UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Elcineide Oliveira das Chagas Sousa
Priscila de Nazaré Rodrigues Almeida

Rotação de Eixos no Estudo das Quádricas

MACAPÁ-AP
2016

Elcineide Oliveira das Chagas Sousa
Priscila de Nazaré Rodrigues Almeida

Rotação de Eixos no Estudo das Quádricas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco.

MACAPÁ-AP
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

516.15
S725r Sousa, Elcineide Oliveira das Chagas.

Rotação de eixos no estudo das quádricas / Elcineide Oliveira das Chagas, Priscila de Nazaré Rodrigues Almeida; orientador, Guzmán Eulalio Isla Chamilco -- Macapá, 2016.
43 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria - Cônicas. 3. Geometria – Rotação de eixo. I. Almeida, Priscila de Nazaré Rodrigues. II. Chamilco, Guzmán Eulalio Isla, orientador. III. Fundação Universidade Federal do Amapá. IV. Título.

Elcineide Oliveira das Chagas Sousa
Priscila de Nazaré Rodrigues Almeida

Trabalho de Conclusão de curso apresentado como pré-requisito para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

AVALIADORES

Orientador: Prof. Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco
UNIFAP

Membro: Prof. Dr. Erasmo Senger
UNIFAP

Membro: Prof. Dr. Jose Walter Cárdenas Sotil
UNIFAP

Macapá, 31 de maio de 2016

Agradecimentos

A Deus, pois sem Ele nada poderia fazer.

A minha mãe Elina Oliveira das Chagas, que sempre acreditou que poderia vencer.

Aos meus filhos , que quando eu pensava em desistir, eles eram uma razão para continuar.

A minha companheira de TCC, Priscila de Nazaré Rodrigues Almeida, que foi incansável em me motivar.

Aos professores, que contribuíram para a minha formação, principalmente o meu orientador.

(Elcineide Oliveira das Chagas Sousa)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado força, coragem e sabedoria para realização desse objetivo.

A minha mãe, Maria Eralda Moraes Rodrigues , meu pai Paulo Reginaldo da Silva Almeida que sempre estiveram ao meu lado nessa árdua caminhada.

Ao professor Dr. Guzmán Isla Chamilco, pela paciência, pelo incentivo e orientações neste importante trabalho.

A minha amiga Elcineide Oliveira das Chagas Sousa ,pela sua dedicação e empenho na construção deste trabalho que sem duvida é o mais importante da nossa vida acadêmica.

Por fim a todos os amigos e colegas que de alguma forma contribuíram direta ou indiretamente para a realização desse sonho.

(Priscila de Nazaré Rodrigues Almeida)

“Não to mandei eu? Sê forte e corajoso; não temas, tem te espantes, porque o Senhor, teu Deus, é contigo por onde quer que andares.”

(Josué 1,9)

RESUMO

O trabalho de conclusão de curso apresentado, trata-se o estudo das cônicas (parábolas, hipérbole, elipse), abordando suas definições, elementos e equações, mas o objetivo central da monografia foi determinar através de dois processos a eliminação dos termos mistos xy da quádrica $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, os processos escolhidos foi via autovalores e autovetores de um operador e a rotação de eixo via geometria analítica. No primeiro processo foi utilizado os conhecimentos de álgebra linear e no segundo processo os conhecimentos de geometria analítica. Posteriormente através de exemplos fizemos a comparação de ambos métodos, finalmente fizemos o analise da eficiência e dificuldades de cada método e poder ser aplicado no ensino das quádricas.

Palavras-Chave: Cônicas. Quádricas. Autovalores e Autovetores. Rotação de Eixo.

ABSTRACT

The presented course completion work , it is the study of conic (parables , hyperbole, ellipsis) , addressing their definitions , elements and equations , but the main purpose of the thesis was to determine through two processes the elimination of mixed terms xy of quadric $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, the process was chosen via eigenvalues and eigenvectors of an operator and the axis of rotation via analytic geometry . The first process was used the knowledge of linear algebra and the second axis of rotation process knowledge of analytic geometry . Later through examples we compared both methods finally made the analysis of the efficiency and difficulties of each method and can be applied in the teaching of quadrics .

Keywords: Conical . Quadrics. Eigenvalues and Eigenvectors. Rotation axis.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Com este trabalho, objetivamos a conclusão de graduação em licenciatura em matemática, e foi feito utilizando como eixo temático as cônicas em $\mathbb{R}^2$, sendo o tema principal sua representação via álgebra linear e geometria analítica.

Os primeiros relatos sobre as cônicas começaram na Grécia, com a definição inicial com Menaecmo referentes ao cone reto de revolução, e a sua classificação e nomenclatura seguiram a classificação desses cones. Assim, elipse era a "seção do cone acutângulo", a hipérbole a "seção do cone obtusângulo"e a parábola a "seção do cone reto"referindo-se os termos "acutângulo", "obtusângulo"e "reto"ao ângulo entre duas geratrizes opostas no vértice do cone. Essa abordagem manteve-se quase completamente ate Euclides e Arquimedes.

As contribuições de Euclides sobre as cônicas se perderam, mas existem referencias a quatros livros de obra euclidiana sobre cônica, no qual parte do conteúdo pode ser aferida em referencia de trabalhos posteriores, principalmente de Arquimedes e pappus. Euclides (c.295 a.C.) seria o primeiro a trabalhar o problema dos lugares geométricos de três e quatro linhas, no livro perdido dos Porismas, referido posteriormente por Pappus, de grande importância nas evoluções futuras do tratamento das seções cônicas e da própria geometria. As primeiras series de teoremas sobre as seções cônicas, apareceram nos trabalhos de Arquimedes (c. 287-212 a.C.), onde encontram-se as primeiras referencias e afirmações contidas os "elementos das cônicas", conhecimentos atribuídos a Euclides e Aristeu , além de determinar as áreas de elipse e segmentos de parábolas, estabelecendo inclusive a quadratura da parábola, e empenhar um estudo sobre superfícies de revolução, inclusive quadrática, e as suas seções no texto sobre conoides e esferoides. Mas foi Apolônio, com sua obra as cônicas, composta de oito livros dos quais apenas o ultimo se perdeu, que desenvolveu generalizações, aplicou novos métodos, descobriu e provou teoremas e praticamente exauriu as conclusões puramente geométrica envolvidas nas seções, façanha pela qual ficou conhecido na sua época como "O Grande Geômetra". Entre as façanhas de Apolônio está a de ter descoberto a possibilidade de se obter as cônicas a partir de qualquer seção em qualquer cone, mesmo oblíquo, partindo de um cone de diâmetro geral e seção também geral. Para tanto, foi preciso admitir o cone circular duplo, ligado pelo vértice, e as duas folhas da hipérbole como uma curva.

O próximo a fazer o estudo sobre as cônicas foi Pappus, e sua principal contribuição foi a discussão do problema lugar geométrica de três e quatro linhas e seus estudos posteriores para mais linhas. O famoso problema do lugar geométrico de 4 linhas, traduzido para a linguem moderna, pede o lugar geométrico de um ponto p, sabendo-se que as distancias $P_1, P_2, P_3 e P_4$ de P a quatro retas dadas sejam proporcionais,$i.e. P_1.P_2 = k.P_3.P_4$, sendo k uma constante, a solução do problema é como concluiu Apolônio, uma seção cônica. Pappus então buscou trabalhar a generalização do problema para 5, 6 ou, mais linhas que não podem ser construídas apenas com réguas e compasso, e encontrou as curvas por métodos aproximados. No século XVII, foram recuperados os textos de Pappus, Descartes então começa o estudo sobre o então chamado "Problema de Pappus"e é incapaz de resolvê-lo de forma puramente geométrica, desenvolve ideias da sua geometria analítica na solução e prova, na sua geometria (1637) que o problema de 4 linhas era redutível á solução de uma equação de segundo grau, tendo como caso particular linear o problema de 3 linhas, enquanto para 5 linhas a solução era a de uma equação de terceiro grau, não podendo ser resolvida por régua e compasso, assim como os problemas para mais linhas correspondiam a equação de graus superiores.

Nas preliminares veremos detalhadamente as definições das cônicas: elipse, hipérbole, parábola, apresentando suas equações e elementos de cada uma, e já no capitulo 2 utilizaremos conhecimento da álgebra linear, onde trabalharemos com equações do tipo $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$, mostraremos como colocar essa equação na forma matricial, e em seguida faremos diagonalização da forma quadrática contida nessa equação, para que assim possamos eliminar os termos mistos xy e identificar que cônica está sendo representada, e qual sua posição e localização no plano, o mesmo faremos no capitulo 3, mas agora utilizando ferramentas da geometria analítica, com rotação de eixo ,e auxilio da identidades trigonométricas.

Objetivo deste trabalho é fazermos as estudo das cônicas via álgebra linear e geometria analítica, a fim de mostrar como podemos reduzir as equações que tem termos xy, para que possamos assim identificar que cônicas está sendo representada na equação, interessante observar que o problema em classificar as cônicas está quando existem nas equações termos cruzados xy.

Capítulo 1

Preliminares e conceitos

Para inciar este tema, será necessário a apresentação do conceito de cônicas que se posiciona como essencial para o estudo deste assunto. as cônicas em $\mathbb{R}^2$, e quais são seus elementos.

1.1 Elipse

Definição 1.1 *Considere dois pontos F_1 e F_2 em um plano α, tais que F_1 e $F_2 = 2c$, e uma distância $2a$, tal que $2a > 2c$. Chama-se elipse o lugar geométrico dos pontos do plano α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é constante e igual $2a$.:*

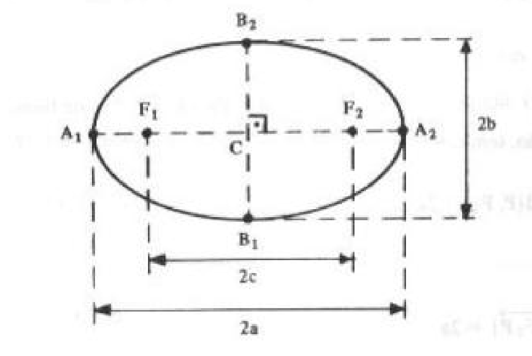

Figura 1.1: Grafico da Elipse

1.1.1 Elementos Elipse:

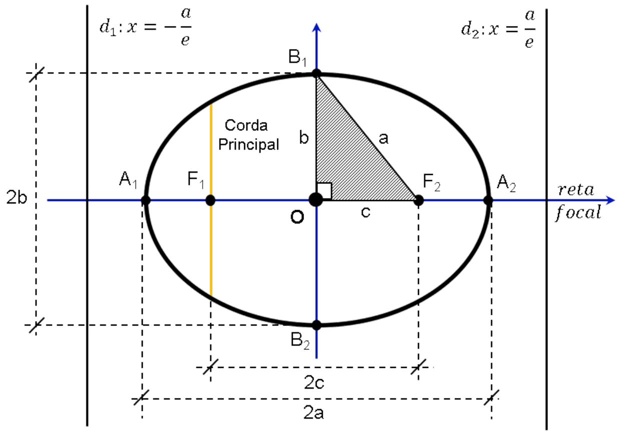

Figura 1.2: Representação dos elementos da Elipse

Focos: *são os pontos fixos* F_1 *e* F_2

Distância focal: *É a distância dos focos, que, pela definição, é igual a* $2c$.

Eixo maior: *a reta conduzida pelos focos intercepta a elipse nos pontos* A_1 *e* A_2. *Cuja medida é* $A_1A_2 = 2a$.

Eixo menor: *a mediatriz de* F_1F_2 *intercepta a elipse nos pontos* B_1 *e* B_2. *O segmento* B_1B_2 *é o eixo menor da elipse, cuja medida é* $B_1B_2 = 2b$.

Centro: *É o ponto* O, *médio de* F_1F_2. *Note que* O *é o ponto de intersecção dos eixos.*

Vértices: *São os pontos* A_1, A_2, B_1 *e* B_2, *isto é, são as extremidades dos eixos.*

Excentricidade: *É a razão* $e = \dfrac{c}{a}$, *em que* $0 < e < 1$.
Note que o triângulo F_2B_1O *é retângulo. Assim, de acordo com o teorema de Pitágoras, temos a seguinte relação:* $a^2 = b^2 + c^2$.

1.1.2 Equação da Elipse

Fixando um sistema cartesiano, vamos obter a equação da elipse em dois casos:

1^o **caso:** *A origem do sistema de coordenadas é o centro da elipse e o eixo maior da elipse está no eixo x.*

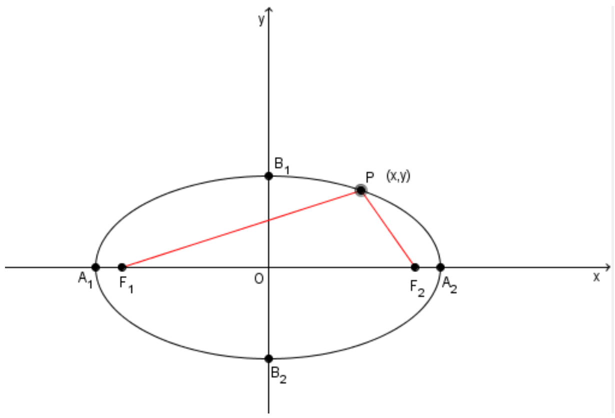

Figura 1.3: Representação do eixo maior da elipse no eixo x

Neste caso, os focos são $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Para um ponto $P(x, y)$ da elipse, temos:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado:

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$

$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + x^2 - x^2 - 2cx - 2cx + c^2 - c^2 + y^2 - y^2$

$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$

Dividindo os dois membros por 4:

$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2$

Elevando os dois membros ao quadrado

$a^2[(x-c)^2 + y^2] = (a^2 - cx)^2$

$a^2(x^2 - 2cx + c^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$

$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Como $a^2 = b^2 + c^2$, *podemos escrever* $a^2 - c^2 = b^2$. *Daí temos:*

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Dividindo os dois membros por $a^2b^2(b > 0, a > 0)$

$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Como o eixo maior da elipse está contido no eixo x *e* a *e* b *são positivos, então* $a > b$. *Assim, o denominador de* x^2 *é maior que o denominador de* y^2.

2^o **caso:** *A origem do sistema de coordenadas é o centro da elipse e o eixo maior da elipse está no eixo y*

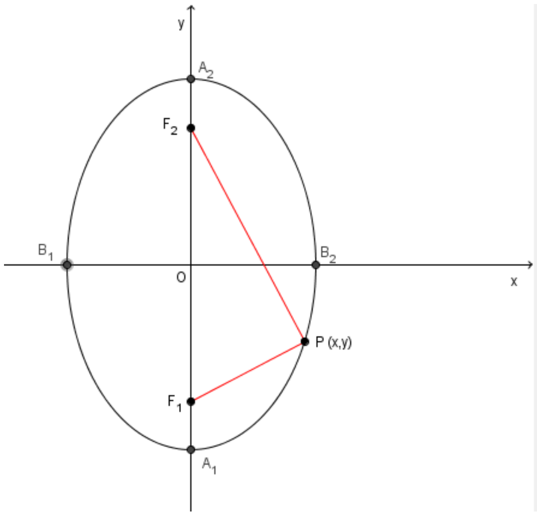

Figura 1.4: Representação do eixo maior da elipse no eixo y

Neste caso, os focos são $F_1(0, -c)$ *e* $F_2(0, c)$

Para um ponto $P(x, y)$ *da elipse, temos:*

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = 2a$$

Desenvolvendo a equação de modo análogo ao 1º caso, obtemos:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Neste caso, o eixo maior da elipse está contido no eixo y e o denominador de é maior que o denominador de x^2.

Na demonstração dessas fórmulas usamos a operação de elevar ao quadrado os dois membros de uma equação. Como essa operação pode introduzir novas soluções na equação em que atua somente a condição.

Se o ponto $P(x, y)$ pertence à elipse de semi-eixos a e b, disposta simetricamente em relação aos dois eixos de coordenadas, então $P(x, y)$ satisfaz à equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,não basta para dizer que a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ represente uma elipse.
Entretanto, pode se demonstrar que também é verdadeira a recíproca:
Se o ponto $P(x, y)$ satisfaz a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, então esse ponto pertence à elipse de semi-eixos a e b, disposta simetricamente em relação aos dois eixos de coordenadas.

Satisfeitas essas duas condições, podemos afirmar que:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,*é a equação da elipse quando o eixo maior está contido no eixo x.*
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$,*é a equação da elipse quando o eixo maior está contido no eixo y.*

1.2 Hipérbole

Definição 1.2 *Considere dois pontos F_1 e F_2 em um plano α, tais que $F_1F_2 = 2c$, e uma distância $2a$, tal que $2a > 2c$.*

Chama-se hipérbole o lugar geométrico dos pontos do plano α cuja diferença, em um valor absoluto, das distâncias a F_1 e F_2 é constante e igual a 2^a.

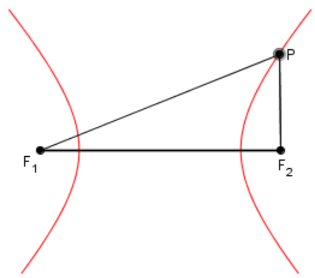

Figura 1.5: Grafico da Hiperbole

Se **P** *é um ponto da hipérbole, então:*

$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

1.2.1 Elementos da Hipérbole

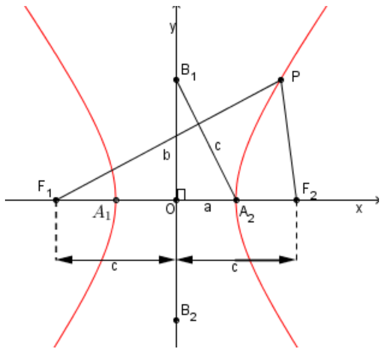

Figura 1.6: Elementos da Hipérbole

Focos: *são os pontos fixos* F_1 *e* F_2.

Distância focal: *é a distância* $F_1F_2 = 2c$.

Centro: *é o ponto* O, *ponto médio do segmento* $\overline{F_1F_2}$.

Vértices: *são os pontos* A_1 *e* A_2.

Eixo real ou transverso: *é o segmento* $\overline{B_1B_2}$, $\overline{A_1A_2}$ *com* $A_1A_2 = 2a$

Eixo imaginário ou conjugado: *é o segmento* $\overline{B_1B_2}$, *com* $B_1B_2 = 2b$.

Excentricidade: *é a razão* $e = \dfrac{c}{a}$, *em que* $e > 1$, *pois* $a < c$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo B_1OA_2, *obtemos:* $c^2 = a^2 + b^2$.

1.2.2 Equação Reduzida da Hipébole

Fixando um sistema cartesiano, vamos obter a equação da hipérbole nos seguintes casos:

1^o **caso:** *Hipérbole com eixo real sobre o eixo* x *e o centro na origem*

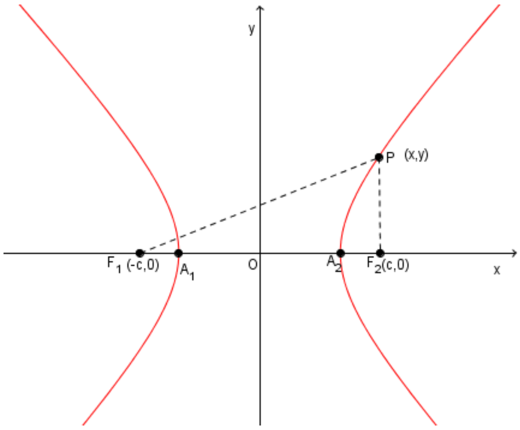

Figura 1.7: Representação da Hipérbole no x

O ponto $P(x, y)$ pertence à hipérbole se, e somente se :

$|d(P, F_1)d(P, F_2)| = 2a \Rightarrow |\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - c}^2 + (y - 0)^2| = 2a$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} =$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = +\sqrt{(x - c)^2 y^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$

$+4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$

$4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = -4a^2 + 4cx$

Simplificando a equação temos: $+a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = -a^2 + cx$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$a^2[(x - c) + y^2] = (-a^2 + cx)^2$

$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \quad (-1)$

$+c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = +a^2c^2 - a^2$

$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

Como, na hipérbole, $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 - a^2 = b^2$*,temos:* $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

A Equação por a^2b^2*:*

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

Daí:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2^o **caso:** *Hipérbole com eixo real sobre o eixo y e centro na origem*

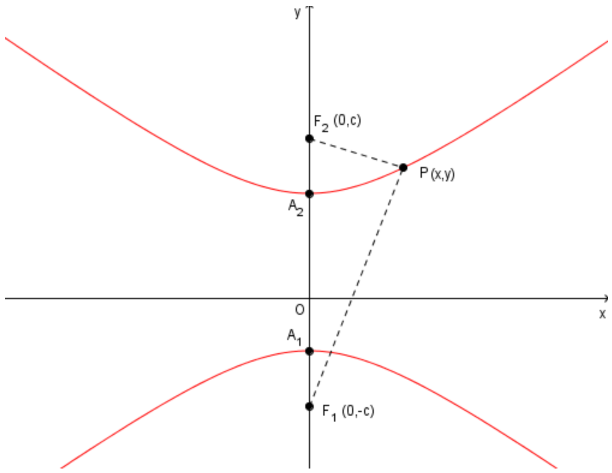

Figura 1.8: Representação da Hipérbole no eixo y

Procedendo do mesmo modo que no caso anterior, obtemos a equação:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

O caso da hipérbole é análogo ao da elipse, ou seja, também é verdadeira a reciproca:

Se o ponto $P(x, y)$ satisfaz á equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,então esse ponto pertence à hipérbole.

Do exposto, podemos dizer que:
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *é a equação da hipérbole com focos sobre o eixo x e centro na origem do sistema cartesiano.*
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ *é a equação da hipérbole com focos sobre o eixo y e centro na origem do sistema cartesiano.*

1.2.3 Equação da Hiperbole Com os Eixos Paralelos Aos Eixos coordenados

Consideremos uma hipérbole de centro $C(x_0, y_0)$ *cujo eixo real é paralelos ao eixos* x.

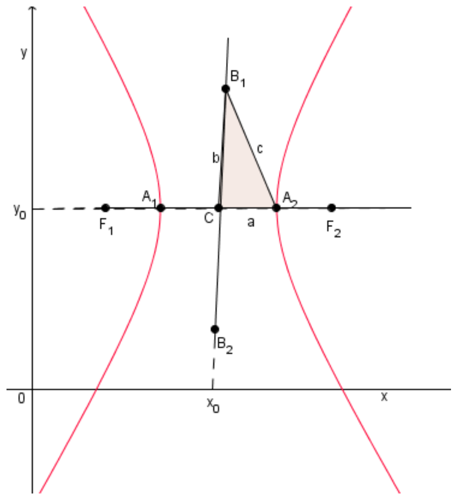

Figura 1.9: Hipérbole com o eixo real paralelos ao eixo x

Nesse caso, à equação da hipérbole é dada por:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Raciocinando de modo análogo ao anterior, quando o eixo real é paralelo ao eixo y *a equação da hipérbole é dada por:*

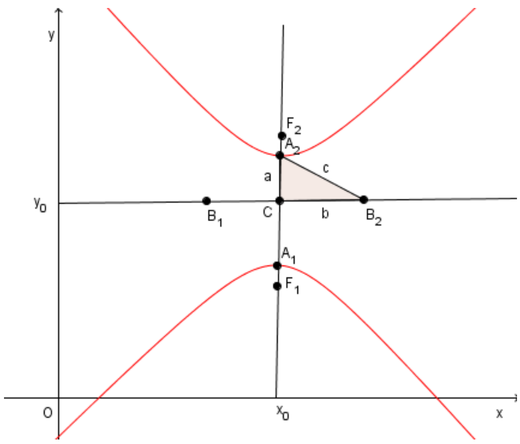

Figura 1.10: Hipérbole com o eixo real paralelos ao eixo y

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

1.3 Parábola

Definição 1.3 *Sejam um ponto F e uma reta r de um plano α,tal que F r. Denomina-se parábola o conjunto de pontos de α equidistantes ao ponto F e à reta r.*

Na parábola abaixo:

$d(A, F) = d(A, r)$;

$d(B, F) = d(B, r)$;

$d(D, F) = d(D, r)$;

$d(E, F) = d(E, r)$

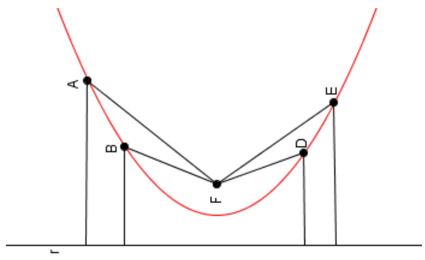

Figura 1.11: Grafico da Parábola

1.3.1 Elementos da Parábola:

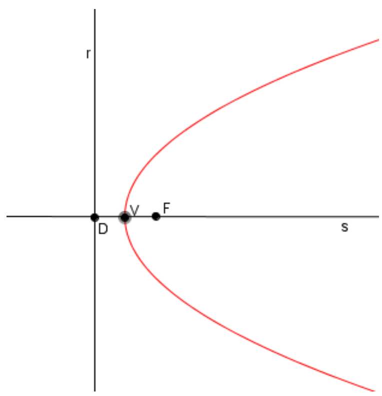

Figura 1.12: Representação dos elementos da Parábola

Foco: *é o ponto fixo F*

Reta diretriz*: é a reta r*

Eixo de simetria: *é a reta s que passa pelo foco F e é perpendicular à diretriz* (r)

Vértice: *é o ponto fixo V. Corresponde ao ponto médio de $\overline{FD}$.*

Parâmetro (p)*: medida de $\overline{FD}$*

1.3.2 Equação da Parábola

1^o **caso:** *Parábola com vértice na origem e eixo de simetria sobre o eixo y.*

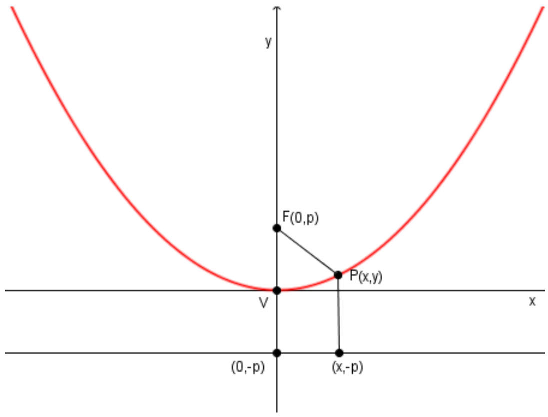

Figura 1.13: Representação da parábola com vértice na origem e os eixos de simetria sobre ao eixo y

Logo:

$d(P,F) = d(P,d) \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}$

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 2py + 2py$$

$$x^2 = 4py \ ou \ y = \frac{x^2}{4p}$$

,

que são equações reduzidas da parábola de foco $F(0,p)$ e diretriz $y = -p$.

Se $p > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Por exemplo, se $p = 2$,temos $y = \dfrac{x^2}{8}$

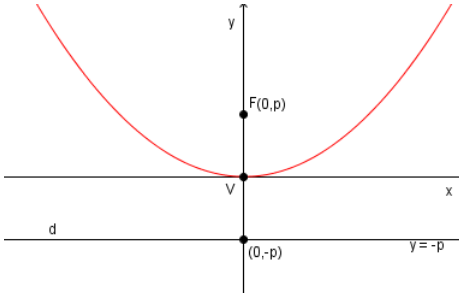

Figura 1.14: Representação da Parábola com a concavidade voltada para cima

Se $p < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo

Por exemplo, se $p = -2$, temos $y = -\dfrac{x^2}{8}$

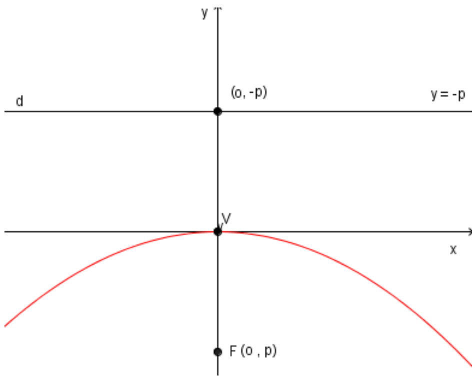

Figura 1.15: Representação da Parábola com a concavidade voltada para baixo

2^o **caso:** *Parábola com vértice na origem e eixo de simetria sobre o eixo x.*

Trocando x por y nas equações anteriores vamos obter: $y^2 = 4px$ ou $x = \dfrac{y^2}{4p}$, que são equações reduzidas da parábola do foco $F(p, 0)$ e diretriz $x = -p$

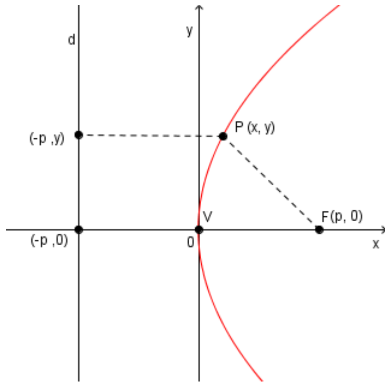

Figura 1.16: Representação da parábola com vértice na origem e os eixos de simetria sobre ao eixo x

Se $p > 0$*, a parábola tem a concavidade voltada para a direita. Por exemplo, se* $p = 2$*, temos* $x = \dfrac{y^2}{8}$

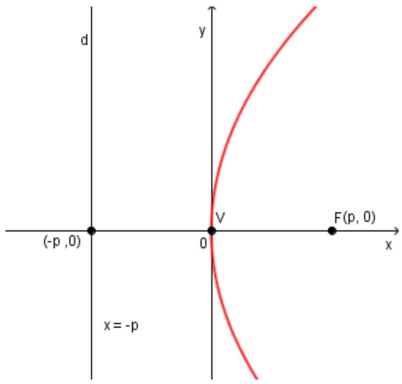

Figura 1.17: Representação da Parábola com a concavidade voltada para direita

Se $p < 0$*, a parábola tem a concavidade voltada para esquerda. Por exemplo, se* $p = -2$*, temos* $x = -\dfrac{y^2}{8}$

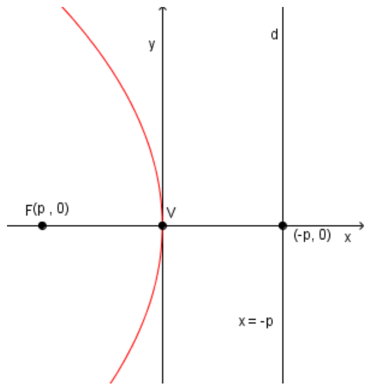

Figura 1.18: Representação da Parábola com Eixo de Simetria paralelo ao Eixo y

A recíproca do que acabamos de expor também é verdadeira: as equações $x^2 = 4py$ e $y^2 = 4px$ representam parábolas com foco em dos eixos, diretriz paralela ao outro eixo e vértice na origem do sistema cartesiano.

1.3.3 Equação da Parábola com Eixo de Simetria Parábola a Um dos Eixos Coordenados

O Eixo da parábola é paralelo ao eixo y e o vértice é o ponto $V(x_0, y_0)$.

Transladando a origem de coordenadas ao ponto ,V de modo que x' // x e y'// y, temos:

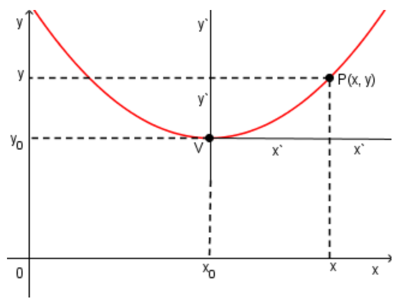

Figura 1.19: Representação da Parabola com Eixo de Simetria paralelo ao eixo y

Considerando os eixos x' e y' , a equação da parábola é $(x')^2 = 4py'$ (I)

Mas, $x = x_0 + x' \Rightarrow x' = x - x_0$ (II)

$y = y_0 + y' \Rightarrow y' = y - y_0$(III)

Substituindo-se (II) e (III) em (I), vem:

$(x-x_0)^2 = 4p(y-y_0)$ *(IV)*

A equação da diretriz é da forma $y = y_0 - p$ *e o foco tem coordenadas* $F(x_0, y_0 + p)$.

Observe que, se $p < 0$, *a parábola tem a concavidade voltada para baixo.*

Vejamos o que acontece quando desenvolvemos a equação (IV):

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 = 4py - 4py_0$$

Dividimos ambos os membros da equação por $4p$, *temos:*

$$\frac{1}{4p}x^2 - \frac{x_0}{2p}x + \frac{x_0^2}{4p} = y - y_0 \qquad y = \frac{1}{4p}x^2 - \frac{x_0}{2p}x + y_0 + \frac{x_0^2}{4p}$$

Fazendo:

$$\frac{1}{4p} = a \qquad -\frac{x_0}{2p} = b \qquad y_0 + \frac{x_0^2}{4p} = c$$

Obtemos $y = ax^2 + bx + c$ *que é a fórmula da função quadrática.*

O eixo da parábola é paralelo ao eixo x *e o vértice é o ponto* $V(x_0, y_0)$*. Transladando a origem de coordenadas* O *ao ponto* V, *de modo que* $x^{'} // \ x$ *e* $y^{'}//y$, *temos:*

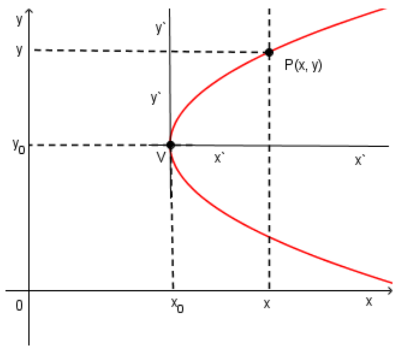

Figura 1.20: Representação da Parabola com Eixo de Simetria paralelo ao eixo x

Consideremos os eixos $x^{'}$ *e* $y^{'}$ *a equação da parábola é* $(y^{'})^2 = 4px^{'}$ *(I)*

Mas, $x = x_0 + x^{'} \Rightarrow x^{'} = x - x_0$ *(II)*

$y = y_0 + y^{'} \Rightarrow y^{'} = y - y_0$ *(III)*

Substituindo-se (II) e (III) em (I), vem:

$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$

A equação da diretriz é da forma $x = x_0 - p$ *e as cooredenadas do foco são* $F(x_0 + p, y_0)$.

Observe que, se $p < 0$, *a parábola tem a concavidade voltada para esquerda.*

Capítulo 2

Rotação de eixos via algebra linear

Para tratar das cônicas procederemos estudando sua equação definida algebricamente, e através da diagonalização de formas quadráticas associadas, permite-nos classificar as cônicas possivelmente, em outro referencial.

Definição 2.1 *Uma cônica em $\mathbb{R}^2$ é um conjunto de pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas em relação á base canônica $\{e{=}(1, 0),e = (0, 1)\}$ satisfazem a equação.*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Onde A,B,C,D,E são números reais com $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ ou $C \neq 0$.
Podemos notar que a equação da cônica envolve:

- *Uma forma quadrática $Q = (x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$*
- *Uma forma linear $L = (x, y) = Dx + Ey$*
- *Um termo constante F*

Isto é, a equação da cônica pode ser também escrita da seguinte forma:

$$Q(x, y) + L(x, y) + F = 0$$

Definição 2.2 *(Forma quadrática matricial da cônica): Uma forma de determinar o tipo de cônica representada por* $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ *ou seja da seguinte forma:*

$$Q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

e

$$L(x,y) = Dx + Ey \quad e \quad F$$

é escrevendo essa equação na forma matricial

- $Q(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- $L(x,y) = \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- $F = \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$

Então a equação matricial da cônica é:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

De fato,

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Ax + \frac{B}{2}y \\ \frac{B}{2}x + Cy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Dx + Ey \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow Ax^2 + \frac{B}{2}xy + \frac{B}{2}xy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
$\Leftrightarrow Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$

Observemos que a equação geral de uma cônica também pode ser do tipo:

$$X^tMX + BX + FI_1 = 0_{1x1}$$

Onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ M = \begin{bmatrix} A & \dfrac{B}{2} \\ \dfrac{B}{2} & C \end{bmatrix} \ e \ B = \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix}$$

O produto X^tMX é chamado forma quadrática

Veremos alguns exemplos de cônicas na forma matricial

Exemplo 2.2.1 *Escrevendo a equação da elipse* $\dfrac{(x+2)^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$ *em termos de formas quadráticas e formas lineares.*

Solução:
$\dfrac{(x+2)^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 4(x+1)^2 + \frac{1}{4}(y+1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow 4(x^2+4x+1) + \frac{1}{4}(y^2+2y+1) - 1$

$\Leftrightarrow 16(x^2+4x+4) + (y^2+2y+1) - 4$

$\Leftrightarrow 16x^2 + y^2 + 64x + 2y + 61 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 64 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 61 \end{bmatrix} = 0$

Exemplo 2.2.2 *Escreva a equação da hipérbole* $-\dfrac{(x+3)^2}{9} + \dfrac{(y+1)}{4} = 1$ *em termos de formas quadráticas e formas lineares.*

Solução:
$-\dfrac{(x+3)^2}{9} + \dfrac{(y-4)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow -4(x+3) + 9(y+4)^2 = 36$

$\Leftrightarrow -4(x^2+6x+9) + 9(y^2-8y+16) - 36 = 0$

$\Leftrightarrow -4x^2 - 24x + 36 + 9y^2 - 72y + 144 - 36 = 0$

$\Leftrightarrow -4x^2 + 9y^2 - 24x - 72 + 72 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -24 & -72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 72 \end{bmatrix} = 0$

Note que nenhuma tem termos cruzados xy nas expressões e a forma quadrática X^tMX e M é matriz dada por:

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Onde na diagonal principal existem constantes λ_1 e λ_2 e na diagonal secundária termos nulos, então a cônica é alinhada a um dos eixos cartesianos.
Para expressões desses tipos podemos classificá-la usando as seguintes regras:

> *(i) Se $\lambda_1.\lambda_2 = 0$ então a equação é de uma parábola ou de sua forma degenerada(uma reta ou duas retas paralelas);*
> *(ii) Se $\lambda_1.\lambda_2 > 0$ então a equação é de uma elipse ou de sua forma degenerada(um ponto ou o vazio);*
> *(iii) Se $\lambda_1.\lambda_2 < 0$ então a equação é de uma hipérbole ou de sua forma degenerada (duas retas concorrentes).*

No caso em que a express ões tem termos cruzados xy , veremos com o auxilio do próximo assunto é possível também classifica-las.

2.1 Diagonalização de Formas Quadráticas

Como nosso objetivo é determinar que tipo de cônica que esta sendo representada no plano, precisaremos eliminar os termos cruzados xy diagonalizando a forma quadrática. Para isso procuraremos uma base β ortonormal de V no qual a matriz da forma quadrática $Q = V \to \mathbb{R}$ é diagonal.
De modo que:

$$\begin{bmatrix} v \end{bmatrix}_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$Q(v) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Primeiramente veremos como diagonalizar a forma quadrática do exemplo.

Exemplo 2.1.1 $Q(v) = x^2 - 10xy + y^2$ *onde* $v(x, y)$

Colocando na forma matricial temos:

$$Q(v) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$Q(x,y) = \begin{bmatrix} v \end{bmatrix}_\alpha^t \cdot \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}_\alpha^\alpha \cdot \begin{bmatrix} v \end{bmatrix}_\alpha$, *$\alpha$ base canônica* $\mathbb{R}^2$. *Observe que* $\begin{bmatrix} B \end{bmatrix}_\alpha^\alpha$ *é uma matriz simétrica, logo é diagonalizável, admitindo um conjunto de autovetores ortonormais.*

Calculando os autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

$P(\lambda) = det(A{-}\lambda I){=}det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -5 \\ -5 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$= (1-\lambda)^2 + 25 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 25 = \lambda^2 - 2\lambda - 24$

Os autovalores são $\lambda_1 = 6$ *e* $\lambda_2 = -4$. . *Para encontramos os autovetores resolvemos a equação* $Av = \lambda v$ *para cada* λ.

Para $\lambda_1 = 6$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x \\ 6y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y = 6x \\ -5x + y = 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x - 5y = 0 \\ -5x - 5y = 0 \end{cases}$$

$x = -y$

Para $\lambda_2 = -4$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x \\ -4y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y = -4x \\ -5x + y = -4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 5y = 0 \\ -5x + 5y = 0 \end{cases}$$

$x = y$

Logo os autovetores associados $\lambda_1 = 6$, $v_1 = (x, -x)$ *e para* $\lambda_2 = -4$, $v_2 = (x, x)$.*Em particular temos* $v_1 = (1, -1)$ *e* $v_2 = (1, 1)$.

Normalizando os vetores, teremos:

$u_1 = \dfrac{v_1}{||v_1||} = \dfrac{(1,-1)}{||(1,-1)||} = \dfrac{(1,-1)}{\sqrt{1^2 + (-1^2)}} = \dfrac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$u_2 = \dfrac{v_1}{||v_1||} = \dfrac{(1,1)}{||(1,1)||} = \dfrac{(1,1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Assim, uma base ortonormal β *de autovetores será dada por:*

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Sendo a matriz $\begin{bmatrix} B \end{bmatrix}_\alpha^\alpha$ *simétrica , então corresponde a um operador auto-adjunto* $T : V \to V$ *que tem como matriz* $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}_\alpha^\alpha$ *temos que:*

$$\begin{bmatrix} B \end{bmatrix}_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} P \end{bmatrix}_\beta^\alpha \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}_\beta^\beta \begin{bmatrix} P \end{bmatrix}_\beta^\alpha$$

Onde $\left[\begin{array}{c} B \end{array}\right]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ *e* α, β *são bases ortonormais e, portanto* $\left[\begin{array}{c} P \end{array}\right]_{\beta}^{\alpha}$ *é uma matriz diagonal.*

$$(\left[\begin{array}{c} P \end{array}\right]_{\alpha}^{\beta})^{-1} = \left[\begin{array}{c} P \end{array}\right]_{\beta}^{\alpha} = (\left[\begin{array}{c} P \end{array}\right]_{\alpha}^{\beta})^{t}$$

Substituindo em $Q(v) = \left[\begin{array}{c} v \end{array}\right]_{\alpha}^{t} \cdot \left[\begin{array}{c} B \end{array}\right]_{\alpha}^{\alpha} \cdot \left[\begin{array}{c} v \end{array}\right]_{\alpha}$*,temos:*

$$Q(v) = \left[\begin{array}{c} v \end{array}\right]_{\alpha}^{t} \cdot \left[\begin{array}{c} P \end{array}\right]_{\alpha}^{\beta} \cdot \left[\begin{array}{c} B \end{array}\right]_{\beta}^{\beta} \cdot \left[\begin{array}{c} P \end{array}\right]_{\beta}^{\alpha} \cdot \left[\begin{array}{c} V \end{array}\right]_{\alpha}$$

Onde,

$$\begin{aligned} Q(v) &= (\left[\begin{array}{c} P \end{array}\right]_{\beta}^{\alpha} \cdot \left[\begin{array}{c} v \end{array}\right]_{\alpha})^{t} \cdot \left[\begin{array}{c} B \end{array}\right]_{\beta}^{\beta} \cdot (\left[\begin{array}{c} P \end{array}\right]_{\beta}^{\alpha} \cdot \left[\begin{array}{c} v \end{array}\right]_{\alpha}) \\ &= \left[\begin{array}{c} v \end{array}\right]_{\beta}^{t} \cdot \left[\begin{array}{c} B \end{array}\right]_{\beta}^{\beta} \cdot \left[\begin{array}{c} v \end{array}\right]_{\beta}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$Q(v) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$6x_1^2 - 4y_1^2$$

$$\left[\begin{array}{c} v \end{array}\right]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Veremos outro exemplo como determinar a figura da cônica através da diagonalização da forma quadrática.

Exemplo 2.1.2 *Identifique a cônica no plano dada pela equação quadrática*

$$11x^2 - 10\sqrt{3}xy + y^2 - 32 = 0$$

Solução:

Escrevemos a equação na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 32 = 0$$

Calculando os autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} 11 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

$P(\lambda) = det(A{-}\lambda I){=}det \begin{bmatrix} 11-\lambda & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$= (11-\lambda)(1-\lambda)\text{-}(-5\sqrt{3})^2 = 11 - 11\lambda - \lambda + \lambda^2 - (75) = 0$ *Temos o polinômio característico* $P(\lambda) = det(A{-}\lambda I){=}\lambda^2{-}12\lambda{-}64$. *Como já vimos, as raízes desse polinômio são os autovalores de* A *dados por* $\lambda_1 = -4$ *ou* $\lambda_2 = 16$. . *Para encontramos os autovetores resolvemos a equação* $Av = \lambda v$ *para cada* λ.

Para $\lambda_1 = -4$

$$\begin{bmatrix} 11 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x \\ -4y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 11x - 5\sqrt{3}y = -4x \\ -5\sqrt{3}x + y = -4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x - 5\sqrt{3}y = 0 \\ -5\sqrt{3}x + 5y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 5y = 5\sqrt{3}x \Rightarrow y = \sqrt{3}x \Rightarrow v_1(x, \sqrt{3}x) = x(1, \sqrt{3})$

com $x{\neq}0$

Logo os autovetores associados a $\lambda_1 = -4$ *são da forma vetor* $v_1 = (x, \sqrt{3}x)$.

Em particular, temos $v_1 = (1, \sqrt{3})$.

Normalizando este vetor, teremos:

$$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{(1, \sqrt{3})}{||(1, \sqrt{3})||} = \frac{(1, \sqrt{3})}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{(1, \sqrt{3})}{\sqrt{4}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Para$\lambda_2 = 16$

$$\begin{bmatrix} 11 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16x \\ 16y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 11x - 5\sqrt{3}y = 16x \\ -5\sqrt{3}x + 5y = 16y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x - 5\sqrt{3}y = 0 \\ -5\sqrt{3}x + 15y = 0 \end{cases}$$

Assim os autovetores $\lambda_2 = 16$, *são da forma* $v_2 = (x, -\frac{\sqrt{3}}{3}x)$ *com* $x{\neq}0$.*Em particular temos* $v_2 = (1, -\frac{\sqrt{3}}{3})$

Normalizando os vetores, teremos:

$$u_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{(1, -\frac{\sqrt{3}}{3})}{||(1, -\frac{\sqrt{3}}{3})||} = \frac{(1, -\frac{\sqrt{3}}{3})}{\sqrt{1^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{3})^2}} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$$

Consideremos os autovetores $\beta = \{u_1, u_2\}$, *como o novo sistema referencial do* R *,onde a forma quadrática :*

$$Q(v) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 11 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ onde } \begin{bmatrix} v \end{bmatrix}_\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O Processo de diagonalização de forma quadrática, que:

$$Q(v) = \left[\ v\ \right]_{\beta}^{t} \cdot \left[\ T\ \right]_{\beta}^{\beta} \cdot \left[\ v\ \right]_{\beta} \text{ onde } D = \left[\ T\ \right]_{\beta}^{\beta} \text{ e } \left[\ v\ \right]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Mudança de referencial cartesiano, que

$$\left[\ v\ \right]_{\alpha} = \left[\ P\ \right]_{\alpha}^{\beta} \left[\ v\ \right]_{\beta} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Deste modo, a equação se reduz a

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4x_1 & 16y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 32$$

$$\Rightarrow -4x_1^2 + 16y_1^2 + 32 = 0\ .(-1)$$

$$\Leftrightarrow 4x_1^2 - 16y_1^2 - 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x_1^2 = 16y_1^2 + 32$$

$$x_1^2 = \frac{16_1^2 + 32}{4} \Leftrightarrow x_1^2 = 4y_1^2 + 8$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 4y_1^2 = 8\ .\tfrac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{8} - \frac{y_1^2}{2} = 1.$$

Assim, podemos finalmente identifica-la claramente como sendo uma Hipérbole, através de uma mudança de referencial.

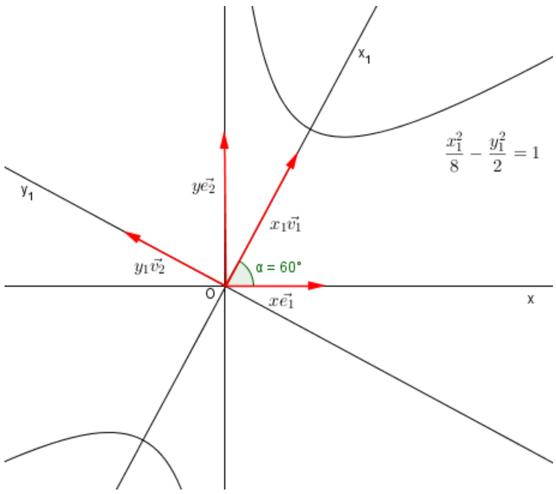

Figura 2.1: Hipérbole $\dfrac{x_1^2}{8} - \dfrac{y_1^2}{2} = 1$

Agora iremos formular o procedimento geral de classificação das cônicas, estabelecendo em detalhes o que deve ser feito em cada passo.

2.2 Procedimento Geral de Classificação das cônicas

Dada a equação algébrica

$$Ax^2 + Bxy + Cy + Dx + Ey + F = 0$$

Onde $A \neq 0$ *ou* $B \neq 0$ *ou* $C \neq 0$, *queremos classificar a cônica em função de sua equação e fazer um esboço de seu gráfico, para isso, procederemos da seguinte forma:*

1^0**Passo:** *Escrevemos a equação na forma matricial:*

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

2^0**Passo:** *Diagonalizamos a forma quadrática para eliminar os termos mistos. Para isso, precisamos encontrar os autovalores* λ_1 *e* λ_2 *e os autovetores ortonormais* v_1 *e* v_2 *de* $\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$.

3^0**Passo:** *Agora obtemos novas coordenadas, precisamos determinar a relação entre* $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ *e substituir o resultado na parte linear da equação dada.*

$$L(x,y) = \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Mas, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \end{bmatrix}^{autovetores} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

Logo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

4^0**Passo:** *substituído na equação da forma matricial da cônica:*

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = 0$$

Obtemos a equação da cônica no novo sistema de coordenadas. Que toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Ou seja, $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0$

5^0**Passo:** *Eliminamos os termos lineares das coordenadas cujos autovalores são não nulos. Temos então três casos a analisar:*

- *Caso 1 :*$(\lambda_1 \neq 0$ *e* $\lambda_2 \neq 0)$
- *Caso 2:* $(\lambda_1 \neq 0$ *e* $\lambda_2 = 0)$
- *Caso 3:*$(\lambda_1 = 0$ *e* $\lambda_2 \neq 0)$

Caso 1 *:*$(\lambda_1 \neq 0$*e* $\lambda_2 \neq 0)$

$\lambda_1 x_1^2 + ax_1 + \lambda_2 y_1^2 + by_1 + F = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1(x_1 + \frac{a}{2\lambda_1})^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + \lambda_2(y_1 + \frac{b}{2\lambda_2})^2 - \frac{b^2}{4\lambda_2} + F = 0$

Fazendo a seguinte mudança de variável:

$$x_2 = x_1 + \frac{a}{2\lambda_1} \qquad y_2 = y_1 + \frac{b}{2\lambda_2}$$

temos então $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + f = 0$ *(que é uma das equações típicas: Elipse, Hipérbole ou Parábola) onde*

$$f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1} - \frac{b^2}{4\lambda_2}$$

Caso 2: $(\lambda_1 \neq 0 \ e \ \lambda_2 = 0)$

$\lambda_1 x_1^2 + a x_1 + b y_1 + F = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 (x_1 + \frac{a}{2\lambda_1})^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + b y_1 + F = 0$

Tomando $x_2 = x_1 + \frac{a}{2\lambda_1}, \quad y_2 = y_1,$ *temos* $\lambda_1 x_2^2 + b y_2 + f = 0$

(que é uma da equações tipícas) onde

$$f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1}$$

Caso 3:$(\lambda_1 = 0 \ e \ \lambda_2 \neq 0)$

Este é similar ao **caso 2**

Capítulo 3

Via Geometria Analítica

3.1 ROTAÇÃO DE EIXOS EM $\mathbb{R}^2$

Sejam Ox e Oy os eixos primários, do sistema cartesiano de eixos coordenados com origem $O(0,0)$ e seja Ox_1 e Oy_1 eixos de um novo sistema criado a partir da rotação do eixo primário de um ângulo α em torno da origem $O(0,0)$, α é o ângulo formado entre os eixos Ox e Ox_1. Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer do sistema primitivo. Então o mesmo ponto P terá coordenadas $P(x_1,y_1)$, em relação ao novo sistema.

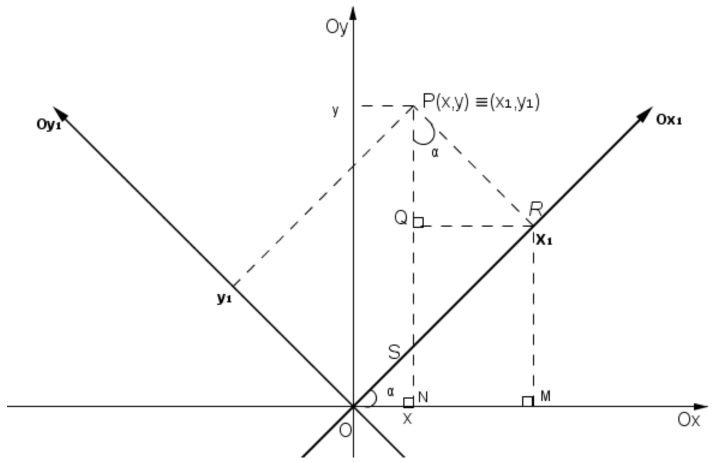

Figura 3.1: Ângulo α entre OX e OX_1

Noção Intuitiva:

Note que podemos relacionar as coordenadas de P em xOy e em x_1Oy_1 como mostra gráfico acima temos:

$$\begin{cases} x = \overline{OM} - \overline{NM} \\ y = \overline{NQ} + \overline{QP} \end{cases}$$

No triângulo OMR:

$\cos\alpha = \dfrac{\overline{OM}}{x_1} \Rightarrow \overline{OM} = x_1 \cos\alpha$ *e* $\overline{MR} = \overline{NQ}$ *e* $sen\,\alpha = \dfrac{\overline{NQ}}{x_1} \Rightarrow \overline{NQ} = x_1 sen\,\alpha$.

No triângulo PQR:

$\overline{QR} = \overline{NM}$ *e* $sen\,\alpha = \dfrac{\overline{NM}}{y_1} \Rightarrow \overline{NM} = y_1 sen\,\alpha$ *e* $\cos\alpha = \dfrac{\overline{QP}}{y_1} \Rightarrow = y_1 \cos\alpha$.

Portanto, $\begin{cases} x = \overline{OM} - \overline{NM} \\ y = \overline{NQ} + \overline{QP} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y sen\,\alpha \\ y = x_1 sen\,\alpha + y_1 \cos\alpha \end{cases}$ *,chamadas de equações de rotação no $\mathbb{R}^2$.*

A rotação de um plano Cartesiano é útil na simplificação da equação de uma cônica.

Exemplo 3.1.1 *Determinar o ângulo, segundo qual os eixos devem ser rotacionados para eliminar o termo xy na equação:* $11x^2 - 10\sqrt{3}xy + y^2 + 32 = 0$

Solução:

Efetuando a rotação de xOy por um ângulo α, tem que:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y sen\,\alpha \\ y = x_1 sen\,\alpha + y_1 \cos\alpha \end{cases}$$

Substituindo as equações de rotação na equação dada, teremos:

$11x^2 - 10\sqrt{3}xy + y^2 + 32 = 0$

$11(x_1 \cos\alpha - y_1 sen\,\alpha)^2 - 10\sqrt{3}(x_1 \cos\alpha - y_1 sen\,\alpha)(x_1 sen\,\alpha + y_1 \cos\alpha) + (x_1 sen\,\alpha + y_1 \cos\alpha)^2 + 32 = 0$

$(11\cos^2 - 10\sqrt{3}\cos\alpha sen\,\alpha + sen^2\alpha)x_1^2 + (-20\cos\alpha sen\,\alpha - 10\sqrt{3}\cos^2\alpha + 10\sqrt{3}sen^2\alpha)x_1y_1 + (11sen^2\alpha + 10\sqrt{3}sen\,\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)y^2 + 32 = 0$

Fazendo o coeficiente do termo x_1y_1 *igual a zero, teremos:*

$(-20\cos\alpha sen\,\alpha - 10\sqrt{3}\cos^2\alpha + 10\sqrt{3}sen^2\alpha)x_1y_1$

$-20\cos\alpha sen\,\alpha - 10\sqrt{3}\cos^2\alpha + 10\sqrt{3}sen^2\alpha = 0$

$-10(2\cos\alpha sen\,\alpha) - 10\sqrt{3}(\cos^2\alpha - sen^2\alpha) = 0$

Usando as identidades trigonométricas:

$sen\,2\alpha = 2sen\,\alpha\cos\alpha$ *e* $\cos 2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$ *,na equação,*

$-10(2\cos\alpha sen\,\alpha) - 10\sqrt{3}(\cos^2\alpha - sen^2\alpha) = 0,$

temos:

$-10sen\,2\alpha - 10\sqrt{3}\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \dfrac{sen2\alpha}{cos2\alpha} = -\sqrt{3} \Rightarrow \tan 2\alpha = -\sqrt{3}$

$\tan 2\alpha = -\sqrt{3} \Rightarrow 2\alpha = 120^o \Rightarrow \alpha = 60^0$

Lembrando do desenvolvimento anterior,sabemos que:

$11(x_1\cos\alpha - y_1 sen\,\alpha)^2 - 10\sqrt{3}(x_1\cos\alpha - y_1 sen\,\alpha)(x_1 sen\,\alpha + y_1\cos\alpha) + (x_1 sen\,\alpha + y_1\cos\alpha)^2 + 32 = 0$

Substituindo os valores encontrados para α*(lembrando que* $sen\,60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^o = \frac{1}{2}$*)*

Temos a equação

$\dfrac{x_1^2}{8} - \dfrac{y_1^2}{2} = 1$ *(Hipérbole)*

A figura abaixo ilustra a hipérbole $11x^2 - 10\sqrt{3}xy + y^2 + 32 = 0$ *no plano* xOy*, sendo* x_1Oy_1 *obtido através da rotação de* xOy *por um ângulo* α *de* 60^o.

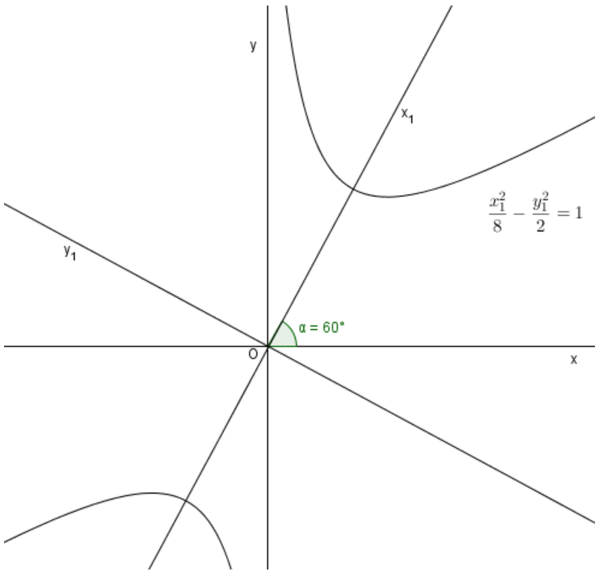

Figura 3.2: Hipérbole $\dfrac{x_1^2}{8} - \dfrac{y_1^2}{2} = 1$

Exemplo 3.1.2 *Determine o angulo, segundo qual os eixos devem ser rotacionados para eliminar o termos xy da equação $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 16 = 0$*

Solução:

Substituindo na equação acima as equações de transformações temos:

$3(x_1 \cos\alpha - y_1 sen\,\alpha)^2 - 2(x_1 \cos\alpha - y_1 sen\,\alpha)(x_1 sen\,\alpha + y_1 \cos\alpha) + 3(x_1 sen\,\alpha + y_1 \cos\alpha)^2 - 16 = 0$

Desenvolvendo e pondo os termos x^2, y^2 e x_1y_1 em evidencias temos:

$(3cos^2\alpha - 2\cos\alpha sen\,\alpha + 3sen^2\alpha)x^2 + (-6\cos\alpha sen\,\alpha - 2\cos^2\alpha + 2sen^2\alpha + 6\cos\alpha sen\,\alpha)x_1y_1 + (3sen^2\alpha - 2\cos\alpha sen\,\alpha + 3\cos^2\alpha)y^2 = 16$

Fazendo o coeficiente do termo x_1y_1 igual a zero teremos:

$-6\cos\alpha sen\,\alpha - 2\cos^2\alpha + 2sen^2\alpha + 6\cos\alpha sen\,\alpha = 0$

Portanto

$2sen^2\alpha = 2cos^2$

Onde $\alpha = 45^o$. Usando este ângulo obtemos, $2x_1^2 + 4y_1^2 = 16$ ou simplesmente $x_1^2 + 2y_1^2 = 8$ que é a equação da elipse, como mostra o gráfico abaixo.

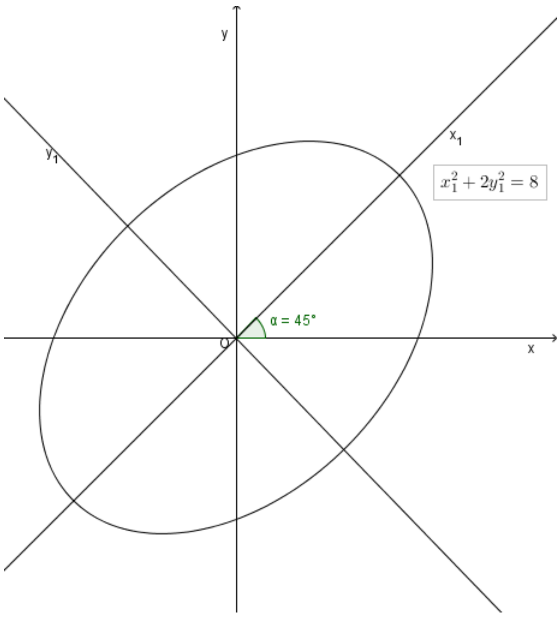

Figura 3.3: Elipse $x_1^2 + 2y_1^2 = 8$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho de conclusão de curso, apresentamos o estudo das quádricas $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$*, particularmente as cônicas a saber (Parábola, elipse, hipérbole), na eliminação dos termos mistos* xy*. Foi utilizado dois métodos.*

O primeiro método utilizado foi via álgebra linear, respectivamente escrevendo a equação na forma matricial, diagonalizamos a forma para eliminar os termos mistos, para isso precisamos encontrar os autovalores logo os autovetores ortonormais para obtermos as nova coordenadas e em seguida substituindo as novas coordenadas na equação e eliminarmos o termo misto. Este procedimento nos permite, através de uma mudança de referencial, colocar qualquer cônica com termo misto, na forma de uma das equações típicas apresentadas no primeiro capítulo.

No segundo método utilizamos a rotação de eixo, com os conhecimentos de geometria analítica, podendo relacionar o ângulo α *que sofreu uma rotação a partir do sistema* xoy*, criando um novo sistema* x_1oy_1*,podemos relacionar através de um ponto qualquer no eixo* ox_1 *e relacionar com o primeiro sistema, criando relações ,para serem substituídas na equação primaria e logo em seguida, fazendo coeficiente* x_1y_1 *e dessa forma encontrando o ângulo, que será utilizado na equação modificada pelas relações e usando conhecimentos da trigonometria achamos a equação da cônica.*

No exemplo 03 abordado no método via álgebra linear, fica muito trabalhoso, já no método de rotação de eixo via geometria analítica, é menos trabalhoso,sendo que tem que conhecer as identidades trigonométricas. Concluímos que nosso trabalho é útil para ajudar na compreensão da resolução da equação da cônica com os temos mistos, utilizando dois métodos de melhor compreensão.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOLDRINI, JOSÉ LUIZ, **Álgebra Linear***, 3.ed Campinas: HARBRA, 1986.*

[2] WINTERIE, PAULO, **Vetores e Geometria Analítica***,São Paulo: PEARSOM MAKRON BOOKS, 2000.*

[3] GIOVANNI, JOSÉ RUY;BONJORNO, JOSÉ ROBERTO, **Matemática Completa***,2.ed São Paulo: FTD S.A., 2005.*

[4] MEDEIROS, LUIZ ADAUTO;ANDRADE, NIRZI GONÇALVES DE;WANDERLEY, AUGUSTO MAURÍCIO, **Álgebra Vetorial e Geometria***,Rio de Janeiro: CAMPUS, 1980.*

[5] BOYER, CARL B., **História da Matemática***, São Paulo: EDGAR BLUNCHER LTDA, 1996.*

[6] RIBEIRO, JACKSON, **Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia***, 1.ed São Paulo: SCIPIONE, 2010.*