UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

COLEGIADO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EDUARDO DA CONCEIÇÃO ROSARIO

# LEMA DE ZORN, SUAS EQUIVALÊNCIAS E APLICAÇÕES

MACAPÁ - AP

2016

**EDUARDO DA CONCEIÇÃO ROSARIO**

# LEMA DE ZORN, SUAS EQUIVALÊNCIAS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao colegiado de Matemática como requisito para obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação da professora Dra. Simone de Almeida Delphim Leal

MACAPÁ - AP

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

511.322
R789l Rosario, Eduardo da Conceição.
Lema de *Zorn*, suas equivalências e aplicações / Eduardo da Conceição Rosario; orientador, Simone de Almeida Delphim Leal. -- Macapá, 2016.
53 p.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Axioma da escolha. 2. Classes de equivalência (Teoria dos conjuntos). I. Leal, Simone de Almeida Delphim, orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

EDUARDO DA CONCEIÇÃO ROSARIO

# LEMA DE ZORN, SUAS EQUIVALÊNCIAS E APLICAÇÕES

**Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá, campus Marco Zero, aprovado pela comissão de professores:**

Prof. Dra. Simone de Almeida Delphim Leal
Orientadora
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof. Dr. Erasmo Senger
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Marcel Lucas Picanço Nascimento
Prof. Msc. Marcel Lucas P. Nascimento
Colegiado de Matemática, UNIFAP

DATA DA AVALIAÇÃO: 31 / 05 / 2016

# Dedicatória

*A Deus, minha família em especial a minha mãe Ivaneide Rosario e minha avó Brigida Teixeira e em memória do meu grande amigo João do Carmo*

# Agradecimentos

Tantos anos passaram e aqui estamos, tantas pessoas para serem lembradas, agradeço esta vitória a Deus pela saúde e motivação em certos momentos do curso, a minha família em especial meus pais Angelo Essias e Ivaneide Rosario, a minha querida avó Brigida Teixeira, aos momentos importantes e únicos aqui vividos até hoje e que não serão esquecidos.

Agradeço em especial a memória do meu amigo João do Carmo, que Deus tinha outros planos para ele mas sei que continua dando muitas risadas conosco, e que sempre levarei no coração pelo amigo que foi para mim, e a Rafaela Goveia Brito pela paciência que teve para comigo e por está ao meu lado em certos momentos difíceis.

Por fim, a minha Orientadora Simone Leal, que não me deixou acomodar, que sempre esteve ali para me estender a mão, pelos puxões de orelha que me dava, pelas risadas e pelos ensinamentos e confiança depositados em mim e por me mostrar um mundo novo que não conhecia.

Aos meus amigos de Graduação que sempre davamos risadas e pelo companherismo de todos para comigo, aos professores da Graduação que me ajudaram sempre tirando minhas dúvidas e pelo carinho com seus alunos.

*Mas há uma outra razão que explica a elevada reputação das Matemáticas, é que elas levam as ciências naturais exatas uma certa proporção de segurança que,sem elas, essas ciências não poderiam obter*

**Albert Einsten**

# Conteúdo

# Notação

Na Teoria dos Conjuntos, a linguagem usada é de forma informal ao ponto de torna-se o de uma conversação. A verdade é que os conceitos são muitos gerais e abstratos e exigem esforço para se acostumarem com eles, na Teoria dos Conjuntos não diferenciamos elementos de conjuntos, para Conjuntos, por exemplo, os elementos podem ser tratados com letras maiúsculas ou minúsculas, o mesmo vale para os conjuntos. Trazemos uma lista de notação que irão surgir no decorrer do trabalho.

$SB \rightarrow$ (Subconjunto de B).

$\{x\} \rightarrow$ Sucessores de um elemento x.

$(\leq) \rightarrow$ Ordenação.

$(A, R) \rightarrow$ Relação de um Conjunto A.

$(B, R') \rightarrow$ Relação induzida em um conjunto B.

$R\{x, y\} \rightarrow$ Relação entre dois elementos.

$\prod_{i \in I} x_i \rightarrow$ Produto dos elementos de $X_i$.

$P(x) \rightarrow$ Partes de um conjuntos X.

$\bigcup C \rightarrow$ União dos elementos de C.

$\ni \rightarrow$ não pertence.

$(X, \leq) \rightarrow$ conjunto X com ordenado.

$(Y', \leq) \rightarrow$ subconjunto Y com uma ordem.

$\preceq \rightarrow$ Símbolo designado para indicar Boa Ordem.

$\bigsqcup \rightarrow$ União.

# Resumo

O Lema de Zorn, é cercado por um mistério em sua história que muitos matemáticos desconhecem, sua importância em ramo matemáticos como Álgebra e Teoria dos Conjuntos nos permitem trazer algumas equivalências que envolvem o Lema de Zorn umas importantes outras nem tanto assim,aqui apresentaremos as equivalências do Lema de Zorn, do Axioma da Escolha e do Princípio de Boa Ordem, e também um pouco sobre o axioma da escolha que é objeto de controvérsias e debates desde o seu surgimento, apesar disto,sua relevância pode ser percebida pela grande quantidade de aplicações e consequências apresentadas sobre a forma de enunciados equivalentes como enunciado por Zermelo, algumas aplicações do Teorema de Zorn são vistos baseando-se que o Lema de Zorn é equivalênte ao Teorema de Zorn.

**Palavras-chave: Axioma da Escolha, Lema de Zorn, Princípio de Boa ordem, Equivalências, Aplicações, Teorema de Zorn**

# Abstract

The Zorn's Lemma, is surrounded by a mystery in its history that many mathematicians are unaware of its importance in mathematical branch as algebra and set theory allow us to bring some equivalences involving Zorn's Lemma are important others not so well, here we present the equivalences between Zorn's Lemma, the axiom of choice and the Principle of Good Order and also a bit on the axiom of choice is the subject of controversy and debate since its inception, despite this, its relevance can be seen by the large amount applications and consequences presented in the form of equivalent statements as enunciated by Zermelo, some applications Zorn theorem are seen banseando that the Zorn's lemma is equivalent to Zorn's theorem.

**Key-words:Axiom of Choice, Zorn's Lemma, Principle of good order, equivalencies, Applications, Theorem Zorn**

# Introdução

Uma vez que hoje muitas pessoas estudam os lemas, axiomas e teoremas sem necessariamente saber de sua história, de como chegou a tal nome, iniciaremos este trabalho esclarecendo um mistério que cerca a origem de um dos Lemas mais conhecidos no mundo matemático. O Lema de Zorn que leva consigo o nome de Max Augustin Zorn este que em 1935 apresentou em trabalho sobre princípios maximais. Mais tarde, uma carta abalou a Sociedade Matemática das Américas, pois a mesma trazia a notícia de que o Lema da Zorn, não possuia o nome de seu verdadeiro descobridor. Nesta busca pelas origens do Lema de Zorn foram encontrados documentos que comprovam além de contribuição de diversos autores o seu uso anterior as pesquisas de Zorn [2].

Segundo [2], o lema conhecido atualmente como "Lema de Zorn"já havia sido citado por outros autores como, Rosser 1953, Cuesta 1955, Fraenkel e Bar-Hillel 1958, Rubin e Rubin 1963, Beth 1964, Semadeni 1968, Jech 1973, Sappers 1960. Muitos desses autores acabaram por estudar o tal Lema de Zorn, a história escondida por trás do nome é que chama atenção, pois Zorn conhecia e já havia ouvido falar de outros estudos sobre o Lema.

Esses supostos trabalhos faziam referencias ou são equivalentes ao Lema de Zorn Isto por que, alguns desses trabalhos por seus autores possuíam equívocos e tinham que ser reajustados. Alguns autores faziam as vezes referências a resultados de outros autores para elaborar denfinições, ou reformular-las. Campbell relata uma forma de linhagem de como o princípio maximal virou Lema de Zorn e chegou à conclusão de que certamente Zorn foi essencialmente antecipado por alguns autores.

Seguindo a linhagem descrita por Campbell, o princípio maximal virou lema de Zorn por volta de 1933, quando Max Zorn que era Professor de uma universidade de Indiana na época e fez um trabalho sobre o princípio do máximo entitulado "uma observação sobre o método de álgebra transfinito", e publicado no boletim da American Mathematical Society em (1935). Entretanto, Hausdorff já havia trabalhado com os princípios maximais, pois ele foi o primeiro a fazer isso, mas Max só tomou conhecimento de tal trabalho em 1976, apesar disto Hausdorff foi o primeiro a chamar o princípio maximal de Lema de Zorn, passou a ser chamado assim depois de sua apresentação nas américas em outubro de 1934 sobre o seu trabalho em álgebra, Max apenas se deixou aceitar a teminação Lema de Zorn, apesar de ter contribuido bastante ele tinha conhecimento das linhagens que o sucederam em alguns resultados [8].

Naquela época, alguns autores faziam referênciais aos seus trabalhos nomeando-os por: M1, M2, M3, princípios Maximais. Kuratowski foi o primeiro a utilizar o Lema de Zorn e ainda hoje podemos ver algumas citações do lema de Zorn, como Lema de Kuratowski-Zorn. Na seuqência demonstrou que o Lema era equivalênte ao Axioma da Escolha.

S.bochner fez um artigo sobre superfícies de Riemann, que foi Chamado por Rubin e Rubin de M1, e estudado por Hausdorff e era tratado com Principio de Zorn ele diz :

M1:Se R é uma relação transitiva em um conjunto não-vazio, que definimos de X e se todo subconjunto de X é linearmente ordenado por R e tem uma parte superior de R ligado a esse subconjunto, então há uma relacão R maximal em um elemento de X.

O trabalho de Rubin e Rubin (1963) foi importante, pois apresenta reformulações do Axioma da Escolha, diferencia vários princípios maximais estudando-os e analisando-os. Alguns dos princípios Maximais são definidos por M3 e M4.

M3: Se todas as classes não vazias, são um subconjunto de um não vazio X, então X tem em sua união um elemento dele próprio, em seguida X tem um elemento máximo.

M4: Se cada classe bem-ordenada, é um subconjunto de um não vazio X, então X tem em sua união um elemento dele mesmo, logo X tem um elemento máximo.

M3 se assemelha com o lema de Zorn que conhecemos hoje em dia e M4 já aparecia em um teorema topológico de 1910, e sua demonstração foi baseada no teorema de boa ordem por alguns autores como: Janiszewski, Mazurkiewicz, Brouwer e Kuratowski[6].

Rubin e Rubin após demonstrarem que o princípio do máximo implicava no axioma da escolha e no teorema de boa-ordem, optaram por não publicar o resultado. Então Max Zorn, chegou a mesma conclusão, aplicou na álgebra o princípio maximal que ficou conhecido como Lema de Zorn.

Zorn tomou conhecimento de vários princípios maximais, como os que Hausdorff formulou, provou e estendeu, a conclusão de Rubin e Rubin chamando de M5 e M6, que dizem:

M6: Para cada conjunto X, existe um subconjunto maximal.

M5:Se R é uma relação transitiva em X, então existe um subconjunto maximal, com X ordenado por R.

Tomando os conhecimentos de alguns maximais existentes, Zorn formulou duas definições que são elas :

**Definição 0.1** *Um conjunto B de conjuntos B é chamado uma cadeia, se para cada dois conjuntos B1, B2, tal que* $B1 \supset B2$ *ou* $B2 \supset B1$*.*

**Definição 0.2** *Um conjunto A de conjuntos A é dito fechado, se contiver a união SB de cada cadeia B contido em A. Então, o nosso princípio maximal é expressado no seguinte formato(PM).*

*Em um sistema fechado, o conjunto A de conjuntos A existe pelo menos um, A* que é o maximal,e não está contido em nenhum subconjunto A.*

A partir de então, com os conhecimentos sobre outros princípios maximais, Zorn passou a estuda-lós antes de chegar a essas definições. O **Lema de Zorn** atual diz o seguinte:

*Seja X um conjunto parcialmente ordenado não vazio tal que cada cadeia em X é limitada superiormente. Então X possui pelo menos um elemento maximal [6].*

Boubaki fez uma formulação que chamou de o Lema Fundamental, afim de discutir sobre o Teorema de Zorn como já eram chamadas as formulações de Zorn que dizia :

*Seja E um conjunto ordenado indutivo. Então é uma aplicação de E em E, tal que, para todo* $x \in E$, $f(x) \geq x$, *existe pelo menos um* $x \in E$ *tal que* $f(x) = x$. O Lema de Zorn surgiu de uma fusão entre o Teorema de Zorn e Lema Fundamental, de Bourbaki que diz:

Seja $E$ um conjunto ordenado indutivo, e $F$ uma aplicação de $E$ em $E$, tal que, para todo $x$ pertence a E, temos que $f(x) = x$, logo existe ao menos um elemento $x$ pertencente a E tal Que $f(x) = x$.

Hoje em dia o Lema de Zorn também conhecido como Teorema de Zorn, é utilizado ainda em análise funcional, topologia, álgebra linear, em especial na teoria dos conjuntos, pois apesar de não se usado tanto para uma construção axiomática da Teoria dos Conjuntos, sem ele não conseguiríamos demonstrar tão fácilmente, o teorema de Hanh-Banach ou que um espaço de Hammel possui uma base.

A teoria dos conjuntos sofreu um grande preconceito quando adicionada ao ensino regular nas escolas, já que a mesma veio com o objetivo de substituir a geometria na época e seu ensino repousa no fato de que hoje é fundamental seu aprendizado nas escolas e não apenas da teoria dos conjuntos mais também da álgebra, já que as duas praticamente caminham juntas [4][3].

Existem equivalências em Teoria dos Conjuntos que são bem conhecidas como, entre o axioma da escolha, Lema de Zorn, teorema da boa ordem e o Teorema de Tychonoff, todos esses são equivalêntes, assim como existem aplicações utilizando o Lema de Zorn na álgebra que são bem conhecidas, como, a sua aplicação na base de Hammel, em Anéis, etc. Nesse trabalho pretende-se mostrar algumas equivalências do Lema de Zorn e quanto o mesmo é importante para a matemática, trazendo também o Axioma da Escolha, que é importante na construção axiomática dos conjuntos. Mesmo não sendo importante nesta área de axiomátização, o Lema de Zorn por sua vez se demonstra importante não apenas na teoria dos conjuntos mas também na área de análise funcional, topologia e álgebra, como já foi dito antes.

# Capítulo 1

# Teoria dos Conjuntos

Nesta seção vamos discutir um pouco de um conceito intuitivo da Teoria dos Conjuntos antes de adentrar na parte axiomática. A Teoria dos Conjutos se iniciou quando em 1870 Georg Cantor estudou a teoria sobre séries infinitas na área de análise, a partir de então, Cantor passou a considerar conjuntos infinitos ou classes. Mas o que são conjuntos? Pela idéia contruida na Teoria dos Conjuntos, pode se dizer que todas entidades estudadas na matemática podem ser consideradas conjuntos onde os objetos desse conjunto são chamados de elementos do conjunto. Surgiram alguns paradoxos, quando Cantor iníciou os estudos, o que nos dá a noção de que o mesmo ainda não poderia formar uma base satisfatória para a Teoria dos Conjuntos sendo assim, durante suas pesquisas Cantor desenvolveu a Teoria dos Números Transfinitos para diferenciar e comparar os vários "tamanhos de infinitos".[10]

Nesta pesquisa consideremos como ponto de partida para o conceito de Conjuntos, a ideia de vários objetos que compartilham de uma propriedade em comum, sendo assim podemos pensar na palavra "Ovelhas", como sendo um grupo que compartilha dessa tal propriedade, podemos extrair dessa ideia a noção de conjuntos e se determinada ovelha não atende a essa propriedade, logo ela não pertece a essa conjunto e não é elemento desse conjunto,o que nos nos remete ao conceito de pertinência e elementos de um conjunto. A noção de Conjuntos pode ser considerada a primeira a se formar nos seres humanos pois parte da ideia de agrupamento ou coleção, apesar disso tal construção não se traduz em uma definição.

Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel formalizaram os conceitos axiomaticos dos conjuntos que hoje é descrita pela sigla ZFC, o "C"vem da palavra inglesa Choice que quer dizer escolha e tem sua relação com o axioma de escolha,já que muitos matemáticos evitam o seu uso. Mesmo Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel terem sido os responsáveis pela parte de axiomatização dos conjuntos, hoje esse feito é atribuido a Jonh Neumann e a partir de então a teoria dos conjuntos e a lógica passaram a segur caminhos diferentes. Na teoria dos conjuntos persiste a ideia e o receio de tratarem do axioma da escolha, mas Zermelo utilizou o axioma para demonstrar que todo conjunto pode ser bem ordenado. Devido a axiomátização feita por Zermelo, podemos agora enunciar de forma um pouco mais precisa os axiomas da Teoria dos Conjuntos.

## 1.1 Axiomatização

Nesta seção trazemos axiomas que serão utilizados no decorrer do trabalho, tendo em vista que Cantor revolucionou a axiomatização e alguns autores como Zermelo e Hausdorff, a estudaram e contribuiram para a axiomatização da teoria dos conjuntos, esses axiomas são de extrema importância para esse trabalho. É tradiconal na matemática o uso da palavra"Família"que nada mais é a idéia de "Conjuntos de Conjuntos"mas na Teoria dos Conjuntos, qualquer conjunto tratamos como um conjunto de conjuntos.

Ernst Zermelo entre (1871-1953) apresentava a primeira axiomatização da Teoria dos Conjuntos, se baseando-se na idéia que os paradoxos surgem quando admitimos que as coleções são muito grandes e que Russell teria razão em suas conclusões em 1906 [10]. A partir daí começaram a surgir os axiomas da teoria dos conjuntos alguns serão citados a seguir.

### 1.1.1 Axioma de Existência

Este axioma nos garante a existência de um conjunto. **O vazio é um conjunto.**

**Axioma 1.1 (Axioma de Existência)** .

*Isto é, existe um* $x$ , *tal que para todo* $y$, *temos que* $y \ni x$, *que é designado pelo símbolo* $\emptyset$.

Nota-se com este axioma que o vazio é um conjunto e que portanto, sempre existirá um conjunto.

### 1.1.2 Axioma de Extensão

O axioma de extensão reestringe Conjuntos semelhantes a um único Conjunto.

**Axioma 1.2 (Axioma de Extensão)** .

*Dois conjuntos são semelhantes se, e somente se, tem os mesmo elementos.*

Em outras palavras queremos dizer que um conjunto fica determinado por seus elementos.

**Teorema 1.1** *Existe um único conjunto vazio*

**Demonstração:** A existêcia de um conjunto vazio já obtemos fácilmente através do axioma de existência, devemos mostrar que se existe $x$ e $y$ conjuntos vazios, esta são iguais.

Suponhamos que $X$ e $Y$ são conjuntos vazios diferentes, logo deve existir um elemento em $X$ que não pertence ao conjunto $Y$, ou deve existir um elemento em $Y$ que não pertence a $X$, Mas pelo Axioma de Extensão temos um contradição, pois ambos são vazios. Portanto existe um único conjunto vazio.

### 1.1.3 Axioma do Infinito

**Axioma 1.3 (Axioma do Infinito)** .

*O axioma do infinito consiste em uma ideia de conjuntos adquirida anteriormente. Existe um conjunto* $X$ *tal que* $\emptyset \in X$ *, que se* $x \in X$ *, então* $x \cup \{x\} \in X$.

**Teorema 1.2** *O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.*

**Demonstração:** Pelo axioma de existência o vazio é um conjunto.

Suponhamos que $X$ e $Y$ são conjuntos, tal que $Y = \emptyset$ e $X$ um conjunto qualquer, Por hipótese , $Y \subset X$ , pelo teorema 3.1 que diz que o vazio é único, para que $Y \subset X$, deve existir um elemento em $Y$ que pertence a $X$ , mas $Y = \emptyset$ logo, o único elemento de

$Y$ que pode pertencer a $X$ é o conjunto vazio. Portanto, O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto. Sendo assim o axioma nos garante a existência de um conjunto infinito que é indutivo, com o qual podemos tentar construi-lo através dos números naturais, que será nada mais nada menos que o próprio conjuntos dos naturais.[10]

### 1.1.4 Axioma da infinidade

A noção de conjunto indutivo é bem distinta da noção de conjunto comum que temos. sendo assim citamos o o axioma de infinidade, que diz que:

**Axioma 1.4 (Axioma da infinidade)** .

*Existe um conjunto indutivo.*

**Observação**: Note que o conjunto indutivo precisa conter o vazio e todos os sucessores a partir do vazio.

# Capítulo 2

# Axioma da Escolha

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos para que o leitor possa de fato compreender o objetivo do trabalho. Defineremos a noção de ordem de um conjunto, como podemos ordenar o conjunto, encontrar um elemento maximal nesse conjunto e, consequentemente, um supremo, se existir. Todos esses conceitos serão repassados daqui em diante [7].

No Ano de 1908 Ernst Zermelo estudava a axiomatização da Teoria dos Conjuntos e foi durante esse estudo que surgiu o Axioma de Escolha, por não ser construtivo, o Axioma foi alvo de muita polêmica e discussão entre os matemáticos da época, pois nos trás a ideia de que temos muitas possibilidades de fazer infinitas escolhas arbitrarias, o que não se pode demonstrar por processos construtivos [10].

## 2.1 Conjunto Parcialmente Ordenado

Graças ao conceito de conjunto parcialmente ordenado, que definiremos por esse símbolo ($\leq$), podemos ordenar os elementos de um conjunto.

Uma ordem parcial em um conjunto $E$ é uma relação $R$ em $E$ que obedece as seguintes relações :

- Reflexiva, isto é, $(a, a) \in R$ para cada $a \in E$.
- Anti-simétrica, isto é, $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ implica que $a = b$.
- Transitiva, isto é, $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ e $(a, c) \in R$ (Tricotomia).

### 2.1.1 Subconjunto de conjuntos ordenados

Da ideia de conjuntos ordenados pode-se aplicar para seus subconjuntos. Seja $B$ um subconjunto de $A$. A ordem parcial $R$ em $A$ induz assim uma ordem parcial $R'$ *em* $B$ do modo natural, como segue:

Se $a, b \in B$ então $(a, b) \in R'$, isto é, $a \leq b$

Como $a, b \in B$ se, e somente se, $(a, b) \in R$, isto é, $(a \leq b)$ também são elementos de $A$, sendo assim, o par ordenado $(B, R')$ é chamado um subconjunto parcialmente ordenado de um conjunto ordenado $(A, R)$.

### 2.1.2 Conjuntos totalmentes ordenados

Desta forma, uma ordem parcial em um conjunto, não necessariamente quer dizer que este conjunto é totalmente ordenado, segue então o conceito para quando um conjunto é totalmente ordenado.

**Definição 2.1** *Uma ordem total num conjunto $A$ é uma ordem parcial em $A$ com a propriedade adicional que*

$$a < b \quad , \quad a = b \quad ou \quad a > b,$$

*para quaisquer elementos $a$ e $b$ pertencentes a $A$. Um conjunto $A$ com uma ordem total especifica é chamado de um conjunto totalmente ordenado.*

Podemos dizer em outras palavras que um conjunto é totalmente ordenado quando podemos fazer uma "comparação"com todos seus elementos.

### 2.1.3 Elemento Maximal

Quando tratamos de elemento maximal, já possuímos o conhecimento de ordem, então temos a seguinte definição:

**Definição 2.2** *Consideremos um conjunto ordenado $A$. Um elemento $a \in A$ é chamado de elemento maximal se $a \leq x_n \Rightarrow a = x_n$, para todo $x_n \in A$*

O que queremos dizer é que $a$ é um elemento maximal se não existir nenhum elemento em $A$ que domine estritamente $a$.

### 2.1.4 Elemento Minimal

Acompanhado de elemento máximo de um conjunto, também temos o minimo desse conjunto, que é definido como:

**Definição 2.3** *Seja A um conjunto ordenado, um elemento* $b \in A$ *é chamado de minimal se* $x_0 \leq b \Rightarrow x_0 = b$*, para todo* $x_0 \in A$

## 2.2 Elemento Supremo

Quando falamos em supremo, isso nos trás a ideia de ser o Maior elemento entre todos os elementos do conjunto a ser tratado. Na definição e no exemplo a seguir vemos que não é bem assim.

**Definição 2.4** *Um número* $b \in \mathbb{R}$ *chama-se* ***supremo*** *do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X. Isto é, b é o supremo de X quando cumpre as seguintes condições:*

1°) *Para qualquer* $x \in X$*, tem-se* $x \leq b$;

2°) *Se* $c \in \mathbb{R}$*, tal que* $x \leq c$ *para qualquer* $x \in X$*, então* $b \leq c$.

**Observação**: *Isso nos diz que nenhum número real menor do que b pode ser cota superior de X. Isto é, Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $x \in X$ *tal que* $b - \varepsilon < x$*, e escrevemos* $\boldsymbol{b = SupX}$

**Exemplo 2.1** *Seja X o conjunto dos pontos de um plano referidos a um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Estabelecendo uma raleção de ordem nos elementos de X, temos que :*

*P de coordenadas* $\epsilon$ *e* $\eta$ *e* $P'$ *de coordenadas* $\epsilon'$ *e* $\eta'$*. Na relação habitual entre os números reais , temos* $\epsilon \geq \epsilon'$ *e* $\eta \geq \eta'$.

*Daí, vemos fácilmente que por exemplo.*

*Dado $A$ o conjunto dos pontos do triângulo retângulo de vértices* $(0,0),(1,0)$ *e* $(0,1)$, *temos que os pontos da hipotenusa são os elementos máximais .*

*Temos que o **SUP** é $Q = (1,1)$ e o conjunto dos pontos da bissetriz do primeiro quadrante é **totalmente ordenado**, o conjunto dos pontos do plano não é totalmene ordenado.*

**Exemplo 2.2** *Seja $W$ o conjunto de todas as figuras de centro na origem e raios menores ou iguais a 1, do espaço $E$.*

*O conjunto $W$ é uma parte do conjunto ordenado pela inclusão $\Im(E)$ e admite, para **supremo** a esfera de centro na origem e raio 1. Como a esfera pertence a $W$ ela é o **elemento maximal** de $W$.*

### 2.2.1 Conjunto Ordenado Indutivo

Este conjunto, por sua vez, é bem mais complexo do que os que conhecemos, mas não com tantas diferenças. Não é tão fácil ver que se o conjunto for totalmente ordenado vai admitir um supremo, no exemplo anterior podemos fazer essa verificação, sendo assim, temos a definição de conjunto ordenado indutivo.

**Definição 2.5** *Um conjunto ordenado $E$ se diz indutivo quando todo subconjunto de $E$, totalmente ordenado, admite um Supremo.*

### 2.2.2 Sucessor

A ideia de sucessão se assemelha a descrita no axioma de Peano.

**Definição 2.6** *Dado um conjunto $X$, definimos $X^+$ como o conjunto de sucessores de $X$.Isto é, para qualquer $y \in X^+$, implica $y \in X$ ou $y = \{X^+\}$.*

**Observação***: Quando um conjunto é fechado pela operação de sucessor e possui o conjunto vazio, este é, nada mais nada menos, que um **conjunto indutivo**, através desta definição.*

Com esses conceitos podemos prosseguir no trabalho, agora dando ênfase maior para o axioma de escolha e lema de Zorn, e suas equivalências.

## 2.3 Axioma da Escolha

Segundo [10], o Axioma da Escolha foi utilizado primeiramente por Ernst Zermelo para auxiliar em sua demonstração de que todo conjunto pode ser bem ordenado. Conhecido hoje como o Princípio de Boa Ordem e que é equivalente ao Axioma da Escolha e ao Lema de Zorn, o Axioma da Escolha difere dos demais Axiomas devido nos trazer a certeza de um conjunto sem precisar contruí-lo. Por não ser construtivo, o Axioma de Escolha é muito questionado por muitos na época, devido às consequências importantes de qual o mesmo derivava e de sua importância na matemática, estando presente não somente na teoria dos conjuntos, mas também na topologia, na álgebra e na ánalise funcional. Sendo assim, em 1930, o Axioma da Escolha passou a se tornar uma forma padrão matemática que por muitos era considerado o Lema de Zorn que conhcemos hoje. Segue uma pequena observação para melhor compreensão do leitor e logo em seguida sua definição:

**Observação 2.1** *Seja $R\{x, y\}$ uma relação entre um elemento genérico $x$ de um conjunto $A$ e um elemento genérico $y$ de um conjunto $B$. As relações*

*"Qualquer que seja $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $R\{x, y\}$" e*

*"existe uma aplicação $f$ de $A$ em $B$ tal que qualquer que seja $x \in A$, $R\{x, f(x)\}$". Essa observação é para a melhor compreensão do Axioma da Escolha*

### 2.3.1 Axioma da Escolha

**Axioma 2.1 (Axioma da Escolha)** *:*

*Se $I$ é um conjunto qualquer de índices e $(x_i)_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos de um conjunto $C$ tal que $x_i \neq \emptyset$ , para qualquer que seja $i \in I$, o produto $\prod_{i\in I} x_i$ não é vazio.[5]*

Por se tratar de um axioma não precisa ser demonstrado[10].

## 2.4 Função Escolha

**Definição 2.7** *Seja $X$ um conjunto infinito, então $f : P(X) - \{\emptyset\} \to X$ é dita uma **função escolha** para o conjunto $X$, se $f(a) \in X$ para todo $a \in P(X) - \{\emptyset\}$.*

O que ocorre na verdade quando utilizamos a função escolha, é que queremos escolher um elemento de cada conjunto da coleção aleatoriamente, por isso se chama "função escolha", pois é uma função que escolhe um elemento de cada subconjunto não vazio.

Existe uma equivalência entre o axioma de escolha e a existência de uma função escolha para todo $X$ [6].

Precisaremos de umas importantes definições para nos auxiliar na demonstração do lema de Zorn, que são as seguintes .

### 2.4.1 Segmento fraco inicial

Essa definição nos servirá de auxílio mais adiante quando formos tratar da demonstração do Lema de Zorn.

**Definição 2.8** *Seja $X$ um conjunto parcialmente ordenado. Para cada $x \in X$, $s(x)$ é chamado de **segmento fraco inicial**, é o conjunto que contém $x$ e seus predecessores.*

### 2.4.2 Cadeia

A ideia de cadeia só pode ser aceita devido a ordem parcial de um conjunto.

**Definição 2.9** *$S$ é uma cadeia se, para todos $y, z \in S$ tivermos $y \leq z$ ou $z \leq y$.*

# Capítulo 3

# Lema de Zorn

Neste capítulo falaremos do Lema de Zorn, dando ênfase na demonstração do mesmo descrita por Halmos [6]. Como já sabemos, o lema é cercado de mistérios devido o seu verdadeiro nome e é também um dos mais importantes lemas na área de análise funcional. Por exemplo, ele está presente na demonstração do teorema de Banach. Mas não é apenas por isso que o mesmo chama tanta atenção, mas sim por suas equivalênciais. O lema de Zorn que conhecemos hoje é escrito da seguinte forma:

**Lema 3.1 (Lema de Zorn)** *: Seja $X$ um conjunto parcialmente ordenado não vazio tal que cada cadeia em $X$ é limitada superiormente. Então $X$ possui pelo menos um elemento maximal.[6]*

A seguinte demonstração foi transcrita e adaptada do Livro de Halmos [6], que atribui a seguinte demonstração a Zermelo.

**Demonstração:**

Antes de começarmos sua demonstração, vamos deixar definido $\overline{X}$.
$\overline{X}$ é o conjunto de todas as cadeias do conjunto $X$ ordenado pela inclusão .
Temos como objetivo mostrar que $\overline{X}$ tem um elemento maximal, isso será o suficiente para mostrar que $X$ tem um elemento maximal, conforme as seguintes etapas.

**ETAPA** 1 : Se $\overline{X}$ possui maximal então $X$ possui um elemento maximal.
De fato, Suponha que $A$ é um Maximal de $\overline{X}$. Temos pela hipótese sobre $X$, que seja $x \in X$ um limitante superior de $A$, isto é $a \leq x$ para todo $a \in A$. Daí, temos que $x \in A$

pois, se $x \ni A$ teríamos que $A \cup \{x\}$ seria uma cadeia e $A$ contendo apenas $A$ e não seria maximal. Vemos que $x$ é maximal em $X$, pois se não fosse existiria um $y \in X$ com $x \neq y$ tal que $x \leq y$ e tereíamos novamente uma cadeia que seria $A \cup \{y\}$ e seria uma cadeia maior que $A$ contradizendo novamente a maximalidade de $A$, Portanto $x$ é maximal em $X$.

Agora devemos mostrar que nossa suposição de que $A$ é maximal em $\overline{X}$ e assim pela etapa 1 concluiremos o lema de zorn.Daí temos a Etapa 2.

**ETAPA** 2 : Se $C$ é uma cadeia em $\overline{X}$ então $\bigcup C \in \overline{X}$.

Como $\bigcup C$ é um subconjunto de $X$. Para mostrarmos isso, é simples basta provarmos que $\bigcup C$ é uma cadeia em $X$. Daí ,

Sejam $a \quad e \quad b$ pertecentes a $\bigcup C$ e sejam $A, B \in C$ tais que $a \in A$ e $b \in B$ . Como $C$ é uma cadeia temos que $A \subset B$ ou $B \subset A$, o que significa que $a, b \in A$ ou $a, b \in B$. Mas como $C \in \overline{X}$,então tanto $A$ quanto $B$ são cadeias, isto é $a \leq b \quad ou \quad b \leq a$.

Seja $f$ uma **função escolha** em $P(X)\backslash\{\emptyset\}$. Definimos uma função $S$, tal que

$S : \overline{X} \rightharpoonup \overline{X}$

Como

$$S(A) = \begin{cases} A \cup f(x \in X\backslash A : A \cup (x) \in \overline{X}), & \text{se A não for maximal} \\ A, & \text{se A for máximal} \end{cases}$$

A função S faz o seguinte :

Se $A$ não é uma cadeia maximal, S estende $A$ a um único elemento . Se $A$ é uma cadeia maximal, $S(A) = A$.

Se $A$ é uma cadeia não maximal, vai existir um $x \ni A$ tal que $A \cup \{x\}$ é uma cadeia não maximal, pois todo subconnunto de uma cadeia é uma cadeia .

Agora devemos mostrar apenas que existe $A \in \overline{X}$ tal que $S(A) = A$ e assim concluiremos a demonstração do Lema de Zorn.

Antes de prosseguirmos com a demonstração do lema, preisaremos de algumas definições. Precisamos da definição de torre para nos ajudar nas próximas etapas.

## TORRE

Dizemos que um subconjunto $T$ de $\overline{X}$ é uma torre se satisfaz as seguintes condições.

$\checkmark \emptyset \in T$

$\checkmark$Se $A \in T$ então $S(A) \in T$.

$\checkmark$Se $C$ é uma cadeia em $(T, \subset)$ então $\bigcup C \in T$

Já notamos claremente que existe pelo menos uma torre que é o $\overline{X}$ é uma. Daí, temos a seguinte definição .

$\overline{X_0}$= $\bigcap$ $T \subset \overline{X}$: $T$ é uma torre

**ETAPA** 3: $\overline{X_0}$ é uma torre e está contida em qualquer outra torre.

Iremos fazer mais adiante que $\overline{X_0}$ é uma torre, vamos fazer apartir de agora algumas demonstrações utilizando uma espécie de indução, onde $S$ vai desempenhar o papel de sucesso. Com a 3° condição de Torre essa tal indução é a aqui mais se aproxima da indução transfinita .

O Objetivo nessa etapa é mostrar que $\overline{X_0}$ é uma cadeia em $\overline{X}$. Daí não teremos dificuldades para mostrar que $\bigcup \overline{X_0}$ é o maximal em $\overline{X}$, isto é $A = \overline{X_0}$, e $\overline{X_0}$ é uma cadeia em $X$ que não está contida em nenhuma outra cadeia,com isso e pela afirmação 1 provaremos o Lema de Zorn.

Dizemos que um elemento $C$ de $\overline{X_0}$ é comparável se, para todo $A \in \overline{X_0}$, temos $A \subset C$ ou $C \subset A$.

Mostrar que $\overline{X_0}$ é uma cadeia, é o mesmo que mostrar que todos os elementos de $\overline{X_0}$ são comparáveis. Daí temos uma última definição.

Uma função $g : \overline{X_0} \mapsto P(\overline{X_0})$ Dada por

$$g(C) = \{A \in \overline{X_0} : (A \subset C) \vee (s(C) \subset A)\}$$

Agora, devemos verificar se o elemento $C$ de $\overline{X_0}$ é comparável, partimos para a etapa 4.

**ETAPA** 4: Se $C$ é comparável então $g(C) = \overline{X_0}$.

Como já havia sido dito, vamos usar uma espécie de indução onde $S$ desempenha o papel de sucessor. Precisamos mostrar que $g(C)$ é uma torre e da etapa 3 teremos que

$g(C) = \overline{X_0}$.

- $\emptyset \in g(C)$

  Claramente vemos que $\emptyset \in g(C)$, pois $\emptyset \subset C$.

- Se $S$ é uma cadeia em $g(C)$ então $\bigcup S \in g(C)$ Temos que : ou todo $A \in S$ está contido em $C$ ou existe pelo menos um $A \in S$ tal que $s(C) \subset A$. No primeiro caso, temos que $\bigcup S \subset C$ e , portanto, $\bigcup S \in g(C)$.

  No segundo caso, como $A \subset \bigcup S$, temos $s(C) \subset \bigcup S$ e novamente, $\bigcup S \in g(C)$. Portanto $S$ é uma cadeia em $g(C)$ e $\bigcup S \in g(C)$. Para mostrarmos que $g(C)$ é uma torre basta apenas mostrar um último item.

- Se $A \in s(C)$ então $S(A) \in g(C)$.

  Se $A \in g(C)$, temos três casos.

  Primeiro $A = C$

  Temos $S(A) = s(c)$ em paticular temos que $s(C) \subset S(A)$, o que nos prova que $S(A) \in g(C)$.

  Segundo caso ($A$ está contido propriamente em $C$).

  Nesse caso, suponhamos que $A$ está contido em $C$ . Como $C$ é comparável, emos que $C \subset S(A)$ ou $S(A) \subset C$. Se $A \subset C$ temos $S(A) \in g(C)$. Assumimos que $C \subset S(A)$.

  Se $C = S(A)$ caimos no caso de que $S(A) \subset C$

  Se $C \neq S(A)$ existe $y \in C \backslash A$. Portanto $x$ e $y$ são elementos distintos( pois $x \in C$ e $y$ não, ou $y \in C$ e $x$ não)de $S(A) \backslash A$ , contradizendo que $S(A)$ tem no máximo um elemento que não pertece a $A$.

  Terceiro caso ($s(C) \subset A$).

  no nosso terceiro caso, se $s(C) \subset A$, como $A \subset S(A)$temos que $s(C) \subset S(A)$, o que nos dá $S(A) \in g(C)$

  Sendo assim concluimos que $C$ é comparável e que $g(C) = \overline{X_0}$ e $\overline{X_0}$ é uma torre .

Agora devemos mostrar que $\overline{X_0}$ é uma cadeia em $\overline{X}$

**ETAPA** 5:$\overline{X_0}$ é uma cadeia e, $\overline{X}$.

Vamos provar a afirmação dessa etapa por "Indução"que todo elemento de $\overline{X_0}$ é comparável . Isto é, mostraremos que o conjunto dos elementos comparáveis de $\overline{X_0}$ é uma torre e coincidirá que todo o conjunto $\overline{X_0}$ é comparável.

Seja $A \in \overline{X_0}$ temos,

Como $\emptyset \subset A$, para todo $A$, temos que $\emptyset$ é comparável.

Seja $S$ uma cadeia em $\overline{X_0}$ formada pelos elementos comparáveis. Mostraremos que $\bigcup S$ é comparável de fato.

Temos que $A \in \overline{X_0}$. Se existe um $C \in S$ tal que $A \subset C$,daí temos que $A \subset \bigcup S$, caso contrário como todo elemento de $S$ é comparável teríamos $C \subset A$, para todo $C \in S$ , o que nos garante que $\bigcup S \subset A$ .

Falta Mostrar que , se $C$ é comparável então $S(C)$ é comparável.

Como $A \in \overline{X_0}$. Pela Etapa (4), temos que $A \in g(C)$, pois ou $A \subset C$ ou $S(C) \subset A$.

Como $C \subset S(C)$, temos $A \subset S(C)$ ou $S(C) \subset A$, logo $C$ é comparável e o conjunto dos elementos de $\overline{X_0}$ e uma torre e $\overline{X_0}$ é uma cadeia em $\overline{X}$.

Agora basta mostrarmos que $\bigcup \overline{X_0}$ é máximal em $\overline{X}$ e assim concluimos a demonstração.

**ETAPA** 6: $\bigcup \overline{X_0}$ é maximal em $\overline{X}$. Seja $C = \bigcup \overline{X_0}$. Devemos provar que $S(C) = C$. Já temos que $\overline{X_0}$ é uma cadeia pela etapa 5, temos também que $\overline{X_0}$ é um atorre pela etapa 3 e que $C \in \overline{X_0}$ e $S(C) \in \overline{X_0}$ pela etapa 3 também.

Como $S(C) \in \overline{X_0}$, então podemos concluir que $S(C) \subset \bigcup \overline{X_0}$. Isto é, $S(C) \subset C$.

Como $C \subset S(C)$ concluimos que $S(C) = C$. Pela etap 1 $\overline{X}$ tem maximal que é $\bigcup \overline{X_0}$ e pela nossa suposição em 1 $\bigcup \overline{X_0} = A$.

Portanto, como $\overline{X}$ tem maximal $X$ também possui maximal e assim é válida a etapa (1) e concluimos aqui a demonstração do lema de Zorn .

Assim finalizamos a demonstração do Lema de Zorn. O Lema de Zorn tem uma grande proximação com o Teorema de Zorn que será descrito nos próximos capítulos, muitos confundem os dois, com razão, já que os mesmos têm praticamente o mesmo.

Sendo assim, considerando a demonstração acima, partimos para a equivalência do Lema de Zorn e Axioma de Escolha.

## 3.1 Equivalência entre o Axioma da Escolha e o Lema de Zorn

O axioma da escolha tem suas peculiaridade de afirmar que determinado conjunto existe,(ou não existe), mas não dá nenhuma informação sobre como este conjunto pode ser construído e por isso foi rejeitado por diversos matemáticos que apresentaram resultados e formas equivalentes aparentemente de mais fácil manuseio. Dentre estas formas encontram-se o Lema de Zorn [5]. Essa equivalência é de grande importância para a matemática e principalmente para a Teoria dos Conjuntos, sendo assim, trazemos o Axioma da Escolha novamente para melhor compreensão do leitor.

**Axioma 3.1 (Axioma da Escolha)** *:*

*Se $I$ é um conjunto qualquer de índices e $(x_i)_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos de um conjunto $C$ tal que $x_i \neq \emptyset$ , para qualquer que seja $i \in I$, o produto $\prod_{i\in I} x_i$ não é vazio.[5]*

### Demonstração da Equivalência

Para a demonstração, Considera-se Um conjunto qualquer onde tem-se um conjunto de funções escolhas neste conjunto[5].

Seja $X$ um conjunto e $F$ um conjunto de funções de subconjuntos $P(X)$ em $X$, sendo $F = \{f : D \to X\}$, tal que o domínio de f $= D \in P(X)$. Consideremos $A$ um subconjunto de $D$, e para todo $A \in D \Rightarrow f(A) \in A$,assim a imagem de $f \subset X$ e como $P(X) \subset X$ e o domínio de $f \subset P(X)$, temos que a imagem de f pertece ao conjunto do domínio $D$, isto é, imagem de $f \in D$.

Suponhamos que $F$ e $D$ sejam parcialmente ordenados $(\leq)$, assim $\{f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots \leq f_n\} \in F$ e $\{d_1 \subseteq d_2 \subseteq d_3 \subseteq \cdots \subseteq d_n\} \in D$, daí tomando $d_1$ como o domínio de $f_1$ e assim sucessivamente, se e somente se,$\{f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots \leq f_n\}$ e $\{d_1 \subseteq d_2 \subseteq d_3 \subseteq \cdots \subseteq d_n\}$,

sendo assim, temos $\{\frac{f_2}{d_1} = f_1, \cdots, \frac{f_n}{d_n - 1} = f_{n-1}\}$. Agora ordenando por extensão $F$, temos que $f_3 \subseteq f_2$ e assim por diante, como $F$ e $D$ são ordenados parcialmente $(\leq)$, claramente percebemos que $f_1 \leq f_1$ e $d_1 \subseteq d_1$ o que implica $\{\frac{f_2}{d_1} = f_1, \cdots, \frac{f_n}{d_n - 1} = f_{n-1}\}$, pois é a propriedade Reflexiva,sendo assim $F$ e $D$ possuem também a anti-simétrica $f_3 \leq f_4 \Rightarrow f_4 \leq f_3$ e $d_3 \subseteq d_4 \Rightarrow d_4 \subseteq d_3$, o que os garante $d_3 = d_4$ e $f_3 = f_4$, podemos perceber que as funções de $F$ podem ter o mesmo domínio, pela transitividade, temos $f_3 \leq f_4 \Rightarrow f_4 \leq f_5$ e $d_3 \subseteq d_4 \Rightarrow d_4 \subseteq d_5$, logo $\{\frac{f_3}{d_1} = f_1, \cdots, \frac{f_n}{d_1} = f_1\}$ e assim, $F$ e $D$ são ordenados.
Agora vamos provar que a validade do lema de Zorn implica no Axima da Escolha.

Tomando uma cadeia $Z$, tal que $Z = \{f_i\}_{i \in \delta}$, daí como $Z$ é uma cadeia em $F$, temos $f_i : D_i \to X$ e $D_i \in P(X)$ como vimos no inicio dessa demonstração, e para qualquer que seja $A \in D_i$, $f(A) \in A$, pela ordem parcial $D_j = \bigcup_{i \in \delta} D_i$, podemos definir uma função $f$ tal que $f_j : D_j \to X$, pois $D_i \subseteq D_j$ para todo $i$, como $A \in D_i$ logo $A \in D_j = \bigcup_{i \in \delta} D_i$, daí deve existir um $i_0$ em $\delta$ em que $A \in D_{i_0}$ e pela $(\leq)$ $f_j(A) = f_{i_0}(A) \in A$ e $f_{i_0} \leq f_j$ para qualquer $i \in \delta$, logo $f_j$ é uma limitante superior em $Z$ e pelo lema de Zorn, existe $f_m$ em $F$ que é o elemento maximal e o dominío de $f_m \subset P(X)$. Sendo assim, suponhamos uma função escolha onde $D_m \neq P(X) - \{\emptyset\}$, assim $A_m$ deve pertencer a $P(X)$ tal que $A_m \notin D_m$, logo temos a função

$$f_\alpha(A) = \begin{cases} f_m, & \text{se} \quad A_m \in D_m \\ \lambda, & \text{se} \quad \lambda \in A_m \quad e \quad A \in A_m - D_m \end{cases}$$

Definimos $D_\alpha = D_m \cup \{A_m\}$ e $D_m \subset D_\alpha$, a função escolha estende $A$, a um único elemento se $f_m$ não for maximal, e se $f_m$ for maximal, então $A_m \in D_m$, como $D_\alpha = D_m \cup \{A_m\}$, teríamos que $f_m < f_\alpha$, o que contradiz o lema de Zorn, sendo assim $D_m = P(X) - \{\emptyset\}$ e $F$ é o conjunto de funções $\{f : P(X) - \{\emptyset\} \to X\}$,tal que para todo $A \in P(X) - \{\emptyset\}$, teremos $f(A) \in A$. Portanto, o Axioma de escolha e o Lema de Zorn são equivalentes.

# Capítulo 4

# Princípio da Boa Ordem

O Princípio foi descrito e provado por Zermelo com o auxílio do Axioma da Escolha.

Neste capítulo demonstraremos este Prncípio utilizando o Lema de Zorn devido a sua equivalência com ambos.

**Princípio da Boa Ordem**: Para todo conjunto $X$ existe uma relação $\leq$ tal que $(X, \leq)$ é uma boa ordem. [6]

**Demonstração:**

O lema de Zorn é aplicado, tomando $Y$ como elemento maximal de essa ordem, se $Y$ não for maximal em $X$, chegaremos a uma contradição de maximalidade de $Y$.

Temos que o domínio desse teorema é formado pelos conjuntos bem ordenados $(Y, \leq)$, tal que $Y \subset X$.

Seja $\overline{X}$ o conjunto de todos os conjuntos bem ordenados$(Y, \leq)$ . Daí, seja $S$ uma cadeia em $\overline{X}$ , temos a seguinte afirmação.

**Afirmação** : $(Y, \leq) \in \overline{X}$ é um limitante superior de $S$

Devemos primeiro verificar se $\leq$ é uma relação de ordem em $X$. Como temos que $S$ é uma cadeia, daí dados $x, y, z \in Y$ existe $(Y', \leq') \in S$ , tal que $x, y, z \in Y'$ e para qualquer $u, v \in Y'$, teremos $u \leq v$ se, e somente se $v \leq u$. Portanto a relação $\leq$ é uma relação de ordem.

Agora devemos verificar se é uma relação de boa ordem.

Suponha que $Z \subset Y$ um conjunto não-vazio . Logo, existe $(Y_1, \leq_1) \in S$, tal que

$Z \cap Y_1 \neq \emptyset$, por hipotese, temos que existe $z \in Z \cap Y_1$ que é o minímo, em relação a ordem $\leq_1$.

Devemos mostrar que $z$ é o minímo em $Z$ também, em relação a ordem $\leq$

Suponhamos, por absurdo, que existe $w \in Z$ tal que $w \neq z$ e $w < z$. Como $z$ é o minímo em $Z \cap Y_1$, logo $w \ni Y_1$, tomemos $(Y_2, \leq_2)$ tal que $w \in Y_2$. Como $S$ é uma cadeia vale dizer $(Y_2, \leq_2) \preceq (Y_1, \leq_1)$ ou $(Y_1, \leq_1) \preceq (Y_2, \leq_2)$, no primeiro caso não é válido, pois $w \in Y_2 \backslash Y_1$.

Já no segundo caso, temos $(Y_1, \leq_1) \preceq (Y_2, \leq_2)$. Da terceira condição de ordem $\leq$ que é a **trasitividade**, segue que $z \leq_2 w$. Mas, como $w \leq z$ da definição de relação de ordem, como $S$ é uma cadeia e da relação de **Simetria**, segue que $w \leq_2 z$, logo como $w \in Z$ e $z \in Z$, vale $z \leq_2 w$ ou $w \leq_2 z$, como $w \in Y_2 \backslash Y_1$, então $z \in Y_2 \backslash Y_1$. Portanto $w \subset z$ ou $z \subset w$, logo $w = z$. Contradizendo a hipotese e validando assim nossa afirmação.

Agora, aplicaremos o lema de zorn para obtermos $(Y, \leq)$ é o maximal em $\overline{X}$. O que falta para a conclusão do teorema é mostrar que $Y = X$.

Suponha que $Y \neq X$. Tomemos $x \in X \backslash Y$.

Consideremos $Y' = Y \cup \{x\}$ e definindo uma ordem $\leq'$ em $Y'$, daí vale a condição $Y \leq X$ para todo $y \in Y$. Isto é $\leq' = \leq \cup \{(y, x) : y \in Y\}$ , claramente $(Y', \leq')$ é um conjunto bem ordenado e diferente de $(Y, \leq)$ e tal que $(Y, \leq) \preceq (Y', \leq')$, contradizendo a máximalidade de $(Y', \leq')$.

Finalizamos aqui a demonstração desse importante teorema, vemos que é um exemplo também de como aplicar **o Lema de Zorn** e de que sua equivalência já pode ser considerada válida.

## 4.1 Equivalência Entre o Axioma da Escolha e o Príncipio da Boa Ordem

Nesta seção será demonstrado a equivalência do Axioma de Escolha e o Princípio de Boa ordem. Devido o axioma de escolha ser utilizado por Zermelo na demonstração do teorema, podemos ter uma fácil noção de que eles de fato vão ser equivalentes. Mas segue a demonstração [10].

**Demonstração:** Seja $A$ um conjunto qualquer dado e seja $A_\gamma$ subconjuntos de $A$ não vazios, então temos que o produto de $A_\gamma$ é definido como uma função escolha $f : J \to \bigcup_{j \in J} A_\gamma$ , tal que $f(\gamma) \in A_\gamma$, e como $\bigcup_{j \in J} A_\gamma$ é um conjunto pelo príncipio de boa ordem é um conjunto bem ordenado.

Agora, definimos o seguinte:

$f(\gamma) = \min\{A_\gamma\}$, onde $\min\{A_\gamma\}$ é o menor elemento do subconjunto $\min\{A_\gamma\}$ que existe por que ele é um subconjunto de um conjunto ordenado e portanto por definição de subconjunto ordenado ele é um bem ordenado.

Como a função $f$ é uma função escolha, isso quer dizer que para o produto cartesiano de conjuntos não vazios, teremos algo não vazio, pois o **axioma da escolha** garante isso e o menor elemento sempre existe.

Vamos ver a seguir algumas aplicações do Teorema de Zorn descrito no início do trabalho.

# Capítulo 5

# Aplicações

O teorema de Zorn tem quase a mesma função do Lema de Zorn, sendo que a diferença entre eles é que o, teorema trata com conjunto indutivo e o lema de Zorn com um conjunto ordenado e que admite maximal. O teorema foi citado por Boubaki no ínicio do trabalho.

## 5.1 Teorema de Zorn

Neste seção trazemos o Teorema de Zorn que é equivalente ao Lema de Zorn e por consequência, é equivalente também ao Axioma da Escolha e Princípio da Boa Ordem. Segue o Teorema sendo sua demonstração bem simples.[9]

**Teorema 5.1 (Teorema de Zorn)** *Seja $E$ um conjunto ordenado indutivo. Então é uma aplicação de $E$ em $E$, tal que, para todo $x \in E$, $f(x) \geq x$, existe pelo menos um $x \in E$ tal que $f(x) = x$.*

**Demonstração:**

Temos que para cada $x \in E$ façamos corresponder o conjunto $H_x$ definido da seguinte maneira.

$H_x = \{y\}_{y>x}$ $(y \in E)$, se existe $Y \in E$ tal que $y > x$.

$H_x = \{x\}_{x>y}$, se não existir $Y \in E$ tal que $y > x$

Como qualquer $x \in E$, então $H_x \neq \emptyset$, podemos afirmar, virtude do axioma de escolha a existência de uma aplicação $f : E \mapsto E$, tal que qualquer que seja $x \in E$, $f(x) \geq x$, para qualquer $x \in E$.

Portanto pelo lema de Zorn, existe pelo menos um $X = a$ tal que $f(a) = a$.

Sendo este $X = a$ o elemento maximal, pois $f(a) \in H_x$ e daí $f(a) = a$, donde temos $H_b = \{a\}$. Logo não existe um elemento $y \in E$, tal que $y > a$.

Portanto $a$ é o elemnto maximal e assim finalizamos aqui a demonstração do teorema de Zorn.

O Teorema de Zorn possui muitos enuciados,portanto apresenta-se uma de suas formas para nos auxiliar na aplicação do teorema em espaço de Hilbert H:

*Seja $P$ uma propriedade comum a certos subconjuntos finitos de um conjunto $X$. Existe, em $X$, pelo menos um subconjunto maximal $M$ tal que toda parte finita de $M$ goza da propriedade $P$, sendo assim não existe em $X$ nenhum subconjunto $N$, cuja as suas partes finitas goxem da propriedade $P$.[2]*

**Demonstração:** Seja $F$ a família de subconjuntos $C$ de $X$ tal que toda parte finita de cada conjunto $C$ de $F$ goza da propriedade $P$ e seja $F'$, totalmente ordenada pela relação de inclusão em $F$. A união dos conjuntos de $F' \in F$, pois, dada uma parte qualquer finita $B$ da união dos conjuntos de $F'$ e designado por $a_1, a_2, \cdots, a_n$ os elementos de $B$, existirão $n$ conjuntos $c_1, c_2, \cdots, c_n$ , todos da família $F'$, tal que $a_i \in C_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ ; Como $F'$ é totalmente ordenada, um dos conjuntos $C_i = (i = 1, \cdots, n)$ , digamos $C_k(1 \leq k \leq n)$, vai conter um dos $C_i$ onde $B \subset C_k$, o que nos permite dizer que $B$ goza da propriedade $P$ e portanto a união dos conjuntos de $F' \in F$. A família $F$ é um conjunto indutivo e pelo lema de zorn possui um maximal.

## 5.2 Aplicação 1

O Lema de Zorn é uma das ferramentas mais importantes que temos, junto com o axioma de escolha, o lema de zorn é aplicado no Teorema da Base de Hammel[1], a fim de encontrar-mos um elemento maximal, tal que para todo $e$, sendo $e$ uma Base do Espaço Vetorial $V$, possa ser escrito como combinação linear dos elementos desse máximo, que é dado pelo Lema de Zorn.

Considerando que a álgebra linear é uma parte da matemática usada por interessados nas mais diversas ciências exatas como engenharia, física, programação e, ainda mais sua importância não se restrinje á área de exatas, atingindo também questões da atualidade como sistemas ligados á biologia, podemos conceber a sua relevância para o desenvolvimento de várias ciências. Essa importância nos conduziu na escolha da aplicação a ser apresentada que trata de um dos conceitos mais primitivos de espaços vetoriais de dimensão finita.[2]

**Definição 5.1** *(Base de Hammel). Todo espaço vetorial admite uma base de Hammel.[2]*

**Demonstração:**

Considerando $B$ o conjunto, cuja seus elementos são subconjuntos de vetores LI de $V$. Podemos notar que $B$ não é vazio, pois se $v \in V$, onde $V$ é o espaço vetorial, então $V$ é nulo pois o conjunto formado por $\{v\}$ é LI.

Agora vamos considerar a relação de ordem dada pela inclusão de conjuntos de em $B$, isto é, $C \leq D$, se $C \subseteq D$.

Suponhamos que $\{I_{n,n\in\mathbb{N}}\}$ seja uma cadeia em $B$, então $\bigsqcup I_n \in B$ pois dado um conjunto finito $\{e_1, \cdots, e_n\} \subset \bigsqcup I_n$, então existe $I_{n0}$ tal que

$$\{e_1, \cdots, e_n\} \subset I_{n0}$$

Como $I_{n0}$ é formado por vetores LI, podemos concluir que $\bigsqcup I_n$ é um conjunto de vetores LI. Pelo Lema de Zorn, existe um elemento em $B$ que é o máximo $I_n$. Afirmamos que $I_n$ é uma base de Hammel, efetivamente.

Dado $e$ não pertencente a $I_n$, suponha que para qualquer combinação linear da forma

$$ke + k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n = 0$$

Como $\{e_1, \cdots, e_n\} \subset I_m$, teremos $k = 0$. Então como $\{e_1, .., e_n\}$ são vetores Li, teremos $k = k_i = 0$, onde $i \in \{1, \cdots, n\}$, e consequentemente $I_n \bigsqcup \{e\}$ seria LI. o que contradiz o fato de $I_n$ ser elemento maximal. Portanto existe $e_1 \cdots, e_n \in I_n$ e $k, k_1, \cdots, k_n$ com $k \neq 0$, tal que

$$ke + k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n = 0$$

Temos

$$e = \frac{-k_1}{k}e_1 - \cdots \frac{-k_n}{K}e_n$$

Isso mostra que todo elemento de $e$ de $V$ pode ser escrito como combinação linear de elementos de $I_n$(do máximo),sendo assim teremos sempre uma Base de Hammel para cada espaço vetorial.

Esse é uma aplicação bem clássica do **Lema de Zorn**, automaticamente, é um exemplo de aplicação do Axioma da Escolha.

O Lema de Zorn, o Axioma de escolha e o Príncipio de Boa Ordem são equivalentes, logo podemos ver que o Teorema de Zorn é apenas a equivalência deles.

## 5.3 Aplicação 2

A aplicação do **Teorema de Zorn** em anéis de identidade ocorre da seguinte forma,como $F = \{I \ni R\}$ e sendo um ideal , e $F$ por ser ordenado pela relação de inclusão, adicionamos uma cadeia $C$ de ideais assim, pertencentes a $F$. Daí a cadeia $C$ é o ideal máximal graças ao **Teorema de Zorn** podemos ver na demonstração a existência de ideais maximais num anel de identidade.[2]

O Teorema de zorn é importante na demonstração, pois sem ele não é possível encontrar ideais maximais e assim invalida o teorema na área da álgebra.

**Teorema 5.2** *Existe ideais maximais num anel identidade.*

**Demonstração:**

Seja $R$ um anel com unidade não vazio e $F = \{I \ni R\}$ e $I$ é um ideal . Vemos claramente que $F \neq \emptyset$ , pois $\{0\} \in F$, e note que podemos ordenar $F$ por inclusão. Daí, seja $C = \{I_\alpha : \alpha \in J\}$ uma cadeia de ideais em $F$.

Agora, devemos verificar se $\bigcup_{\alpha \in J} I_\alpha$ é maximal, sabemos que $C \subset \bigcup_{\alpha \in J} I_\alpha$, mesmo a união de ideais não garantindo que $\bigcup_{\alpha \in J} I_\alpha$ seja um ideal, em geral, por $C$ ser um cadeia, sabemos que o nosso candidato a máximal é um ideal. Além disso, $\bigcup_{\alpha \in J} I_\alpha \neq R$ , caso contrário $x \in R$ tal que $x \in \bigcup_{\alpha \in J} I_\alpha \Rightarrow \exists \alpha \in J : x \in I_\alpha \Rightarrow I_\alpha = R$, o que contradiz $F$. Logo, pelo **Teorema de Zorn** é garantido a existência de um elemento máximal de $F$, chamaremos $M$, e $M$ é um ideal Máximal de $R$.

## 5.4 Aplicação 3

A aplicação do **Axioma da escolha** ocorre aqui na área da análise, onde muitas pessoas mesmo desconhecendo, estão aplicando o Axima da Escolha, nesse teorema ele ocorre da seguinte forma:

Sabemos que cada $X_i$ pode ser enumerado, mas sabemos também que para cada $X_i$ existem infinitas enumerações e nesse ponto devemos escolher, para cada $i \in \mathbb{N}$, uma das possíveis enumerações de $X_i$, isto é, podemos fazer infinitas escolhas.[4]

**Teorema 5.3** *A união de conjuntos enumeráveis é um enumerável.*

**Demonstração:** Seja $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma coleção de conjuntos enumeráveis, ou seja, para cada $i \in \mathbb{N}$, temos $X_i = \{X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{in}, \cdots\}$, logo podemos enumerar o conjunto

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = \{X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, \cdots\}$$

Daí, podemos construir uma ordem dos pares ordenados de numeros naturais, por exemplo $(a, b) \leq (c, d)$, se $a + b \leq c + d$ ou, caso $a + b = c + d$, se $a \leq b$. É bem sutil a utilização do axioma da escolha, ela se deu da seguinte forma. sabemos que cada $X_i$ pode ser enumerado, mas para cada $X_i$ existem infinitas enumerações, sendo assim, devemos escolher para cada $i \in \mathbb{N}$, uma das possíveis enumerações de $X_i$, logo devemos fazer um número infinito de escolhas. Não podemos fazer outra demonstração sem o Axima da Escolha, pois está demonstração parte do Sistema Axiomático de Zermelo e pode-se dizer que, sem o Axioma da Escolha não podemos nem mostrar que o Conjunto dos números reais é enumerável [9].

## 5.5 Aplicação 4

Definiremos o **Espaço de Hilbert H** para uma melhor compreensão do leitor de como é aplicado o **Teorema de Zorn** nele [9].

### 5.5.1 Espaço De Hilbert H

**Definição 5.2** *Um Espaço vetorial com o produto interno $< .,. >$ é denominado pré-hilbertiano quando temos:*

$$< \alpha u, v >= \alpha < u, v >$$

*e também*

$$< u, v >= \overline{< u, v >}$$

*Quando o espaço Pré-hilbertiano é completo, ou seja, quando as sucessões de Cauchy convegem no espaço pré-hilbertiano, chamamos de **Espaço de Hilbert H**.[4]*

O espaço de Hilbert por admitir uma base ortonormada enumerável, temos que o **Axioma de Escolha** age nessa base, pois podemos fazer infinitas escolhas para esta base como foi vista na **aplicação 3**. O Teorema de Zorn é aplicado para que possamos encontrar uma um sistema ortonormal completo,isto é, um maximal em um espaço de Hilbert, isso nos dá uma noção de que o espaço de Hilbert é limitado, isso pode facilitar de modo que o leitor saiba que num espaço de Hilbert obtemos um máximal pelo Teorema de zorn para subconjuntos finitos de um conjnto.[2]

Sem o Axioma de escolha não podemos escolher uma base enumerável no espaço de Hilbert e por consequência, sem o Teorema de Zorn para subconjuntos finitos de um conjunto não é possivél encontrar um sistema ortonormal completo, isto é, não encontraríamos um máximal. Daí o espaço de Hilbert não teria um sitema ortonormal completo.

**O espaço de Hilbert H** é separável se admite uma base ortonormada numerável, assim **o Axioma da Escolha** age nessa base, como foi visto no exemplo acima de **Aplicação do Axioma da Escolha**.[2]

### 5.5.2 Sistema Ortonormal Completo

**Definição 5.3** *Seja $S$ um sistema ortonormal, $S$ se diz completo, se dado um conjunto $C$ de todas as combinações lineares dos elementos de $S$ é totalmente denso em $H$.*

*$S$ é totalmente denso em $H$, se todo conjunto aberto de $H$ contém pelo menos um elemento de $C$.*

**Aplicando o Teorema de Zorn** podemos dizer que:

**Num espaço de Hilbert H qualquer existe, sempre, pelo menos um sistema ortonormal completo, isto é, um maximal**.[2]

**Demonstração:** Consideremos os subconjuntos finitos de $H$, tal que cada um dos subconjuntos finitos é um sistema ortonormal. Daí, pela propriedade $P$ do enuciado do **Teorema de Zorn** que diz: Seja $P$ uma propriedade comum a certos subconjuntos finitos de um conjunto $X$. Existe, em $X$, pelo menos um subconjunto maximal $M$ tal que toda parte finita de $M$ goza da propriedade $P$, sendo assim não existe em $X$ nenhum subconjunto $N$, cuja as suas partes finitas gozem da propriedade $P$.

Então, teremos um maximal em $H$, em outras palavras, teremos um sistema ortonormal Completo (Maximal).

# Conclusão

Sendo assim, finalizamos as aplicações, todos os Teoremas foram tomados como verdade neste trabalho, o Lema de Zorn e Axioma da escolha continuam até hoje sendo ferramentas importantes na matemática e continuará pois como visto neste trabalho, o axioma da escolha pode ser considerado o suporte para a Teoria dos conjuntos.

Foram apresetendos neste trabalho o Lema de Zorn, suas aplicações e equivalências e também um pouco sobre o Axioma de escolha que caminha lado a lado com o Lema de Zorn e O Princípio da Boa Ordem. Os instrumentos necessário para as demonstrações foram a axiomatização de Zermelo-Fraenkel, alguns resultados sobre conjuntos ordenados e resultados da àlgebra. Devido a sua importância, o Lema de Zorn é considerado com um dos principais lemas matemáticos, estando presente em vários ramos matemáticos, como podemos perceber neste trabalho.

O interesse deste trabalho é dá ênfase ao Lema de Zorn, trazendo consigo o Axioma da Escolha e o Princípio da Boa Ordenação. É quase que impossível falarmos de um sem falar dos outros. As equivalênciais não nos permitem esse privilégio, ou melhor, não nos deixam cometer esse erro. Por se tratar de assuntos não vistos em uma gradução matemática é fato de que aparecam algumas perguntas sobre o assunto, como : Por que não são vistos na Graduação? Deveríamos estudar isso na Graduação?. O fato é que esses assuntos são vistos na graduação de forma muito implícita quando estudamos enumerabilidade na análise, anéis, topologia, álgebra. Infelizmente, não vemos eles de forma tão explícita, pois seria de grande importância para os alunos de graduação. Mas são vistos mais a fundo nos cursos de mestrado e doutorado.

# Anexos

## Espaço Vetorial

**Definição:** Um espaço vetorial real é um conjunto, não vazio com duas operações que são : Soma e Multiplicação por um escalar, $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad e \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad e \quad x \in V$ tal que $\alpha x$. Para ser espaço vetorial, precisa atender a algumas propriedades.

1. $(U + V) + W = U + (V + W)$;
2. $U + V = V + U$;
3. Existe $0 \in V \quad tal \quad que \quad U + 0 = U$, (0 é o vetor nulo);
4. Existe $-U \in V \quad tal \quad que \quad U + (-U) = 0$;
5. $a(u + v) = au + av$;
6. $(a + b)v = av + av$;
7. $(ab)v = a(bv)$;
8. $1u = u$.

## Subespaço de um espaço vetorial

**Definição:** Dado um espaço vetorial $V$, um subconjunto $W$ não vazio, será subespaço se:

- $0 \in W$;

- $\forall u, v \in W \quad tivermos \quad u + v \in W$;
- $\forall a \in \mathbb{R}, u \in W \quad tal \quad que \quad au \in W$.

**Proposição:** Todo subespaço vetorial é um espaço vetorial.

**Demonstração:** Dado $V$ um espaço vetorial e $W$ um subespaço vetorial de $V$, temos que, Como $W$ é subespaço de $V$ então, $W$ obdece as condições de subespaço vetorial. Sabemos que $W$ por ser subconjunto de $V$, o mesmo acaba por absorver de $V$, as condições que validam as propriedades de espaço vetorial, vemos também que por $W$ atender as condições de subespaços, então temos a soma e multiplicação por escalar, pela definição de espaço vetorial, $W$ já possui as operações e como $0 \in W$, logo $W$ pode adimitir dois subespaços vetorias que são os triviais ($0 \quad e \quad W$), logo $W$ é um espaço vetorial.

**Exemplo:** Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos Números reais e $n \in \mathbb{N}$. Prove que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial se atender as propriedades.

Pela Proposição que diz, que todo subespaço é um espaço vetorial, podemos apenas provar que $\mathbb{R}^n$ é Subespaço e assim ele será espaço vetorial. Portanto temos, $0 \in \mathbb{R}^n$.
Dado $0 \in \mathbb{R}^n \quad e \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad tal \quad que \quad v = vi \quad onde \quad i \in \{1, \cdots, n\}, \quad e \quad 0 = (0, 0, 0, \cdots, 0)$.

- $0 + v = v$

$$\begin{aligned} 0 + v &= v \\ 0 + (v_1, \cdots, v_n) &= (v_1 + 0, \cdots, v_n + 0) \\ (v_1, \cdots, v_n) &= v \end{aligned}$$

tendo em vista que $0 \in \mathbb{R}^n$, pois $0 = (0, 0, \cdots, 0)$ operado com qualquer vetor, teremos o próprio vetor.

- $u + v = v + u \quad \text{tal} \quad \text{que} \quad u = (u_1, \cdots, u_n) \quad e \quad v = (v_1, \cdots, v_n)$

$$\begin{aligned} & u + v \\ (u_1, \cdots, u_n) + (v_1, \cdots, v_n) &= (u_1 + v_1, \cdots, u_n + v_n) \\ &= (v_1, \cdots, v_n) + (u_1, \cdots, u_n) \\ &= v + u \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Logo $u + v \in \mathbb{R}^n$.

- $au \in \mathbb{R}^n$

Dado $a \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u = (u_1, \cdots, u_n)$

$$a + u = a(u_1, \cdots, u_n) = (au_1, au_2, \cdots, a_u)$$

Pela definição de combinação linear, teremos um novo vetor que pertence ao $\mathbb{R}^n$. Portanto Pela proposição que diz que todo subespaço é um espaço vetorial, então $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial, pois possui dois subespaços, já que o $0 \in \mathbb{R}^n$ , que são o trivial.

Vamos falar um pouco agora de Combinação Linear e Dependência e independência linear, onde vamos precisar futuramente para definir base.

# Combinação Linear

**Definição:** Seja $V$ um espaço vetorial real , $v_1, \cdots, v_n$ vetores de $V$ e $a_1, \cdots, a_n$ números reais . Então, o vetor

$$V = a_1v_1, a_2v_2, \cdots, a_nv_n$$

É um elemento de $V$ ao que chamamos de combinação linear de $v_1, \cdots, v_n$.

## Dependência e Independência linear

**Definição:** Seja $V$ um espaço vetorial e $v_1, \cdots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $v_1, \cdots, v_n$ é linearmente independente (LI), ou que os vetores $v_1, \cdots, v_n$ são LI, se a equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$$

implica

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

Se existir um $a_j \neq 0$ ele será Linearmente Dependente .

## Base de um espaço vetorial ou base de Hamel

**Definição:** Um Conjunto $v_1, v_2, \cdots, v_n$ de vetores de $V$, será uma base de $V$ se, e somente se:

- $v_1, v_2, \cdots, v_n$ é Linearmente Independente.
- $[v_1, v_2, \cdots, v_n] = V$ Dado $v \in V$ e $a_i \in \mathbb{R}$ onde $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ onde essa combinação linear gera $V$.

**Exemplo:** O conjunto $(1, 0), (0, 1)$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ ?
Sabemos que para ser base, precisa ser LI ou ser gerador de $\mathbb{R}^2$.

- LI

$$\begin{aligned}
(0,0) &= a(1,1) + b(0,1) \\
(0,0) &= (a,a) + (0,b) \\
(0,0) &= (a, a+b) \\
a &= 0 \\
a+b &= 0 \Longrightarrow b = 0
\end{aligned}$$

Logo como $a = b = 0$ então é LI e assim é uma base de $\mathbb{R}^2$ e mais ainda é gerador de $\mathbb{R}^2$.

- Vamos verificar se será gerador de $\mathbb{R}^2$. $V = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$\begin{aligned}
(x,y) &= x(1,1) + (y-x)(0,1) \\
(x,y) &= (x,x) + (0, y-x) \Longrightarrow (x, x+y-x) \\
(x,y) &= (x,y)
\end{aligned}$$

## Dimensão de um espaço vetorial

**Definição:** Será chamado de dimensão de um espaço vetorial $V$ , o número de elementos de qualquer base de um espaço vetorial .

**Exemplo:** $\{(1,0),(0,1)\}$ e $\{(1,1),(0,1)\}$ são bases de $V$. Então a Dimensão de $V = 2$.

Vamos Falar e mostrar dois teoremas que nos ajudarão para mostrar que a dimensão de $\mathbb{R}^n = n$

**Demonstração:** Se $v_1, \cdots, v_n$ são LI, então cuprem as condições para uma base e não temos mais nada a fazer. Se $v_1, \cdots, v_n$ são linearmente dependentes, então existe uma combinação linear deles , com algum coeficientes não zero, dando o vetor nulo

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$$

Seja, por exemplo, $X_n \neq 0$. Então podemos ecrever

$$\begin{aligned} x_nv_n &= -x_1v_1 - x_2v_2 - \cdots - x_n - 1v_n - 1 \\ v_n &= \frac{-x_1}{x_n}v_1 - \frac{-x_2}{x_n}v_2 - \cdots - \frac{-x_n - 1}{x_n}v_n - 1 \end{aligned}$$

Como $\frac{-x_1}{x_n} \in \mathbb{R}$ , $V_n$ é combinação linear de $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ e, portanto $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ ainda geram $V$. Se $v_1, \cdots, v_{n_1}$ for LD, então existe uma combinação linear dele, dando o vetor nulo e com algum coeficiente diferente de zero, assim podemos extrair o vetor que corresponde a este coeficiente, assim chegaremos ao subconjunto $r(r$
$leqn)$ vetores LI $v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{ir}$, que ainda geram $V$, ou seja , fomaremos uma base.

**Exemplo:** Prove que $\mathbb{R}^n$ possui dimensão $n$

**Solução:**

Seja $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial de dim $= n$ e $v_1, v_2, \cdots, v_r$ vetores LI pelo teorema que diz, que um espaço vetorial $V$ gerado por um conjunto finito de vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Então qualquer conjunto com mais de $n$ vetores é LD ( Portanto qualquer conjunto LI tem no máximo $n$ vetores ),então $(r \leq n)$. Se $[V_1, \cdots, v_r] = V$ então $v_1, \cdots, v_r$ forma uma base e não se tem mas nada a fazer , assim $r = n$. logo a dim$\mathbb{R}^n = n$ [2].

# Formas do Axioma da Escolha

## Conceitos Preliminares

Nas Presentes demonstrações de equivalências, serão usados alguns conceitos que passamos a enunciar a seguir.

**O Produto Cartesiano** : Seja X e Y conjuntos temos que $X \times Y = \{< x, y >: x \in X \quad e \quad y \in Y\}$.

**Relação**: Um conjunto R é uma relação se cada elemento de R é um par ordenado; isto significa, naturalmente , que se $Z \in R$, então existem x e y tais que $z = (x, y)$.Se R é uma relação, então $(x, y) \in R$, e dizemos que $xRy$,em outras palavras, x está na relação R com y. sendo assim definimos relação como um conjunto de pares ordenados, e dizemos que domínio e imagem de R são :

$$dom\{R\} = \{x : para \quad algum \quad y(xRy)\}$$

$$Ima\{R\} = \{y : para \quad algum \quad x(xRy)\}$$

**Função**: Sejam A e B conjuntos, dizemos que $f : A \to B$ é uma função de A e B, isto é, uma função é uma relação entre A e B.

Uma função consta em três partes: Um conjunto A é chamado de **Domínio da função**, B é chamado de contradomínio da função, e mais para cada elemento $x \in A$, existe um único elemento $f(x) \in B$ onde chamamos de **Imagem da Função**.

**Função Injetiva** : Uma função $f : A \to B$ chama-se Injetiva quando,dados $x, y$ quaisquer em A, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Isto é, quando $x \neq y$, em A, implica $f(x) \neq f(y)$ em B.

**Conjunto Vazio**: Qualquer que seja $x$, tem-se $x \notin \emptyset$.

**Função Escolha**: Seja $X$ um conjunto infinito, então $f : P(X) - \{\emptyset\} \to X$ é dita uma função escolha para o conjunto $X$, se $f(a) \in X$ para todo $a \in P(X) - \{\emptyset\}$.

## As Quatro Formas do Axioma da Escolha (AE)[8]

Considerando que o Axioma da escolha enunciado por Zermelo com a formulação seguinte :

"Dado um conjunto S de conjuntos não vazios e dois a dois sem elementos comuns, existe um conjunto C, contido na reunião dos conjuntos de conjuntos S, de modo que todo conjunto pertencete a S possua um e somente um elemento de C".

Possui formas diversas, apresentadas de acordo com o contexto, e ainda que sua aplicação é imprescindível às questões relativas a espaços topológicos e várias outras da matemática pura, mesmo que implícitamente.

Apresentaremos algumas formas, do Axioma da Escolha, (designadas por AE) por constituírem um grupo bastante usado dentre diversos livros consultados [8].

**AE 1**:Se $S$ é um conjunto de conjuntos não vazios, existe uma função f tal que, para todo $x \in S$ , $f(x) \in S$.

**AE 2**:Para toda função f existe uma função g de tal modo que, para todo x, se $x \in D(f)$ e $f(x) \neq \emptyset$, então $g(x) \in f(x)$.

**AE 3**:Para toda relação $R$ existe uma função $g$ tal que $D(f) = D(R)$ e $f \subseteq R$.

**AE 4**:Para toda função f existe uma função g tal que $D(g) = Img(f)$ e para todo $x \in D(g)$, $f(g(x)) = x$.

## Equivalência entre as formas do axioma da escolha (AE)[8]

A seguir provaremos que embora aplicavéis à contextos distintos as formas do Axioma da Escolha apresentadas anteriormente são equivalentes.

$(AE1 \Rightarrow AE2)$

Sendo T uma função escolha de S. Definimos uma função g de modo que para todo $x \in D(f)$, $g(x) = F(f(x))$. Logo $g$ é a função escolha e $AE1 \Rightarrow AE2$.

$(AE2 \Rightarrow AE1)$

Seja S um conjunto de conjuntos não vazios, seja f uma função injetiva tal que $Img(f) = S$, definimos uma função F tal que para todo $x \in S$, $F(x) = g(f^{-1}(x))$, onde g é uma função definida por AE3, daí temos que é uma função escolha necessária, e $AE2 \Rightarrow AE1$.

$(AE3 \Rightarrow AE4)$

Seja f uma função arbitrária e seja $r = \{< x, y >:< y, x >\in f\}$.Obeservando AE4, vemos que implica que existe uma função g tal que $D(g) = D(r)$ e $g \subseteq r$.Claramente para todo $x \in Img(f) = D(g)$, $f(g(x))$ e $AE3 \Rightarrow AE4$.

($AE4 \Rightarrow AE3$)

Seja r uma relação arbitrária e h uma função definida, como

$$h = \{<< x, y >, x >; < x, y >\in r\}$$

AE5 implica que existe uma função g tal que $D(g) = Img(h)$ e para todo $x \in D(g)$,$h(g(x)) = x$. Agora, $g(x)$ é um par ordenado de modo que f(x) é definido para a segunda ordenada de g(x), para todo $x \in D(g) = D(r)$, claramente $D(f) = D(r)$, f é uma função escolha e $f \subseteq r$.

($AE3 \Rightarrow AE2$)

Seja f uma função arbitrária, definimos a seguinte relação :

$$r = \{< x, y >: y \in f(x)\}$$

AE 4 implica, que existe uma função g, tal que $D(g) = D(r)$ e $g \subseteq r$. Portanto vemos que g é uma função escolha e ($AE3 \Rightarrow AE2$).

Provemos finalmente que ($AE2 \Rightarrow AE3$)

Seja r uma relação arbitrária, definimos uma função h, tal que para todo $x \in D(r)$, $h(x) = \{y :< x, y >\in r\}$, $(h(x) = r"\{x\})$.

Vemos que AE3 implica que, existe uma função f tal que, se $x \in D(h)$ e $h(x) \neq \emptyset$, então $f(x) \in h(x)$. Portanto f é uma função escolha e ($AE2 \Rightarrow AE3$).

Assim concluímos esta de muitas provas de formas equivalentes a esta axioma tão notório.

# Bibliografia


[1] BOLDRINI,J.L.;**àlgebra Linear**. 3°Edição, São Paulo: Harper e Row so Brasil, Editora HARBRA Ltda, 1980.

[2] CAMPBELL,P.J.;**The origin of Zorn's Lemma**.História Mathematica. 1978, pp 77-89.

[3] CELESTINO,ROBERTO ;**Ensino-Aprendizagem da Álgebra linear: As pesquisas brasileiras na década de 90**.Dissertação em Mestrado. Puc-SP, 2000.

[4] DINIZ,MARIA,I ;**Teoria dos conjuntos :Sim ou Não?**.Disponível em: http://mathema.com.br/reflexoes/teoria-dos-conjuntos-sim-ou-nao-2/.

[5] GRACE,A.K.S.;**Infinitos, Contínuos e Escolha: Teoria dos Conjuntos**.2010,pp 31-32. Dissertação de (Conclusão de Curso)-Universidade Federal de São Carlos,2010.

[6] HALMOS,P.R.;**Teoria Ingênua dos Conjuntos**.Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna,2001.

[7] LIPSCHUTZ,SEYMOUR;**Teoria dos Conjuntos**. São Paulo: Editora McGraw-Hill Ltda, 1972.

[8] Rubin,H e Rubin,J; **Equivalents of the Axiom of choice**. pp 1-9.Noth-Holland Publishing company-Amsterdam,1963.

[9] SANCHIS, R,P . **O axioma de escolha, o lema de Zorn e o teorema de Zermelo**.2010. Notas de Aula -Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, 2010.

[10] SILVA,S.G e Jesus J.P.C; **Cem anos do axioma de escolha**: Revista Matemática Universitária n°42, junho, 2007.