UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DAVID JAQUISON SILVA ALMEIDA

TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA E UMA APLICAÇÃO AO GRAU DE BROUWER

MACAPÁ - AP

2016

DAVID JAQUISON SILVA ALMEIDA

TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA E UMA APLICAÇÃO AO GRAU DE BROUWER

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao colegiado de Matemática como requisito para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática. Orientador: Prof. Ms. Kelmem da Cruz Barroso.

MACAPÁ - AP

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

515.983
A447t Almeida, David Jaquison Silva.

Teorema da função inversa e uma aplicação ao grau de *Brouwer* / David Jaquison Silva Almeida; orientador, Kelmem da Cruz Barroso. -- Macapá, 2016.

55 p.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Teorema da função inversa. 2. Diferenciabilidade. I. Barroso Kelmem da Cruz, orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

DAVID JAQUISON SILVA ALMEIDA

TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA E UMA APLICAÇÃO AO GRAU DE BROUWER

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do Grau de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá, campus Marco Zero, aprovado pela comissão de professores:

Prof. Ms. Kelmem da Cruz Barroso
Orientador
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof. Ms. Marcel Lucas Picanço Nascimento
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof(a). Ms. Elifaleth Rego Sabino
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Avaliado em: ____/____/____

MACAPÁ - AP

2016

Dedico este trabalho ao meu Deus.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente ao soberano e todo poderoso Deus pelo dom da vida. À minha mãe (D. Maria Eliete) e a toda minha família que nunca mediram esforços para me ajudarem na vida acadêmica. Desejo aqui demonstrar gratidão pelo Prof. Kelmem Barroso por toda paciência e bondade em sua orientação. Aos meus companheiros de turma que durantes todos estes anos me deram força e apoio para perseverar no curso.

"Confia no Senhor de todo o teu coração, e não te estribes no teu próprio entendimento. Provérbios 3:5"

(Bíblia Sagrada)

RESUMO

Este trabalho objetiva apresentar o Teorema da Função Inversa e uma aplicação ao grau de Brouwer. Os principais resultados que utilizamos para demonstrar o Teorema da função inversa foram :

1− teorema da função injetora

2− teorema da função sobrejetora

3− teorema da função aberta

Estes resultados, e outros, foram obtidos através de um estudo sobre a diferenciabilidade em $\mathbb{R}^p$.

Palavras-Chaves: Teorema da Função Inversa; diferenciabilidade .

ABSTRACT

This work aims to present the Inverse Function Theorem and an application to the Brouwer degree. The main results we use to demonstrate the theorem of the inverse function were:

1− function theorem injective

2− function theorem surjective

3− theorem of the open function

These results and others were obtained through a study on the differentiability in $\mathbb{R}^p$.

Key-words: : Theorem of the inverse function; differentiability.

NOTAÇÕES

(1) $[\cdot]$ referência bibliográfica.

(2) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ roduto interno.

(3) Se $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ é uma função, usaremos as seguintes notações:

(i) $\|f(x)\|$ é a norma usual do $\mathbb{R}^p$ para $f(x)$.

(ii) $\|x\|$ é a norma usual do $\mathbb{R}^p$ para x.

(iii) $\|f'(x)\|$ é a norma da transformação linear de $f'(x)$, se f for diferenciável.

(4) $\bar{B}_r(x)$ é a bola fechada de centro x e raio r.

(5) $B_r(x)$ é a bola aberta de centro x e raio r.

(6) $\Im(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^q$.

(7) $J_f(x) = \det[f'(x)]$ é o valor do determinante jacobiano de f aplicado no ponto x.

(8) $\mid \alpha \mid$ é o valor absoluto, se $\alpha \in \mathbb{R}$.

(9) Å é o conjunto dos pontos interiores de A.

(10) $\partial\Omega$ é a fronteira do conjunto Ω.

(11) $sgn\varphi$ é o sinal da função φ.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho nossa proposta é apresentar um importante teorema da Análise no $\mathbb{R}^p$, o Teorema da Função Inversa. Este teorema provém do estudo da diferenciabilidade em $\mathbb{R}^p$ e nos garante que uma função seja bijetora localmente e que sua inversa seja diferenciável. O Teorema da Função Inversa diz basicamente que se f é de classe C^1 e a derivada $f'(x_0)$ é bijetora, ou seja, $J_f(x_0) \neq 0$ (o determinante da matriz jacobiana é diferente de zero), então f é invertível em uma vizinhança de x_0 e sua inversa é de classe C^1.

No capítulo 1, faremos um estudo sobre a diferenciabilidade de funções em $\mathbb{R}^p$ apresentando definições e resultados importantes concernentes à diferenciabilidade.

No capítulo 2, temos uma aplicação do Teorema da Função inversa ao grau de Brouwer que será seguido por dois exempos aplicando a definição do grau.

Capítulo 1

Diferenciabilidade em $\mathbb{R}^p$

No que se segue, faremos neste capítulo um estudo sobre a diferenciabilidade em $\mathbb{R}^p$. Para a boa compreensão deste capítulo é necessário ao leitor ter o conhecimento das principais definições e propriedades da Análise no $\mathbb{R}^p$ tais como limite, norma, produto interno, sequências, conjuntos abertos e etc .

Definição 1.1. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ uma função e $c \in \mathring{A}$. Diremos que um vetor $Lu \in \mathbb{R}^p$ é a derivada de f em c na direção do vetor $u \in \mathbb{R}^p$ se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$0 <| t |< \delta \Rightarrow \left\| \frac{1}{t}\{f(c+tu) - f(c)\} - Lu \right\| < \epsilon$$

ou ainda

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(c+tu) - f(c)}{t} = Lu \ ,$$

o vetor Lu quando existir é chamado de ***Derivada Direcional*** *de f em c na direção de u.*

Notações para Lu:

$$Df(c)u$$

ou

$$\frac{\partial f(c)}{\partial u} \ .$$

Quando fixamos $u = e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$, onde e_i é o vetor cuja i-ésima coordenada é 1 e as outras são 0, a derivada direcional $\frac{\partial f(c)}{\partial e_i}$ quando existir é chamada de *derivada parcial e pode ser denotada também por* $Df(c)_i$ *ou* $\frac{\partial f(c)}{\partial x_i}$.

Exemplo 1.1. *A função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y) = \mid x \mid (y + 1)$$

tem derivada parcial $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$, *mas não tem derivada parcial* $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$. *De fato*

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0$$

e

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\mid t \mid}{t}$$

Verificando a existência desse limite através dos limites laterais obtemos

$$\lim_{t \to 0_-} \frac{\mid t \mid}{t} \neq \lim_{t \to 0_+} \frac{\mid t \mid}{t}$$

mostrando assim que

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$$

não existe.

Exemplo 1.2. *A função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y}; & y \neq 0 \\ 0; & y = 0 \end{cases}$$

possui derivadas parciais $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$, *porém não têm derivadas direcionais em qualquer direção* $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *com* $a, b \neq 0$. *Vejamos*

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0 \ ,$$

já para a direção $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *com* $a, b \neq 0$, *tem-se*

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial u} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(a,b)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(ta, tb) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{ta}{tb} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{a}{tb} = \frac{a}{b} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}$$

façamos uma anlásise deste limite calculando seus limites laterais

$$\lim_{t \to 0_-} \frac{1}{t} = -\infty$$

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{1}{t} = +\infty$$

mostrando que este limite não existe e consequentemente

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial u}$$

não existe.

1.1 A Derivada

Definição 1.2. *Sejam* $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *uma função e* $c \in \mathring{A}$. *Diremos que* f *é diferenciável em* c *quando existir uma transformação linear* $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *verificando:*
dado $\epsilon > 0$, *existe* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *tal que para todo* $x \in A$

$$0 \leq \| x - c \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(c) - L(x - c) \| \leq \epsilon \| x - c \|$$

ou equivalentemente, para todo $u \in \mathbb{R}^p$

$$\| u \| < \delta \Rightarrow \| f(c + u) - f(c) - Lu \| \leq \epsilon \| u \|$$

ou ainda,

$$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{\| f(c + u) - f(c) - Lu \|}{\| u \|} = 0$$

a transformação linear L *é chamada a* ***Derivada*** de f *em* c, *sendo denotada por* $f'(c)$, *ou seja,*

$$L = f'(c) \; .$$

Lema 1.1. *A derivada de* f *em* c *quando existir é única.*

Demonstração. *Vamos supor que existam* $L_1, L_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *com* $L_1 \neq L_2$ *que sejam* *derivadas de f em c, isto é, para todo $u \in \mathbb{R}^p$*

$$\| u \| < \delta \Rightarrow \begin{cases} \| f(c+u) - f(c) - L_1 u \| \leq \epsilon \| u \| \\ \| f(c+u) - f(c) - L_2 u \| \leq \epsilon \| u \| \end{cases}$$

assim,

$$0 \leq \| L_1 u - L_2 u \| = \| L_1 u - f(c+u) + f(c) + f(c+u) - f(c) - L_2 u \|$$

Usando a desigualdade triangular, temos

$$\| L_1 u - L_2 u \| \leq \| f(c+u) - f(c) - L_1 u \| + \| f(c+u) - f(c) - L_2 u \| \leq 2\epsilon \| u \| \ ,$$

como $L_1 \neq L_2$, então deve existir $z \in \mathbb{R}^p$ com $z \neq 0$ tal que

$$L_1 z \neq L_2 z \ . \tag{1.1}$$

Defina

$$\hat{u} = \frac{\delta}{2} \frac{z}{\| z \|}$$

observe que

$$\|\hat{u}\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

daí,

$$\| L_1 \hat{u} - L_2 \hat{u} \| \leq 2\epsilon \| \hat{u} \| = 2\epsilon \frac{\delta}{2} = \epsilon\delta \Leftrightarrow \left\| L_1 \left(\frac{\delta}{2} \frac{z}{\| z \|} \right) - L_2 \left(\frac{\delta}{2} \frac{z}{\| z \|} \right) \right\| \leq \epsilon\delta \ .$$

Usando o fato de L_1 e L_2 serem transformações lineares e propriedade de norma ($\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$) resulta que

$$\frac{\delta}{2 \| z \|} \| L_1 z - L_2 z \| \leq \epsilon\delta \Rightarrow \| L_1 z - L_2 z \| \leq 2\epsilon \| z \|$$

para todo $\epsilon > 0$. Segue que (ver Teorema A 1, Apêndice)

$$L_1 z = L_2 z$$

o que contraria (1.1), mostrando assim o lema.

$\blacksquare$

Exemplo 1.3. *Se $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ é constante, temos que $f'(c) = O$ para todo $c \in \mathring{A}$, onde $O : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ (Transformação linar nula). De fato.*

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| f(c+u) - f(c) - Ou \|}{\| u \|} = \lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| 0 \|}{\| u \|} = 0 \ .$$

Exemplo 1.4. *Se $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ é uma transformação linear, temos que f é diferenciável em $\mathbb{R}^p$ com*

$$f'(c) = f \ , \ \forall c \in \mathbb{R}^p \ .$$

Basta ver que

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| f(c+u) - f(c) - fu \|}{\| u \|} = \lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| f(c) + f(u) - f(c) - fu \|}{\| u \|} = 0 \ .$$

Definição 1.3. *Dado $X \subset \mathbb{R}^p$, uma função $f : X \to \mathbb{R}^q$ é Lipschitziana quando existe $K > 0$ (constante de Lipschitz de f) tal que, para quaisquer $x, y \in X$, tem-se*

$$\| f(x) - f(y) \| \leq K \| x - y \| \ .$$

Observação. *Toda função Lipschitziana é uniformemente contínua e toda função unifomemente contínua é contínua. Ver em* [5].

Lema 1.2. *Se $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ é diferenciável em $c \in \mathring{A}$, então existem $k, \delta > 0$ tais que para todo $x \in A$(ou seja, f é Lipschitiziana)*

$$0 \leq \| x - c \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(c) \| \leq k \| x - c \|$$

em particular f é contínua em c.

Demonstração. *Segue da diferenciabilidade de f em c que dado $\epsilon = 1$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo $x \in A$*

$$0 \leq \| x - c \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(c) - L(x - c) \| \leq 1 \| x - c \|$$

assim,

$$0 \leq \| f(x) - f(c) \| = \| f(x) - f(c) - L(x-c) + L(x-c) \|$$

pela desigualdade triangular

$$\| f(x) - f(c) \| \leq \| f(x) - f(c) - L(x-c) \| + \| L(x-c) \|$$

sabemos que como L é transformação linear, existe $M > 0$ verificando (ver Teorema A 2, Apêndice)

$$\Rightarrow \| f(x) - f(c) \| \leq \| x - c \| + M \| x - c \| \Rightarrow \| f(x) - f(c) \| \leq (M+1) \| x - c \|$$

tomando $k = M + 1$ segue que f é Lipschitziana, portanto para todo $x \in A$

$$\| x - c \| \leq \delta \Rightarrow \| f(x) - f(c) \| \leq K \| x - c \|$$

em particular f é contínua em c.

■

Consequência do Lema 1.2. Se uma função $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ é descontínua em $c \in A$ temos que f não é diferenciável em c.

Exemplo de função que não é diferenciáveis na origem por não ser contínua.

Exemplo 1.5. *A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}; & y \neq 0 \\ 0; & y = 0 \end{cases}$$

é descontínua em $c = (0,0)$. Verifiquemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

tomando $x = t$ e $y = t^2$ com $t \to 0$ tem-se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(t,t^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{t}$$

sabendo que tal limite não existe, logo f não é contínua em $c = (0,0)$.

Teorema 1.1. *Se $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ é diferenciável em $c \in \mathring{A}$, temos que $\frac{\partial f(c)}{\partial u}$ existe para todo $u \in \mathbb{R}^p$ com*

$$f'(c)u = \frac{\partial f(c)}{\partial u} \ .$$

Demonstração. *Sendo f diferenciável em c, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo $v \in \mathbb{R}^p$*

$$\| v \| < \delta \Rightarrow \| f(c+v) - f(c) - f'(c)v \| \leq \epsilon \| v \|$$

dado $u \in \mathbb{R}^p$ e $t \approx 0$ de modo que $\| tu \| < \delta$, temos

$$\| f(c+tu) - f(c) - f'(c)(tu) \| \leq \epsilon \| tu \|$$

Segue de $f'(c)$ ser transformação linear e propriedade de norma ($\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$) que

$$\| f(c+tu) - f(c) - tf'(c)u \| \leq \epsilon \mid t \mid \| u \| \Rightarrow \left\| \frac{1}{t}\{f(c+tu) - f(c) - tf'(c)u\} \right\| \leq \epsilon \| u \|$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{f(c+tu) - f(c)}{t} - f'(c)u \right\| \leq \epsilon \| u \| \ \ \forall \epsilon > 0$$

mostrando que (ver Teorema A 1, Apêndice)

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(c+tu) - f(c)}{t} = f'(c)u$$

ou equivalentemente

$$f'(c)u = \frac{\partial f(c)}{\partial u} \ .$$

Assim, mostramos que se f é diferenciável em $c \in \mathring{A}$, então a derivada direcional $\frac{\partial f(c)}{\partial u}$ existe para todo $u \in \mathbb{R}^p$.

$\blacksquare$

Exemplo 1.6. *Segue deste resultado que a função do Exemplo 1.1 não é diferenciável na origem pois $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x_1}$ não existe.*

Definição 1.4. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ uma função diferenciável em $c \in \mathring{A}$. O vetor*

$$\nabla f(c) = \left(\frac{\partial f(c)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(c)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(c)}{\partial x_p}\right)$$

denomina-se gradiente de f em c.

Corolário 1.1. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ diferenciável em $c \in \mathring{A}$. Então para todo $u = (u_1, u_2, \cdots, u_p) \in \mathbb{R}^p$, temos*

$$f'(c)u = \langle \nabla f(c), u \rangle \ .$$

Demonstração. *Sendo $u \in \mathbb{R}^p$, temos que*

$$u = \sum_{i=1}^{p} u_i e_i$$

onde $e_i = (0, \cdots, 1 \cdots, 0)$.Daí, usando o fato de $f'(c)$ ser transformação linear, tem-se

$$f'(c)u = f'(c)(\sum_{i=1}^{p} u_i e_i) = \sum_{i=1}^{p} f'(c)(u_i e_i) = \sum_{i=1}^{p} u_i \frac{\partial f(c)}{\partial x_i}$$

isto é equivalente ao produto interno de u com o vetor gradiente de f em c,

$$f'(c)u = \langle \nabla f(c), u \rangle \ .$$

■

Lema 1.3. *Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ é diferenciável em $c \in \mathring{A}$ se, e somente se, $f_i : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $c \in \mathring{A}$ para todo $i = 1, \cdots, q$.*

Demonstração. *Se f é diferenciável em $c \in \mathring{A}$, então*

$$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{\| f(c+u) - f(c) - f'(c)u \|}{\| u \|} = 0$$

onde

$$f'(c)u = (f_1'(c)u, f_2'(c)u, \cdots, f_q'(c)u)$$

Daí,

$$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{\| (f_1(c+u), \cdots, f_q(c+u)) - (f_1(c), \cdots, f_q(c)) - (f_1'(c)u, \cdots, f_q'(c)u) \|}{\| u \|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| (f_1(c+u) - f_1(c) - f_1'(c)u, \cdots, f_q(c+u) - f_q(c) - f_q'(c)u) \|}{\| u \|} = 0$$

usando a norma da soma (ver Teorema A 3, Apêndice) e o fato de que cada $f_i'(c) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *com* $i = 1, 2, \cdots, q$ *é uma transformação linar, obtemos*

$$\lim_{\|u\|\to 0} \sum_{i=1}^{q} \frac{\| f_i(c+u) - f_i(c) - f_i'(c)u \|}{\| u \|} = 0$$

isto é,

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| f_1(c+u) - f_1(c) - f_1'(c)u \|}{\| u \|} = 0$$

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| f_2(c+u) - f_2(c) - f_2'(c)u \|}{\| u \|} = 0$$

$$\vdots$$

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| f_q(c+u) - f_q(c) - f_q'(c)u \|}{\| u \|} = 0$$

mostrando assim que f_i *é diferenciável em* $c \in \mathring{A}$ *para todo* $i = 1, 2, \cdots, q$.

Agora, se $f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $c \in \mathring{A}$ *para todo* $i = 1, 2, \cdots, q$. *Analisemos a diferenciabilidade de* f *em* c. *Note que*

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| f(c+u) - f(c) - f'(c)u \|}{\| u \|} =$$

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| (f_1(c+u), \cdots, f_q(c+u)) - (f_1(c), \cdots, f_q(c)) - (f_1'(c)u, \cdots, f_q'(c)u) \|}{\| u \|} =$$

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| (f_1(c+u) - f_1(c) - f_1'(c)u, \cdots, f_q(c+u) - f_q(c) - f_q'(c)u) \|}{\| u \|} =$$

usando novamente a norma da soma e o fato de f_i $(i = 1, 2, \cdots, q)$ *ser diferenciável temos*

$$\lim_{\|u\|\to 0} \sum_{i=1}^{q} \frac{\| f_i(c+u) - f_i(c) - f_i'(c)u \|}{\| u \|} = 0$$

mostrando assim o lema.

$\blacksquare$

Consequência do Lema 1.3 Se f é diferenciável em $c \in \mathring{A}$, então

$$f'(c)u = (f_1'(c)u, f_2'(c)u, \cdots, f_q'(c)u)$$

ou ainda

$$f'(c)u = \left(\frac{\partial f_1(c)}{\partial u}, \frac{\partial f_2(c)}{\partial u}, \cdots, \frac{\partial f_q(c)}{\partial u}\right).$$

1.2 Cálculo da Derivada

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ diferenciável em $c \in \mathring{A}$. Sabemos que a derivada $f'(c) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ é uma transformação linear. Dadas as bases $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_p\}$ de $\mathbb{R}^P$ e $C = \{e_1, e_2, \cdots, e_q\}$ de $\mathbb{R}^q$ sendo $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$. Encontraremos a matriz jacobiana J_f que determina $f'(c)$. Seguindo as idéias de álgebra linear (ver Definição A 1, Apêndice) temos o seguinte

$$f'(c)e_j = \left(\frac{\partial f_1(c)}{\partial x_j}, \frac{\partial f_2(c)}{\partial x_j}, \cdots, \frac{\partial f_q(c)}{\partial x_j}\right) \quad (j = 1, 2, \cdots, p)$$

o que implica em

$$f'(c)e_j = \frac{\partial f_1(c)}{\partial x_j}e_1 + \frac{\partial f_2(c)}{\partial x_j}e_2 + \cdots + \frac{\partial f_q(c)}{\partial x_j}e_q \quad (j = 1, 2, \cdots, p)$$

de maneira equivalente

$$f'(c)e_j = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f_i(c)}{\partial x_j}e_i \quad (j = 1, 2, \cdots, p)$$

desta forma, segue da definição de matriz de transformação linear que a matriz $f'(c)$ é

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(c)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(c)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(c)}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2(c)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(c)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(c)}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q(c)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_q(c)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_q(c)}{\partial x_p} \end{pmatrix}_{p \times q}$$

ou também

$$J_f = \begin{pmatrix} \nabla f_1(c) \\ \nabla f_1(c) \\ \vdots \\ \nabla f_q(c) \end{pmatrix}$$

essa matriz é denominada matriz *Jacobiana* de $f'(c)$.

Exemplo 1.7. *Façamos o caso em que $p = q = 1$.Quando $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $c \in \mathring{A}$, para $u \neq 0$, tem-se*

$$Df(c)u = \frac{\partial f(c)}{\partial u} = \lim_{t\to 0} \frac{f(c+tu) - f(c)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(c+tu) - f(c)}{t}.\frac{u}{u} =$$

$$u.\lim_{t\to 0} \frac{f(c+tu) - f(c)}{tu}$$

tomando $h = tu$ como $t \to 0$, então $h \to 0$, daí

$$Df(c)u = u.\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$\Rightarrow Df(c)u = u.f'(c)$$

assim, a matriz jacobiana de $f'(c)$ é

$$J_f = f'(c)$$

1.3 Álgebra de Funções Diferenciáveis

Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ e $\varphi : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em $c \in \mathring{A}$. Então
a) A função $h : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ dada por

$$h(x) = f(x) + \alpha g(x) \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}$$

é diferenciável com

$$h'(c) = f'(c) + \alpha g'(c) \ .$$

b) A função $k : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ dada por

$$k(x) = \varphi(x).f(x)$$

é diferenciável com

$$k'(c)u = (\varphi'(c)u)f(c) + \varphi(c)(f'(c)u) \ .$$

Demonstração. *Para a) vamos considerar* $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *tal que para todo* $u \in \mathbb{R}^p$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se*

$$Lu = f'(c)u + \alpha g'(c)u$$

então

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| h(c+u) - h(c) - Lu \|}{\| u \|} =$$

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| f(c+u) + \alpha g(c+u) - f(c) - \alpha g(c) - f'(c)u - \alpha g'(c)u \|}{\| u \|} =$$

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| f(c+u) - f(c) - f'(c)u + \alpha[g(c+u) - g(c) - g'(c)u] \|}{\| u \|} =$$

usando propriedade de norma

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| f(c+u) - f(c) - f'(c)u + \alpha[g(c+u) - g(c) - g'(c)u] \|}{\| u \|} \leq$$

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| f(c+u) - f(c) - f'(c) \|}{\| u \|} + \lim_{\|u\|\to 0} \frac{| \alpha | \| g(c+u) - g(c) - g'(c)u \|}{\| u \|}$$

segue do fato de f *e* g *serem diferenciáveis que*

$$0 \leq \lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| h(c+u) - h(c) - Lu \|}{\| u \|} \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| h(c+u) - h(c) - Lu \|}{\| u \|} = 0$$

mostrando a).

b) Neste caso, consideremos

$$Lu = (\varphi'(c)u)f(c) + \varphi(c)(f'(c)u)$$

daí

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| k(c+u) - k(c) - Lu \|}{\| u \|}$$

a priori observe que

$$k(c+u) - k(c) - Lu = \varphi(c+u)f(c+u) - \varphi(c)f(c) - [\varphi'(c)u]f(c) - \varphi(c)[f'(c)u]$$

somando e subtraindo $[\varphi(c+u)]f(c)$

$$= \varphi(c+u)f(c+u) - [\varphi(c+u)]f(c) + [\varphi(c+u)]f(c) - \varphi(c)f(c) - [\varphi'(c)u]f(c) - \varphi(c)[f'(c)u]$$

$$= [\varphi(c+u) - \varphi(c) - \varphi'(c)u]f(c) + \varphi(c+u)f(c+u) - [\varphi(c+u)]f(c) - \varphi(c)[f'(c)u]$$

somando e subtraindo $[\varphi(c+u)]f'(c)u$

$$= [\varphi(c+u) - \varphi(c) - \varphi'(c)u]f(c) + \varphi(c+u)f(c+u) - [\varphi(c+u)]f(c) - \varphi(c)[f'(c)u]$$

$$+[\varphi(c+u)]f'(c)u - [\varphi(c+u)]f'(c)u$$

$$= [\varphi(c+u) - \varphi(c) - \varphi'(c)u]f(c) + [f(c+u) - f(c) - f'(c)u]\varphi(c+u) + [\varphi(c+u) - \varphi(c)]f'(c)u$$

Assim, pela desigualdade triangular temos

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| k(c+u) - k(c) - Lu \|}{\| u \|} \leq \lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| [\varphi(c+u) - \varphi(c) - \varphi'(c)u]f(c) \|}{\| u \|} +$$

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| [f(c+u) - f(c) - f'(c)u]\varphi(c+u) \|}{\| u \|} + \lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| [\varphi(c+u) - \varphi(c)]f'(c)u \|}{\| u \|}$$

aplicando novamente propriedade de norma ($\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$)

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| k(c+u) - k(c) - Lu \|}{\| u \|} \leq \lim_{\|u\|\to 0} \frac{| \varphi(c+u) - \varphi(c) - \varphi'(c)u |}{\| u \|} \| f(c) \| +$$

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| f(c+u) - f(c) - f'(c)u \|}{\| u \|} | \varphi(c+u) | + \lim_{\|u\|\to 0} | \varphi(c+u) - \varphi(c) | \frac{\| f'(c)u \|}{\| u \|}$$

passando o limite e usamos o fato de $| \varphi(c+u) - \varphi(c) | \to 0$ *e* $\frac{\|f'(c)u\|}{\|u\|}$ *ser limitada (ver Teorema A 2, Apêndice) concluimos que esta parcela converge para zero (ver Teorema*

A 4, Apêndice), por outro lado f e φ são diferenciáveis em c, então

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\| k(c+u) - k(c) - Lu \|}{\| u \|} = 0 \ ,$$

mostrando a diferenciabilidade de k, com

$$Lu = k'(c)u = (\varphi'(c)u)f(c) + \varphi(c)(f'(c)u) \ .$$

$$\blacksquare$$

Teorema 1.2. (***Regra da Cadeia***) *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ e $g : B \subset \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ funções com $f(A)$ contido em B aberto, f é diferenciável em $c \in \mathring{A}$ e g diferenciável em $b = f(c)$. Então a função $h = g \circ f$ é diferenciável em c com*

$$h'(c) = g'(f(c)) \circ f'(c)$$

Demonstração. *Sendo f diferenciável em c, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo $x \in A$*

$$\| x - c \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) \| \leq \epsilon \| x - c \| \ \ .$$

Façamos

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) - R(x-c)$$

daí, vejamos uma condição para $R(x-c)$ de forma que f seja diferenciável, portanto segue da definição de derivada que

$$\| f(c) + f'(c)(x-c) - R(x-c) - f(c) - f'(c)(x-c) \| \leq \epsilon \| x - c \|$$

usando propriedade de norma, temos ($\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$)

$$\| R(x-c) \| \leq \epsilon \| x - c \| \ \ \forall \epsilon > 0 \ .$$

Veja que fazendo $x \to c$, então $R(x-c) \to 0$. Por f ser diferenciável segue do ***Lema***

1.2 *que f é lipschitziana, portanto existe $k > 0$ verificando*

$$\| x - c \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(c) \| \leq k \| x - c \| \quad .$$

Sendo g diferenciável em b, dado $\epsilon > 0$, existe $n > 0$ tal que para todo $y \in B$

$$\| y - b \| < n \Rightarrow \| g(y) - g(c) - g'(b)(y - b) \| \leq \epsilon \| y - b \|$$

sabemos que $f(c) = b$, façamos $y = f(x)$ daí,

$$\| f(x) - f(c) \| < n \Rightarrow \| g(f(x)) - g(f(c)) - g'(b)(f(x) - f(c)) \| \leq \epsilon \| f(x) - f(c) \|$$

escolhendo $0 < \delta < \frac{n}{k}$, portanto para todo $x \in A$

$$\|x - c\| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(c) \| \leq k \| x - c \| \leq k\delta < n$$

logo, para todo $x \in B_\delta(c)$ temos

$$\| g(f(x)) - g(f(c)) - g'(b)(f(x) - f(c)) \| \leq \epsilon \|f(x) - f(c)\| \leq \epsilon k \| x - c \|$$

lembrando que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) - R(x - c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) = f'(c)(x - c) - R(x - c)$$

Substituindo

$$\| g(f(x)) - g(f(c)) - g'(b)(f'(c)(x - c) - R(x - c)) \| \leq \epsilon k \| x - c \|$$

de $g'(b)$ ser transformação linear tem-se

$$\| g(f(x)) - g(f(c)) - g'(b)(f'(c)(x - c)) - g'(b)(R(x - c)) \| \leq \epsilon k \| x - c \| \quad .$$

Vamos utilizar a relação $\| a \| - \| b \| \leq \| a - b \|$(esta relação pode ser obtida através da *desigualdade triangular),*

$$\| g(f(x)) - g(f(c)) - g'(b)(f'(c)(x-c)) \| - \| g'(b)(R(x-c)) \| \leq \epsilon k \| x - c \|$$

$$\Rightarrow \| g(f(x)) - g(f(c)) - g'(b)(f'(c)(x-c)) \| \leq \| g'(b)(R(x-c)) \| + \epsilon k \| x - c \| \ .$$

Recordando que

$$\| g'(b)(R(x-c)) \| \leq M \| R(x-c) \| \ \ com\ M > 0$$

logo,

$$\| g(f(x)) - g(f(c)) - g'(b)(f'(c)(x-c)) \| \leq M \| R(x-c) \| + \epsilon k \| x - c \|$$

visto que

$$\| R(x-c) \| \leq \epsilon \| x - c \|$$

então

$$\| g(f(x)) - g(f(c)) - g'(b)(f'(c)(x-c)) \| \leq M\epsilon \| x - c \| + \epsilon k \| x - c \|$$

$$\Rightarrow \| g(f(x)) - g(f(c)) - g'(b)(f'(c)(x-c)) \| \leq \epsilon(M + k) \| x - c \|$$

para todo $x \in A$ *com* $\| x - c \| < \delta$. *Desta forma* $g \circ f$ *é diferenciável em* $c \in \mathring{A}$ *com*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \circ f'(c)$$

$\blacksquare$

Definição 1.5. *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}^p$. *O conjunto*

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty \ ; 0 \leq t \leq 1\}$$

denomina-se seguimento de reta de extremos x, y.

Teorema 1.3. (***Teorema do Valor Médio***) *Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *uma função dife-*

renciável no segmento de reta $S = [a, b] \subset A$. Então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)\ .$$

Demonstração. *Considere a função $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(t) = f((1 - t)a + tb)$$

Sabemos que a composição de funções contínuas também é contínua. Logo, como $\varphi(t) = (1 + t)a + tb$ e f são funções contínuas, temos que $F = f \circ \varphi$ também é contínua. Além disso, para todo $t \in (0, 1)$ tem-se

$$F'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{F(t + h) - F(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f((1 - (t + h))a + (t + h)b) - f((1 - t)a + tb)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a - at - ah + tb + bh) - f((1 - t)a + tb)}{h} =$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{f((1 - t)a + tb + h(b - a)) - f((1 - t)a + tb)}{h}$$

tomando $d = (1 - t)a + tb$, temos

$$F'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(d + h(b - a)) - f(d)}{h}\ .$$

*Como f é diferenciável em $S = [a, b]$, segue do **Teorema 1.1** que*

$$F'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(d + h(b - a)) - f(d)}{h} = \frac{\partial f(d)}{\partial(b - a)} = f'(d)(b - a)$$

mostrando assim que F é derivável em $t \in (0, 1)$. Pelo teorema do valor médio de Lagrange na reta (ver Teorema A 5, Apêndice) temos que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$F(1) - F(0) = F'(\theta)(1 - 0) \Rightarrow f(b) - f(a) = F'(\theta)$$

lembrando que

$$F'(t) = f'((1 - t)a + tb)(b - a)\ ,$$

assim,

$$F'(\theta) = f'((1 - \theta)a + \theta b)(b - a)$$

daí,

$$f(b) - f(a) = f'((1-\theta)a + \theta b)(b-a)$$

finalmente tomando $c = (1-\theta)a + \theta b$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)\ .$$

■

Lema 1.4. ***(Desigualdade do Valor Médio)*** *Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ $(q > 1)$ *uma função diferenciável no segmente* $S = [a,b] \subset A$. *Então existe* $c \in S$ *tal que*

$$\| f(b) - f(a) \| \leq \| f'(c)(b-a) \|\ \ .$$

Demonstração. *No que segue, denotaremos*

$$y_0 = f(b) - f(a)$$

vamos supor que $y_0 \neq 0$, *pois do contrário a desigualdade é imediata. Desta forma, considere*

$$y_1 = \frac{y_0}{\| y_0 \|}$$

e a função $H : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *expressa por*

$$H(x) = \langle f(x), y_1 \rangle\ .$$

deste modo, decorre do ***Lema 1.3*** *que* $f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *é diferenciável para todo* $i = 1, \cdots, q$, *assim, segue da álgebra de funções que* H *é diferenciável para todo* $x \in S$. *Para todo* $u \in \mathbb{R}^p$ *temos*

$$H'(x)u = \langle f'(x), y_1 \rangle$$

observe que,

$$H(b) - H(a) = \langle f'(b), y_1 \rangle - \langle f(a), y_1 \rangle$$

usando propriedade de produto interno

$$\Rightarrow H(b) - H(a) = \langle f(b) - f(a), y_1 \rangle \Rightarrow H(b) - H(a) = \left\langle f(b) - f(a), \frac{f(b) - f(a)}{\| f(b) - f(a) \|} \right\rangle\ .$$

Usando novamente propriedade de produto interno

$$H(b) - H(a) = \frac{1}{\| f(b) - f(a) \|} \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a) \rangle$$

decorre da normar associada ao produto interno que

$$H(b) - H(a) = \frac{\| f(b) - f(a) \|^2}{\| f(b) - f(a) \|} \Rightarrow H(b) - H(a) = \| f(b) - f(a) \|$$

Aplicando o teorema do valor médio para a função H, existe $c \in S$ tal que

$$H(b) - H(a) = H'(c)(b - a) \Rightarrow \| f(b) - f(a) \| = \langle f'(c)(b - a), y_1 \rangle$$

da desigualdade de Cauchy-Schwarz (ver Teorema A 6, Apêndice) tem-se

$$\| f(b) - f(a) \| \leq \| f'(c)(b - a) \| \| y_1 \|$$

lembrando que

$$\| y_1 \| = \left\| \frac{y_0}{\| y_0 \|} \right\| = 1$$

concluimos que

$$\| f(b) - f(a) \| \leq \| f'(c)(b - a) \|$$

$\blacksquare$

Capítulo 2

Teorema da Função Inversa e Aplicação

Neste capítulo, veremos características locais de funções $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ que são diferenciáveis tais como:

i) Se $f'(c)$ é injetora, então f é localmente injetora em uma vizinhança de c.

ii) Se $f'(c)$ é sobrejetora, então f é sobrejetora em uma vizinhança de $f(c)$

iii) Se $p = q$ e $f'(c)$ é bijetora, então f é localmente inversível em uma vizinhança de c e sua inversa é diferenciável.

E também uma aplicação do teorema da função inversa na construção do grau de Brouwer.

Definição 2.1. *Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ é dita ser de classe $C^1(\Omega)$ quando f é diferenciável em Ω e $f' : \Omega \to \Im(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ é uma função contínua.*

Definição 2.2. *Uma função $f : X \to Y$ chama-se um difeomorfismo quando é diferenciável e possui uma inversa $f^{-1} : Y \to X$ também diferenciável.*

Lema 2.1. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ uma função de classe $C^1(\Omega)$. Considere o seguimento $S = [a, b] \subset \Omega$ e $x_0 \in \Omega$. Então*

$$\| f(b) - f(a) - f'(x_0)(b-a) \| \leq \sup_{x \in S} \| f'(x) - f'(x_0) \| \| b - a \| \ .$$

Demonstração. *Vamos definir a função* $g : \Omega \to \mathbb{R}^q$ *dada por*

$$g(x) = f(x) - f'(x_0)x \ .$$

Note que

$$g(b) = f(b) - f'(x_0)b$$

$$g(a) = f(a) - f'(x_0)a$$

daí

$$g(b) - g(a) = f(b) - f(a) - f'(x_0)(b - a)$$

do ***Exemplo 1.4*** *concluimos que* $f'(x_0)$ *é diferenciável em* Ω *e por hipótese* f *também é diferenciável em* Ω *portanto* g *é diferenciável em Omega. E decorre do item a) da* ***Algebra de funções Diferenciáveis*** *que a derivada de* g *é*

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

logo, para todo $u \in \mathbb{R}^p$

$$g'(x)u = f'(x)u - f'(x_0)u = (f'(x) - f'(x_0))(u)$$

aplicando a desigualdade do valor médio para g*, logo existe* $c \in S$ *tal que*

$$\| g(b) - g(a) \| \leq \| g'(c)(b - a) \|$$

donde temos,

$$\| f(b) - f(a) - f'(x_0)(b - a) \| \leq \| (f'(c) - f'(x_0))(b - a) \| \ .$$

Recordando que $g'(c)$ *é limitada (ver Teorema A 2, Apêndice) temos esta relação*

$$\| (f'(c) - f(x_0))(b - a) \| \leq \| f'(c) - f'(x_0) \| \| b - a \|$$

usando este fato obtemos,

$$\| f(b) - f(a) - f'(x_0)(b-a) \| \leq \| f'(c) - f'(x_0) \| \| b-a \| \ .$$

finalmente, como $c \in S$, tomando

$$\| f'(c) - f'(x_0) \| \leq \sup_{x \in S} \| f'(x) - f'(x_0) \| \ ,$$

portanto

$$\| f(b) - f(a) - f'(x_0)(b-a) \| \leq \sup_{x \in S} \| f'(x) - f'(x_0) \| \| b-a \| \ .$$

■

Lema 2.2. (***Lema de Aproximação***). *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ uma função de classe $C^1(\Omega)$. Dado $x_0 \in \Omega$ e $\epsilon > 0$, existem $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ e $x_1, x_2 \in \Omega$ tais que*

$$\| x_k - x_0 \| < \delta \ (k = 1,2) \Rightarrow \| f(x_2) - f(x_1) - f'(x_0)(x_2 - x_1) \| \leq \epsilon \| x_2 - x_1 \|$$

Demonstração. *Sendo $f' : \Omega \to \Im(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ contínua, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \Omega$*

$$\| x - x_0 \| < \delta \Rightarrow \| f'(x) - f'(x_0) \| < \epsilon$$

Como f é diferenciável em x_0, então

$$B_\delta(x_0) \subset \Omega$$

Sejam $x_1, x_2 \in \Omega$ satisfazendo

$$\| x_k - x_0 \| < \delta \ (k = 1,2)$$

note que

$$S = [x_1, x_2] \subset B_\delta(x_0) \subset \Omega$$

$$\| x_2 - x_1 \| = \| x_2 - x_0 + x_0 - x_1 \|$$

da desigualdade triangular obtemos

$$\| x_2 - x_1 \| \leq \| x_2 - x_0 \| + \| x_1 - x_0 \| \Rightarrow \| x_2 - x_1 \| < 2\delta$$

*usando o **Lema 2.1***

$$\| f(x_2) - f(x_1) - f'(x_0)(x_2 - x_1) \| \leq \sup_{x \in S} \| f'(x) - f'(x_0) \| \| x_2 - x_1 \|$$

portanto, segue da contínuidade de f' que

$$\| f(x_2) - f(x_1) - f'(x_0)(x_2 - x_1) \| \leq \epsilon \| x_2 - x_1 \| \quad .$$

$$\blacksquare$$

2.1 Teorema da Função Injetora

Teorema 2.1. (***Teorema da Função Injetora***) *Suponha que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ é de classe $C^1(\Omega)$ e que $f'(c) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ é injetora em $c \in \Omega$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $f|_{B_\delta(c)}$ é injetora. Além disso, a inversa de $f|_{B_\delta(c)}$ é uma função contínua de $f(B_\delta(c))$ em $B_\delta(c)$.*

Demonstração. *Sendo $f'(c) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ injetora e linear, existe $r > 0$ tal que, para todo $u \in \mathbb{R}^p$ (ver Teorema A 7, Apêndice)*

$$r \| u \| \leq \| f'(c)u \| \quad .$$

Usando o lema de aproximação com $x_0 = c$ e $\epsilon = \frac{1}{2}r$, existem $\delta > 0$ e $x_1, x_2 \in \Omega$ tais que

$$\| x_k - c \| < \delta \ (k = 1, 2) \Rightarrow \| -f'(c)(x_2 - x_1) - (f(x_1) - f(x_2)) \| \leq \frac{1}{2} r \| x_2 - x_1 \|$$

segue da desigualdade triangular que $\| a \| - \| b \| \leq \| a - b \|$

$$\| f'(c)(x_2 - x_1) \| - \| f(x_2) - f(x_1) \| \leq \frac{1}{2} r \| x_2 - x_1 \|$$

$$\Rightarrow \| f'(c)(x_2 - x_1) \| - \frac{1}{2} r \| x_2 - x_1 \| \leq \| f(x_2) - f(x_1) \|$$

usando a relação obtida por $f'(c)$ ser injetora

$$r \parallel x_2 - x_1 \parallel - \frac{1}{2} r \parallel x_2 - x_1 \parallel \leq \parallel f(x_2) - f(x_1) \parallel$$

concluimos assim que para todo $x_1, x_2 \in B_\delta(c)$

$$\frac{1}{2} r \parallel x_2 - x_1 \parallel \leq \parallel f(x_2) - f(x_1) \parallel \tag{2.1}$$

Considere $x_1 \neq x_2$, então

$$0 < \frac{1}{2} r \parallel x_2 - x_1 \parallel \leq \parallel f(x_2) - f(x_1) \parallel$$

isto é,

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \neq 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; f(x_2) \neq f(x_1) \; .$$

Deste modo concluimos que f é injetora para todo $x \in B_\delta(c)$.

Defina $g : f(B_\delta(c)) \to B_\delta(c)$ a inversa de f. Assim,

$$f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow g(y_1) = x_1$$

$$f(x_2) = y_2 \Leftrightarrow g(y_2) = x_1$$

assim, substituindo em (2.1)*, temos*

$$\parallel g(y_2) - g(y_1) \parallel \leq \frac{2}{r} \parallel y_2 - y_1 \parallel$$

mostrando que g é contínua em $f(B_\delta(c))$.

■

Observação. *No que se segue, L e M são transformações lineares tais que uma é a inversa em relação a outra.*

2.2 Teorema da Função Sobrejetora

Teorema 2.2. (***Teorema da Função Sobrejetora***) *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ uma função de classe $C^1(\Omega)$. Suponha que para algum $c \in \Omega$ a transformação linear $f'(c)$:*

$\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ é sobrejetora e existem $\alpha, m > 0$ tais que se $y \in \mathbb{R}^q$ e

$$\|y - f(c)\| \leq \frac{\alpha}{2m}$$

então existe $x \in \Omega$ com

$$\|x - c\| \leq \alpha$$

tal que $f(x) = y$.

Demonstração. *No que segue, denote por $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ a transformação linear $f'(c)$, logo L é sobrejetora e portanto para cada $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^q$, onde e_i é a i-ésima coordenada da base canônica, existe $u_i \in \mathbb{R}^p$ tal que*

$$L(u_i) = e_i \ .$$

Considere a transformação linear $M : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ que associa a cada e_i o vetor u_i, isto é,

$$M(e_i) = u_i \ .$$

Note que para todo $y \in \mathbb{R}^q$

$$L \circ M(y) = y \ ,$$

por M ser limitada, existe $m > 0$ tal que

$$\| M(y) \| \leq m \| y \| \ .$$

Tomando $\epsilon = \frac{1}{2m}$ e $x_0 = c$, e usando o lema de aproximação, existe $0 < \alpha < \delta$ e $x_1, x_2 \in \Omega$ verificando

$$\| x_k - c \| \leq \alpha \ (k = 1, 2) \Rightarrow \| f(x_2) - f(x_1) - L(x_2 - x_1) \| \leq \frac{1}{2m} \| x_2 - x_1 \| \ .$$

Considere os conjuntos

$$\bar{B}_\alpha(c) = \{x \in \Omega / \| x - c \| \leq \alpha\} \ e \ \bar{B}_{\frac{\alpha}{2m}}(f(c)) = \left\{ y \in \mathbb{R}^q / \| y - f(c) \| \leq \frac{\alpha}{2m} \right\} ,$$

devemos mostrar que existe $x \in \bar{B}_\alpha(c)$ com $f(x) = y$ para todo $y \in \bar{B}_{\frac{\alpha}{2m}}(f(c))$.

Definindo

$$\begin{cases} x_0 = c \\ x_1 = x_0 + M(y - f(c)) \\ x_{n+1} = x_n - M[f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})] \end{cases} \tag{2.2}$$

veja que a sequência $\{x_n\}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *verifica:*

$$a) \parallel x_{n+1} - x_n \parallel \leq \frac{\alpha}{2^{n+1}} < \alpha$$

$$b) \parallel x_{n+1} - c \parallel \leq \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\alpha < \alpha \ ,$$

faremos a prova de a) e b) por indução em n.

Prova de a)

i) para $n = 0$

$$\parallel x_1 - x_0 \parallel = \parallel M(y - f(c)) \parallel \leq m \parallel y - f(c) \parallel \leq \frac{m\alpha}{2m} \Rightarrow \parallel x_1 - x_0 \parallel \leq \frac{\alpha}{2^1} \ .$$

ii) Supondo que a) seja verdade para $n-1$*, isto é,*

$$\parallel x_n - x_{n-1} \parallel \leq \frac{\alpha}{2^n}$$

verifiquemos a validez para n

$$\parallel x_{n+1} - x_n \parallel \leq \frac{\alpha}{2^{n+1}} \ .$$

Note que

$$\parallel x_{n+1} - x_n \parallel = \parallel M[f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})] \parallel \leq m \parallel f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1}) \parallel$$

do lema de aproximação tem-se

$$m \parallel f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1}) \parallel \leq \frac{m}{2m} \parallel x_n - x_{n-1} \parallel$$

$$\Rightarrow \parallel x_{n+1} - x_n \parallel \leq \frac{1}{2} \parallel x_n - x_{n-1} \parallel \ .$$

Pela hipótese de indução

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leq \frac{1}{2} \| x_n - x_{n-1} \| \leq \frac{1}{2} . \frac{\alpha}{2^n}$$

$$\Rightarrow \| x_{n+1} - x_n \| \leq \frac{\alpha}{2^{n+1}} < \alpha$$

com $x_n \in \bar{B}_\alpha(c)$.

Prova de b)

i) para $n = 0$

$$\|x_1 - c\| \leq \frac{\alpha}{2^1} = \left(1 - \frac{1}{2^1}\right)\alpha \ .$$

Supondo que b) é verdade para $n - 1$*, isto é,*

$$\| x_n - c \| \leq \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\alpha$$

devemos mostrar que é verdade para n*, ou seja,*

$$\| x_{n+1} - c \| \leq \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\alpha \ .$$

De fato, temos

$$\| x_{n+1} - c \| = \| x_{n+1} - x_n + x_n - c \|$$

segue da desigualdade triangular que

$$\| x_{n+1} - c \| \leq \| x_{n+1} - x_n \| + \| x_n - c \|$$

usando a) e a hipótese de indução tem-se

$$\| x_{n+1} - c \| \leq \frac{\alpha}{2^{n+1}} + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\alpha = \frac{\alpha}{2^{n+1}} + \alpha - \frac{\alpha}{2^n} = \alpha + \frac{\alpha}{2^{n+1}} - \frac{2\alpha}{2^{n+1}}$$

$$= \alpha - \frac{\alpha}{2^{n+1}} = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\alpha \ .$$

Vejamos que $\{x_n\}$ é de Cauchy (ver Teorema A 8, Apêndice). Façamos $m \geq n$ daí

$$\| x_n - x_m \| = \| x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x_{n+2} + \cdots + x_{m-1} - x_m \| \ ,$$

aplicando da desigualdade triangular

$$\| x_n - x_m \| \leq \| x_n - x_{n+1} \| + \| x_{n+1} - x_{n+2} \| + \cdots + \| x_{m-1} - x_m \| \ .$$

Usando a) temos

$$\| x_n - x_m \| \leq \frac{\alpha}{2^{n+1}} + \frac{\alpha}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\alpha}{2^m}$$

$$\Rightarrow \| x_n - x_m \| \leq \frac{\alpha}{2^{n+1}}[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-(n+1)}}]$$

$$\Rightarrow \| x_n - x_m \| \leq \frac{\alpha}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{m-(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$\Rightarrow \| x_n - x_m \| \leq \frac{\alpha}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Temos razão igual a $\frac{1}{2}$ e o primeiro termo igual a 1, logo pela soma infinita dos termos de uma progressão geométrica

$$\| x_n - x_m \| \leq \frac{\alpha}{2^{n+1}} . \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2\alpha}{2^{n+1}} = \frac{\alpha}{2^n} \ ,$$

passando ao limite com $n \to \infty$ concluimos dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| x_n - x_m \| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

Mostrando que $\{x_n\}$ é de Cauchy, justificando assim que $\{x_n\}$ é convergente, logo existe $x \in \mathbb{R}^p$ tal que

$$x_n \to x \ \ em \ \mathbb{R}^p$$

de b) temos

$$\| x_{n+1} - c \| \leq \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\alpha$$

passando ao limite com $n \to \infty$ *concluimos que para todo* $x \in \bar{B}_\alpha(c)$

$$\| x - c \| \leq \alpha \ .$$

Note que (pela definição da sequência (2.2)*)*

$$L(x_{n+1} - x_n) = -L(M[f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{x_n-1})])$$

$$\Rightarrow L(x_{n+1} - x_n) = L(x_n - x_{x_n-1}) + f(x_{n-1}) - f(x_n) \ . \tag{2.3}$$

Afirmamos que

$$L(x_{n+1} - x_n) = y - f(x_n) \tag{2.4}$$

Provaremos por indução em n

$i)$ *para* $n = 0$

$$x_1 - x_0 = M(y - f(c)) \Rightarrow L(x_1 - x_0) = L(M(y - f(c))) = y - f(c)$$

$ii)$ *Supomos que para* $n - 1$ (2.4) *é verdade, isto é,*

$$L(x_n - x_{n-1}) = y - f(x_{n-1})$$

devemos mostrar que para n (2.4) *é verdade, ou seja,*

$$L(x_{n+1} - x_n) = y - f(x_n)$$

observe que, de (2.3) *tem-se,*

$$L(x_{n+1} - x_n) = L(x_n - x_{n-1}) + f(x_{n-1}) - f(x_n) \ .$$

Usando a hipótese de indução

$$L(x_{n+1} - x_n) = y - f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) - f(x_n)$$

mostrando assim que

$$L(x_{n+1} - x_n) = y - f(x_n)$$

finalmente,usando a continuidade de L e f e passando o limite com $n \to \infty$ em (2.4), *obtemos*

$$L(x - x) = y - f(x_n) \Rightarrow 0 = y - f(x) \Rightarrow f(x) = y$$

mostrando assim o teorema.

■

2.3 Teorema da Função Aberta

Teorema 2.3. (***Teorema da Função Aberta***) *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ uma função de classe $C^1(\Omega)$ de modo que $f'(x) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ é sobrejetora para todo $x \in \Omega$. Então para todo $G \subset \Omega$ aberto, o conjunto $f(G)$ é aberto, isto é, f é uma função aberta.*

Demonstração. *Seja $b = f(c)$ com $c \in G$. Devemos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que*

$$B_\delta(b) \subset f(G)$$

isto é, se $y \in B_\delta(b)$ logo existe $x \in G$ tal que $f(x) = y$.
Usando o fato de f ser contínua e $f'(c)$ ser sobrejetora, aplicamos o teorema da função sobrejetora à $f|_G$ e concluimos que existem $\delta > 0$ e $x \in G$ com $f(x) = y$ tais que

$$\| y - b \| < \delta \text{ com } \delta = \tfrac{\alpha}{2m} \text{ isto é,}$$

$$B_\delta(b) \subset f(G)\ .$$

■

Teorema 2.4. *Seja $f : U \to V$ uma bijeção de classe C^k ($k \geq 1$) entre abertos $U, V \subset \mathbb{R}^m$. Se sua inversa $f^{-1} : V \to U$ é diferenciável então $f^{-1} \in C^k$. Diz-se então que f é um difeomorfismo de classe C^k*

Demonstração. *Ver em* [5]

2.4 Teorema da Função Inversa

Teorema 2.5. (***Teorema da Função Inversa***) *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ uma função de classe $C^1(\Omega)$ de modo que $f'(c) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ é bijetora em $c \in \Omega$. Então existem vizinhanças abertas U de c e V de $f(c)$ tais que $f : U \to V$ é bijetora e a função inversa $g : V \to U$ é diferenciável. Além disso, $g \in C^1(V)$ e para todo $y \in V$ temos*

$$g'(y) = [f'(g(y))]^{-1} \ .$$

Demonstração. *Sendo $f'(c) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ injetora, então existe $r > 0$ tal que para todo $u \in \mathbb{R}^p$*

$$r \parallel u \parallel \leq \parallel f'(c)u \parallel$$

daí, pela linearidade de $f'(c)$

$$\Rightarrow r \leq \left\| f'(c)\left(\frac{u}{\parallel u \parallel}\right) \right\|$$

tomando $w = \frac{u}{\|u\|}$, temos que para todo $w \in \mathbb{R}^p$ com $\parallel w \parallel = 1$

$$r \leq \parallel f'(c)w \parallel \quad . \tag{2.5}$$

Provaremos que para todo $x \in B_\delta(c)$ e $u \in \mathbb{R}^p$ tem-se

$$\parallel f'(x)u \parallel \geq \frac{r}{2} \parallel u \parallel \quad .$$

De fato, pois do contrário existiria $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^p$ e $\{u_n\} \subset \mathbb{R}^p$ tais que

$$\parallel x_n - c \parallel < \frac{1}{n} \Rightarrow \parallel f'(x_n)u_n \parallel < \frac{r}{2} \parallel u_n \parallel \ ,$$

desta maneira, tomando

$$w = \frac{u_n}{\parallel u_n \parallel} \Rightarrow \parallel f'(x_n)w_n \parallel < \frac{r}{2} \ .$$

Portanto $\{w_n\}$ é limitada e segue do Teorema de Bolzano-Weierstrass (ver Teorema A 9, Apêndice) que $\{w_n\}$ possui uma subsequência convergente, isto é, existem $\{w_{n_j}\} \subset \{w_n\}$

e $w \in \mathbb{R}^p$ *com* $\| w \| = 1$ *tais que*

$$w_{n_j} \to w \text{ em } \mathbb{R}^p \ .$$

Daí,

$$\| f'(x_n) w_{n_j} \| < \frac{r}{2}$$

Passando o limite com $n \to \infty$ *e usando o fato de* $f \in C^1$*, obtemos*

$$\| f'(c) w \| < \frac{r}{2} \ ,$$

o que contradiz (2.5).

Mostramos assim que para todo $x \in B_\delta(c)$ *e* $u \in \mathbb{R}^p$

$$\| f'(x) u \| \geq \frac{r}{2} \| u \|$$

com isso, mostramos que $f'(x) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ *é injetora para todo* $x \in B_\delta(c)$.

Diminuindo o δ *que foi dado no teorema da função injetora, se necessário podemos supor que* $\delta < \alpha$ *onde* α *foi dado no teorema da função sobrejetora. Deste maneira, aplicando o teorema da função injetora, temos que para cada* $x \in B_\delta(c)$ *existe uma vizinhança aberta em particular* U *de* c *tal que*

$$f : U \to V = f(U)$$

é bijetora.

Sendo $f'(x) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ *injetora e portanto sobrejetora (ver Teorema A 10, Apêndice) para todo* $x \in B_\delta(c)$*. Desta forma, aplicando o Teorema da Função Aberta a imagem de* U *por* f *é um aberto, daí* $V = f(U)$ *é uma vizinhança aberta de* $f(c)$.

Por f *ser injetora em* U*, existe* $g : V \to U$ *função inversa de* f*. Devemos mostrar que* g *é diferenciável em* V.

Sejam $y_1 \in V$ *e* $x_1 \in U$ *de modo que* $f(x_1) = y_1$*. Como* f *é diferenciável em* x_1*, podemos fazer*

$$f(x) - f(x_1) - f'(x_1)(x - x_1) = \| x - x_1 \| \varphi(x)$$

onde $\varphi(x) \to 0$ *quando* $x \to x_1$*. Considere também* $M_1 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ *a inversa de* $f'(x_1)$:

$\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$. *note que*

$$M_1(f(x) - f(x_1) - f'(x_1)(x - x_1)) = M_1(\| x - x_1 \| \varphi(x))$$

Resulta de M_1 *ser transformação linear que*

$$M_1(f(x) - f(x_1)) - (x - x_1) = \| x - x_1 \| M_1(\varphi(x))$$

$$\Rightarrow x - x_1 - M_1(f(x) - f(x_1)) = - \| x - x_1 \| M_1(\varphi(x))$$

$$\Rightarrow g(y) - g(y_1) - M_1(y - y_1) = - \| x - x_1 \| M_1(\varphi(x)) \ .$$

Daí, usando o fato de M_1 *ser limitada, existe* $m_1 > 0$ *de maneira que*

$$\frac{\| g(y) - g(y_1) - M_1(y - y_1) \|}{\| y - y_1 \|} = \frac{\| x - x_1 \|}{\| y - y_1\|} \| M_1(\varphi(x)) \| \leq \frac{\| x - x_1 \|}{\| y - y_1\|} m_1 \| \varphi(x) \| \ \ .$$

Mas, de (2.1) *temos que*

$$\frac{r}{2} \| x - x_1 \| \leq \| y - y_1 \| \tag{2.6}$$

$$\Rightarrow \frac{\| x - x_1 \|}{\| y - y_1 \|} \leq \frac{2}{r} \ ,$$

decorre que

$$\frac{\| g(y) - g(y_1) - M_1(y - y_1) \|}{\| y - y_1 \|} \leq \frac{2}{r} m_1 \| \varphi(x) \|$$

observe que quando $y \to y_1$ *em* (2.6) *temos que* $x \to x_1$ *e consequentemente* $\varphi(x) \to 0$. *Faça* $v = y - y_1$ *decorre de* $y \to y_1$ *que* $v \to 0$. *Daí concluimos que*

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{\| g(v + y_1) - g(y_1) - M_1 v \|}{\| v \|} = 0$$

Desta forma $g : V \to U$ *é diferenciável para todo* $y \in V$ *com*

$$g'(y) = M_1 = [f'(g(y))]^{-1} \ .$$

Assim, aplicando o ***Teorema*** 2.4 *concluimos que* g *é de classe* C^1 .

∎

Seja $f'(c)$ bijetora, considere J_f a matriz jacobiana associada a $f'(c)$. Em termos algébricos a inversa de $f'(c)$ corresponde a inversa de J_f, ou seja,

$$[f'(c)]^{-1} = J_f^{-1}$$

Daí, para que $[f'(c)]^{-1}$ exista, então o determinante de J_f tem que ser diferente de zero, isto é, $J_f(c) \neq 0$. Desta forma, podemos reformular o teorema da função inversa da seguinte maneira.

Teorema 2.6. (***Teorema da Função Inversa***) *Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^P$ uma função de classe $C^1(\Omega)$ e $c \in \Omega$ com $J_f(c) \neq 0$. Então existem vizinhanças abertas U de c e V de $f(c)$ tais que $f : U \to V$ é bijetiva e a função inversa $g : V \to U$ é diferenciável. Além disso, $g \in C^1(V)$ e para todo $y \in V$ temos*

$$g'(y) = [f'(g(y))]^{-1} .$$

Definição 2.3. *Dados um conjunto X e um ponto $a \in \mathbb{R}^p$, há três possibilidades que se excluem mutuamente: ou $a \in intX$, ou $a \in (\mathbb{R}^p - X)$ ou então toda bola aberta de centro a contém pontos de X e pontos do complementar de X. Os pontos com esta última propriedade constituem ∂X, que chamaremos a fronteira de X. Os pontos $y \in \partial X$ são chamados pontos-fronteira de X.*

Aplicação

2.5 Aplicação ao grau de Brouwer

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ um aberto limitado e $C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^p)$ o espaço das funções k-vezes diferenciáveis em $\bar{\Omega}$, ou seja, o espaço das funções contínuas em $\bar{\Omega}$ que possuem todas as derivadas até a ordem k, sendo restrições de funções contínuas definidas em $\bar{\Omega}$.
Para o espaço $C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^p)$ vamos considerar a seguinte norma

$$\|\varphi\|_k = \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in \Omega} \|D^{(j)}\varphi(x)\|$$

Considere $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^p)$ e $S = \{x \in \Omega; J_\varphi(x) = 0\}$ onde $J_\varphi(x)$ representa o valor do determinante jacobiano de φ aplicado no ponto x. Tome $b \in \mathbb{R}^p$ com $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Se $x \in \varphi^{-1}(\{b\})$ logo $J_\varphi(x) \neq 0$, então pelo **Teorema 2.6** φ é um difeomorfismo de uma vizinhança U de x sobre uma vizinhança V de b, isto é,

$$\varphi|_U : U \to \varphi(U) = V$$

é um difeomorfismo.

Afirmação: O conjunto $\varphi^{-1}(\{b\})$ é finito. De fato, pois $\varphi^{-1}(\{b\})$ é um conjunto fechado em $\bar{\Omega}$. Como consequência $\varphi^{-1}(\{b\})$ é fechado e limitado em $\mathbb{R}^p$ pois o fecho de Ω é limitado e $\varphi^{-1}(\{b\}) \subset \bar{\Omega}$. Mostrando assim que $\varphi^{-1}(\{b\})$ é compacto.

Para cada $x \in \varphi^{-1}(\{b\})$, considere a bola $B_{r_x}(x) \subset U_x$.

Assim,

$$\varphi^{-1}(\{b\}) \subseteq \bigcup_{x_j \in \varphi^{-1}(\{b\})} B_{r_j}(x_j)$$

e desde que $\{B_{r_j}(x_j)\}$ é uma cobertura por abertos (ver Definição A 2, Apêndice) para o compacto $\varphi^{-1}(\{b\})$, pelo **Teorema de Borel-Lebesgue** (ver Teorema A 11, Apêndice) obtemos uma subcobertura finita de maneira que

$$\varphi^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_{r_j}(x_j)$$

mostrando que $\varphi^{-1}(\{b\})$ é finito, isto é, $\varphi^{-1}(\{b\}) = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}$ com $J_\varphi(\xi_i) \neq 0$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$.

Definição 2.4. *Sejam $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^p)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Definimos o grau topológico de Brouwer da função φ em relação a Ω no ponto b como sendo o número inteiro*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} sgn(J_\varphi(\xi_i))$$

onde sgn é a função sinal que é definida por

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & se\ t > 0 \\ -1, & se\ t < 0 \end{cases}$$

2.6 Exemplos

Exemplo 2.1. *Considere a função* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $\varphi(x) = sen\ x$ *com* $\Omega = \left(0, \frac{5\pi}{2}\right)$ *e* $b = \frac{\pi}{4}$*. Queremos calcular o grau tolológico de Brouwer de* φ *em relação a* Ω *no ponto* b*, ou seja,* $d(\varphi, \Omega, b)$*.*

Resolução: A priori vamos verificar se $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$, para que o $d\left(sen\, x, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right)$ esteja bem definido. Segue do **Exemplo 1.7** que $J_\varphi(x) = \varphi'(x) = \cos x$. Note que:

$$\partial\Omega = \left\{0, \frac{5\pi}{2}\right\} \ ; \ S = \left\{x \in \left(0, \frac{5\pi}{2}\right); \cos x = 0\right\} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \ ;$$

$$\varphi(\partial\Omega) = \{0, 1\} \ ; \ \varphi(S) = \{1, -1\}$$

logo,

$$\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S) = \{-1, 0, 1\}$$

concluimos com isso que

$$\frac{\pi}{4} \notin \{-1, 0, 1\}$$

Fazendo uma análise no círculo trigonométrico concluimos que

$$\varphi^{-1}\left(\left\{\frac{\pi}{4}\right\}\right) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$$

onde ξ_1, ξ_3 estão no primeiro quadrante e ξ_2 está no segundo quadrante. Segue da definição do grau que

$$d\left(sen\ x, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{\xi \in \varphi^{-1}(\{\frac{\pi}{4}\})} sgn(J_\varphi(\xi_i))$$

logo

$$d\left(sen\ x, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = sgn(\cos(\xi_1)) + sgn(\cos(\xi_2)) + sgn(\cos(\xi_3))$$

Consequentemente

$$d\left(sen\ x, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = 1 + (-1) + 1 = 1$$

portanto

$$d\Big(sen\ x, \Big(0, \frac{5\pi}{2}\Big), \frac{\pi}{4}\Big) = 1$$

Exemplo 2.2. *Considere a função* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $\varphi(x) = \cos x$ *com* $\Omega = \Big(0, \frac{13\pi}{6}\Big)$ *e* $b = \frac{\pi}{3}$ *Queremos calcular* $d\Big(\cos x, \Big(0, \frac{13\pi}{6}\Big), \frac{\pi}{3}\Big)$.

Resolução: Vejamos primeiramente que $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. De fato:

$$J_\varphi(x) = \varphi'(x) = -sen\ x$$

$$\partial\Omega = \Big\{0, \frac{13\pi}{6}\Big\}$$

$$S = \Big\{x \in \Big(0, \frac{13\pi}{6}\Big); sen\ x = 0\Big\} = \{\pi, 2\pi\}\ ;$$

$$\varphi(\partial\Omega) = \Big\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big\}\ ;\ \varphi(S) = \{-1, 1\}$$

logo,

$$\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S) = \Big\{-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\Big\}$$

concluimos que

$$\frac{\pi}{3} \notin \Big\{-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\Big\}$$

Analisando o círculo trigonométrico podemos concluir que

$$\varphi^{-1}\Big(\Big\{\frac{\pi}{3}\Big\}\Big) = \{\xi_1, \xi_2\}$$

onde ξ_1 está no primeiro quadrante e ξ_2 está no segundo.

Decorre da definição do grau que

$$d\Big(\cos x, \Big(0, \frac{13\pi}{6}\Big), \frac{\pi}{3}\Big) = \sum_{\xi \in \varphi^{-1}(\{\frac{\pi}{3}\})} sgn(J_\varphi(\xi_i))$$

Daí,

$$d\Big(\cos x, \Big(0, \frac{13\pi}{6}\Big), \frac{\pi}{3}\Big) = sgn(-sen\ (\xi_1)) + sgn(-sen\ (\xi_2)) = -1 + (-1) = -2$$

Portanto

$$d\Big(\cos x, \Big(0, \frac{13\pi}{6}\Big), \frac{\pi}{3}\Big) = -2$$

A teoria do grau foi desenvolvida como uma ferramenta para estudar o conjunto de soluções da equação

$$\varphi(x) = b \ .$$

A partir dessa teoria podemos obter informações sobre a existência, multiplicidade e natureza destas soluções.

CONCLUSÃO

No presente trabalho fizemos um estudo sobre a diferenciabilidade em $\mathbb{R}^p$ apresentando as principais definições e resultados para demonstrarmos o teorema da função inversa para um espaço de dimensão finita. Para isso, lançamos mão de conhecimentos de Álgebra Linear, Análise na reta e Análise em $\mathbb{R}^p$. Concluímos aplicando o Teorema da Função Inversa na construção do grau de Brouwer finalizando com dois exemplos .

Desta maneira, conseguimos atingir nosso objetivo apresentado no início deste trabalho. Vimos que o estudo da Análise em $\mathbb{R}^p$ nos proporciona resultados importantes, como por exemplo o Teorema da Função Inversa, ressaltando o notável interesse de mais estudos nesta área.

Apêndice

Resultados importante utilizados neste trabalho.

Teorema A 1. *Se* $\| b - a \| < \epsilon$ *para todo* $\epsilon > 0$, *então* $a = b$.

Tomando

$$\epsilon = \frac{1}{n} \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

temos,

$$0 \leq \| a - b \| < \frac{1}{n}$$

fazendo $n \to \infty$ *tem-se*

$$a = b$$

.

Teorema A 2. (*Ver em* [1])

Se E *é um espaço vetorial de dimenção finita, então toda transformação linear* $T : E \to Y$ *é limitada, isto é, existe* $M > 0$ *de maneira que*

$$\| Tx \| \leq M \| x \|$$

com

$$M = \sup_{x \in E} \{ \| Tx \|; \| x \| = 1 \} \ .$$

Teorema A 3. (*Ver em* [5])

Quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^p$ *são equivalentes.*

Definição A 1. (*Ver em* [3])

(Matriz de uma transformação linear). *Toda transformação linear pode ser representada por uma matriz. Desta maneira, vejamos como isto é possível.*

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão n e m, respectivamente, sobre $\mathbb{R}$. Consideremos uma transformação linear $F : U \to V$.Dadas as bases $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ de U e $C = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ de V, então cada um dos vetores $F(u_1), F(u_2), \cdots, F(u_n)$ está em V e consequentemente é combinação linear da base C:

$$F(u_1) = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \cdots + \alpha_{m1}v_m$$

$$F(u_2) = \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \cdots + \alpha_{m2}v_m$$

$$\vdots$$

$$F(u_n) = \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \cdots + \alpha_{mn}v_m$$

ou simplesmente

$$F(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}v_i \ (j = 1, 2, \cdots, n)$$

onde os α_{ij} estão univocamente determinados.
A matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

que se obtém das considerações anteriores é chamada matriz de F em relação às bases B e C.

Teorema A 4. (*Ver em* [4])
Se $\lim x_n = 0$ e (y_n) é uma sequência limitada (convergente ou não), então $\lim x_n.y_n = 0$.

Teorema A 5. (*Ver em* [4])
***(Teorema do valor médio de lagrange)**. Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b), existe $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

Teorema A 6. (*Ver em* [1])
***(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**. Seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$ e $x, y \in E$. Então*

$$\| \langle x, y \rangle \| \leq \| x \| \| y \|$$

onde $\| \cdot \|$ denota a norma associada ao produto interno $\langle , \rangle$.

Teorema A 7. (*Ver em* [1])

Seja $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ uma função linear e injetora se, e somente se, existe um número positivo $r > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^p$

$$r \parallel u \parallel \leq \parallel f'(c)u \parallel \ .$$

Teorema A 8. (*Ver em* [5])

(Sequência de Cauchy). *Uma sequência $x_n \subset E$ é dita de Cauchy quando dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ verificando*

$$\parallel x_n - x_m \parallel < \epsilon \text{ para } n, m \geq n_0.$$

Uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^p$ é de Cauchy se, e somente se, é convergente.

Teorema A 9. (*Ver em* [5])

(Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^p$ possui uma subsequência convergente.*

Teorema A 10. (*Ver em* [2])

Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ com a mesma dimensão finita n e suponhamos $F : U \to V$ uma transformação linear. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

(I) F é sobrejetora.

(II) F é bijetora.

(III) F é injetora.

(IV) F transforma uma base de U em uma base de V (isto é, se B é uma base de U, então $F(B)$ é base de V).

Definição A 2. (*Ver em* [5])

Uma cobertura de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma família $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos $C_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Isto significa que, para cada $x \in X$, existe um $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$. Uma subcobertura é uma subfamília $(C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, $L' \subset L$, tal que ainda se tem $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$. Diz-se que a cobertura $X \subset \cup C_\lambda$ é aberta quando os C_λ forem todos abertos, finita se L é um conjunto finito, enumerável se L é enumerável, etc.

Teorema A 11. (*Ver em* [5])

*(**Borel-Lebesgue**). Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto (isto é, limitada e fechado). Toda cobertura aberta $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ admite uma subcobertura finita $K \subset A_{\lambda_1} \bigcup \cdots \bigcup A_{\lambda_i}$.*

REFERÊNCIAS

[1] BARTLE, R. G. The Elements of Real Analysis, 6ª Ed. John Willey & Sons, 1976.

[2] BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra Linear. 3. ed. rev. e ampl. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980

[3] CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. Álgebra Linear e Aplicações. 6. ed. rev. São Paulo: Atual, 1990.

[4] LIMA, E. L. Curso de Análise, Vol. 1, Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[5] LIMA, E. L. Curso de Análise, Vol. 2, Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[6] O. B. Almeida, "Teoria do grau e aplicações," Master's thesis, Universidade Federal de Campina Grande, 2006.