal não nulos. Por exemplo,*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 10 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3.6 Matriz diagonal

Definição 3.7 *É uma matriz quadrada de ordem n onde todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos, isto é,* $a_{ij} = 0$ *para* $i \neq j$*. Por exemplo,*

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Um caso especial de matriz diagonal ocorre quando todos os elementos da diagonal principal são correspondentes ao mesmo escalar. Nesse caso dizemos que essa matriz é uma matriz escalar.

$$M_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Quando os números da diagonal principal forem iguais a 1, teremos um outro tipo de matriz descrita a seguir.

3.3.7 Matriz unidade ou matriz identidade

Definição 3.8 *É uma matriz de ordem n, $A = (a_{ij})$ em que todos os elementos foram da diagonal principal são nulos e os elementos dessa diagonal são todos iguais a 1, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$. Pode ser denotada por I_n. Vejamos o exemplo,*

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4 Igualdade de matrizes

Definição 3.9 *Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \cdots, m\}$ e todo $j \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, isto significa que para duas matrizes serem iguais elas devem ter:*

- *O mesmo números de linhas e colunas, ou seja, devem ser do mesmo tipo;*
- *e apresentar todos os elementos correspondentes (elementos com índices iguais) iguais;*

Exemplo 3.1 $M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \div 2 & 2 - 1 \\ 5.1 & 4 + 2 \end{bmatrix}$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 3.4 & 8 \div 4 & 12.2 \\ 1 - 1 & 3 + 1 & 2 \div 2 \\ 5 + 2 & \frac{9}{3} & 5 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 24 \\ 0 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

3.5 Operações entre matrizes

3.5.1 Adição

Definição 3.10 *Dada duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, denomina-se soma da matriz **A** com a matriz **B**, que representamos **A + B**, a matriz $C = (c_{ij})_{mxn}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e j. Isso significa que a soma de duas matrizes A e B do tipo $m \times n$ é uma matriz C do mesmo tipó em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.*

Exemplo 3.2 $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$; $A + B = C$, *Onde* $C = \begin{bmatrix} 7+3 & 8+4 \\ 5+6 & 9+2 \end{bmatrix}$

$= C = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}$

A adição de matrizes possue algumas propriedades onde A e B são matrizes quaisquer $m \times n$, são elas.

- associatividade:$(A + B) + C = A + (B + C)$ para quaisquer que sejam A, B e C do tipo m x n;
- Comutatividade: A + B = B + A quaisquer que sejam A e B, do tipo m x n;
- Elemento Neutro: $\exists M/A + M = A$ qualquer que seja A do tipo m x n;
- Elemento Simétrico: Para todo A do tipo m x n: $\exists A'/A' + A = M$;

Definição 3.11 *Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, denomina-se matriz oposta de **A**(representa-se **-A**) a matriz que, somada com **A**, resulta em uma matriz nula: A+(-A)=0.*

Exemplo 3.3 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{-1}{2} & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -5 \end{bmatrix}$

Onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{-1}{2} & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3.5.2 Diferença entre matrizes

Definição 3.12 *Dada duas matrizes* $A = (a_{ij})_{m \times n}$ *e* $B = (b_{ij})_{m \times n}$*, denomina-se diferença entre* ***A*** *e* ***B*** *(representada por* ***A - B****) a soma da matriz* ***A*** *com matriz oposta de* ***B****: A-B = A+(-B).*

Exemplo 3.4 $\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 10 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}}_{A} - \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -4 & 5 & 1 \\ 8 & -9 & 11 \end{bmatrix}}_{B} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 10 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}}_{A} +$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 3 & -6 \\ 4 & -5 & -1 \\ -8 & 9 & -11 \end{bmatrix}}_{-B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 14 & -5 & -2 \\ -4 & 16 & -10 \end{bmatrix}}_{A+(-B)}$$

3.5.3 Multiplicação de um número real por uma matriz

Definição 3.13 *Dado um número k e uma matriz* $A = (a_{ij})_{m \times n}$*, chama-se produto kA a matriz* $B = (b_{ij})_{m \times n}$ *tal que* $b_{ij} = ka_{ij}$ *para todo i e todo j. Significa que multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A multiplicados por k.*

Exemplo 3.5 $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, *então se* $3A = \begin{bmatrix} 3.(3) & -4.(3) \\ 5.(3) & -1.(3) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ 15 & -3 \end{bmatrix}$

O produto de um número qualquer por uma matriz possui as seguintes propriedades:

- $\alpha.(\beta.A) = (\alpha.\beta).A$
- $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$

- $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$

- $1.A = A$

Em que α e β são números reais quaisquer e A e B são matrizes do mesmo tipo $m \times n$.

3.5.4 Produto entre matrizes

Definição 3.14 *Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e uma matriz $B = (b_{ij})_{n \times p}$, o produto de **A** por **B**, denotado **AB**, é a matriz $C = (C_{ik})_{m \times p}$ definida por:*

$c_{ik} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + a_{i3}.b_{3k} + \cdots + a_{in}.b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ik}$ Para todo $i \in (1, 2, 3, \cdots, m)$ e todo $k \in (1, 2, 3, \cdots, p)$.

Algumas observações importantes .

1°) A definição dada garante a existência do produto **AB**, somente se o número de colunas da matriz **A** for igual ao número de linhas da matriz **B**. A matriz **A** é do tipo $m \times n$ e **B** é do tipo $n \times p$.

2°) Pela definição pode-se afirmar que o produto **AB** é uma matriz que tem o número de linhas da matriz **A** e o número de colunas da matriz **B**, pois **C=AB** é do tipo $m \times p$.

3°) Pela definição, um elemento c_{ik} da matriz **AB** deve ser obtido pelos procedimentos a seguir:

- seleciona-se a linha i da matriz **A**:

  $a_{i1}a_{i2}a_{i3} \cdots a_{in}$ n elementos .

- seleciona-se a linha k da matriz **B**:

  b_{1k}

  b_{2k}

  b_{3k} n lementos

  $\ldots$

  b_{nk}

- Coloca-se a linha i da matriz **A** na "vertical" ao lado da coluna k da matriz **B**:

a_{i1} b_{1k}

a_{i2} b_{2k}

a_{i3} b_{3k}

$\dots$ $\dots$

a_{in} b_{nk}

- Calculamos os n produtos dos elementos que ficam lado a lado:

a_{i1} b_{1k}

a_{i2} b_{2k}

a_{i3} b_{3k}

$\dots$ $\dots$

a_{in} b_{nk}

- somamos esses n produtos, obtendo c_{ik}.

Exemplo 3.6 *Dadas as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$*, determinar* $\boldsymbol{AB}$*.*

Como **A** é uma matriz 3×2 e **B** é uma matriz 2×2, o número de colunas de **A** é igual ao número de linhas de **B**; dessa maneira existe o produto **AB**, que será uma matriz 3×2, que chamamos de **C**.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_{3x2} . \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}}_{2x2} = \begin{bmatrix} 3.3+2.6 & 3.1+2.2 \\ 5.3+0.6 & 5.1+0.2 \\ 1.3+4.6 & 1.1+4.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 7 \\ 15 & 5 \\ 27 & 9 \end{bmatrix}$$

O produto entre matrizes apresenta algumas propriedades:

(P1) Associatividade;‘**(AB).C = A.(BC)**, quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$,$B = (b_{jk})_{n\times p}$ e $C = (c_{kl})_{p\times r}$;

(P2) Distributiva à direita em relação à adição; **(A + B).C = AC+BC**, quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$,$B = (b_{jk})_{n\times p}$ e $C = (c_{kl})_{p\times r}$;

(P3) É distributiva à esquerda em relação à adição: **C.(A + B) = CA+CB**, quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$,$B = (b_{jk})_{n\times p}$ e $C = (c_{kl})_{p\times r}$;

(P4) **(k.A).B = A.(k.B)=k(A.B)**, quaisquer que seja o número k e as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$,$B = (b_{jk})_{n\times p}$.

Ainda em relação ao produto de matrizes vale fazer algumas observações.

(1) A multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é para duas matrizes quaisquer **A** e **B** é falso afirmar que **AB = BA** necessariamente.

Exemplo 3.7 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ *efetuamos os produtos **AB** e **BA**.*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 26 & 10 \end{bmatrix}.$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Logo } AB \neq BA.$$

(2) Quando **A** e **B** são tais que **AB=BA**, dizemos que **A** e **B** comutam, porém a condição necessária para que isso ocorra é que as matrizes precisam ser quadradas e de mesma ordem.

Exemplo 3.8 *Sejam as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *quadradas de mesma ordem. efetuamos* $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(3) Na multiplicação de matrizes não vale a propriedade do cancelamento. Se **A**, **B** e **C** são matrizes tal que **AB = AC**, não podemos garantir que **B** e **C** sejam iguais.

Exemplo 3.9 *Dada as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, *calculemos* $\boldsymbol{AB}$ *e* $\boldsymbol{AC}$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 14 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}.$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 14 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$$

Podemos notar que **AB=BC**, porém $B \neq C$.

(4) Na multiplicação de matrizes não vale a propriedade do anulamento. Se **A** e **B** são matrizes tal que **AB = 0**(matriz nula), não podemos garantir que uma delas seja nula.

Exemplo 3.10 *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, *o produto* $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$, *porém* $A \neq 0$ *e* $B \neq 0$.

3.5.5 A transposta de uma matriz

Definição 3.15 *Seja a matriz* $A = (a_{ij})_{m \times n}$, *denomina-se matriz transposta de* $\boldsymbol{A}$ *a matriz* $A^t = (a_{ji})_{n \times m}$ *tal que* $a_{ji} = a_{ij}$, *para todo i e todo j. Isso significa , por exemplo*

, $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \cdots, a_{n1}$ respectivamente iguais a $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1n}$; logo a 1° coluna de A^t é igual a 1° linha de $\boldsymbol{A}$. Repetindo o processo, chega-se a conclusão de que as colunas de A^t são ordenamente iguais às linhas de $\boldsymbol{A}$.

Exemplo 3.11 *Seja a matriz* $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 8 \\ -3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ *a sua matriz transposta é*

$$A^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

A matriz transposta possui as propriedades:

(I) $(A^t)^t = A$ para toda matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

(II) $(A + B)^t = A^t + B^t$ para todo $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$

(III) se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e k um número real, então $(kA)^t = kA^t$.

(IV) se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ então $(AB)^t = B^t A^t$

3.5.6 Matriz simétrica e matriz antissimétrica

Definição 3.16 *Uma Matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem $\boldsymbol{n}$ é dita simétrica se $A^t = A$, ou seja, $\boldsymbol{A}$ é simétrica se e somente se $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i = 1, 2, 3, \cdots, m$ e $j = 1, 2, 3, \cdots, n$.*

Exemplo 3.12 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 5 & 8 & -9 \end{bmatrix}$ *e* $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 5 & 8 & -9 \end{bmatrix}$*; $A^t = A$, portanto $\boldsymbol{A}$ é uma matriz simétrica.*

Definição 3.17 *Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem $\boldsymbol{n}$ é dita antissimétrica se $A^t = -A$, ou seja $\boldsymbol{A}$ é antissimétrica se e somente se $a_{ij} = -a_{ij}$, para todo $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ e $j = 1, 2, 3, \cdots, n$.*

Na matriz antissimétrica a diagonal principal tem todos os elementos nulos.

Exemplo 3.13 $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 8 \\ 5 & -8 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $A^t = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & -8 \\ -5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$*; como* $A^t = -A$*, portanto* $\boldsymbol{A}$ *é uma matriz antissimétrica.*

3.6 Operações elementares por linha

As Operações elementares numa matriz são três por definição:

(I) Permuta das i-ésimas e j-ésimas linhas.$(L_i \leftrightarrow L_j)$

(II) Multiplicação da i-ésimas linha por um escalar não nulo $k(L_i \to kL_i)$

(III) Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais k vexes a j-ésima linha $(L_i \to L_i + kL_j)$.

Definição 3.18 *Uma matriz* $\boldsymbol{A}$ *de ordem* $m \times n$ *é equivalente por linhas a uma matriz* $\boldsymbol{B}$ *de ordem* $in \times n$ *se* $\boldsymbol{B}$ *pode ser obtida aplicando-se uma sequência de operações elementares nas linhas de* $\boldsymbol{A}$*.*

Exemplo 3.14 *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ *é equivalente por linhas a matriz* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$*, pois :*

Somando-se 2 vezes a primeira linha de $\boldsymbol{A}$ *com a terceira linha, obtemos:*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Podemos observar ainda que se a matriz **A** é equivalente por linhas a **B**, então **B** é equivalente por linhas a **A**. O mesmo ocorre se **A** é equivalente por linhas a **B** e **B** é equivalente por linhas a **C**, então **A** é equivalente por linhas a **C**.

3.7 Matriz na forma escalar reduzida por linha

Definição 3.19 *Uma matriz $m \times n$ é linha reduzida á forma escada se:*

(I) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.

(II) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

(III) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo).

(IV) Se as linhas $1, \cdots, r$ são linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha **i** ocorre na coluna **ki**, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$. O que impõem a forma escada a matriz.

Exemplo 3.15 *(1°)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *não é a forma escada, pois a condiçaõ **II** não é satisfeita.*

(2°) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *não é a forma escada, pois não satisfaz as condições **I** e **IV**.*

(3°) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ *não é da forma escada pois não satisfaz nem **I** e **III** condição.*

(4°) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *é a forma escada, pois todas as condições são satisfeitas.*

3.8 A inversa de uma matriz

Definição 3.20 *Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, se X é uma matriz tal que $AX = I_n$ e $XA = I_n$, então $\boldsymbol{X}$ é denominada a matriz inversa de $\boldsymbol{A}$ e é indicada por*

A^{-1}.

Observação: Dada uma matriz quadrada $n \times n$, nem sempre existir uma matriz X, do tipo n x n, tal que $AX = XA = I_n$ Quando existi a matriz inversa de A, dizemos que A é uma matriz invertível.

Exemplo 3.16 *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ *é invertivel e* $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, *pois:*

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

$$e\ A^{-1}A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = I_2$$

Teorema 3.1 *Se A é inversível (ou invertível), então é única a matriz X tal que* $AX = XA = I_n$

Demonstração: Admitamos que exista uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$, Temos : $B = I_n.B = (X.A).B = X.(A.B) = X.I_n = X$.

Propriedades

(1°) Se A é invertível, então A^{-1} também é e $(A^{-1})^{-1} = A$

(2°) Se A e B são invertíveis, então o produto AB também é, e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(3°) Se A é invertível, então A^t também é, e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

O processo para a obtenção da matriz inversa é feito a partir da resolução de sistemas lineares. Dessa maneira para determinar a inversa de uma matriz quadrada de ordem n, temos que obter n^2 incógnitas, resolvendo n sistemas de n equações a n incógnitas cada um. Porém em alguns casos isso não é nada prático, logo existem outras maneiras de determinar a inversa de uma matriz, que não serão enunciadas no momento.

4 APLICAÇÕES DE MATRIZES

As matrizes possuem grande aplicabilidade em nosso dia a dia, são diversas as áreas que utilizam dessas "tabelas" para auxiliar os estudos. Dentre elas está à informática, que as utiliza no auxilio dos cálculos matemáticos, editores de imagem, e o próprio teclado onde sua configuração é realizada por um sistema de matrizes, entre outros tantos.

No ramo da economia as matrizes são utilizadas como uma grande ferramenta na interpretação de gráficos que são originados de tabelas. Muitas organizações fazem o uso de tabelas para auxilia-las em sua situação financeira.

Na engenharia civil, por exemplo, elas são usadas para a divisão de metros e distribuição de material na construção de uma estrutura de sustentação (lage).

Na matemática em si ela possui diversas aplicações, especialmente na Álgebra Linear e computação gráfica. Também pode ser utilizada, por exemplo, na organização de dados como a tabela de um campeonato, calendário, em situações problemas, ficha de aposta de loteria e até a tela do computador que é formada por "pixels" gerados por uma matriz.

Entre tantos outros exemplos, em nosso trabalho buscamos relacionar o uso das matrizes para codificar e decodificar mensagens (criptografia), para mostrar modelos populacionais e para o controle de tráfego terrestre.

4.1 Matrizes e criptografia

A palavra "criptografia" tem origem grega ("kripto"= oculto; "grafo"= grafia) e diz respeito a arte ou ciência de escrever mensagens em códigos, de forma que somente certas pessoas possam decifrá-las.

Existem métodos criptográficos tão antigos quanto à própria escrita. Eles já estavam presentes no sistema de escrita hieroglífica dos egípcios, os romanos também utilizavam códigos secretos para comunicar planos de batalha. Atualmente utiliza-se a criptografia em transações bancárias e vários serviços disponíveis na internet, os quais necessitam de uma comunicação confidencial de dados.

A criptografia é o estudo dos princípios e técnicas pelas quais a informação pode ser transformada da sua forma original para outra ilegível, de forma que apenas seu destinatário possa conhecê-la.

Em nosso trabalho adotaremos o método criptográfico que utiliza matrizes como "chaves"para codificar e decodificar a mensagem, as aplicações 4.1.1 e 4.1.2, tiveram embasamento teórico na obra de Edwards e Penney (1988).

Sejam duas matrizes A e B quadradas de ordem 2, cujos elementos são números inteiros e que a matriz B seja a inversa de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

O remetente vai usar a matriz A para codificar a mensagem, e o destinatário vai usar a matriz B para decodifica-la. O objetivo é que a mensagem seja codificada utilizando pares de caracteres, de modo que tabelas de frequência de letras e coisas do tipo não ajudem em nada um decodificador não amigável.

Dada uma mensagem para ser codificada, o primeiro passo será convertê-la da forma alfabética para a forma numérica. Para isso utilizaremos a seguinte correspondência entre letras e números:

Tabela 4.1: Associação letras e números

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**	**.**	**,**	*****	**;**
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Fonte: Os autores

Qualquer outra numeração além dos 30 símbolos tipográficos também seria possível, mas o remetente e o destinatário teriam que combinar previamente. Usaremos o símbolo * para indicar um espaço entre as palavras (ou em outros lugares).

4.1.1 Aplicação 1

Suponhamos que "RECUAR TROPAS"é a mensagem a ser codificada e transmitida. Para convertê-la para a forma numérica, usamos a correspondência entre letras e números exibida na tabela anterior.

Tabela 4.2: Mensagem a ser codificada.

R	**E**	**C**	**U**	**A**	**R**	*****	**T**	**R**	**O**	**P**	**A**	**S**
18	5	3	21	1	18	29	20	18	15	16	1	19

Os autores

Uma vez que a matriz codificadora **A** é uma matriz 2 x 2, organizamos a sequência de números, dispostos na tabela 4.2, como elementos de uma matriz com duas linhas. Observando que a mensagem possui um número ímpar de elementos, completamos o fim da primeira linha com o símbolo *, que está associado ao número 29. Obtemos uma matriz **M**.

$$M = \begin{bmatrix} 18 & 5 & 3 & 21 & 1 & 18 & 29 \\ 20 & 18 & 15 & 16 & 1 & 19 & 29 \end{bmatrix}$$

Para codificar a mensagem, multiplicamos pela esquerda a matriz **M**, a matriz codificadora **A**, obtendo uma matriz **N**, tal que: $N = A.M$.

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 18 & 5 & 3 & 21 & 1 & 18 & 29 \\ 20 & 18 & 15 & 16 & 1 & 19 & 29 \end{bmatrix}$$

Efetuando a multiplicação de matrizes obtemos:

$$N = \begin{bmatrix} 78 & 59 & 48 & 69 & 4 & 75 & 116 \\ 176 & 136 & 111 & 154 & 9 & 169 & 261 \end{bmatrix}$$

Os elementos N = A.M constituem a mensagem codificada: 78, 59, 48, 69, 4, 75, 116, 176, 136, 111, 154, 9, 169, 261, utilizando de vírgulas para maior clareza. Podemos perceber, que enquanto havia repetições representando letras iguais na mensagem original, não há nenhuma na mensagem codificada.

Quando esta mensagem codificada chegar ao destinatário, ele irá utilizar a matriz decodificadora **B** para reverter o processo anterior, sabendo que:

$$B.N = B.A.M = I.M = M$$

Logo, se o decodificado usar a mensagem codificada para construir uma matriz com duas linha e depois multiplicar pela esquerda desta matriz, a matriz **B**(matriz inversa de **A**) irá obter a matriz **M** do remetente.

$$B.N = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 78 & 59 & 48 & 69 & 4 & 75 & 116 \\ 176 & 136 & 111 & 154 & 9 & 169 & 261 \end{bmatrix}$$

$$B.N = \begin{bmatrix} 18 & 5 & 3 & 21 & 1 & 18 & 29 \\ 20 & 18 & 15 & 16 & 1 & 19 & 29 \end{bmatrix}$$

Notemos que o produto B.N é de fato a matriz **M** do remetente. O passo final da decodificação é, utilizando os números obtidos no produto acima, associa-los aos símbolos da tabela 1.

Em resumo, o remetente multiplica a mensagem original (na forma matricial numérica **M**) pela matriz **A** para obter a mensagem codificada. O destinatário, por sua vez, multiplica a mensagem codificada (em forma matricial **N**) pela matriz **B** para reconstituir a mensagem original. Como **A** e **B** são inversas a multiplicação do destinatário por **B** desfaz o efeito da multiplicação por **A**.

Dessa maneira tudo que precisa ser secreto são as matrizes codificadora e decodificadora, sendo uma tarefa muita mais simples do que esconder um grande livro de códigos de um decifrador não amigável.

4.1.2 Aplicação 2

Ainda sobre a codificação e decodificação de mensagens podemos utilizar outro método, bastante semelhante ao anterior, porém ao invés de associar um símbolo a apenas um número, iremos associar cada letra do alfabeto e outros símbolos a vetores de ordem (2 x 1), conforme mostra a tabela abaixo.

Tabela 4.3: Associação letras e vetores

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**
$\binom{0}{0}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{3}{0}$	$\binom{4}{0}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{0}{2}$	$\binom{1}{2}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{2}$
P	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**	**espaço**	**.**	**,**	**?**
$\binom{0}{3}$	$\binom{1}{3}$	$\binom{2}{3}$	$\binom{3}{3}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{0}{4}$	$\binom{1}{4}$	$\binom{2}{4}$	$\binom{3}{4}$	$\binom{4}{4}$	$\binom{0}{5}$	$\binom{1}{5}$	$\binom{2}{5}$	$\binom{3}{5}$	$\binom{4}{5}$

Fonte: Os autores

Podemos representar esses vetores graficamente como pontos de um plano, conforme o gráfico abaixo.

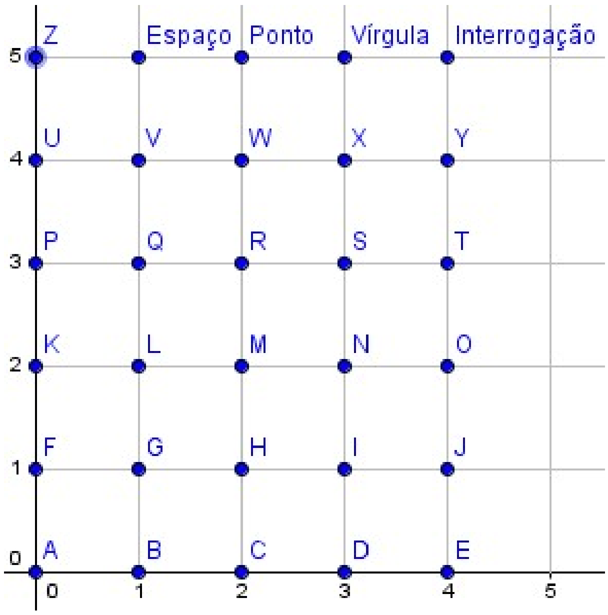

Figura 4.1: Representação dos vetores no plano.

Fonte: Os autores

Dessa maneira podemos codificar e decodificar a mensagem desejada "BOM ESTUDO", construindo uma matriz **M** de ordem 2 x 1 colocando os vetores, que estão associados as letras e símbolos um na frente do outro, conforme segue:

Tabela 4.4: Vetores da frase BOM ESTUDO

B	**O**	**M**	**Espaço**	**E**	**S**	**T**	**U**	**D**	**O**	**.**
$\binom{1}{0}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{1}{5}$	$\binom{4}{0}$	$\binom{3}{3}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{0}{4}$	$\binom{3}{0}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{2}{5}$

Fonte :Os autores

Onde a matriz **M** é:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 3 & 4 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Agora criemos uma matriz **C**, por exemplo, do tipo 2 x 2 para usarmos como “chave”para codificar a mensagem. Essa matriz deve ser inversível para garantir que a mensagem seja decodificada.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Codificando a mensagem, transformando a matriz **M** em uma matriz **M’** através da multiplicação, pela esquerda, da matriz pela matriz **M** a matriz **C**.

$$M' = C.M$$

$$M' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 3 & 4 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$M' = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 4 & 6 & 10 & 9 \\ 5 & 26 & 16 & 20 & 20 & 24 & 29 & 12 & 15 & 26 & 25 \end{bmatrix}$$

A matriz **M’** representa a mensagem codificada. Para voltar à mensagem original basta encontrarmos a matriz inversa de **C** que chamaremos de **C’** e multiplicar, também pela esquerda, da matriz-mensagem codificada M’ de modo que tenhamos: $M = C'.M'$.

Além das noções de matrizes (multiplicação, inversão, soma, etc.) o método aqui usado ainda apresenta conceitos básicos de função, que leva pontos do plano a outros pontos. Por exemplo, as letras da mensagem “BOM ESTUDO.”são representadas no gráfico abaixo:

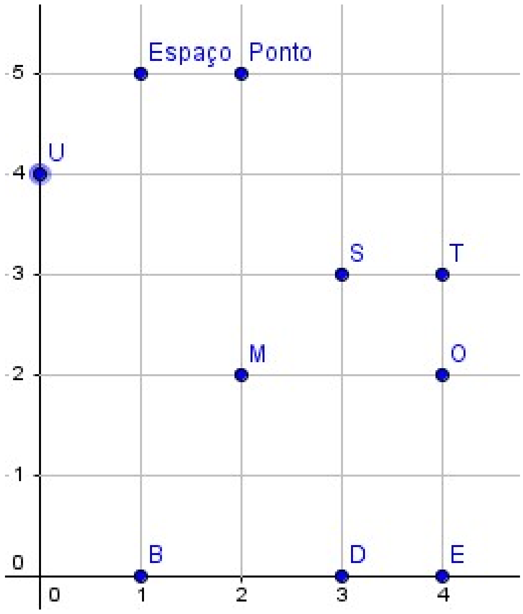

Figura 4.2: Representação dos vetores da frase BOM ESTUDO.

Fonte: Os autores

Podemos ainda plotar o gráfico da matriz M' e verificar que as letras e símbolos estão associados a outros a outros vetores.

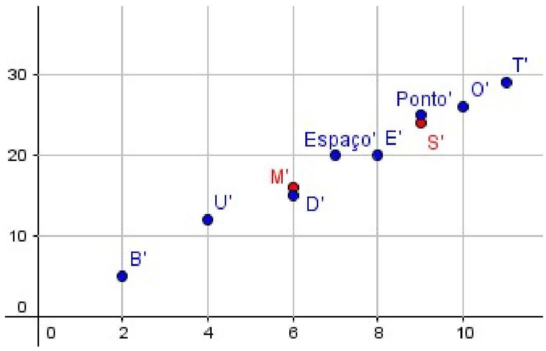

Figura 4.3: Representação da mensagem codificada no plano.

Fonte: Os autores

Notemos que cada vetor inicial da tabela 4.4 sofre uma transformação.

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to C.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = B'$$

$$O = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \to C.\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \end{pmatrix} = O'$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow C.\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix} = M'$$

As transformações efetuadas anteriormente devem ser guardadas em sigilo de modo que apenas o codificador e o decodificador tenham acesso, para evitar que um “espião”descubra a matriz chave.

Supondo que o “espião”tenha acesso aos vetores que estão associados às letras **O** e **E** (antes e depois criptogração).

$$O = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Ele saberá, que se a matriz chave for igual a:

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Então:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Efetuando as devidas multiplicações chegar-se-ia ao sistema linear:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ 4c + 2d = 26 \\ 4a + 0b = 8 \\ 4c + 0d = 20 \end{cases}$$

Resolvendo o "espião"encontraria que a=2; b=1; c=5; d=3, chegando a nossa matriz chave.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Ficando mais fácil para ele decodificar a mensagem enviada, já que para voltarmos à mensagem original basta efetuar a multiplicação, pela esquerda, da matriz M' (que é a mensagem codificada) pela matriz C' (que é a inversa da matriz código C).

4.2 Matrizes e modelos populacionais

Em nossa próxima aplicação baseada na obra de Edwards e Penney (1988), é dada certa população de indivíduos que pode ser subdividida em grupos etários ou raças diferentes, busca-se determinar como essa população se modifica ano a ano.

O caso mais simples é o da população homogênea única, com inicio no tempo t=0, com P_0 indivíduos crescendo a uma taxa anual constante, ou seja, existe um número **a** tal que depois de 1 ano a população é $P_1 = a.P_0$ depois de 2 anos será $P_2 = a.P_1 = a^2.P_0$, depois de 3 anos será $P_3 = a.P_2 = a^3.P_0$, e assim por diante. A população de um ano simplesmente é multiplicada por **a** para se definir a população do ano seguinte. Após n anos, a população P_0 multiplicou-se n vezes por **a** e, portanto será:

$$P_n = a^n.P_0 \tag{4.1}$$

No caso de uma população subdividida em grupos, a população (escalar) P_n é substituída por um vetor p_n, cujos elementos diferentes especificam os números de indivíduos no grupo. O “número de transição”**a** é então substituído pela matriz transição A, tal que o vetor população de cada ano seja multiplicado pela matriz A para se obter o vetor população do ano seguinte. Vejamos um exemplo.

Considere uma área metropolitana com uma população constante de 1 milhão de indivíduos, dividida em uma área de cidade (urbana) e seus subúrbios, e queremos analisar a modificação das populações urbanas e suburbanas.

Seja C_n a população central (população urbana) e S_n a população suburbana após n anos. A distribuição da população urbana e suburbana depois de n anos é descrita pelo vetor população:

$$p_n = \begin{bmatrix} C_n \\ S_n \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Suponha que a cada ano 15% da população da área urbana se mude para os subúrbios, e que 10% da população dos subúrbios se mude para a área urbana, então a população da cidade (área urbana) no próximo ano C_{n+1} será igual a 85% da população da área urbana deste ano C_n mais 10% da população suburbana S_n deste ano, de modo que:

$$C_{n+1} = (0,85)C_n + (0,10)S_n. \quad Para \quad qualquer \quad n \geq 0 \tag{4.3}$$

A população da área suburbana no próximo ano S_{n+1} será igual a 90% da população da área suburbana deste ano S_n mais 15% da população urbana C_n deste ano, de modo que:

$$S_{n+1} = (0,15)C_n + (0,90)S_n. \quad Para \quad qualquer \quad n \geq 0 \tag{4.4}$$

Ao escrevermos as equações (4.3) e (4.4) em forma matricial, obtemos:

$$\begin{bmatrix} C_{n+1} \\ S_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,10 \\ 0,15 & 0,90 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_n \\ S_n \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

A matriz de transição para este exemplo é:

$$A = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,10 \\ 0,15 & 0,90 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

E a equação (3.5) fica:

$$p_{n+1} = Ap_n \tag{4.7}$$

segue-se que: $p_1 = Ap_0; p_2 = Ap_1 = A^2p_0; p_3 = Ap_2 = A^3p_0$, em geral, temos:

$$p_n = A^n.p_0, \quad para \quad todo \quad n \geq 1. \tag{4.8}$$

Notemos, que a quação 4.8 é analoga á equação 4.1.

Agora supondo qua as populações iniciais urbanas e suburbanas sejam (em milhões) $C_0 = 700$ e $S_0 = 300$. Nosso objetivo será determinar a distribuição das populações da área urbana e dos subúrbios resultantes da taxa de migração dadas. Encontramos para os três primeiros anos que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \\ S_1 \end{bmatrix}}_{P_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,85 & 0,10 \\ 0,15 & 0,90 \end{bmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{bmatrix} 700 \\ 300 \end{bmatrix}}_{p_0} = \begin{bmatrix} 625 \\ 375 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_2 \\ S_2 \end{bmatrix}}_{P_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,85 & 0,10 \\ 0,15 & 0,90 \end{bmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{bmatrix} 625 \\ 375 \end{bmatrix}}_{p_1} = \begin{bmatrix} 568,75 \\ 431,25 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_3 \\ S_3 \end{bmatrix}}_{P_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,85 & 0,10 \\ 0,15 & 0,90 \end{bmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{bmatrix} 568,75 \\ 431,25 \end{bmatrix}}_{p_2} = \begin{bmatrix} 526,56 \\ 473,44 \end{bmatrix}$$

Dessa maneira percebemos que a população urbana está diminuindo enquanto que a dos subúrbios esta aumentando durante este intervalo de tempo.

Para investigar a situação de longo prazo precisa-se de muito tempo e trabalho logo, vemos a partir da equação (4.8) que precisamos determinar como a matriz potência A^n se modifica à medida que n cresce. Uma maneira de explorar esta questão é calcular as potencias uma a uma.

$$\begin{aligned} A^2 &= A.A & A^{20} &= A^{10}.A^{10} \\ A^4 &= A^2.A^2 & A^{30} &= A^{10}.A^{20} \\ A^8 &= A^4.A^4 & A^{40} &= A^{20}.A^{20} \\ A^{10} &= A^2.A^8 & A^{50} &= A^{10}.A^{40} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Assim com oito multiplicações de matrizes , podemos verificar nossas populações urbanas e suburbanas por 50 anos, a intervalo de 10 anos. Ao efetuarmos as multiplicações de matrizes em (4.9) mantendo 2 casas decimais nos resultados, obtemos:

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 0,44 & 0,39 \\ 0,56 & 0,61 \end{bmatrix} \quad A^{20} = \begin{bmatrix} 0,41 & 0,41 \\ 0,59 & 0,59 \end{bmatrix}$$

$$A^{30} = \begin{bmatrix} 0,41 & 0,41 \\ 0,59 & 0,59 \end{bmatrix} \quad A^{40} = \begin{bmatrix} 0,41 & 0,41 \\ 0,59 & 0,59 \end{bmatrix} \quad A^{50} = \begin{bmatrix} 0,41 & 0,41 \\ 0,59 & 0,59 \end{bmatrix}$$

Percebemos que as potências da matriz A se "estabilizam" na matriz constante.

$$A^n = \begin{bmatrix} 0,41 & 0,41 \\ 0,59 & 0,59 \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Para verificar que (4.10) é válido para todo $n \geq 20$ (e não somente em intervalos de 10 anos), precisamos apenas da observação de que a matriz constante em (10) não se altera quando multiplicada por A. Por exemplo:

$$A^{51} = A.A^{50} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,10 \\ 0,15 & 0,90 \end{bmatrix}. = \begin{bmatrix} 0,41 & 0,41 \\ 0,59 & 0,59 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,41 & 0,41 \\ 0,59 & 0,59 \end{bmatrix}$$

Por fim quando substituímos (4.10) em (4.8), encontramos que:

$$\begin{bmatrix} C_n \\ S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,41 & 0,41 \\ 0,59 & 0,59 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 700 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 410 \\ 590 \end{bmatrix}$$

4.3 Matrizes e o controle de tráfego terrestre

Como já citado, as matrizes possuem grande aplicabilidade em nosso dia a dia; uma delas está voltada ao controle de tráfico terrestre. A aplicação a seguir teve como base a obra de Smole e Diniz (2013) e citado por Kilhian (2011).

A figura 4.4 representa um "cruzamento"de duas ruas de mão dupla, cujo fluxo de automóveis nos pontos A, B e C é definido por três conjuntos de semáforos.

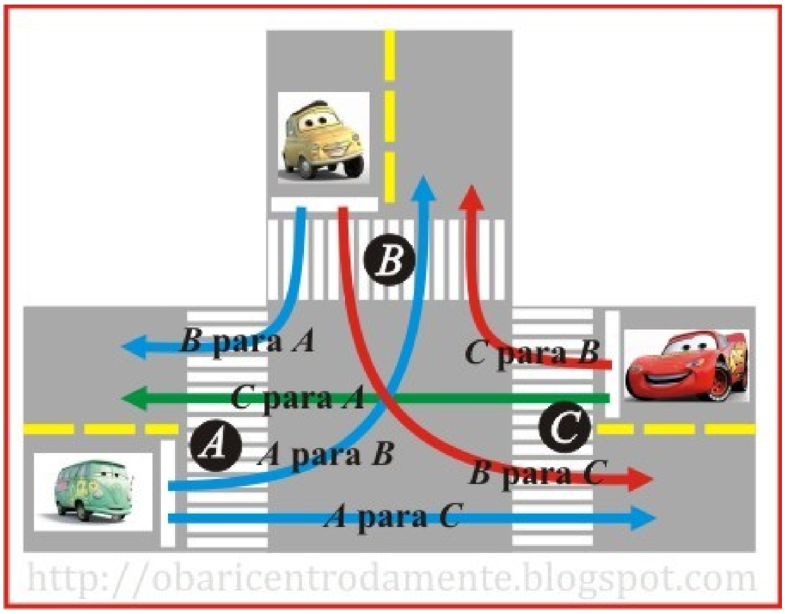

Figura 4.4: "Cruzamento"das ruas com bifurcação em T.
Disponível em: http://obaricentrodamente.blogspot.com

As matrizes M_1,M_2 e M_3 indicam o tempo em minutos, durante o qual alguns semáforos se mantem simultaneamente abertos segundo a sequência dada:

$$M_1 = \begin{array}{rc} De & \\ \begin{array}{r} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ Para & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \end{array}$$

Inicialmente, durante 1 minuto, ficam verdes os semáforos de A para B, de A para C e de B para A.

$$M_2 = \begin{array}{cc} De & \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\ Para & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \end{array}$$

Em seguida, durante $\frac{1}{2}$ minuto, ficam verdes os semáforos de B para A, de B para C e de C para B.

$$M_3 = \begin{array}{cc} De & \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\ Para & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \end{array}$$

Por fim, durante $\frac{1}{2}$ minuto, ficam verdes os semáforos de C para A, de C para B e de A para C.

A matriz M é obtida somando-se M_1,M_2 e M_3,termo a termo e mostra o tempo que cada semáforo fica aberto em cada sentido no período de 2 minutos.

$$M = \begin{array}{cc} De & \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ Para & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \end{array}$$

Por essa matriz podemos observar, por exemplo, que o semáforo de B para A, fica aberto durante 1 minuto e meio a cada período de 2 minutos.

Se multiplicarmos todos os termos da matriz M por 30, já que o período é de 2 minutos, obteremos o tempo, em minutos, que cada semáforo fica aberto durante 1 hora.

$$N = 30.M$$

$$N = 30.\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 45 \\ 45 & 0 & 15 \\ 15 & 30 & 0 \end{bmatrix}$$

No exemplo hipotético, sabe-se que nestas ruas é possível passar até 15 carros por minuto cada vez que os semáforos abrem. Então, se multiplicarmos por 15 todos os termos da matriz N, teremos a quantidade máxima de carros que podem passar pelo "cruzamento"no período de 1 hora.

$$15.N = \begin{bmatrix} 0 & 450 & 675 \\ 675 & 0 & 225 \\ 225 & 450 & 0 \end{bmatrix}$$

Se o número de carros em algumas das direções for maior que a quantidade máxima possível, teremos um engarrafamento, que poderá ou não ser resolvido alternando-se os tempos de abertura dos semáforos, isto é, modificando-se os valores das matrizes M_1,M_2 e M_3.

5 CONCLUSÃO

Em nosso trabalho apresentamos algumas aplicações de matrizes, para desenvolvermos tais relações passamos por todo um contexto de origem, elencando vários precursores, que se tornaram imprescindível para a história das matrizes, relatamos alguns dos processos e transformações pelas quais as matrizes percorreram até os dias atuais, passando as principais definições que são dadas sobre a teoria e por fim chegamos as nossas aplicações, que não são únicas.

A justificativa para a escolha do tema origina-se, primeiramente pela magnitude do conteúdo nas várias áreas que podemos utiliza-la, além de conhecer a realidade e dificuldade de como o assunto é exposto dentro de sala de aula, baseou-se também na citação do matemático russo Nikolai Lobachevsky de que "não há ramo da matemática, por mais abstrata que seja que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real". A abrangência das aplicações dos conteúdos de matrizes, nos vários campos, implica que nós professores sejamos contínuos pesquisadores, para melhorar a cada dia o ensino da matemática.

Para atingir nosso objetivo dispomos o trabalho em três capítulos. No primeiro fizemos uma abordagem histórica sobre a teoria das matrizes. No segundo mostramos as principais definições sobre o tema. Chegando ao terceiro capitulo expomos algumas aplicações simples de matrizes relacionadas a modelos populacionais, ao controle de tráfego terrestre e a criptografia.

Bibliografia

[1] BASHMAKOVA, I; SMIRNOVA,G;**The beginnings and evolution of algebra**. New York: Cambridge University Press, 2000. (Dolciani Mathematical Expositions; n.º 23).

[2] BOLDRINI,J,L.;**Algebra Linear**.3ª edição. São Paulo: Hapes e Row do Brasil, 1980.

[3] BOURBAKI,N.;**Elements of the history of mathematics**.New York: Springer-Verlag, 1999.

[4] DANTE, L,R.;**Matemática: contexto e aplicações**.3° ed. São Paulo: Ática, 2012.

[5] EDWARDS, C.H; PENNEY, D,E.;**Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro, Pretice-Hall do Brasil, 1998.

[6] EVES, H.;**Introdução à História da Matemática**.tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. Pág: 268.

[7] IEZZI, G; HAZZAN, S;**Fundamentos de Matemática Elementar**.V 4. 7ed. São Paulo: Atual, 2004.

[8] JANUARIO, G; **Quadrados mágicos: uma proposta de aprendizado com enfoque etnomatemático**.Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/mydownloads01/visit.php?cid=46lid=1366>. Acesso em: 11 fev. 2016.

[9] KILHIAN, K; **Cayley e a Teoria das Matrizes**. Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2010/11/cayley-e-teoria-das-matrizes.html>. Acesso em: 12 jan. 2016.

[10] KILHIAN, K; **Matrizes e o Controle de Tráfego**.Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/06/matrizes-e-o-controle-de-trafego.html>. Acesso em 03 mar. 2016.

[11] KLINE, M; **Mathematical thought from ancient to modern times**. New York: Oxford University Press, 1972.

[12] MARTZLOFF, J; **A history of chinese mathematics**. New York: SpringerVerlag, 1987.

[13] MERINO, S; **Quadrado Mágico de Albrecht Dürer**.Disponível em: <http://www.imagick.org.br/blog/quadrado-magico-de-albrecht-durer/>. Acesso em: 20 jan. 2016.

[14] PAIVA, M,R.; **Matemática Paiva 2**. 2 ed. São Paulo: Moderna 2010.

[15] SANTINHO, M,S,; MACHADO, R,M.; **Os fascinantes Quadrados Mágicos**. III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Goiás: Anais, 2006. Disponível em: <http://www.ime.ufg.br/bienal/2006/mini/miriam.rosa.pdf>;Acesso em 20/jan/2016.

[16] SANTOS, R,N.; **Uma Breve Historia do Desenvolvimento das Teorias dos Determinantes e das Matrizes**.Disponível em: <http://milanesa.ime.usp.br/imath/files/1/43.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2016.

[17] SMOLE, K,S; DINIZ, M,I; **Matemática Ensino Médio 2**.9 ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

[18] TAVARES, A,H,C; PEREIRA, A,G,C.; **História da Matemática no Ensino de Sistemas Lineares, Determinantes e Matrizes**. Disponível em: <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/262.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2016.

[19] TEIXEIRA, R.; **Matrizes e Quadrados Mágicos**. Disponível em: <http://www.tribunadasilhas.pt/index.php/opiniao/item/9122-matrizes-e-quadrados-mágicos.>. Acesso em: 06 jan. 2016.