UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

FRANCINOR DA SILVA MELO

ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS E TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS

Macapá-AP

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

FRANCINOR DA SILVA MELO

ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS E TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do professor Mestre Marcel Lucas Picanço Nascimento.

Macapá-AP

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

515.7
M528e   Melo, Francinor da Silva.
Espaços métricos completos e teorema de *Banach-Steinhaus* / Francinor da Silva Melo; orientador, Marcel Lucas Picanço Nascimento. -- Macapá, 2016.
71 p.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Espaços métricos. 2. *Banach*, Espaços de. 3. Operadores lineares I. Nascimento, Marcel Lucas Picanço; orientador II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
FRANCINOR DA SILVA MELO

ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS E TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS

AVALIADORES:

____

Me. Caroline Lima de Sousa
Universidade Federal do Amapá

____

Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
Universidade Federal do Amapá

____

Me . Marcel Lucas Picanço Nascimento
Universidade Federal do Amapá

Avaliado em: ____/____/____

Macapá-AP
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
FRANCINOR DA SILVA MELO

ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS E TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS

AVALIADORES:

Caroline Lima de Souza

Me. Caroline Lima de Sousa
Universidade Federal do Amapá

Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
Universidade Federal do Amapá

Marcel Lucas Picanço Nascimento

Me . Marcel Lucas Picanço Nascimento
Universidade Federal do Amapá

Avaliado em: 21/09/16

Macapá-AP
2016

Dedico este Trabalho...

Aos meus pais, Atenor da C. Oliveira e Maria da C. Melo Oliveira.

Ao meu irmão, Claudionor da Silva Melo.

A Wanessa Costa Vaz e a Evellyn Lawany, dois anjos em minha vida.

Ao Professor Marcel Nascimento, que no decorrer do trabalho me orientou.

Aos colegas de turma 2012, que contribuíram significativamente com bons e memoráveis momentos ao longo do curso.

A todos os Professores do colegiado de matemática, que me possibilitaram crescer enquanto acadêmico e profissional.

Agradeço primeiramente a Deus por todas as bênçãos recebidas e por me fortalecer nos momentos de dificuldade, me possibilitando chegar até aqui.

Aos meus pais, Atenor da C. Oliveira e Maria da C. Melo Oliveira, que apesar de todas as adversidades que surgiram pelo caminho, estiveram sempre ao meu lado, incentivando e dando todo o apoio necessário para que meu objetivo pudesse ser alcançado.

Ao meu irmão, Claudionor da Silva Melo e minha irmã, Rutilene Melo Oliveira, que sempre me ajudaram e serviram de fonte inspiradora para eu seguir com fé nos estudos.

A wanessa Costa Vaz, por durante todo o desenvolvimento do trabalho está ao meu lado, ajudando, incentivando e cuidando de mim.

Ao meu orientador Professor. Me. Marcel Lucas Picanço Nascimento, pelo conhecimento a mim transmitido, pela dedicação e paciência.

Agradeço também a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho.

"Deus não nos fez perfeitos e não escolhe os capacitados, capacita os escolhidos."

Albert Einstein

Resumo

O presente trabalho, intitulado espaços métricos completos e teorema de Banach-Steinhaus, tem por objetivo realizar uma conexão entre, a teoria dos espaços métricos, os espaços métricos completos e os espaços de Banach, que juntamente com os operadores lineares e contínuos nos darão a base para trabalharmos um dos principais resultados em análise funcional, o teorema de Banach-Steinhaus.

Palavras-chave: Espaços métricos, espaços de Banach, operadores lineares e contínuos.

Abstract

Conteúdo

Lista de Figuras

Introdução

A teoria dos espaços métricos e a análise funcional além de suas próprias aplicações, são disciplinas que possuem ligações com outras partes da matemática, porém não são obrigatórias num currículo mínimo de um curso de Licenciatura em Matemática.

Alguns dos pré-requisitos básicos para seguir com o entendimento deste trabalho, é um estudo de análise na reta (conjuntos abertos, fechados, continuidade etc ...), noções de convergência de sequências e sequências de funções, além de algumas noções básicas de álgebra linear.

A escolha do tema se deu pelo interesse de se aprender algo novo, comprender conteúdos diferentes do que se ver em níveis de graduação, pois como já dissemos, espaços métricos e análise funcional são disciplinas não obrigatórias em um curso de licenciatura em matemática, sendo a análise funcional, muitas das vezes apenas disciplina introdutória em cursos de doutorado.

Nos objetivos pensados para este trabalho, pretende-se abordar diversos tópicos importantes da teoria dos espaços métricos e trabalhar a completeza de certos espaços. Pretende-se ainda tratar de uma parte introdutória da análise funcional, dando ênfase ao teorema de Banach-Steinhaus conhecido também como teorema da limitação uniforme, o qual garante que uma família de operadores lineares contínuos é uniformimente limitada sempre que for pontualmente limitada.

Este trabalho divide-se em 3 capítulos. O primeiro capítulo, **espaços métricos**, serão abordados alguns resultados como: Métrica, conjuntos limitados, continuidade e algumas noções básicas de topologia (conjuntos abertos, fechados, ponto de acumulação, etc ...). O segundo capítulo, **espaços métricos completos**, trás diversos resultados sobre sequências, na ocasião definimos sequências de Cauchy, chegando aos espaços métricos completos e os espaços de Banach.

Por fim, no último capítulo, **operadores lineares e contínuos e teorema de Banach-Steinhaus**, tratamos dos operadores lineares e contínuos que juntamente com a teoria trabalhada nos capítulos anteriores nos darão a base para desenvolvermos os principais resultados deste trabalho, o teorema de Baire, teorema de Banach- Steinhaus e seu corolário. Ao final deste capítulo, foram acrescentado dois apêndices, tratando da desigualdade de Cauchy-Schwarz e sobre operações com conjuntos.

Capítulo 1

Espaços Métricos

Este capítulo apresentará resultados de grande relevância para o desenvolvimento deste trabalho, traremos alguns conceitos topológicos, dentre os quais: bolas e esferas, abertos, fechados, continuidade etc. A ideia de métrica está associada à noção intuitiva de distância, a qual precisa satisfazer algumas propriedades, conforme definição abaixo.

1.1 Definições e exemplos

Definição 1.1 *Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y, de modo a serem satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

$d_1)$ $d(x, x) = 0$;

$d_2)$ *se* $x \neq y$ *então* $d(x, y) > 0$;

$d_3)$ $d(x, y) = d(y, x)$;

$d_4)$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

As condições $d_1)$ e $d_2)$ dizem que $d(x, y) \geq 0$ e que $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. O postulado $d_3)$ afirma que a distância $d(x, y)$ é uma função simétrica das variáveis x, y. A condição $d_4)$ chama-se desigualdade do triângulo; ela tem origem no fato de que, no plano euclidiano o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois.

Definição 1.2 *Um espaço métrico é um par* (M, d)*, onde* M *é um conjunto e* d *é uma métrica em* M.

Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc. Mas nós os chamaremos sempre os pontos de M.

Daremos agora alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1.1 (A métrica "zero-um") *Qualquer conjunto* M *pode se tornar um espaço métrico de maneira muito simples. Basta definir a métrica*

$$\begin{aligned} d : M \times M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow d(x, x) = 0 \ e \ d(x, y) = 1 \ se \ x \neq y. \end{aligned}$$

As condições $d_1)$ *a* $d_3)$ *são facilmente verificadas. Vamos mostrar que esta métrica cumpre a condição* $d_4)$*, a desigualdade triângular.*

$d_4)$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in M.$

Demonstração: *Para mostrarmos esta condição, vamos dividir em quatro casos:*

(1°) Caso: $x \neq y \neq z$

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \ \Rightarrow 1 \ \leq 1 + 1 \ \Rightarrow 1 \ \leq 2.$

(2°) Caso: $x = y = x$

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \ \Rightarrow 0 \ \leq 0 + 0 \ \Rightarrow 0 \ \leq 0.$

(3°) Caso: $x = y, x \neq z, y \neq z$

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \ \Rightarrow 1 \ \leq 0 + 1 \ \Rightarrow 1 \ \leq 1.$

Portanto fica verificada a condição d_4 *para a métrica "zero-um".* □

O espaço métrico que se obtém desta maneira é, naturalmente, bastante trivial, embora seja útil para contra exemplos.

Observação 1.1 *Na demonstração anterior não existe a possibilidade de termos o caso de* $x \neq z$ *,* $y = z$ *e* $x = y$*, pois se* $x \neq z$ *e* $x = y$*, então* $y \neq z$*, logo teríamos* $x \neq z, x = y$ *e* $y \neq z$ *que é justamente o 3° caso.*

Exemplo 1.2 (Subespaço; métrica induzida) *Se (M, d) é um espaço métrico, todo subconjunto $S \subset M$, com $S \neq \emptyset$, pode ser considerado, de modo natural, como espaço métrico, basta considerar a restrinção de d a $S \times S$, ou seja , usar entre os elementos de S a mesma distância que eles possuíam como elementos de M. Quando isto é feito, S chama-se um subespaço de M e a métrica de S diz-se induzida pela de M. Esta ideia nos permite obter uma grande variedade de exemplos de espaços métricos, considerando os diversos subconjuntos de um espaço métrico dado.*

Exemplo 1.3 (O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$) *Os pontos do $\mathbb{R}^n$ são as listas $x = (x_i, \ldots, x_n)$ onde cada uma das n coordenadas x_i é um número real. Há três maneiras naturais de se definir a distância entre os pontos em $\mathbb{R}^n$. Dados $x = (x_i, \ldots, x_n)$ e $y = (y_i, \ldots, y_n)$ escrevemos:*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}, \\ d'(x,y) &= |x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i| \text{ e} \\ d"(x,y) &= \max\{|x_1-y_1|,\cdots,|x_n-y_n|\} = \max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|. \end{aligned}$$

*As funções d, d', $d"$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são métricas. De fato elas cumprem as condições $d_1)$,$d_2)$ e $d_3)$. A condição $d_4)$ não é tão direta assim, para ver que todas as métricas assim definidas acima cumprem esta condição (ver apêndice **A**, Teorema A.1).*

A métrica d é chamada euclidiana. Ela provém da fórmula para distância entre dois ponto do plano (em coordenadas cartesianas), a qual se prova com o Teorema de Pitágoras. Evidentimente, para considerações de natureza geométrica , d é a métrica natural pois fornece a distância da geometria euclidiana.

O resultado seguinte fornece uma comparação entre as métricas d, d' e $d"$.

Proposição 1.1 *Sejam d, d'e $d"$ as métricas definidas no exemplo 1.3. Quaisquer que sejam $x,\ y \in \mathbb{R}^n$, tem-se:*

$$d"(x,y) \le d(x,y) \le d'(x,y) \le n \cdot d"(x,y)$$

Demonstração: sejam $x,\ y \in \mathbb{R}^n$,

a) $d"(x,y) \leq d(x,y)$

De fato , $d"(x,y) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = |x_j - y_j|$, para um certo j, então

$$d"(x,y) = |x_j - y_j| = \sqrt{(x_j - y_j)^2},\ pois\ |x| = \sqrt{x^2},$$

Mas

$$\sqrt{(x_j - y_j)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = d(x,y),$$

portanto $d"(x,y) \leq d(x,y)$.

b) $d(x,y) \leq d'(x,y)$.

Temos que

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2} \text{ pois, } |x|^2 = x^2.$$

Mas

$$\sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2} \leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2 + 2\sum_{i\neq j}^{n} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j|}$$

$$= \sqrt{(|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|)^2} = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = d'(x,y).$$

Portanto $d(x,y) \leq d'(x,y)$.

c) $d'(x,y) \leq n \cdot d"(x,y)$.

Observe que , $|x_i - y_i| \leq \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$, assim temos

$$d'(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| + \cdots + \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = n \cdot d"(x,y),$$

Portanto $d'(x,y) \leq n \cdot d"(x,y)$.

Logo $d"(x,y) \leq d(x,y) \leq d'(x,y) \leq n \cdot d"(x,y)$

□

Um espaço de funções. Seja X um conjunto arbitrário e não vazio. Indicamos por $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções reais $f : X \to \mathbb{R}$.

Definição 1.3 *Dado um conjunto $X \neq \emptyset$, uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se limitada quando existe uma constante $K = K_f > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$, para todo $x \in X$.*

Exemplo 1.4 *Seja $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ o conjunto de funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$. A soma, a diferença e o produto de funções limitadas são ainda limitadas.*

Definiremos agora uma métrica d em $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ pondo, para todas $f,\ g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

A métrica assim definida é a chamada métrica do supremo, onde $\{|f(x)-g(x)|\}$ é o conjunto das imagens de $|(f-g)(x)|$. Este conjunto é um subconjunto real não vazio e limitado, logo faz sentido tomarmos o seu supremo. O conjunto $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ munido da métrica d definida acima é um espaço métrico.

Exemplo 1.5 (Espaços vetoriais normados) *Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função real*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\to \mathbb{R} \\ x &\to \|x\| \end{aligned}$$

de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer $x,\ y,\ z \in E$ e λ escalar:
N_1) se $x \neq 0$ então $\| x \| \neq 0$.
N_2) $\| \lambda \cdot x \| = | \lambda | \cdot \| x \|$.
N_3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.
Dessas condições acima, podemos obter outras:

- *N_4)* $\|0\| = 0$.

  Em N_2 pondo $\lambda = 0$,temos que:

  $\|0\| = \|0 \cdot x\| = |0| \cdot \|x\| = 0 \cdot \|x\| = 0$ *portanto* $\|0\| = 0$.

- *N_5)* $\|-x\| = \|x\|$.

  Em N_2 pondo $\lambda = -1$,temos que:

  $\|-x\| = \|(-1)\cdot x\| = |-1| \cdot \|x\| = 1 \cdot \|x\| = \|x\|$ *portanto* $\|-x\| = \|x\|$.

- *N_6)* $\|x\| \geq 0$.

  Fazendo $y = -x$ em N_3, obtemos :

  $\|x+(-x)\| \overbrace{\leq}^{N_3} \|x\|+\|-x\| \overbrace{\leq}^{N_5} \|x\|+\|x\| \Rightarrow \|0\| \leq 2\|x\| \Rightarrow 0 \overbrace{\leq}^{N_4} 2\|x\| \Rightarrow \|x\| \geq 0.$

Um espaço vetorial normado é um par $(E, \|\cdot\|)$ onde E é um espaço vetorial real e $\|\cdot\|$ é uma norma em E. Frequentemente se designa o espaço vetorial normado com E, deixando a norma subentendida.

Proposição 1.2 *A função $d : E \times E \to \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica em E.*

Demonstração: Seja $x,\ y \in E$,

$d_1)$ $d(x, x) = 0$.
De fato, $d(x, x) = \|x - x\| = \|0\| = 0$

$d_2)$ *se* $x \neq y$, então $d(x, y)\ > 0$.
De fato, $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$, por hipótese $x \neq y$, daí resta que $d(x, y) > 0$.

$d_3)$ $d(x, y) = d(y, x)$.
De fato, $d(x, y) = \|x - y\| = \| - y + x\| = \|(-1)(y - x)\| = | - 1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$.

$d_4)$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.
De fato, $d(x, z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\|+\|y-z\| = d(x, y) + d(y, z)$.

Logo d é uma métrica em E. □

Da proposição acima segue que, todo espaço vetorial normado é um espaço métrico. A métrica assim definida é dita proveniente da norma $\|\cdot\|$ ou induzida pela norma $\|\cdot\|$.

Exemplos de espaços vetoriais normados são $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$ *e* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|")$, onde, para $x = (x_1, \cdots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$, se tem

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2},\ \|x\|' = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ e } \|x\|'' = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

As condições que caracterizam uma norma são de verificação imediata, salvo no $N_3)$ para a primeira destas normas. Ela será verificada mais adiante na proposição 1.3.

Outro exemplo de espaço vetorial normado é $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$, o espaço de funções reais limitadas, onde definimos $\|f\| = \sup|f(x)|, x \in X$.

As métricas d, d' e d" do exemplo 1.3 são provenientes das normas $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ respectivamente.

Exemplo 1.6 (Espaços vetoriais com produto interno) *Seja E um espaço vetorial real.Um produto interno em E é uma função*

$$\begin{array}{rcl} \langle\cdot,\cdot\rangle : \; E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & \langle x,y\rangle \end{array}$$

que associa a cada par ordenado de vetores $x, y \in E$ um número real $\langle x,y\rangle$, chamado o produto interno de x por y, de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para $x, y, z \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários:

$P_1)$ $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$;

$P_2)$ $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$;

$P_3)$ $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$;

$P_4)$ $x \neq 0 \Rightarrow \langle x,x\rangle > 0$.

De $P_1)$ a $P_3)$ podemos tirar outras condições:

- $P_5)$ $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$; *pois*
  $\langle x,y+z\rangle \underbrace{=}_{P_3} \langle y+z,x\rangle \underbrace{=}_{P_1} \langle y,x\rangle + \langle z,x\rangle \underbrace{=}_{P_3} \langle x,y\rangle + \langle z,x\rangle$.
- $P_6)$ $\langle x,\lambda y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$; *pois*
  $\langle x,\lambda y\rangle \underbrace{=}_{P_3} \langle \lambda y,x\rangle \underbrace{=}_{P_2} \lambda\langle y,x\rangle$.
- $P_7)$ $\langle 0,y\rangle = 0$; *pois*
  $\langle 0,y\rangle = \langle 0\cdot x,y\rangle \underbrace{=}_{P_2} 0\langle x,y\rangle = 0$.

Um espaço vetorial E com produto interno é um par ($E, \langle\cdot,\cdot\rangle$) onde E é um espaço vetorial real e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno em E.

Proposição 1.3 *Em um espaço vetorial com produto interno, define-se a norma de um vetor $x \in E$ do seguinte modo: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, ou seja, $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.*

Demonstração: *Sejam $x,\ y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.*

$N_1)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, *pois*

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$, *pela contrapositiva de* P_4.

$N_2)$ $\| \lambda \cdot x \| = | \lambda | \cdot \| x \|$

$$\|\lambda \cdot x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} \underbrace{=}_{P_2} \sqrt{\lambda\langle x, \lambda x\rangle} \underbrace{=}_{P_3} \sqrt{\lambda\langle \lambda x, x\rangle} \underbrace{=}_{P_2} \sqrt{\lambda^2\langle x, x\rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

$N_3)$ $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$, *Para provar* $N_3)$ *usaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, 2º versão (ver apêndice **A**, Teorema A.2).*

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\ \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle =$$

$$= \|x\|^2 + 2\ \langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\ |\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{Cauchy-Schwar} \|x\|^2 + 2\ |\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\ \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

temos portanto,

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \Leftrightarrow \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| .$$

$\square$

O exemplo mais natural de espaço vetorial com produto interno é $\mathbb{R}^n$, com $x = (x_i, \cdots, x_n)$ e $y = (y_i, \cdots, y_n)$, define-se $\langle x, y\rangle = x_i y_i + \cdots + x_n y_n$. A norma $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$ introduzida no exemplo 1.5, provém deste produto interno. em particular, fica verificada a condição $N_3)$ $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ que faltava no exemplo 1.5.

Nem toda norma num espaço vetorial E provém de um produto interno. Quando isto ocorre, vale a chamada lei do paralelogramo: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ que decore imediatamente da definição $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, em outras palavras vale o resultado a seguir:

A norma $\|x\|$ provém do produto interno (ou seja , $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$) se, e somente se vale a lei do paralelogramo.

Conclusão: Todo espaço vetorial com produto interno é um espaço vetorial normado por meio da norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, e todo espaço vetorial normado é um espaço métrico por meio da métrica $d(x, y) = \|x - y\|$. Portanto todo espaço vetorial com produto interno é um espaço métrico. Em outras palavras temos que: todo produto interno induz uma norma e toda norma induz uma métrica.

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}.$$

1.2 Bolas e Esferas

A noção de bola é fundamental no estudo dos espaços métricos. Seja a um ponto do espaço métrico M. Dado um número real $r > 0$, definimos:

i) A **bola aberta** de centro a e raio r é o conjunto $B(a; r)$ dos pontos de M em que distância ao ponto a é menor do que r. ou seja:

$$B(a; r) = \{x \in M;\ d(x, a) < r\}.$$

ii) A **bola fechada** de centro a e raio r é o conjunto $B[a; r]$ formado pelos pontos de M que estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto a. Ou seja:

$$B[a; r] = \{x \in M;\ d(x, a) \leq r\}.$$

iii) A **esfera** de centro a e raio r é o conjunto $S(a; r)$ formado pelos pontos de M tais que $d(x, a) = r$. Assim:

$$S(a, r) = \{x \in M;\ d(x, a) = r\}.$$

Bolas e esferas às vezes adquirem aspectos inesperados. O aspecto de cada bola depende de cada métrica usada. Vamos aos exemplos.

Exemplo 1.7 *Com a* ***métrica usual da reta****, para todo $a \in R$ e todo $r > 0$, a bola aberta $B(a; r)$ é o intervalo aberto $(a - r, a + r)$, pois a condição $|x - a| < r$ equivale*

$-r < x-a < r$, ou seja: $a-r < x < a+r$. Analogamente, a bola fechada $B[a,r]$ é o intervalo fechado $[a-r, a+r]$ e a esfera $S(a;r)$ tem apenas dois pontos: $a-r$ e $a+r$.

Exemplo 1.8 *No **plano** $\mathbb{R}^2$ para todo $x=(x_1,x_2)$ e $a=(a_1,a_2)$, temos:*

i) Usando a métrica usual d, $d(x,a)=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}$.

$B(a;r)=\{x\in\mathbb{R}^2;\ d(x,a)<r\}$, Observe que, $d(x,a)=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2} < r \Leftrightarrow (x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2 < r^2$ (equação da circunferência de centro a e raio r). $B(a,r)$ é o interior de um círculo de centro $a=(a_1,a_2)$ e raio r.

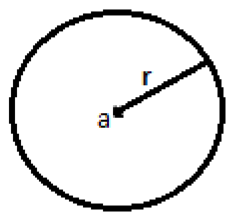

Figura 1.1: Bola na métrica d

ii) Usando a métrica d', $d'(x,a)=|x_1-a_1|+|x_2-a_2|$.

*$B(a;r)=\{x\in\mathbb{R}^2;\ d'(x,a)<r\}$, observe que, $d'(x,a)=|x_1-a_1|+|x_2-a_2|<r$ que é o interior de um quadrado de centro $a=(a_1,a_2)$ e **diagonais** de comprimento $2r$ paralelas aos eixos.*

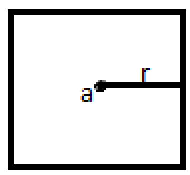

Figura 1.2: bola na métrica d‘

iii) Usando a métrica d”, $d"(x,a)=\max\{|x_1-a_1|,|x_2-a_2|\}$.

*$B(a;r)=\{x\in\mathbb{R}^2;\ d"(x,a)<r\}$, observe que $d"(x,a)=\max\{|x_1-a_1|,|x_2-a_2|\} < r \Rightarrow |x_1-a_1|<r$ e $|x_2-a_2|<r$ que é o interior de um quadrado de centro $a=(a_1,a_2)$ e **lados** de comprimentos $2r$, paralelos aos eixos.*

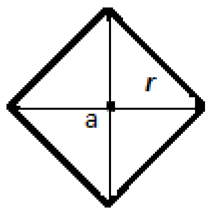

Figura 1.3: Bola na métrica d"

Exemplo 1.9 *No espaço de funções, (exemplo 1.4), com a* ***métrica do supremo*** *em que* $d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$, *com* $f,\ g \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$. *Dado um número real* $r > o$ *temos:*

Bola aberta $B(f,r) = \{g \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})\ ; d(f,g) < r\}$

Bola fechada $B[f,r] = \{g \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})\ ; d(f,g) \leq r\}$

A condição para que uma função limitada $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *pertença a bola fechada* $B[f,r]$ *é que* $d(f,g) = \sup |f(x) - g(x)| \leq r$, *ou seja,* $|f(x) - g(x)| \leq r,\ \forall\ x \in [a,b]$. *geometricamente consideremos,* $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [a,b]\}$. *Como* $x \in [a,b]$ *e* $|f(x) - g(x)| \leq r \Rightarrow y \in [f(x) - r, f(x) + r]$. *Então* $G(g) = \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [a,b]\}$ *está contido numa faixa de amplitude* $2r$ *em torno de* $G(f)$. *Agora, para que* $g \in B(f,r)$, $|f(x) - g(x)| < r,\ \forall\ x \in\ [a,b]$, *geometricamente,* $G(g)$ *está contido numa "faixa aberta"de amplitude* $2r$ *em torno de* $G(f)$.

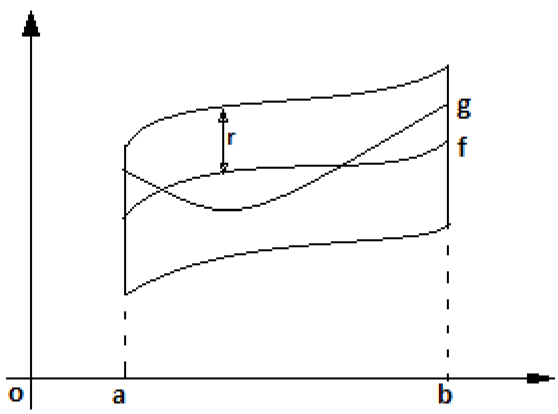

Figura 1.4: Bola na métrica do sup

1.3 Conjuntos limitados

Definição 1.4 *Um conjunto $X \neq \emptyset$ contido num espaço métrico M chama-se limitado quando existe uma constante $K > 0$ tal que $d(x, y) \leq K$ para quiasquer $x,\ y \in X$.*

O menor desses números K será chamado o diâmetro de X. Ora, dizer que $x,\ y \in X$ implica $d(x, y) \leq K$ significa afirmar que K é uma cota superior para o conjunto das distâncias $d(x, y)$ entre os pontos de X. A menor das cotas superiores de um conjunto de números reais chama-se o supremo desse conjunto. Logo, podemos definir o diâmetro de um conjunto limitado $X \subset M$ como o número real:

$$\text{diam(X)} = \sup\{d(x, y)\ ; x, y\ \in X\}.$$

Quando X não é limitado escrevemos diam(X) $= \infty$. Isto significa que, para todo $K \in \mathbb{R}$, existem pontos $x,\ y \in X$ tais que $d(x, y) > K$.

Proposição 1.4 *Se X é limitado e $Y \subset X$, então Y é limitado valendo $diam(y) \leq diam(X)$.*

Demonstração: Sejam $x, y \in Y$, por hipótese $Y \subset X$, então $x, y \in X$. Ainda pela hipótese, temos que X é limitado, isto é, existe $K > 0$ tal que $d(x, y) \leq K$, $\forall x, y\ \in X$. Então existe $K > 0$ tal que $d(x, y) \leq K$, $\forall x, y\ \in Y$, pois todos os elementos de Y são elementos de X. Portanto $Y \subset X$ é limitado. Pelo fato de $Y \subset X$, temos que $\{d(x, y)\ ; x,\ y\ \in y\} \subset \{d(x, y)\ ; x,\ y\ \in X\}$. Logo $\sup\{d(x, y)\ ; x,\ y\ \in y\} \leq \sup\{d(x, y)\ ; x,\ y\ \in X\}$. Portanto $diam(Y) \leq diam(X)$. □

Proposição 1.5 *Se A e B são conjuntos limitados de um espaço métrico, então $A \cup B$ é limitado.*

Demonstração: Se $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$ nada a fazer, pois o vazio é limitado por definição. Caso contrário, fixemos um ponto $a \in A$ e um ponto $b \in B$. por hipótese A e B são limitados, então existem $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ tal que $d(x, y) \leq K_1, \forall\ x, y\ \in A$ e $d(x, y) \leq K_2,\ \forall\ x, y\ \in B$. Em particular $d(x, a) \leq K_1, \forall\ x, a\ \in A$ e $d(y, b) \leq K_2,\ \forall\ y, b\ \in B$. Assim fazendo $K = K_1 + K_2 + d(a, b)$ temos, para qualquer $x \in A$ e $y \in B$,

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(y, a) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(y, b) \leq K_1 + d(a, b) + K_2 = K,$$

Logo $d(x,y) \leq K, \forall x,\ y\ \in A \cup B$. Portanto, $A \cup B$ é limitado. □

Proposição 1.6 *Toda bola $B(a,r)$, num espaço métrico, é um conjunto limitado e seu diâmetro não excede $2r$.*

Demonstração: De fato, dados dois pontos $x, y \in B(a,r)$ temos que à $d(x,a) < r$ e $d(y,a) < r$. Dai pela desigualdade triângular temos

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) \leq r + r = 2r \Rightarrow d(x,y) \leq 2r,$$

ou seja, existe $K = 2r > 0$ tal que $d(x,y) \leq K,\ \forall\ x,\ y\ \in B(a,r)$. O mesmo se aplica a bola fechada $B[a;r]$. Como $B[a;r] = B(a;r) \cup S(a;r)$ então $S(a;r)$ também é limitada. Agora vamos mostrar que seu diâmetro não excede $2r$. De fato, suponha que exista o $diam\ B(a;r) = D$, tal que $D > 2r$, que é uma cota. Mas por hipótese de contradição $2r < D = \sup\{d(x,y); x, y\ \in B(a,r)\}$. Absurdo, pois D é a menor das cotas superiores, logo não pode ser maior do que uma cota. Logo $D \leq 2r$. □

Proposição 1.7 *Um subconjunto X de um espaço métrico M é limitado se, e somente se, está contido em alguma bola de M.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $X \subset M$ é limitado, então X está contido em alguma bola de M. De fato, se X é vazio, X está contido em qualquer bola. Se X não é vazio , tomando qualquer $a \in X$, existe $K > 0$ tal que $d(a,x) \leq K$, para todo $x \in X$ (pois X é limitado). Logo, $X \subset B[a,K] \subset B(a,2K)$.
($\Leftarrow$) Se $X \subset B(a,r)$, então X é limitado e tem diâmetro menor ou igual a 2r.
De fato, pois toda bola é um conjunto limitado, por hipótese $X \subset B(a,r)$, logo X é limitado, pois um subconjunto de um conjunto limitado é limitado. □

1.4 Funções contínuas

Definição 1.5 *Sejam M,N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)\ ) < \varepsilon$.*

Em notação temos que uma aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando,

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0\ \ ;\ d(x,a) < \delta\ \ \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Equivalentimente, $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, dada qualquer bola $B'(f(a);\varepsilon)$ de centro $f(a)$, pode-se encontrar uma bola $B(a,\delta)$ de centro a tal que $f(B) \subset B'$. isto é;

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0\ ;\ f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon).$$

A noção de continuidade num ponto é local, isto é, depende apenas do comportamento de f nas proximidades do ponto. Diz se que $f : M \to N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.

No importante caso particular em que $M \subset \mathbb{R}$ e $f : M \to \mathbb{R}$, dizer que f é contínua no ponto $a \in M$ significa afirmar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in M$ e $a - \delta < x < a + \delta$ implicam $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, ou seja, f transforma os pontos de M que estão no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ em pontos do intervalo aberto $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se contínua quando é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$ desde que se tome x suficientemente próximo de a.

Exemplo 1.10 *Dada $f : M \to N$, suponhamos que exista uma constante $c > 0$ (chamada constante de Lipschitz) tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y)$ quaisquer que sejam $x, y \in M$. Dizemos então que f é uma* ***Aplicação Lipschitziana****. Neste caso, f é contínua (em cada ponto $a \in M$).*

Vamos mostrar que toda aplicação Lipschitziana é uma aplicação contínua.

Isso significa que qualquer que seja $\varepsilon > 0$ escolhido devemos encontrar $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Vamos trabalhar a seguinte desigualdade $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ para estimarmos o valor de δ, ou seja; $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, f é lipschtziana, então podemos fazer: $d(f(x),(a)) \leq c \cdot d(x,a) \Leftrightarrow d(x,a) < \frac{\varepsilon}{c}$ então tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, temos

$$\forall\ x,\ \ d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x),(a)) \leq c \cdot d(x,a) < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq \epsilon$$

Portanto, f é contínua.

Exemplo 1.11 *Se uma função real $f : I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo I, é derivável e $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in I$, então pelo teorema do valor médio, dados $x,\ y \in I$ quais quer, existe um ponto z, entre x, y tal que*

$$f'(z) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \Leftrightarrow f(x) - f(y) = f'(z)(x - y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f'(z)(x - y)| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| = |f'(z)| \cdot |x - y| \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|.$$

Isto é $d(f(x) - f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$. Assim toda função com derivada limitada num intervalo (o qual pode ser ilimitado) é Lipschitziana.

Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se **Localmente Lipschitziana** quando cada ponto $a \in M$ é centro de uma bola $B(a; r)$ tal que a restrinção $f|B$ é lipschitziana. Uma aplicação localmente lipschitziana é, evidentimente, contínua.

1.5 Continuidade uniforme

Seja $f : M \to N$ contínua. Dado $\epsilon > 0$ podemos, para cada $a \in M$, obter $\delta > 0$ (que depende de ϵ e de a) tal que $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon$.

Nem sempre é possível obter, a partir de $\epsilon > 0$ dado, um unico $\delta > 0$ que sirva para todos os pontos $a \in M$.

Exemplo 1.12 *Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Dado $\epsilon > 0$ mostraremos que não se pode escolher $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon$ seja qual for $a > 0$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, suponhamos escolhido $\delta > 0$. Tomemos um número positivo a tal que $0 < a < \delta$ e $0 < a < \frac{1}{3\epsilon}$. Então, para $x = a + \frac{\delta}{2}$, temos $|x - a| < \delta$ mas*

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{a + \frac{\delta}{2}} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{2}{2a + \delta} - \frac{1}{a}\right| = \frac{\delta}{(2a + \delta)a} > \frac{\delta}{3\delta \cdot a} = \frac{1}{3a} > \epsilon.$$

Portanto para esta função não se pode escolher $\delta > 0$ a partir de um ϵ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon$, seja qual for a.

Exemplo 1.13 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = cx + d$*, com* $c \neq 0$*. Dado* $\epsilon > 0$*, escolhamos* $\delta = \frac{\epsilon}{|c|}$*. Então qualquer que seja* $a \in \mathbb{R}$*, temos*

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |(cx + d) - (ca + d)| = |cx - ca| = |c||x - a| < |c|\delta = \epsilon.$$

Neste caso foi possível, a partir do ϵ dado, obter um $\delta > 0$ que servisse para todos os pontos a do domínio de f. As funções com essa propriedade chamam-se **uniformimente contínuas**. Mais formalmente:

Definição 1.6 *Sejam* M, N *espaços métricos. Uma aplicação* $f : M \to N$ *diz-se* ***uniformimente contínua*** *quando, para todo* $\epsilon > 0$ *dado, existir* $\delta > 0$ *tal que, sejam quais forem* $x, y \in M$*,* $\;d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$*.*

Exemplo 1.14 *Toda aplicação Lipschitziana* $f : M \to N$ *é uniformimente contínua. De fato, se* $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ *para quaisquer* $x,\ y \in M$*, então, dado* $\epsilon > 0$*, nós tomamos* $\delta = \epsilon/c$*. De* $d(x, y) < \delta$ *segue-se* $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y) < c \cdot \delta = \epsilon$*.*

Evidentimente, toda aplicação uniformimente contínua é uma particular aplicação contínua, para qual a escolha de δ a partir de ϵ dado é independente do ponto onde se analisa a continuidade. Porém a recíproca não vale.

Assim a função contínua $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, não é uniformimente contínua pois, como vimos no exemplo 1.12, dado $\epsilon > 0$, seja qual for $\delta > 0$ podemos encontrar pontos x, y no domínio de f com $|x - y| < \delta$ e $\;|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$.

Por outro lado, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = cx + d$, é uniformemente contínua, como vimos no exemplo 1.13.

Conforme [1], a continuidade uniforme é analisada da seguinte forma:

> ao contrário da simples continuidade, que é um fenômeno local, a continuidade uniforme é uma noção global, isto é, se relaciona com o comportamento da aplicação em todo o espaço simultaneamente.
>
> Deve-se ainda levar em conta com cuidado que a noção de continuidade uniforme não é uma noção topológica. Dito de outro modo: a definição de aplicação contínua foi dada com ϵ e δ mas como veremos na próxima

seção, a continuidade (simples continuidade) pode ser caracterizada apenas com os conjuntos abertos. Em contraste, não é possível dar-se uma condição necessária e suficiente para a continuidade uniforme de $f : M \to N$ em termos dos abetos de M e N.(2009, p.148).

1.6 Noções básicas de topologia

A topologia é o ramo da matemática no qual são estudadas, com grande generalidade, as noções de limite, de continuidade, e as ideias com elas relacionadas. Nesta seção abordaremos alguns conceitos topológicos elementares referentes a subconjuntos de um espaço métrico M, visando estabelecer a base adquada para desenvolver os tópicos seguintes. Começaremos com algumas definições.

1.6.1 Conjuntos abertos

- **Ponto interior:** Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $a \in X$ diz-se ponto interior a X quando é centro de uma bola aberta contida em X. Ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $d(x, a) < r \Rightarrow x \in X$.

- **Interior de X:** O conjunto formado por todos os pontos interiores do conjunto X, chama-se de interior de X em M e denotamos por **intX**.

- **Vizinhança:** Quando $a \in \textbf{intX}$ diremos que X é uma vizinhança de a.

- **Fronteira de X:** Dizer que o ponto $b \in X$ não é interior a X significa afirmar que toda bola aberta de centro b contém algum ponto que não pertence a X. Neste caso, o ponto b pertence a fronteira de X.

  A fronteira de X pode também conter pontos que não estão em X, de acordo com a definição abaixo.

  A fronteira de X em M é o conjunto ∂X formado pelos pontos $b \in M$ tais que toda bola aberta de centro b contém pelo menos um ponto de X e um ponto do complementar $(M - X)$.

Observação 1.2 *Toda bola contém evidentimente um centro, o qual pertence a X ou a $M - X$. Para mostrar que $b \in \partial X$ basta, para $b \in X$, provar que toda bola aberta de centro b contém pontos de $M - X$.*

- **Conjunto aberto:** Um subconjunto A de um espaço métrico M diz-se aberto em M quando todos os seus pontos são interiores. Ou seja, **intA=A**.

Proposição 1.8 *$A \subset M$ é aberto se, e somente-se $A \cap \partial A = \emptyset$.*

Demonstração: Vamos supor $A \cap \partial A \neq \emptyset$, ou seja, existe $a \in A \cap \partial A$, isto é, $a \in A$ e $a \in \partial A$. Mas se $a \in \partial A$, então $\forall r > 0$, $B(a;r)$ contém elementos de A e do A^c. Absurdo, pois se A é aberto, deveria existir $B(a;r_a) \subset A$. Portanto $A \cap \partial A = \emptyset$.
Reciprocamente, vamos supor que A não seja um aberto, então **intA** $\neq A$, isto é, existem pontos de A que não são interiores a A, mas se $a \in A$ não é ponto interior, então $a \in \partial A$, daí temos $A \cap \partial A = a \neq \emptyset$. Absurdo, pois por hipótese $A \cap \partial A = \emptyset$. □

Para provar que um conjunto $A \subset M$ é aberto em M devemos, em princípio, obter, para cada $a \in A$, um raio $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset A$.

Exemplo 1.15 *Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. O interior de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ é vazio, pois nenhum intervalo aberto pode ser formado apenas por números racionais. Por outro lado a fronteira de $\mathbb{Q}$ é toda a reta $\mathbb{R}$ porque qualquer intervalo aberto contém números racionais e números irracionais.*

Proposição 1.9 *Em qualquer espaço métrico M, uma bola aberta $B(a;r)$ é um conjunto aberto.*

Demonstração: Seja $x \in B(a;r)$, então $d(a,x) < r$ e portanto $s = r - d(a,x)$ é um número positivo. Afirmamos que a bola $B(x;s) \subset B(a;r)$. De fato, para todo a, x, $y \in M$ se $y \in B(x;s)$, então $d(x,y) < s$ e portanto $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + s = r - s + s = r \Rightarrow d(a,y) \leq r$ Logo $y \in B(a;r)$, ou seja, $B(x;s) \subset B(a;r)$. Portanto $B(a;r)$ é um conjunto aberto. □

Corolário 1.1 *Para todo $X \subset M$, **intX** é aberto em M.*

Demonstração: Com efeito, o interior de X é o conjunto de todos os pontos interiores a X. Seja $a \in \mathbf{intX}$, logo existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset X$. Pela proposição anterior temos que $B(a;r)$ é um conjunto aberto em M, ou seja, $\mathbf{intB} = B$, isto é, todo $x \in B(a;r)$ é interior a X, logo $B(a;r) \subset \mathbf{intX}$. Portanto $\mathbf{intX}$ é aberto. $\square$

Exemplo 1.16 *Uma bola fechada pode ser um conjunto aberto ou não, conforme o caso.*

- *Se $M = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, com a métrica induzida da reta então a bola fechada de centro 0 e raio 1 em M coincide com a bola aberta de mesmo centro e mesmo raio, logo é um conjunto aberto em M. de fato,*
  $B[0; 1] = \{x \in M\ ; |x - 0| \leq 1\} \Rightarrow x \in [-1, 1]$, *mas por hipótese* $M = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, *logo* $x \in (-1, 1)$.
  $B(0; 1) = \{x \in M\ ; |x - 0| < 1\} \Rightarrow x \in (-1, 1)$.
  portanto neste caso $B[0; 1] = B(0; 1)$.

- *Mas se E é um espaço vetorial normado diferente de 0, uma bola fechada $B[a; r]$ nunca é um subconjunto aberto de E.*
  De fato pois, Tomando $x \neq 0$ em E, pondo $u = \frac{x}{\|x\|}$ e $b = a + ru$, vemos que $\|b - a\| = \|(a + ru) - a\| = \|a - a + ru\| = \|ru\| = |r| \cdot \|u\| = r \cdot 1 = r$. *Portanto* $\|b - a\| = r$. *Logo $b \in B[a; r]$. Mas b não é interior a está bola fechada pois, para todo $s > 0$, o ponto $a + \left(r + \frac{s}{2}\right) \cdot u \in B(b; s)$ mas está fora de $B[a; r]$. Assim nem uma bola aberta de centro b pode está contida em $B[a; r]$.*

Proposição 1.10 *Seja $\mathfrak{U}$ a coleção dos subconjuntos abertos de um espaço métrico M. então:*

(1) $M \in \mathfrak{U}$ *e* $\emptyset \in \mathfrak{U}$. *(O espaço inteiro e o conjunto vazio são abertos.)*

(2) Se $A_1, \cdots, A_n \in \mathfrak{U}$ então $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathfrak{U}$. (A interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.)

(3) Se $A_\lambda \in \mathfrak{U}$ para todo $\lambda \in L$ então $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathfrak{U}$. (A reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.)

Demonstração:

1. Vamos mostrar que $M \in \mathfrak{U}$ (O espaço inteiro é um conjunto aberto.)

   Vamos supor que $M \cap \partial M \neq \emptyset$, ou seja, existe $a \in M \cap \partial M$, isto é, $a \in M$ e $a \in \partial M$, mas se $a \in \partial M$, então $\forall \ r > 0$, $B(a;r)$ contém elementos de M e do M^c, absurdo pois $M^c = \emptyset$. Logo $M \cap \partial M = \emptyset$ e portanto M é aberto em M.

   Vamos mostrar que $\emptyset \in \mathfrak{U}$ (O vazio é um conjunto aberto.)

   Suponhamos que o $\emptyset$ não seja um aberto, isto é, **int**$\emptyset \neq \emptyset$, isto significa que existem pontos pertencentes ao vazio que não são interiores a ele. Absurdo, pois o vazio por definição não possui elemento algum. E portanto o $\emptyset$ é um aberto.

2. Suponhamos que $A_1, \cdots, A_n \neq \emptyset$, ou seja , existe $a \in A_1, \cdots, A_n$, isto é,$a \in A_1, \cdots, a \in A_n$. Por hipóteses estes conjuntos são abertos, logo existem $r_1 > 0, \cdots, r_n > 0$ tais que $B(a;r_1) \subset A_1, \cdots, B(a;r_n) \subset A_n$. Seja r o menor dos números $r_1, \cdots, r_n$. Então $B(a;r) \subset B(a;r_1), \cdots, B(a;r) \subset B(a,r_n) \subset A_n$ e daí, $B(a;r) \subset A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Logo $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ é aberto.

3. Seja $x \in A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, então existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Por hipótese, existe $r > 0$ tal que $B(x;r) \subset A_\lambda$, pois cada A_λ é um conjunto aberto. Observe ainda que $A_\lambda \subset A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, logo $B(x;r) \subset A_\lambda \subset A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ e portanto $B(x;r) \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, ou seja, $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto.

□

Corolário 1.2 *Um subconjunto $A \subset M$ é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.*

Demonstração: Se A é aberto, então para cada $x \in A$, podemos obter uma bola aberta B_x tal que $x \in B_x \subset A$, o que se escreve também como $\{x\} \subset B_x \subset A$. Tomando reuniões temos $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B_x \subset A$. Logo $A = \bigcup_{x \in A} B_x$, o que mostra que todo aberto é reunião de bolas abertas. Reciprocamente, se $\bigcup_{x \in A} B_x$ é uma reunião de bolas abertas, então A é aberto em M, pois toda bola aberta em M é um conjunto aberto pela proposição 1.9 e a reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos é um comjunto aberto pela proposição 1.10. □

Exemplo 1.17 *A interseção de uma família infinita de abertos pode não ser um conjunto aberto.*

Por exemplo, um ponto $a \in M$ não é aberto em M a menos que seja isolado. Mas todo ponto a é interseção de uma família enumerável de abertos, a saber,

$$\{a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B\left(\ a;\ \frac{1}{n}\ \right)$$

Vamos mostrar que além do ponto a, não existem outros pontos que pertencem a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B\left(\ a;\ \frac{1}{n}\ \right)$.
Com efeito, suponha que exista $x \neq a$ tal que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B\left(\ a;\ \frac{1}{n}\ \right)$, ou seja, $d(x,a) > 0$, logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(x,a) > \frac{1}{n} > 0$, isto é, $x \notin$ a nem uma bola $B\left(\ a;\ \frac{1}{n}\ \right)$. Absurdo (Pois tinhamos admitido no início que $x \in B\left(a; \frac{1}{n}\right)$), então $x = a$. Isto mostra que apenas o ponto "a"pertence a todas as bolas abertas $B\left(\ a;\ \frac{1}{n}\ \right)$, $n \in \mathbb{N}$.
Portanto a interseção de uma família infinita de abertos pode não ser um aberto.

$$\{a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B\left(\ a;\ \frac{1}{n}\ \right).$$

1.6.2 Relações entre conjuntos abertos e continuidade

A importância da noção de conjunto aberto na topologia dos espaços métricos se deve principalmente ao resultado seguinte.

Proposição 1.11 *Sejam M, N espaços métricos. A fim de que uma aplicação $f : M \to N$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(A')$ de todo subconjunto aberto $A' \subset N$ seja um subconjunto aberto de M.*

Demonstração: Suponhamos primeiramente que f seja contínua, tomemos $A' \subset N$ aberto e mostraremos que $f^{-1}(A')$ é aberto em M.

De fato, para cada $a \in f^{-1}(A')$, temos $f(a) \in A'$. Mas $A' \subset N$ é aberto, então pela definição de conjunto aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f(a);\epsilon) \subset A'$. Da continuidade de f segue que existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a,\delta)) \subset B(f(a);\epsilon) \subset A'$. Isto quer dizer que $B(a;\delta) \subset f^{-1}(A')$. Logo $f^{-1}(A')$ é aberto.
Reciprocamente, suponhamos que a imagem inversa por f de cada aberto em N seja um aberto em M. Seja $a \in M$. Mostraremos que f é contínua no ponto a.

Com efeito, dado $\epsilon > 0$, a bola $A' = B(f(a);\epsilon)$ é um aberto em N, contendo $f(a)$. Logo sua imagem inversa $A = f^{-1}(A')$ é um aberto em M, contendo a. Assim existe $\delta > 0$ tal que $B(a;\delta) \subset A$, ou seja, $B(a;\delta) \subset f^{-1}(A') \Rightarrow f(B(a;\delta)) \subset f(f^{-1}(A')) = A' \Rightarrow f(B(a;\delta)) \subset A' = B(f(a);\epsilon)$. Portanto $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a,\epsilon))$, o que mostra que f é contínua. $\square$

Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se **aberta** quando para cada $A \subset M$ aberto, sua imagem f(A) é um subconjunto aberto de N. Em suma, quando **f** transforma abertos em abertos. Logo a proposição 1.11 poderia ser enunciada assim: $f : M \to N$ é contínua se, e somente se f^{-1} é uma aplicação aberta.

Definição 1.7 *Sejam M, N espaços métricos. Um **homeomorfismo** de M sobre N é uma bijeção contínua $f : M \to N$, cuja inversa $f^{-1} : N \to M$ também é contínua. Nesta caso diz-se que que M e N são homeomorfos.*

Exemplo 1.18 *Uma aplicação contínua não precisa ser aberta. Tampouco uma aplicação aberta precisa ser contínua. Ou seja;*
$f : M \to N$ ***é uma aplicação contínua*** $\not\Leftrightarrow$ ***f é uma aplicação aberta.***

De fato, pois existem aplicações contínuas que nem sempre são aplicações abertas. Tomemos como contra exemplo, uma aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

*Sabemos que $f(x) = x^2$ é uma aplicação contínua, porém não é uma aplicação aberta, pois se tomarmos o intervalo aberto $A = (-a, a) \subset \mathbb{R}$, o conjunto imagem de $f(A)$ é o intervalo $B = [0, a^2) \subset \mathbb{R}$, que não é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, logo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é uma aplicação aberta. Tomemos agora uma bijeção contínua que não seja um **Homeomorfismo**, ou seja, $f : M \to N$ é uma bijeção contínua, porém $f^{-1} : N \to M$ é descontínua. Mas de acordo com a proposição 1.11, $f^{-1} : N \to M$ é uma aplicação aberta. Ou seja, mesmo $f^{-1} : N \to M$ sendo descontínua, $f^{-1} : M \to N$ é uma aplicação aberta.*

1.6.3 Conjuntos fechados

- **Distância de um ponto a um conjunto**

Sejam a um ponto e X um subconjunto não vazio de um espaço métrio M.

Definiremos a distância do ponto a ao conjunto X como o número real

$$d(a, X) = \inf_{x \in X} d(a, x).$$

O conjunto de números reais não negatívos $\{d(a, x), x \in X\}$ formado pelas distâncias de a aos diversos pontos de X é não vazio e limitado inferiormente por zero. Se esse conjunto possuir um elemento mínimo, ele será a distância $d(a, X)$.

Evidentimente, se $a \in X \Rightarrow d(a, X) = 0$, mas a recíproca não é verdade, ou seja, $d(a, X) = 0 \not\Rightarrow a \in X$. Notemos ainda que

$$d(a, X) = 0 \Leftrightarrow \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ x \in X,\ \text{tal que } d(a, x) < \epsilon.$$

- **Ponto aderente**: Um ponto a diz-se **aderente** a um subconjunto X de um espaço métrico M quando $d(a, X) = 0$, isto é, $\inf_{x \in X} d(a, x) = 0$. Isto significa que existém pontos de X arbitrariamente próximos de a, ou seja, para cada $\epsilon > 0$, podemos encontrar $x \in X$ tal que $d(a, x) < \epsilon$.

  Outra maneira equivalente de dizer que a é aderente a X é: Para todo $\epsilon > 0$, têm-se $B(a; \epsilon) \cap X \neq \emptyset$.

  De fato, se a é aderente a X, então $d(a, X) = 0$, isto é, $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ x \in X$ tal que $d(a, x) = d(x, a) < \epsilon \Rightarrow x \in B(a; \epsilon)$ e portanto $B(a; \epsilon) \cap X \neq \emptyset$. Reciprocamente, se $\forall\ \epsilon > 0,\ B(a; \epsilon) \cap X \neq \emptyset$, então a é aderente a X. Com efeito, seja $x \in B(a; \epsilon) \cap X \Rightarrow x \in B(a; \epsilon) \Rightarrow d(a, x) = d(x, a) < \epsilon \Rightarrow d(a, X) = 0$. Portanto a é aderente a X.

Segue ainda uma outra definição para ponto aderente, dada através de limites de sequências. vejamos:

Definição 1.8 *Seja M um espaço métrico qualquer e **a** um ponto de M. Diremos que **a** é aderente a um conjunto $X \subset M$ quando **a** for limite de uma sequência de pontos $x_n \in X$.*

Exemplo 1.19 *Todo ponto $a \in X$ é aderente a X. Pois, se $a \in X$, então $d(a, X) = 0$ logo a é aderente a X. De fato, basta tomar $x \in X$ como sendo ele o próprio a $(x = a)$, e daí, temos $d(a, X) = \inf_{a \in X} d(a, a) = 0$. Mas pode se ter um elemento aderente a X sem* *que a pertença a X. Vamos mostrar que se $b \in \partial X$, então b é aderente a X. Com efeito, se $b \in \partial X$ então toda $B(b;\epsilon)$ possui pontos de X e pontos do X^c. E isso nos da que $B(b,\epsilon) \cap X \neq \emptyset$ e portanto b é aderente a X.*

- **Fecho de um conjunto X:** O fecho de um conjunto X num espaço métrico M é o conjunto $\overline{X}$ dos pontos de M que são aderentes a X. Portanto escrever $a \in \overline{X}$ é o mesmo que afirmar que o ponto a é aderente a X em M.

- **Conjunto fechado**: Um conjunto X de um espaço métrico M diz-se fechado quando $X = \overline{X}$. Assim, um conjunto $X \subset M$ é fechado se, e somente se, todo ponto aderente a X pertence a X (pois como já virmos podemos ter pontos aderente a X sem que os mesmo pertençam a X.)

Para que a não seja aderente a X é necessário e suficiente que exista uma bola aberta de centro a, na qual não há pontos de X. Ou seja, $a \notin \overline{X} \Leftrightarrow a \in int(M - X)$. Podemos então escrever: $M - \overline{X} = int(M - X)$, ou $\overline{X}^c = int(X^c)$.

Proposição 1.12 *Seja M um espaço métrico e $X \subset M$. A seguinte igualdade $\overline{X}^c = intX^c$ é verdadeira.*

Demonstração: De fato, pois se $a \in \overline{X}^c \Leftrightarrow a \notin \overline{X} \Leftrightarrow a \notin (X \cap \partial X) \Leftrightarrow a \in intX^c$, pois se $a \notin intX^c \Rightarrow a \in X$ ou $a \in \partial X$.

Definição 1.9 *Um subconjunto $X \subset M$ diz-se denso em M quando $\overline{X} = M$, ou seja, quando toda bola aberta em M contém algum ponto de X, ou ainda, para cada aberto não-vazio A em M, tem-se $A \cap X \neq \emptyset$.*

No importante caso particular em que $M = \mathbb{R}$ um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se denso em $\mathbb{R}$ quando todo intervalo aberto (a, b) contém algum ponto de X. Em outras palavras, diremos que o conjunto X de números reais é denso em $\mathbb{R}$ quando, dados arbitrariamente $a < b$ em $\mathbb{R}$, for possível encontrar $x \in X$ tal que $a < x < b$.

Exemplo 1.20 *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$. Também o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, dos números irracionais, é denso na reta. Com efeito, todo intervalo aberto contém números racionais e números irracionais.*

A seguir, vemos uma proposição que caracteriza conjuntos fechados.

Proposição 1.13 *Um subconjunto $F \subset M$ é fechado se, e somente se seu complementar $M - F$ é aberto.*

Demonstração: De fato, pois se um conjunto F é fechado, então ele contém todos seus pontos aderentes, isto é, $\overline{F} = F$, seja $a \notin F$, então $a \in M - F$, logo a não é aderente a F. Mas afirmar que a é um ponto que não pertence a $\overline{F}$ é garantir que existe uma bola aberta $B(a;\epsilon)$ que não contém ponto algum de F, ou seja, $B(a;\epsilon) \subset M - F$. Portanto $M - F$ é aberto. Reciprocamente por hipótese de $M - F$ ser aberto, temos $\forall\ a \in M - F$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(a;\epsilon) \subset M - F$, isto é, $B(a;\epsilon)$ não contém pontos de F, logo não há pontos no complementar de F que seja aderente a F. Isto é, se $b \in \overline{F}$, então $b \in F$, ou seja $\overline{F} = F$. portanto F é fechado. □

Corolário 1.3 *Para todo $X \subset M$, $\overline{X}$ é fechado.*

Demonstração: De fato, basta observar que $M - \overline{X}$ é aberto, pois $\forall\ a \in M - \overline{X}$ não pode ser um ponto aderente a $\overline{X}$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $B(a;\epsilon)$ não possui pontos de $\overline{X}$ isto é, $B(a;\epsilon) \subset M - \overline{X}$, logo $M - \overline{X}$ é aberto. Pela proposição 1.13, concluimos que $\overline{X}$ é fechado. □

Podemos concluir que em todo conjunto X, temos que $X \subset \overline{X}$, pois todo ponto que pertence a X pertence a $\overline{X}$ (todo ponto de X é aderente a X), porém se $\overline{X} \subset X$, diremos que X é um conjunto fechado, pois o mesmo contém todos os seus pontos de aderência. Negar que um subconjunto $X \subset M$ seja fechado significa admitir a existência de algum ponto $a \notin X$ que seja aderente a X. Ou seja, $a \notin X$ mas para cada $\epsilon > 0$ tem-se $B(a;\epsilon) \cap X \neq \emptyset$. Esse ponto $a \in \partial X$. Logo, X é fechado se, e somente se $X \supset \partial X$.

Proposição 1.14 *Os subconjuntos fechados de um espaço métrico M gozam das seguintes propriedades:*

(1) O conjunto vazio $\emptyset$ e o espaço inteiro M são fechados;

(2) A reunião $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ de um número finito de subconjuntos fechados $F_1, \cdots, F_n \subset M$ é um subconjunto fechado de M;

(3) A interseção $F = \bigcap_{\lambda \, \in \, L}^{n} F_\lambda$ *de uma família qualquer* $(F_\lambda)_{\lambda \, \in L}$ *(finita ou infinita) de subconjuntos fechados* $F_\lambda \subset M$ *é um subconjunto fechado de* M.

Demonstração:

1. Vamos mostrar que o vazio $\emptyset$ é um fechado.

   Faremos isso por absurdo, Suponhamos que o $\emptyset$ não seja um fechado. Isto é, $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$. ou seja, existe um ponto $a \notin \emptyset$ mas é aderente a ele, logo $B(a; \epsilon) \cap \emptyset \neq \emptyset$. Absurdo, portanto o $\emptyset$ é um fechado.

   para mostrar que o espaço inteiro M é fechado, basta observar que, para todo $\epsilon > 0$ e $\forall \; a \in M$, $B(a; \epsilon) \cap M \neq \emptyset$.

2. De fato, pois pela proposição 1.13, temos que os conjuntos $A_1 = {F_1}^c$, $A_2 = {F_2}^c$, $\cdots, A_n = {F_n}^c$ são abertos em M, pois cada F_n é fechado. Logo pela proposição 1.10, $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = {F_1}^c \cap {F_2}^c \cdots \cap {F_n}^c = (F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n)^c$ é aberto e portanto $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ é um subconjunto fechado de M.

3. Ponhamos $A_\lambda = {F_\lambda}^c$ para cada $\lambda \in L$. Então cada A_λ é aberto, pois F_λ é fechado. Logo pela proposição 1.13 a reunião $\cup A_\lambda = \cup {F_\lambda}^c = (\cap F_\lambda)^c$ é um aberto em M, segue que $\cap F_\lambda$ é fechado.

$\square$

Observação 1.3 *Na demonstração da proposição acima, usamos algumas propriedades da operação de tomar complementares. Para verificar Tais propriedades (ver apêndice **B**).*

A proposição a seguir trás uma importante relação entre conjuntos fechados e continuidade.

Proposição 1.15 *Sejam* M, N *espaços métricos. A fim de que uma aplicação* $f : M \to N$ *seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa* $f^{-1}(F')$ *de todo subconjunto fechado* $F' \subset N$ *seja um subconjunto fechado de* M.

Demonstração: Seja $f : M \to N$ contínua. Dado $F' \subset N$ fechado, F'^c é aberto, donde $f^{-1}(F'^c) = (f^{-1}(F'))^c$ é aberto, isto é, $f^{-1}(F')$ é fechado. Reciprocamente, se $f^{-1}(F') \subset M$ é um fechado. Então dado $A' \subset N$ aberto, $f^{-1}(A'^c) = (f^{-1}(A'))^c$ é fechado em M, donde $f^{-1}(A')$ é aberto e, pela proposição 1.11, f é contínua. $\square$

Corolário 1.4 *O gráfico de uma aplicação contínua $f : M \to N$ é um subconjunto fechado de $M \times N$. Em particular, a diagonal $\Delta = \{(x, y) \in M \times N; x = y\}$ é um subconjunto fechado de $M \times N$.*

Demonstração: Definimos o gráfico de f: $G(f) = \{(x, y) \in M \times N; y = f(x)\}$. A função $\phi : M \times N$, definida por $\phi(x, y) = d(f(x), y)$ é evidentimente contínua e $G(f) = \{(x, y) \in M \times N; \phi(x, y) = 0\}$. Logo o gráfico de f é fechado em $M \times N$, pois ϕ é contínua e $\{0\}$ é fechado, daí pela proposição anterior temos que $\phi^{-1}(0) = G(f)$ é fechado. A diagonal $\Delta \subset M \times N$ é o gráfico da aplicação identidade $M \to M$, logo é um subconjunto fechado de $M \times N$. $\square$

1.6.4 Ponto de acumulação

Definição 1.10 *SejaX um subconjunto do espaço métrico M. Um ponto $a \in M$ chama-se ponto de acumulação de X quando toda bola de centro a contém algum ponto de X, diferente do ponto a.*

Indicaremos com a notação X' o conjunto dos pontos de acumulação de X em M. O conjunto X' chama-se derivado do conjunto X.

Assim $a \in X' \Leftrightarrow a \in \overline{X - \{a\}}$.

Se toda bola de centro a contém uma infinidade de pontos de X então, evidentimente, algum deles é diferente de a. Então $a \in X'$. Reciprocamente, Se $a \in X'$, então toda bola de centro a contém uma infinidade de pontos de X. Com efeito , dada $B(a; r)$, existe um $x_1 \neq a$ tal que $x_1 \in X \cap B(a; r)$. Seja $r_1 = d(a, x_1)$. Existe $x_2 \neq a$ tal que $x_2 \in X \cap B(a; r_1)$. Ponhamos $r_2 = d(a, x_2)$. Temos $0 < r_2 < r_1$. Existe um $x_3 \neq a$, $x_3 \in X \cap B(a; r_2)$. Pondo $r_3 = d(a, x_3)$, temos $0 < r_3 < r_2 < r_1$. Isto mostra que $x_1,\ x_2,\ x_3$ são pontos diferentes um dos outros. Prosseguindo analogamente obtemos, uma infinidade de pontos $x_1,\ x_2, \cdots$ pertecentes a X e contidos na bola inicial $B(a; r)$.

Este resultado se resume na seguinte equivalência:

$$B(a,\epsilon)\cap(X-\{a\})\neq\emptyset \Leftrightarrow a\in X'.$$

Exemplo 1.21 *Na reta $\mathbb{R}$, tomemos:*

a) $X=\mathbb{Q}$, *então* $X'=\mathbb{R}$, *pois* $\forall\ \epsilon>0$ *e* $\forall\ x\in\mathbb{R}$, $B(x;\epsilon)\cap\mathbb{Q}-\{x\}\neq\emptyset$ *pois todo intervalo aberto possui números racionais, logo* $x\in\mathbb{Q}'$.

b) $V=\{0,1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n}\}$ *então* $V'=\{0\}$, *pois* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0.$

c) $W=\left\{(1+\frac{1}{n})^n;n\in\mathbb{N}\right\}$, *então* $W'=\{e\}$ *Pois* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e.$

Observação 1.4 *Deste estudo podemos obter algumas conclusões:*

- $a\in X'\Leftrightarrow\forall\ \epsilon>0,\ B(a;\epsilon)\cap X-\{a\}\neq\emptyset\Leftrightarrow\forall\ \epsilon>0,\ B(a;\epsilon)$ *possui infinitos pontos* $x_i\Leftrightarrow$ *existe sequência* $\{x_i\}\subset X$ *tal que* $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=a$.

- *Todo ponto de acumulação é ponto aderente. Mas Nem todo ponto aderente é ponto de acumulação.*

  Basta tomar como contra exemplo um espaço métrico discreto, ou seja, todo ponto desse espaço é um ponto isolado, isto é, $B(a;\epsilon)=\{a\}$.

  Tomando os $\mathbb{N}=\{1,\ 2,\ 3,\cdots\}$ *como meu espaço métrico, a* $B\left(1;\frac{1}{2}\right)=1$, *daí* $B\left(1;\frac{1}{2}\right)\cap\mathbb{N}\neq\emptyset=1$. *(1 é ponto aderente dos* $\mathbb{N}$*, mas não é ponto de acumulação).*

- *A diferença entre ponto aderente e ponto de acumulação é muito sutil, pois para que um ponto* $a\in M$ *seja aderente a um subconjunto* $X\subset M$, *basta que* $\forall\ \epsilon>0,\ \ B(a;\epsilon)\cap X\neq\emptyset$. *Sendo que nesta interseção pode da o próprio centro* a *ou um elemento diferente dele. Porém para que um ponto* $a\in M$ *seja ponto de acumulação de um subconjunto* $X\subset M$, *deve-se ter* $\forall\ \epsilon>0,\ \ B(a;\epsilon)\cap X-\{a\}\neq\emptyset$. *Ou seja, esta interseção não está levando em conta o centro* a, *mas sim obrigatoriamente um elemento da bola* $B(x;a)$ *diferente do centro.*

Capítulo 2

Espaços métricos completos

Neste capítulo, estudaremos sequências em espaços métricos, exibindo e demonstrando alguns resultados como; Sequências, limites de sequências, sequências de funções, destacando as sequências de Cauchy, tendo como objetivo a definição de espaços métricos completos a qual depende da sequência de Cauchy. Traremos alguns resultados importantes desses espaços que serão de grande importancia no capítulo seguinte. Ainda neste capítulo trataremos dos espaços de Banach.

2.1 Sequências

Uma sequência num conjunto M é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to M$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$. O valor que a sequência x assume para o número $n \in \mathbb{N}$ será indicado por x_n, em vez de $x(n)$, e chamar-se-á o n-ésimo termo da sequência. Em notação de função:

$$\begin{aligned} x : \mathbb{N} &\to M \\ n &\to x(n) = x_n. \end{aligned}$$

Usaremos as notações $(x_1,\ x_2, \cdots, x_n, \cdots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou (x_n) para representar uma sequência. Por outro lado, escreveremos $\{x_1,\ x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$, $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ ou $x(\mathbb{N})$ para indicar o conjunto dos valores, ou o conjunto dos termos da sequência. Este conjunto não deve ser confundido com a sequência.

Por exemplo, se definirmos $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pondo $x_n = (-1)^n$, então obteremos a sequência $(-1,\ 1,\ -1,\ 1, \cdots)$ cujo conjunto de valores é $\{-1,\ 1\}$. Vemos assim que entre os termos x_n da sequência podem ocorrer repetições, isto é, pode-se ter $x_m = x_n$ com $m \neq n$. Quando a aplicação $x : \mathbb{N} \to M$ for injetiva, ou seja, quando $m \neq n \Rightarrow x_m \neq x_n$, diremos que (x_n) é uma sequência de termos distintos ou sem repetições.

Uma subsequência de x_n é uma restrinção da aplicação $n \mapsto x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 \ < \ n_2 \ < \cdots < n_k < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. A subsequência é indicada pelas notações $(x_{n1},\ x_{n2}, \cdots, x_{nk}, \cdots)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, $(x_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ ou, simplesmente, (x_{nk}).

Por exemplo, a sequência $(4,\ 16,\ 64, \cdots, 4^k, \cdots)$ é uma subsequência de $(2,\ 4,\ 8,\ 16, \cdots, 2^n, \cdots)$, na qual $\mathbb{N}'$ é o conjunto dos números pares.

Definição 2.1 *(sequências limitadas) Uma sequência (x_n) no espaço métrico M chama-se limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado , isto é, quando existe $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq c$ para quaisquer $m,\ n\ \in \mathbb{N}$.*

Como a sequência é uma função, é claro que o conceito de sequência limitada coincide com o de função limitada. Além disso, toda subsequência de uma sequência limitada também é limitada.

Exemplo 2.1 *Seja $M = \mathbb{R}$, a sequência (x_n) definida por $x_n = \frac{1}{n}$. Então (x_n) é limitada. Com efeito,*

$$d\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| \leq 1,\ \forall m,\ n\ \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 2.2 *Seja $M = \mathbb{R}$, a sequência (x_n) definida por $x_n = (-1)^n$. Então (x_n) é limitada pois $d(x_n, x_m) = 0$ ou $d(x_n, x_m) = 2,\ \forall m,\ n\ \in \mathbb{N}$.*

2.2 Limites de sequências

Definição 2.2 *Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M. Diz-se que o ponto $a \in M$ é limite da sequência (x_n) quando, para todo número $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$.*

Escreve-se então lim $x_n = a$; diz-se também que x_n tende para a e escreve-se ainda $x_n \to a$.

$$\lim x_n = a. \equiv . \forall \ \epsilon > 0, \exists \ n_0 \in \mathbb{N}; \forall n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon.$$

Mais precisamente, estipulando-se uma margem de erro $\epsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n da sequência com índice $n > n_0$ são valores aproximados de a com erro menor do que ϵ.

Esta importante definição significa que, para valores muito grandes de n, os termos x_n tornam-se e se mantem tão próximos de a quanto se deseje.

Quando existe $\lim x_n = a \in M$, diz-se que a sequência de pontos $x_n \in M$ é convergente em M, e converge para a. Se não existe lim $x_n \in M$, dizemos que a sequência é divergente em M.

Afirmar que $\lim x_n = a$ num espaço métrico M equivale a dizer que toda bola B de centro a (e portanto todo aberto A contendo a ou toda vizinhança V de a) contém x_n para todo valor de n, com exceção de um número finito deles (que são no máximo os pontos $x_1, \ x_2, \cdots, x_{n_0}$).

Exemplo 2.3 *Toda seqüência constante, $x_n = a$, é convergente e converge para a.*

De fato, para todo $\epsilon > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, a) = d(a, a) = 0 < \epsilon$. Portanto $\lim x_n = a$.

Exemplo 2.4 *Sequências de números reais.*
Monotonicidade: Diz-se que (x_n) é monótona quando é uma das opções abaixo.

- *Diz-se que uma sequência (x_n) é crescente quando: $x_n < x_{n+1} < x_{n+2}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.*
- *Diz-se que uma sequência (x_n) é não-decrescente quando: $x_n \leq x_{n+1} \leq x_{n+2}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.*
- *Diz-se que uma sequência (x_n) é decrescente quando: $x_n > x_{n+1} > x_{n+2}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.*
- *Diz-se que uma sequência (x_n) é não-crescente quando: $x_n \geq x_{n+1} \geq x_{n+2}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.*

Afirmação: Toda sequência monótona limitada de números reais é convergente.

Demonstração: *Consideremos o caso crescente, ou seja, (x_n) uma sequência crescente limitada de números reais. Do fato da sequência ser limitada,* $\sup\{x_n, n \in \mathbb{N}\} < +\infty$. *Seja $a = \sup\{x_n\}$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, o número $a - \epsilon$, Sendo menor do que a, não pode se cota superior do conjunto dos valores x_n. Logo, existe n_0 tal que $a - \epsilon < x_{n_0} < a$. Como $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$, então $n > n_0 \Rightarrow \Rightarrow a - \epsilon < x_{n_0} < x_n < a < a + \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, ou seja, $|x_n - a| < \epsilon$. Portanto $a = \lim x_n$. Analogamente prova-se a proposição para os outros tipos de sequências monótonas.* $\square$

Exemplo 2.5 *Dada a sequência de números reais $x_n = \frac{1}{n}$, temos que $\lim x_n = 0$.*

Com efeito, dado qualquer $\epsilon > 0$, tomamos $n_0 > 1/\epsilon$ e vemos que

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon.$$

Em termos mais geométricos: para todo n suficientimente grande, $1/n$ pertence ao intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$, para todo $\epsilon > 0$.

Demonstraremos, agora, alguns resultados simples sobre limites de sequências , que serão usados em resultados mais importantes à frente.

Proposição 2.1 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Sejam (x_n) uma sequência convergente e $a = \lim x_n$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a;\epsilon)$. Em particular para $\epsilon = 1$ a bola contém uma infinidade de pontos da sequência, com exceção de um número finito de pontos, a saber $\{x_1,\ x_2 \cdots, x_{n_0}\}$. O conjunto de elementos da sequência está contido no conjunto $A = \{x_1,\ x_2, \cdots,\ x_{n_0}\} \cup B(a;1)$. Como $\{x_1,\ x_2, \cdots, x_{n_0}\}$ e $B(a;1)$ são conjuntos limitados, A também é limitado e assim, a sequência é limitada. $\square$

Observação 2.1 *Temos $\{x_1,\ x_2, \cdots, x_{n_0}\}$ e $B(a;1)$ são conjuntos limitados, pois, da análise real vem que, todo todo conjunto finito é limitado e já mostramos que toda bola $B(a;\epsilon)$ é um conjunto limitado.*

Exemplo 2.6 *A recíproca desta proposição é falsa, pois nem toda sequência limitada é convergente. Como contraexemplo temos a sequência de números reais* $x_n = (-1)^n$ *que é limitada, porém não é convergente. Veremos o porquê à frente.*

Proposição 2.2 *(Unicidade do limite). Uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência convergente em um espaço métrico M. Suponhamos que $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, com $a \neq b$. Como $\lim x_n = a$ então dado $\epsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_1 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$. Como $\lim x_n = b$ então dado $\epsilon > 0$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_2 \Rightarrow d(x_n, b) < \epsilon$. Em particular, para $\epsilon = \frac{d(a,b)}{2}$, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e tomando a desigualdade triangular temos que, $\forall\ n > n_0,\ d(a,b) \leq d(x_n, a) + d(x_n, b) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = 2 \cdot \frac{d(a,b)}{2}$, temos $d(a,b) < d(a,b)$, o que é absurdo. $\square$

Proposição 2.3 *Se* $\lim x_n = a$ *então toda subsequência de* (x_n) *converge para* a.

Demonstração: Seja (x_{n_k}) uma subsequência de x_n. Como $\lim x_n = a$, então, $\forall\ \epsilon > 0$, existe n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$. Seja $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Para n_0 existe n_{k_0} tal que $n_{k_0} > n_0$. Se $k > k_0$ então $n_k > n_{k_0}$. Como $n_{k_0} > n_0$ então $d(x_{n_k}, a) < \epsilon,\ \forall\ n_k > n_{k_0}$. Portanto, $\lim x_{n_k} = \lim x_n = a$. $\square$

Há duas aplicações especialmente úteis das proposições 2.2 e 2.3. Uma delas é para determinar o limite de uma sequência (x_n) que, a priori, se sabe que converge: basta determinar o limite de alguma subsequência, e este será o limite da sequência. A outra é para mostrar que uma certa sequência (x_n) não converge: basta obter duas subsequências de (x_n) com limites distintos . É isso que trata o próximo resultado.

Corolário 2.1 *Se uma sequência* (x_n) *possui duas subsequências que convergem para limites distintos, então ela é divergente.*

A sequência $(0, 1, 0, 1, \cdots)$ não é convergente porque possui duas subsequências que convergem para limites diferentes, a saber, $(0, 0, 0, \cdots)$ e $(1, 1, 1, \cdots)$. A sequência $(-1)^n$ no Exemplo 2.6 também não converge pois à subsequência $(-1)^{2n}$ converge para 1, já a subsequência $(-1)^{2n+1}$ converge para -1, isto é, as subsequências convergem para limites distintos.

Proposição 2.4 *Um ponto a, num espaço métrico M, é limite de uma subsequência de (x_n) se, e somente se, toda bola aberta de centro a contém termos x_n com índices n arbitrariamente grandes.*

Demonstração: Dada uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots)$ convergente para a, para todo $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica $x_{n_k} \in B(a;\epsilon)$. Como o conjunto $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$, então temos infintos termos $x_{n_k} \in B(a;\epsilon)$. Em particular x_{n_k}, são termos da sequência (x_n). Logo, toda bola aberta de centro a contém termos x_n com indices arbitrariamente grandes, a saber, todos os indices n_k com $k > k_0$. Reciprocamente, suponhamos que toda bola aberta de centro a contenha termos x_n com indices arbitrariamente grandes. A bola $B(a;1)$ contém um termo x_{n_1}, a bola $B(a;1/2)$ contém um termo x_{n_2} com índice $n_2 > n_1$, e assim por diante: para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos achar $x_{n_k} \in B(a;1/k)$ com $n_k > n_{k-1} > \cdots > n_2 > n_1$. Isto define um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2, \cdots < n_k < \cdots\}$ e uma subsequência (x_{n_k}) tal que $d(x_{n_k}, a) < 1/k$. segue-se que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. □

No enuciado da proposição acima, podemos substituir "bola aberta de centro a"por "conjunto aberto contendo a"ou "vizinhança de a."

2.3 Sequências de funções

Há diferentes maneiras de se definir o que se entende por: Uma sequência de aplicações $f_n : X \to M$, tomando valores num espaço métrico M, converge para a aplicação $f : X \to M$. Estudaremos nesta seção a convergência **simples** e **uniforme**.

Definição 2.3 *Diz-se que a sequência de aplicações $f_n : X \to M$ (definidas num conjunto arbitrário X e tomando valores em um espaço métrico M) converge **simplesmente** (ou pontualmente) em X para a aplicação $f : X \to M$ quando, para cada $x \in X$, a sequência $(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots)$ tem limite $f(x)$ em M. Ou seja, para cada $x \in X$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.*

Isto significa, equivalentemente, que dados arbitrariamente $x \in X$ e $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo de x e de ϵ) tal que $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.

Exemplo 2.7 *A sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = x/n$, converge simplesmente em $\mathbb{R}$ para a função identicamente nula.*
Com efeito, dados $x \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > |x|/\epsilon$. Assim, se $n > n_0$ então

$$\left|\frac{x}{n} - 0\right| = \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{|x|}{n} < \frac{|x|}{n_0} < \epsilon.$$

Isto quer dizer que para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} x/n = 0$. Portanto $f_n(x)$ converge simplesmente para a função nula.

Note-se que, mantendo $\epsilon > 0$ fixo, não se pode determinar um número natural n_0 que seja satisfatório para todos os pontos $x \in \mathbb{R}$.

Salientamos que, na definição 2.3, o valor de n_0 depende de x e de ϵ. Quando n_0 não depende de x, mas apenas de ϵ, temos outro sentido de convergência, assunto da próxima definição.

Definição 2.4 *Diremos que a sequência de aplicações $f_n : X \to M$ converge* ***uniformimente*** *em X para a aplicação $f : X \to M$ quando, para todo número $\epsilon > 0$ dado, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$, qualquer que seja $x \in X$.*

Exemplo 2.8 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x/n$ para todo $x \in [0,1]$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1/\epsilon$. Assim, se $n > n_0$ e $x \in [0,1]$, então*

$$\left|\frac{x}{n} - 0\right| = \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{|x|}{n} \le \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

Portanto $f_n(x)$ converge uniformemente para a função nula.

Na convergência do exemplo anterior o número natural n_0, escolhido a partir do $\epsilon > 0$ dado, é satisfatório para garantir a convergência em todos os pontos $x \in X$. Isto caracteriza a convergência uniforme.

Salientamos novamente a diferença entre convergência simples e uniforme através da comparação dos exemplos 2.7 e 2.8. No primeiro exemplo o valor de n_0 depende de x e de ϵ pois $\left(n_0 > \frac{|x|}{\epsilon}\right)$, enquanto que no segundo ele só depende de ϵ $\left(n_0 > \frac{1}{\epsilon}\right)$.

Evidentemente, se $f_n \to f$ uniformemente em X então $f_n \to f$ simplesmente em X. A recíproca é falsa.

O resultado da proposição seguinte garante que: se f_n é contínua em $a \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é contínua em x_0, desde que a sequência $f_n : M \to N$ convirja uniformemente para $f : M \to N$. O mesmo não ocorre quando temos apenas a convergência simples (convergência pontual).

Proposição 2.5 *Sejam M, N espaços métricos. Se uma sequência de aplicações $f_n : M \to N$, contínuas no ponto $a \in M$, converge uniformemente em M para uma aplicação $f : M \to N$ então f é contínua no ponto a.*

Demonstração: Seja $a \in M$. Dado $\epsilon > 0$ e escolhemos um número natural n tal que $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in M$. Como f_n é contínua no ponto a, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ em M implica $d(f_n(x), f_n(a)) < \epsilon$. Então, para todo $x \in M$ com $d(x, a) < \delta$, temos:

$$d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(a)) + d(f_n(a), f(a)) < \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon,$$

o que prova que f é contínua no ponto a. □

Dito de outra forma, a proposição 2.5 enuncia que; o limite uniforme de uma sequência de aplicações contínuas $f_n : M \to N$ é uma aplicação contínua $f : M \to N$.

2.4 Sequências de Cauchy

Passamos agora ao estudo das sequências de Cauchy analisando seus principais resultados, os quais nos darão suporte para a próxima seção, os espaços Cauchy-completos.

Definição 2.5 *Uma sequência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma sequência de Cauchy quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$.*

Ser de Cauchy é uma propriedade intrínseca da sequência; depende apenas dos seus termos, mas não da existência de outros pontos no espaço (em contraste com a propriedade de ser convergente). Assim, se $M \subset N$, uma sequência de pontos $x_n \in M$ é de Cauchy em M se, e somente se, é de cauchy em N.

Proposição 2.6 *Toda subsequência de uma sequência de Cauchy é também de Cauchy.*

Demonstração: Sejam (x_n) uma sequencia de Cauchy e (x_{n_k}) uma subsequência qualquer de (x_n). Se a sequência (x_n) é de Cauchy então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica $d(x_m, x_n) < \epsilon$. Se (x_{n_k}) é uma subsequência de (x_n), então $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ São índices de $\mathbb{N}$, que não é limitado superiormente, logo existe $n_{k_0} > n_0$. Então para todo

$$n_k, n_m > n_{k_0},\ d(x_{n_k}, x_{n_m}) < \epsilon.$$

Pois, em particular, os elementos da subsequência x_{n_k} são termos da sequência (x_n) e $n_{k_0} > n_0$. Logo (x_{n_k}) é de Cauchy. $\square$

Intuitivamente, os termos de uma sequência de Cauchy vão se tornando cada vez mais próximos uns dos outros, à medida que crescem os índices n. Comparando com a definição de limite, esta exige que os termos da sequência se tornem cada vez mais próximos de um ponto fixado.

Quando os termos de uma sequência convergente se aproximam de um ponto fixado, eles devem necessariamente aproximar-se uns dos outros a partir de um determinado índice. Esta ideia embasa a próxima proposição:

Proposição 2.7 *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: Seja $\lim x_n = a$ no espaço métrico M então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Se $m, n > n_0$ então $d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$ e $d(x_m, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Assim

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto toda sequência convergente é de Cauchy. $\square$

Exemplo 2.9 *Nem toda sequência de Cauchy é convergente. Para ver isto, tomemos uma sequência de números racionais x_n convergindo para um número irracional a. (Por exemplo, $x_1 = 1,\ x_2 = 1,4,\ x_3 = 1,41,\ x_4 = 1,414\cdots$, com $\lim x_n = \sqrt{2}$.) Sendo convergente em $\mathbb{R}$, segue-se da proposição 2.7 que (x_n) é uma sequência de Cauchy no espaço métrico $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Mas evidentemente (x_n) não é convergente em $\mathbb{Q}$.*

Proposição 2.8 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço métrico M. Então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$. Em particular para $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1$. Logo o conjunto $\{x_{n_0+1},\ x_{n_0+2}, \cdots\}$ é limitado e tem diâmetro ≤ 1. Como o conjunto $\{x_1, \cdots, x_{n_0}\}$ é limitado (pois é finito), segue-se que $\{x_1,\ x_2, \cdots, x_n, \cdots\} = \{x_1, \cdots, x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1},\ x_{n_0+2}, \cdots\}$ é limitado. Portanto, a sequência de Cauchy (x_n) é limitada. □

Nem toda sequência limitada é de Cauchy. Por exemplo, a sequência $(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1, \cdots) \in \mathbb{R}$, que embora seja limitada não é de Cauchy.
De fato, $d(x_m, x_n) = 1,\ \forall n$, logo é limitada. Mas se tomarmos $\epsilon = \frac{1}{2}$, teremos que $d(x_m, x_n) > \frac{1}{2} = \epsilon$. Logo não é de Cauchy.

O exposto no exemplo acima destaca ainda mais o fato de que, toda sequência de Cauchy é limitada, mas nem toda sequência limitada é de Cauchy.

No estudo de limites de sequências, a proposição 2.3 na verdade é uma equivalencia, a sua recíproca diz que: Se **toda subsequência** de (x_n) converge para a, então $\lim x_n = a$. A proposição seguinte, garante que se a sequência x_n for de Cauchy, para mostrar que a sequência toda converge, basta apenas mostrar que **uma subsequência** de (x_n) converge, o que é uma facilidade para esta situação. isto é mostrado na proposição a seguir;

Proposição 2.9 *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente (e tem o mesmo limite que a subsequência).*

Demonstração: Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M e (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) que converge para o ponto $a \in M$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > n_1 \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Como a sequência (x_n) é de Cauchy então para $\epsilon > 0$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_2 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. então para qualquer $n > n_0$ existe n_k tal que $n_k > n$. Como em particular, x_{n_k} é termo da sequência (x_n), temos:

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon.$$

Isto mostra que a sequência de Cauchy (x_n) converge para a. □

Corolário 2.2 *Se uma sequência* (x_n) *possui duas subsequências que convergem para limites distintos então ela não é de Cauchy.*

De fato, se a sequência fosse de Cauchy, pela proposição anterior, a sequência convergiria para dois limites distintos, o que contradiz a unicidade do limite, proposição 2.2. Portanto a sequência não é de Cauchy.

Em particular, uma sequência que possui apenas um número finito de termos distintos só pode ser de Cauchy quando, a partir de uma certa ordem, ela se torna constante.

A propriedade enuciada na proposição 2.9 é evidentimente falsa para sequências arbitrárias. Ela indica que uma sequência de Cauchy só não converge num espaço M se "faltarem pontos no espaço ".

O resultado seguinte tráz uma relação importante entre continuidade uniforme e sequências de Cauchy.

Proposição 2.10 *Toda aplicação uniformemente contínua transforma sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.*

Demonstração: Sejam $f : M \to N$ uniformemente contínua e (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Assim, da continuidade de f, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x,\ y \in M$ e $d(x, y) < \delta$ então $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Por outro lado, sendo (x_n) de Cauchy, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > n_0 \quad d(x_m, x_n) < \delta$ o que implica $d(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon$, ou seja, $(f(x_n))$ é uma sequência de Cauchy em N. $\square$

Uma aplicação apenas contínua pode não transformar sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.

De fato, como contraexemplo temos o caso da função contínua $f : (0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$, que transforma sequências de Cauchy $\left(\frac{1}{n}\right)$ na sequência $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (1,\ 2,\ 3, \cdots, n) = \mathbb{N}$, que é ilimitada, logo pela contrapositiva da proposição 2.8, esta sequência não é de Cauchy.

Observação 2.2 *Não é valida a recíproca da proposição 2.10, transformar sequências de Cauchy em sequências de Cauchy é uma condição sufuciente para que aplicação seja contínua mas não garante que* f *seja uniformemente contínua.*

2.5 Espaços métricos completos

Sabemos que toda sequência convergente é de Cauchy proposição 2.7, porém a recíproca nem sempre é verdadeira, ou seja, nem toda sequência de Cauchy é convergente, mas quando for, diremos que o espaço métrico M é completo. Mas formalmente temos a

Definição 2.6 *Diz-se que o espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente em M.*

Para mostrar que o espaço métrico M não é completo, basta exibir apenas uma sequência em M que seja de Cauchy, porém não seja convergente em M.

Exemplo 2.10 *O espaço $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é completo.*

Para verificar isto, ver exemplo 2.9.

Exemplo 2.11 *Todo espaço métrico com a métrica "zero um"é completo.*
De fato, qualquer sequência de Cauchy em M com a métrica "zero-um"é constante a partir de um certo índice e portanto convergente, logo M é um espaço métrico completo.

Um espaço com a métrica "zero um"é discreto, mas nem todo espaço métrico discreto é completo, como se vê tomando $p = \{1,\ 1/2\ ,\cdots, 1/n, \cdots\}$, onde $x_n = 1/n$ fornece uma sequência de Cauchy que não converge em P, pois $\lim 1/n = 0 \notin P$.

O exemplo acima, assim como o exemplo seguinte, nos dão condições de se obter espaços métricos completos.

Exemplo 2.12 *Uma métrica d, em um espaço métrico M é uniformimente discreta quando existir $\epsilon > 0$ tal que para todo $x,\ y \in M$, $d(x, y) < \epsilon \Rightarrow x = y$.*

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em (M, d). Então para todo $\epsilon > 0$, existe $n(\epsilon) > 0$ tal que $m, n > n_0$, $d(x_m, x_n) < \epsilon$. Em particular, para o ϵ (da métrica d), existe $n_0 > 0$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m.x_n) < \epsilon \Rightarrow x_m = x_n,\ m \neq n$. Assim, para todo $\epsilon > 0$, n_0 é tal que $m, n > n_0 \Rightarrow 0 = d(x_m, x_n) < \epsilon$. Isso mostra que toda sequência de Cauchy em um espaço uniformimente discreto é constante a partir de um certo índice n_0 e portanto convergente. Logo esses espaços são completos.

A proposição seguinte, devida a Cauchy, estabelece o exemplo mais importante de espaço métrico completo.

Proposição 2.11 *A reta é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Pondo para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{x_n,\ x_{n+1}, \cdots\}$, Temos $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ e os conjuntos X_n são limitados, pois toda sequência de Cauchy é limitada, proposição 2.8. Seja $a_n = \inf X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b = \sup X_1$. Como toda sequência monótona limitada de números reais é convergente ,exemplo 2.4, existe o número $a = \lim a_n$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Para provar isto, devido a proposição 2.9 basta mostrar que a é limite de uma subsequência de (x_n), para isto, seja $a = \lim a_n$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > n_0$, $d(a_m, a) < \epsilon$, ou seja, $a - \epsilon < a_m < a + \epsilon$. Para cada m, como $a_m = \inf X_m$, existe $n_m \geq m$ tal que $a_m < x_{n_m} < a + \epsilon$, $x_{n_m} \in X_m$. Assim temos (x_{n_m}) uma subsequência de (x_n) tal que $a - \epsilon < x_{n_m} < a + \epsilon$, $\forall\ n_m > n_0$, ou seja, $d(x_{n_m}, a) < \epsilon$ e portanto $\lim x_{n_m} = a$, logo $\lim x_n = a$. Concluimos que $\mathbb{R}$ é completo. $\square$

Proposição 2.12 *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração: Seja $F \subset M$ fechado, com M completo. Dada uma sequência de Cauchy (x_n) em F, existe $\lim x_n = a \in M$, Pois M é completo. Como F é fechado em M, tem-se que $a \in F$, ,pois a é um ponto aderente a F fechado, isto é, $a \in F$). Logo F é completo, pois a sequência de Cauchy (x_n) em F é convergente em F. Por outro lado, se $M \subset N$ é um subespaço completo, dada a sequência de pontos $x_n \in M$, com $\lim x_n = a \in N$, a sequência (x_n) é de Cauchy, pela proposição 2.7. Logo existe $b \in M$ tal que $\lim x_n = b$ (pois M é completo. Pela unicidade do limite tem-se $a = b \in M$ e portanto M é fechado em N (pois todo ponto de N é limite de uma sequência de pontos de M). $\square$

Exemplo 2.13 *Uma bola fechada $B[a; r]$ e sua fronteira, a esfera $S(a; r)$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, são espaços métricos completos, porque são subconjuntos fechados do espaço completo $\mathbb{R}^n$. Mas geralmente, se M é completo, as bolas fechadas e as esferas de M são* *espaços completos. Por outro lado, nenhuma bola aberta num espaço vetorial normado é um espaço completo, quando dotada da métrica induzida, pois não é um subconjunto fechado.*

Sejam X um conjunto, M um espaço métrico e $\alpha : X \to M$ uma aplicação. A notação $\mathcal{B}_\alpha(X, M)$ representa o conjuntos das aplicações $f : X \to M$ tais que: $d(f, \alpha) = \sup_{x \in X} d(f(x), \alpha(x)) < \infty$, com a métrica da convergência uniforme.

Proposição 2.13 *Se o espaço métrico M é completo então $\mathcal{B}_\alpha(X, M)$ é completo, sejam quais forem X e $\alpha : X \to M$.*

Demonstração: Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}_\alpha(X, M)$. Pela proposição 2.8, (f_n) é limitada, logo existe $c > 0$ tal que $d(f_n, \alpha) \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $d(f_n, \alpha) = \sup_{x \in X} d(f_n(x), \alpha(x))$ temos que

$$d(f_n(x), \alpha(x)) \leq d(f_n, \alpha) \leq c, \ \forall \ x \in X \text{ e } \forall \ n.$$

Fixando-se arbitrariamente $x \in X$, a sequência $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em M. Como, por hipótese, M é completo, existe para cada $x \in X$, o limite de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ em M. Escrevemos $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$. Como o limite é único, isto define uma aplicação $f : X \to M$ que é o limite simples da sequência (f_n). De $d(f_n(x), \alpha(x)) \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in X$, e fazendo $n \to \infty$, concluimos que $d(f(x), \alpha(x)) \leq c, \ x \in X$, pois quando $n \to \infty$, $(f_n(x))$ converge para $f(x), \ \forall \ x \in X$. Logo $f \in \mathcal{B}_\alpha(X, M)$. Resta provar que $f_n \to f$ uniformemente em X, ou seja, que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(f_n, f) < \epsilon$. Como (f_n) é sequência de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(f_n, f_m) < \epsilon$, pela definição de métrica no conjunto $\mathcal{B}_\alpha(X, M)$, temos que $d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon$ para qualquer $x \in X$. Fazendo $m \to \infty$ nesta desigualdade, concluimos que $n > n_0 \Rightarrow d(f(x), f_n(x)) \leq \epsilon$ para todo $x \in X$. ou seja, $f_n \to f$ uniformimente em X. $\square$

O próximo resultado, denominado Critério de Cauchy para convergência uniforme, garante que: Uma sequência de funções $f_n : X \to M$ converge uniformemente em X, se, e somente se esta sequência é de Cauchy. Este resultado é muito importante, pois o mesmo estabelece uma condição necessária e suficiente para a convergência uniforme.

Corolário 2.3 *(Critério de Cauchy para convergência uniforme). Seja M um espaço métrico completo. Para que uma sequência de aplicações $f_n : X \to M$ convirja uniformemente em X, é necessário e suficiente que, para todo $\epsilon > 0$ dado, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m(x), f_n(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$.*

Demonstração: Se (f_n) converge uniformemente em $f \in X$, então $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$, $\forall\, x \in X$, para $n > n_0$, para algum n_0. Logo, $f_n \in \mathcal{B}_f(X, M)$ para todo n suficientemente grande e $\lim f_n = f$ nesse espaço. Logo (f_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}_f(X, M)$, ou seja, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > n_0 \Rightarrow d(f_n, f_m) < \epsilon$, e como

$$d(f_m, f_n) = \sup d(f_m(x), f_n(x)) \ \text{ então } \ d(f_m(x), f_n(x)) \leq d(f_m, f_n) < \epsilon, \ \forall\, x \in X.$$

Portanto $d(f_m(x), f_n(x)) < \epsilon$, $\forall\, x \in X$. Reciprocamente, se para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > n_0 \Rightarrow d(f_m(x), f_n(x)) < \epsilon$, $\forall\, x \in X$, em particular vale para $\epsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ e se $n = n_{0+1}$ temos $d(f_m(x), f_{n_0+1}(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, m > n_0$, $\forall\, x \in X$, e como

$$d(f_m, f_{n_{0+1}}) = \sup_{x \in X}\ d(f_m(x), f_{n_0+1}(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Colocando $\alpha = f_{n_0+1}$, então

$$d(f_m, \alpha) \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow f_m \in \mathcal{B}_\alpha(X, M), \ \forall\, m > n_0.$$

Além disso, da hipótese segue que $(f_m)_{m > n_0}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}_\alpha(X, M)$ que, pela proposição 2.13 é completo. Assim, (f_n) converge uniformemente em X. □

2.6 Espaços de Banach

Definição 2.7 *Um espaço normado E é chamado espaço de Banach quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.*

Exemplo 2.14 *O espaço $\mathbb{R}^n$ com a norma definida por $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ é um espaço de Banach.*
Com efeito, tomemos uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$, digamos $x_m = (a_1^{(m)},\ a_2^{(m)}, \cdots, a_n^{(m)})$. então dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $m, k > n_0$ temos que

$$\|x_m - x_k\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(m)} - a_i^{(k)})^2 \right)^{1/2} < \epsilon \tag{2.1}$$

Desta forma, para $m, k > n_0$, temos

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^{(m)} - a_i^{(k)})^2 < \epsilon^2 \Rightarrow (a_i^{(m)} - a_i^{(k)})^2 < \epsilon^2 \Rightarrow |a_i^{(m)} - a_i^{(k)}| < \epsilon, \ 1 \leq i \leq n.$$

Se fixarmos algum $i = 1, \cdots, n$, verificamos que a sequência de numeros reais $(a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \cdots, a_i^{(n)}, \cdots)$ é uma sequência de Cauchy. Pelo fato de $\mathbb{R}$ ser um espaço completo, isto é, toda sequência de Cauchy de números reais converge para um número real, então $a_i^{(m)} \to a_i \in \mathbb{R}$ quando $m \to \infty$. Usando a mesmo procedimento n vezes, para todos os $i = 1, \cdots, n$, definimos $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = a$, com $a \in \mathbb{R}^n$. e ainda, para $k \to \infty$ em (2.1) *obtemos $\|x_m - a\| \leq \epsilon$ sempre que $m > n_0$. Portanto, $\mathbb{R}^n$ é um espaço de banach.*
□

Exemplo 2.15 *Pela proposição 2.13, $\mathcal{B}_\alpha(X, M)$ é um espaço de Banach, onde X é um conjunto qualquer e M é um espaço de Banach. Em particular, se $\alpha \equiv 0$ então $\mathcal{B}_\alpha(X, M) = \mathcal{B}(X, M)$ (conjunto das funções limitadas) é um espaço de Banach.*

Proposição 2.14 *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E. Então F é um espaço de Banach, com a norma induzida de E, se, e somente se, F é fechado em E.*

A proposição acima evidencia a importância dos subespaços fechados de um espaço de Banach. Não demonstraremos este resultado, pois na proposição 2.12 mostramos que o resultado é válido para qualquer espaço métrico completo. Ou seja, vale também para um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

No exemplo seguinte, o simbolo $\mathbb{K}$ denotará, o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Os elementos de $\mathbb{K}$ são chamados de escalares.

Exemplo 2.16 *Dos estudos de análise, sabemos que $[a, b]$ é compacto em $\mathbb{R}$, o conjunto $C[a, b]$ de todas as funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{K}$ é um subespaço vetorial do espaço de Banach $B[a, b]$, e portanto é um espaço normado com a norma*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\} = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Mais ainda, $C[a, b]$ é um espaço de Banach. De fato, pela proposição 2.14, basta provar que $C[a, b]$ é um subespaço fechado de $B[a, b]$. Para tanto, observe que se $f_n \to f$ em

$C[a,b]$, então $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente para f. Segue que f é contínua por ser o limite uniforme de funções contínuas, proposição 2.5.

Dos estudos de cáculo, sabemos que se f e g são diferenciáveis, então $(f+g)$ é uma função diferenciável e $(f+g)' = f' + g'$ e se $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f)' = \lambda f'$. Isso significa que o conjunto de todas as funções diferenciáveis possui uma estrutura natural de espaço vetorial. Estudamos no próximo exemplo os espaços de funções continuamente diferenciáveis.

Exemplo 2.17 *Definimos o espaço das funções continuamente diferenciáveis por*

$$C'[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ \ \textit{é diferenciável em } [a,b] \textit{ e } f' \in C[a,b]\}.$$

Como podemos observar acima, $C'[a,b]$ é subespaço vetorial de $C[a,b]$. Entretanto $C'[a,b]$ não é fechado em $C[a,b]$, e portanto não é completo na norma $\|\cdot\|_{\infty}$, pela proposição 2.14. Vejamos que a norma

$$\|f\|_{c^1} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$$

faz de $C'[a,b]$ um espaço de Banach. Vamos mostrar que $(C^1[a,b], \|\cdot\|_{c^1})$ é completo.

Demonstração: De fato, dada uma sequência de Cauchy $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ em $(C^1[a,b], \|\cdot\|_{c^1})$, como $\|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{c^1}$ e $\|f'\|_{\infty} \leq \|f\|_{c^1}$, já que $C'[a,b]$ é subespaço vetorial de $C[a,b]$, segue que as sequências $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ são de Cauchy em $C[a,b]$ pois, por hipótese $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $C^1[a,b]$, ou seja, $\forall m,\ n > n_0 \Rightarrow \|f_m - f_n\|_{c^1} < \epsilon$, sabemos que $\|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{c^1}$, e $\|f'\|_{\infty} \leq \|f\|_{c^1}$, então

$$\forall\ m,\ n > n_0 \Rightarrow \|f_m - f_n\|_{\infty} \leq \|f_m - f_n\|_{c^1} < \epsilon \text{ e } \|f_m' - f_n'\|_{\infty} \leq \|f_m - f_n\|_{c^1} < \epsilon$$

Ou seja, $\forall m,\ n > n_0 \Rightarrow \|f_m - f_n\|_{\infty} < \epsilon$ e $\|f_m' - f_n'\|_{\infty} < \epsilon$, o que mostra $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ ser de Cauchy em $C[a,b]$, com $\|\cdot\|_{\infty}$. Dito isto, do exemplo anterior sabemos que $C[a,b]$ é completo, logo existem $f, g \in C[a,b]$ tais que $f_n \to f$ e $f_n' \to g$ uniformemente. Já sabemos que f_n é de Cauchy em $C^1[a,b]$, queremos mostrar que f_n converge em $C^1[a,b]$. Sabemos também que $f_n \to f$, e que $f \in C[a,b]$, mas devemos mostrar que, além disso, $f \in C^1[a,b]$. Com este fim, vamos fazer uso do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Pelo TFC temos que

$$\underbrace{f_n(x) - f_n(a)}_{h(x)} = \int_a^x f_n'(x)\ dx.$$

Vamos aplicar o limite de ambos os lados desta igualdade,

$$\lim_{n\to\infty}(f_n(x)-f_n(a)) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^x f_n'(x)\ dx\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(a) = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\, dx \Rightarrow$$

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(x)\ dx \Rightarrow f'(x) = g(x).$$

Isto nos diz que existe $f' = g$ e que f' é contínua, pois $f' = g \in C[a,b]$, ou seja, f é contínuamente diferenciável, ou seja, $f \in C^1[a,b]$, e portanto f_n é uma sequência de Cauchy convergente em $C^1[a,b]$, logo $C^1[a,b]$ é completo. $\square$

No próximo capítulo veremos um exemplo de espaços de Banach especial, o $\mathcal{L}(E,F)$ que indica o conjunto das aplicações lineares e contínuas de E em F.

Capítulo 3

Operadores lineares contínuos e teorema de Banach-Steinhaus

Passamos agora a estudar os operadores lineares e contínuos, exibindo algumas propriedades e exemplos. Continuaremos a tratar dos espaços de Banach e mostraremos que $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço normado e completo. Em seguida, analisaremos os seguintes resultados: teorema de Baire, teorema da limitação uniforme e seu corolário, mostrando a importância e aplicações destes resultados.

3.1 Operadores lineares contínuos

Os espaços normados têm uma estrutura algébrica de espaço vetorial à qual estão associadas as transformações lineares, e uma estrutura topológica de espaço métrico à qual estão associadas as funções contínuas. Nesta seção, vamos estudar as funções que são simultaneamente lineares e contínuas, tais funções são normalmente chamadas de operadores lineares e contínuos.

Definição 3.1 *Um operador linear contínuo do espaço normado E no espaço normado F, ambos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, é uma função $f : E \to F$ que é **linear**, isto é*

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* $x,\ y\ \in E$ *e*

- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e qualquer* x *em* E;

e ***contínua****, isto é, para todo* $x_0 \in E$ *e* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$ *sempre que* $x \in E$ *e* $\|x - x_0\| < \delta$*. Se* $F = \mathbb{K}$*, o operador linear* f *chama-se funcional linear.*

Observação 3.1 *Uma das características dos operadores lineares é que ao atribuirmos para* x *o valor 0 (zero), sua imagem* $f(0)$ *também será 0 (zero). Esta é uma consequência imediata da definição acima.*

Exemplo 3.1 *Sejam* E *e* F *espaços vetoriais normados. A notação* $\mathcal{L}(E, F)$ *indica o conjunto das aplicações lineares contínuas de* E *em* F*. O conjunto* $\mathcal{L}(E, F)$ *é um espaço vetorial, no qual consideramos a norma*

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\|,\ x \in E, \|x\| = 1\}.$$

Para provar que $\|f\|$ *é norma, ver [2].*

Proposição 3.1 *Para toda função* $f \in \mathcal{L}(E, F)$*, e todo* $x \in E$*, vale*

$$\|f(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x\|.$$

Demonstração: Pela definição de norma, $\|f(x)\| \leq \|f\|,\ \forall\ x \in E,\ \|x\| = 1$. Por outro lado, para todo $x \in E,\ x \neq 0$ tem-se

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1, \text{ logo } \left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|f\| \Rightarrow \left\|\frac{1}{\|x\|} \cdot f(x)\right\| \leq \|f\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{1}{\|x\|}\right\| \cdot \|f(x)\| \leq \|f\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \cdot \|f(x)\| \leq \|f\| \Rightarrow \|f(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x\|.$$

Como isto também vale para $x = 0$, pois f é um operador linear, então temos

$$\|f(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x\|,\ \forall\ x \in E.$$

□

Proposição 3.2 *Sejam* E *e* F *espaços vetorias normados e* $f : E \to F$ *uma aplicação linear. São equivalentes as propriedades:*

a) f *é contínua;*

b) $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\| < \infty$, *ou seja, f restrita a $S(0;1) = \{x \in E; \|x\| = 1\}$ é limitada.*

Demonstração:

a) $\Rightarrow$ *b)*. Por hipótese, f é contínua em todo E, ou seja, para $a \in E$, temos $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x), f(a)\| < \epsilon$; em particular, f é contínua na origem, isto é, para $a = 0$. Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| < \delta \Rightarrow \|f(x)\| \leq \epsilon$. Se $\|x\| \leq 1$, $\|\delta x\| = \|\delta\| \cdot \|x\| \leq \delta$, logo

$$\|f(\delta x)\| \leq \epsilon \Rightarrow \|\delta \cdot f(x)\| \leq \epsilon \Rightarrow \|\delta\| \cdot \|f(x)\| \leq \epsilon \Rightarrow \|f(x)\| \leq \frac{\epsilon}{\delta} = k.$$

Isto significa que f é limitada em $B[0;1]$. Como $S(0;1) \subset B[0;1]$ então f é limitada em $S(0;1)$.

b) $\Rightarrow$ *a)*. Seja $\sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\| = L < \infty$. Pela proposição anterior $\|f(x)\| \leq L\|x\|$, $\forall\, x \in E$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \frac{\epsilon}{L}$. Então se $\|x\| \leq \delta$, então $\|f(x)\| \leq L\|x\| < L\delta = \epsilon$. Logo, f é contínua na origem. Seja $x_0 \in E$ qualquer. Para $\|x - x_0\| < \delta$, $\|f(x - x_0)\| < \epsilon$. Como f é linear $f(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$ portanto, $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \epsilon$. Logo, f é contínua em x_0. □

Por definição, $\lim f_n = f$ em $\mathcal{L}(E,F)$ significa que $\lim \|f_n - f\| = 0$, o que equivale a dizer que $f_n \to f$ uniformemente em $S(0;1)$.

Proposição 3.3 *Se F é completo, então o espaço vetorial normado $\mathcal{L}(E,F)$ é completo.*

Demonstração: Se (f_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E,F)$ então as restrinções $f_n|_{S(0;1)}$ constituem uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}_0(S,F)$ (conjunto das aplicações $f : S \to F$ tais que $d(f,0) = \sup\limits_{x \in S} d(f(x), 0(x)) < \infty$). Como F é completo, pela proposição 2.13, $\mathcal{B}_0(S,F)$ também é, logo existe $f_0 : S \to F$ limitada, tal que $f_n \to f_0$ uniformemente em $S(0;1)$. Indiquemos com $f : E \to F$ a extensão da aplicação $f_0 : S \to F$, definida por $f(\lambda u) = \lambda f_0(u)$, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in S(0;1)$. Mostremos que $f_n \to f$ simplemente em E : é claro que $f_n(0) = 0 \to 0 = f(0)$; se $x \neq 0, x \in E$ então

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \cdot \frac{\|x\|}{\|x\|} = \|x\| \cdot \lim_{n\to\infty} f_n(x) \cdot \frac{1}{\|x\|},$$ usando a linearidade de cada f_n

implica $\|x\| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\| \cdot f_0\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$, pois $f_n \to f_0$ uniformimente em $S(0;1)$.

Lembrando de como está definida a aplicação f, e tomando $\lambda = \|x\|$ temos :

$$f\left(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) = f(x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

ou seja, $f_n \to f$ simplesmente em E. Do fato de $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ segue-se imediatamente que f é linear. Como $f|_{S(0;1)} = f_0$ é limitada e portanto contínua pela proposição 3.2. Vemos que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ e como $f_n|_{S(0;1)} \to f|_{S(0;1)}$ uniformemente, temos $\lim f_n = f$ no espaço $\mathcal{L}(E, F)$, que é portanto completo. □

Observação 3.2 *Na demonstração anterior, afirmamos que: Do fato de* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *segue-se imediatamente que* f *é linear. pois;*

a) $f(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} fn(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} \alpha fn(x) = \alpha \lim_{n\to\infty} fn(x) = \alpha f(x),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall x \in E$

b) $f(x + y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x + y) = \lim_{n\to\infty} [f_n(x) + f_n(y)] = \lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} f_n x + \lim_{n\to\infty} f_n y = f(x) + f(y),\ \forall\ x,\ y \in E.$

A seção seguinte trará resultados indispensáveis para o desenvolvivento de nossos estudos. Passamos a caracterização dos operedores lineares e contínuos, mostrando alguns resultados importantes. Esta seção juntamente com o capítulo anterior, espaços métricos completos, nos darão a base para desenvolvermos os principais teoremas deste trabalho.

3.1.1 Caracterização dos operadores lineares e contínuos

No capítulo I, trabalhamos duas classes importantes de funções no contexto de espaços métricos, sendo: as aplicações Lipschitzianas, exemplo 1.10 e as aplicações uniformemente contínuas, definição 1.6. Na ocasião, mostramos que para funções entre espaços métricos, as implicações:

Lipschtziana $\Rightarrow$ **Uniformimente contínua** $\Rightarrow$ **Contínua** $\Rightarrow$ **Contínua em um ponto**,

são verdadeiras e que, em geral, todas as implicações inversas são falsas. Trabalharemos o próximo resultado, que remonta os trabalhos de F.Riesz, o qual conforme [3]:

> "é de grande importância pois, o mesmo mostra que todos esses conceitos são equivalentes no contexto de Operadores Lineares entre espaços normados. Ou seja, a linearidade, simplifica o comportamento topológico."(2015,p.35).

Proposição 3.4 *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : E \to F$ linear. As seguintes equivalências são verdadeiras:*

$$\textbf{\textit{T é lipschitziano}} \Leftrightarrow \textbf{\textit{T é uniformemente contínuo}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \textbf{\textit{T é contínuo}} \Leftrightarrow \textbf{\textit{T é contínuo em algum ponto de E}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \textbf{\textit{T é contínuo na origem}} \Leftrightarrow \sup\{\|T(x)\| : x \in E \ e \ \|x\| \leq 1\} < \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \textbf{\textit{Existe uma constante}}\ c > 0\ \textbf{\textit{tal que}}\ \|T(x)\| \leq c\|x\|\ \textbf{\textit{para todo}}\ x \in E.$$

Observação 3.3 *As implicações:* ***T é lipschitziano*** $\Rightarrow$ ***T é uniformemente contínuo*** $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ***T é contínuo*** $\Rightarrow$ ***T é contínuo em algum ponto de E****, são válidas no contexto de espaços métricos, isto é, não dependem da linearidade de T. Vamos mostrar as demais implicações.*

Demonstração:

T é contínuo em algum ponto de E $\Rightarrow$ T é contínuo na origem.

Por hipótese, T é conínuo em algum ponto de E. vamos Supor T contínuo num ponto $x_0 \in E$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$ implica $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$, $\forall\ x \in B(x_0; \delta)$. Tome $x \in E$ tal que $\|x - 0\| = \|x\| < \delta$, $\forall\ x \in B(0; \delta)$. Então $\|x\| < \delta \Rightarrow \|x + x_0 - x_0\| = \|(x + x_0) - x_0\| < \delta$. Portanto

$$\|T(x)-T(0)\| = \|T(x)-0\| = \|T(x)\| = \|T(x)+T(x_0)-T(x_0\| = \|T(x+x_0)-T(x_0)\| < \epsilon.$$

Ou seja, mostramos que, $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(0)\| < \epsilon$. Provando que T é contínuo na origem.

T é contínuo na origem $\Leftrightarrow \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$.

Da continuidade de T na origem, com $T(0) = 0$, tomamos $\epsilon = 1$ e obtemos $\delta > 0$ tal que $\|x - 0\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(0)\| < 1$, da linearidade de T segue que

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(0)\| = \|T(x) - 0\| = \|T(x)\| \leq 1.$$

Se $\|x\| \leq 1$, $\left\|\frac{\delta}{2} \cdot x\right\| = \left\|\frac{\delta}{2}\right\| \cdot \|x\| = \frac{\delta}{2} \cdot \|x\| < \delta$, ou seja, $\left\|\frac{\delta}{2} \cdot x\right\| < \delta$, então

$$\left\|T\left(\frac{\delta}{2}x\right)\right\| = \left\|\frac{\delta}{2}T(x)\right\| = \frac{\delta}{2}\|T(x)\| \leq 1 \Rightarrow \|T(x)\| < \frac{2}{\delta}.$$

Isso prova que

$$\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \leq \frac{2}{\delta} < \infty.$$

$$\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ **Existe uma constante** $c > 0$ **tal que** $\|T(x)\| \leq c\|x\|$ **para todo** $x \in E$.

Para $x \in E,\ x \neq 0$, com T um operador linear e usando propriedades de norma, temos

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\| \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \right\| = \frac{\|T(x)\|}{\|\|x\|\|} = \left\| \frac{T(x)}{\|x\|} \right\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq c$$

Pois a implicação anterior garante isto. daí, segue que

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq c \Leftrightarrow \|T(x)\| \leq c\|x\|,\ \forall\ x \neq 0.$$

O resultado segue pois essa desigualdade é trivialmente verificada para $x = 0$, Pois $\|T(0)\| = 0 \leq c\|0\|$.

Existe uma constante $c > 0$ **tal que** $\|T(x)\| \leq c\|x\|$ **para todo** $x \in E \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **T é lipschitziano**.

Devemos mostrar que $d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x, y)\ \forall\ x,\ y \in E$. considere $x_1,\ x_2 \in E$, e **d** a métrica induzida pela norma de E . Daí segue que

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq c\ \|x_1 - x_2\|.$$

portanto T é lipschtziano. $\square$

3.2 Teorema de Banach-Steinhaus

Muito dos principais teoremas em análise estão associados a algum tipo de controle uniforme baseado em hipóteses pontuais. O teorema de Banach-Steinhaus, principal resultado deste trabalho, garante que: se uma família de operadores lineares e contínuos for **pontualmente limitada**, então esta família de operadores é **uniformimente limitada**. Como podemos ver, este teorema parte de uma ideia pontual e chega em propriedades uniformes. Este resultado só é possível porque estamos trabalhando com operadores lineares e contínuos.

Antes de demonstrarmos este importante resultado, precisamos do seguinte clássico da topologia dos espaços métricos, o teorema de Baire, o qual tem várias formulações equivalentes, enunciamos agora a mais conveniente para nossos propósitos:

Teorema 3.1 (Teorema de Baire) *Sejam (M,d) um espaço métrico completo e $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de subconjuntos fechados de M tais que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{n_0} tem interior não vazio.*

Demonstração: Denotemos por $int(A)$ o interior de um subconjunto A de M. Façamos por absurdo, e para isso suponhamos que $int(F_n) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Chamando $A_n = (F_n)^c = (M - F_n)$, pela proposição 1.13 cada A_n é aberto, e

$$\overline{A_n} = \overline{(F_n)^c} = (int(F_n))^c = \emptyset^c = M$$

para todo n, (a segunda destas igualdades se justifica pelo fato de $(\overline{X})^c = intX^c$, proposição 1.12). Em particular, cada A_n é não vazio, pois $\overline{A_n} = M$, isto é, A_n é denso em M, então $\forall\ r > 0$ e $x \in M$, $B(x;r) \cap A_n \neq \emptyset$. Escolha $x_1 \in A_1$ e usando o fato de A_1 ser aberto garantimos a existência de $0 < \delta_1 < 1$ tal que a bola fechada de centro x_1 e raio δ_1, denotada por $B[x_1, \delta_1]$, está contida em A_1. De $\overline{A_2} = M$ temos $A_2 \cap B(x_1, \delta_1) \neq \emptyset$, pois $\overline{A_n} = M$, ou seja, $\overline{A_1} = M = \overline{A_2}$, logo $B(x_1, \delta_1) \subset A_1 \subset M = \overline{A_2} \Rightarrow x_1 \in M = \overline{A_2} \Rightarrow A_2 \cap B(x_1, \delta_1) \neq \emptyset$. Pela proposição 1.10 $A_2 \cap B(x_1, \delta_1)$ é um aberto não vazio , logo existem $x_2 \in A_2 \cap B(x_1, \delta_1)$ e $0 < \delta_2 < \frac{1}{2}$ tais que

$$B[x_2, \delta_2] \subset A_2 \cap B(x_1, \delta_1) \subset A_2 \cap B[x_1, \delta_1],$$

pois $\delta_2 < \delta_1$. Continuando o processo até A_n temos:

$$\overline{A_{n-1}} = M = \overline{A_n} \Rightarrow A_n \cap B(x_{n-1}; \delta_{n-1}) \neq \emptyset, \exists\ x_n \in A_n \cap B(x_{n-1}; \delta_{n-1}) \neq \emptyset$$

$$\text{e}\ \ \exists\ \ 0 < \delta_n < \frac{1}{n}\ \text{tal que}\ \ B[x_n; \delta_n] \subset A_n \cap B(x_{n-1}; \delta_{n-1}).$$

Assim construimos uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em M e uma sequência $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reais tais que $0 < \delta_n < \frac{1}{n}$ e $B[x_n, \delta_n] \subseteq A_n \cap B[x_{n-1}, \delta_{n-1}]$ para todo n. vamos mostrar que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ é de Cauchy em M, para tanto temos de mostrar,

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in\ \mathbb{N};\ \forall m, n > n_0\ d(x_m, x_n) \leq \epsilon,$$

dado $\epsilon > 0$, se $m, n \geq n_0$ sabendo que,

$$B[x_n, \delta_n] \subseteq A_n \cap B[x_{n-1}, \delta_{n-1}] \Rightarrow B[x_n, \delta_n] \subset B[x_{n_0}, \delta_{n_0}] \text{ e } B[x_m, \delta_m] \subset B[x_{n_0}, \delta_{n_0}]$$

Pois o processo antes construido nos garante isto. Daí, sabendo que $x_m,\ x_n\ e\ x_{n_0}\ \in M$, pela desigualdade triângular temos que:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{n_0}) + d(x_n, x_{n_0}) \leq \delta_{n_0} + \delta_{n_0} = 2\delta_{n_0} < \frac{2}{n_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{2}{n_0} < \epsilon \Leftrightarrow n_0 > \frac{2}{\epsilon}.$$

Logo, escolhendo $n_0 > \frac{2}{\epsilon}$ temos que

$$\forall\ \epsilon > 0,\ n_0 > \frac{2}{\epsilon},\ \forall m,\ n > n_0, d(x_m, x_n) \leq \epsilon$$

portanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de cauchy em M. Esta sequência (x_n) é convergente em M, pois M é completo por hipótese. Digamos $x_n \to x \in M$. seja $n \in \mathbb{N}$. como $x_m \in B[x_m, \delta_m] \subseteq B[x_n, \delta_n]$ para todo $m \geq n$, então pela definição 1.8, x é ponto aderente a $B[x_n, \delta_n]$, por outro lado, sabemos que $B[x_n, \delta_n]$ é um conjunto fechado, segue que $x \in B[x_n, \delta_n] \subset A_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, Portanto

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right)^c = M^c = \emptyset,$$

Isto é, $x \in \emptyset$, ou seja, x não existe, então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ não é convergente, e daí concluímos que M não é completo , contradição esta que conclui a demonstração. □

O teorema de Banach-Steinhaus, também conhecido como Teorema da limitação uniforme, provado pelos matemáticos S. Banach e H. Steinhaus em 1927 é um dos resultados mais importantes em análise funcional. Este teorema requer que os espaços normados sejam completos, ou seja, espaços de Banach.

Teorema 3.2 (Teorema de Banach-Steinhaus) *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_i)_{i \in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E, F)$ satisfazendo a condição de que*

$$\textit{para cada } x \in E \textit{ existe } C_x < \infty \textit{ tal que } \sup_{i \in I} \parallel T_i(x) \parallel < C_x.$$

Então $\sup_{i \in I} \parallel T_i \parallel < \infty$.

Demonstração: Seja $E_i = \{x \in E; \|T_i(x)\| \leq n\} = \{x \in E; (\|\cdot\| \circ T_i)(x) \leq n\} \Rightarrow Im(\|\cdot\| \circ T_i)|_{E_i} = [0,n] \Rightarrow (\|\cdot\| \circ T_i)(E_i) = [0,n]$, agora usando propriedades de inversa, temos $(\|\cdot\| \circ T_i)^{-1} \circ (\|\cdot\| \circ T_i)(E_i) = (\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}([0,n]) \Rightarrow \{x \in E : \|T_i(x)\| \leq n\} = (\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}([0,n])$. Por hipótese $(T_i)_{i\in I} \subset \mathcal{L}(E,F)$, logo T_i é contínuo e $(\|\cdot\| \circ T_i)([0,n])$ também é uma aplicação contínua. Daí, pela proposição 1.15 resulta que o conjunto $\{x \in E : \|T_i(x)\| \leq n\} = (\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}([0,n])$ é fechado para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $i \in I$. Agora chamando

$$A_n = \left\{x \in E : \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| \leq n\right\} = \{x \in E; \|T_i(x)\| \leq n, \ \forall i \in I\}$$

O segundo membro desta igualdade nos diz que: para

$$x \in E, \underbrace{\|T_1(x)\| \leq n}_{a_1} \text{ e } \underbrace{\|T_2(x)\| \leq n}_{a_2} \text{ e} \cdots \text{e } \underbrace{\|T_{i-1}(x)\| \leq n}_{a_{i-1}} \text{ e} \cdots \text{e } \underbrace{\|T_i(x)\| \leq n}_{a_i}$$

E isto implica que

$$A_n = \left\{x \in E : \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| \leq n\right\} = \bigcap_{i\in I} \{x \in E : \|T_i(x)\| \leq n\}$$

o qual é fechado por ser uma interseção de fechados, proposição 1.14. De $\sup \|T_i(x)\| \leq C_x$ segue que $E = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, esta igualdade se justifica pelo fato de $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset E$, pois cada $A_n \subset E$. resta mostrar que $E \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Façamos isto por absurdo e para isso vamos supor que $E \not\subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, isto é, existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, isto implica que $x_0 \notin A_n, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, o que implica $\sup \|T_i(x_0)\| > n \geq C_{x_0}$, o que é um absurdo, pois a hipótese do teorema nos garante que: Para cada $x \in E$ existe $C_x < \infty$ tal que $\sup \|T_i(x)\| < C_x$. Portanto $E = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Feito isto, pelo teorema 3.1, teorema de Baire, podemos afirmar que algum A_n possui interior não-vazio. Seja n_0 um número natural tal que $intA_{n_0} \neq \emptyset$, e sejam $a \in int(A_{n_0})$ e $r > 0$ tais que $\{x \in E : \|x - a\| \leq r\} \subseteq int(A_{n_0})$. Seja $y \in E$ com $\|y\| \leq 1$. Se $\overline{x} = a + ry$, então $\|\overline{x} - a\| = \|ry\| = r\|y\| \leq r$ e portanto $\overline{x} \in \ B(a;r) \subset A_{n_0} \Rightarrow \overline{x} \in A_{n_0}$. Assim

$$\|T_i(\overline{x} - a)\| = \|T_i(\overline{x}) - T_i(a))\| \leq \|T_i(\overline{x})\| + \|T_i(a)\| \leq n_0 + n_0 \text{ para todo } i \in I.$$

A igualdade e as duas desigualdades que seguem na expressão acima, se devem respectivamente pelo fato de: Linearidade de T, a desigualdade triangular e por $\overline{x}, \ a \in E$.

Logo

$$\|T_i(ry)\| = \|T_i(\overline{x} - a)\| \leq 2n_0 \Rightarrow \|T_i(ry)\| \leq 2n_0 \Leftrightarrow \|r \cdot T_i(y)\| \ \leq 2n_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |r| \cdot \|T_i(y)\| \leq 2n_0 \Leftrightarrow \|T_i(y)\| \leq \frac{2n_0}{r} \ \text{ para todo } \ i \in \mathbb{I},$$

pelo fato de $\|T_i(y)\| \leq \frac{2n_0}{r} \Rightarrow \sup\{\|T_i(y)\|\} \leq \frac{2n_0}{r}$, devido a norma de T_i,

$$\|T_i\|_\infty = \sup\{\|T_i(y)\|, y \in \ E, \|Y\| \leq 1\} \leq \frac{2n_0}{r} \Leftrightarrow \|T_i\|_\infty \leq \frac{2n_0}{r} \Leftrightarrow \sup \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{r}$$

□

Do estudo de análise na reta sabemos que o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas é uma função contínua, enquanto que o limite pontual de funções contínuas pode não ser uma função contínua. Este mesmo resultado é válido no âmbito dos espaços métricos.

Como aplicação do teorema de Banach-Steinhaus, veremos agora um Corolário que nos garante que, na presença da linearidade, a convergencia pontual é suficiente, ou seja, se tivermos uma sequência de operadores lineares contínuos $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente apenas pontualmente para um operador T, então garantimos que T é linear e contínuo. Temos então que a convergência pontual esta implicando na convergencia uniforme.

Corolário 3.1 *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{L}(E, F)$ tal que $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em F para todo x em E. Se definirmos*

$$\begin{aligned} T : E \ &\to \ F \\ x \ &\to \ T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x), \end{aligned}$$

Então T é um operador linear contínuo.

Demonstração: A linearidade de T segue das propriedades aritméticas dos limites, ver observação 3.2. Por hipótese, para cada $x \in E$ a sequência $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente, e portanto limitada. Ou seja, $\|T_n(x)\| < \infty$. Pelo fato de os $\mathbb{R}$ ser completo, então todo subconjunto não-vazio, limitado superiormente, possui supremo, temos que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty$ para todo $x \in E$. Pelo teorema da **Limitação Uniforme** existe $C > 0$

tal que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \leq C$. Segue então que

$$\|T_n(x)\| \underbrace{\leq}_{prop\ 3.1} \|T_n\| \cdot \|x\| \leq C \cdot \|x\| \Rightarrow \|T_n(x)\| \leq C \cdot \|x\| \ \ \forall\, x \in E \text{ e } \ n \in \mathbb{N}.$$

Por hipótese, fazendo $n \to \infty$, $T_n \to T$, assim obtemos $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ $\forall\ x \in E$, e pela proposição 3.4 concluimos que T é contínuo. Portanto na presença da linearidade, o limite pontual de funções contínuas é uma função contínua. □

Conclusão

Com o desenvolvimento deste trabalho, foi possível observar que o assunto é muito vasto, mas percebemos a importância dos conteúdos abordados em cada capítulo dentro dos nossos objetivos que foi trabalhar o teorema de Banach-Steinhaus (o qual exige que o espaço E seja Banach e cada T_i um operador linear e contínuo), para a demonstração deste resultado fizemos uso do teorema de Baire (o qual por hipótese exige que o espaço métrico M seja completo); como aplicação do teorema de Banach- Steinhaus, mostramos o seu corolário que também requer que E seja Banach e estejamos na presença de operadores lineares e contínuos.

Fica evidente a importância do teorema de Banach-Steinhaus, pois o mesmo parte de hipóteses pontuais e chega em propriedades uniformes. Isto nem sempre ocorre, a menos que estejamos trabalhando com espaços normados e com operadores lineares e contínuos.

Enfim, neste trabalho foi possível apresentar alguns resultados da teoria dos espaços métricos e espaços métricos completos juntamente com alguns conceitos abordados em análise funcional, mostrando um dos principais teoremas nesta área, o teorema de Banach-Steinhaus ou teorema da limitação uniforme.

Bibliografia

[1] LIMA, E. L.; Espaços Métricos, 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[2] MACHADO, LUCIANA B. **Análise funcional e aplicações**. Rio claro, Universidade Estadual Paulista, 2012. 204 p (dissertação de mestrado).

[3] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E.; Fundamentos de análise funcional, Rio de janeiro: SBM, 2012.

Apêndice A

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

A.1 1° versão

Teorema A.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz 1° versão) *Sejam* $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ *números reais não todos nulos, então a seguinte desigualdade ocorre:*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (b_i)^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i)^2}.$$

Demonstração: Podemos escrever

$$(xa_1 + b_1)^2 + (xa_2 + b_2)^2 + \cdots + (xa_n + b_n)^2 =$$

$$= (x^2a_1^2 + 2xa_1b_1 + b_1^2) + \cdots + (x^2a_n^2 + 2xa_nb_n + b_n^2) =$$

$$= Ax^2 + 2Bx + C$$

Onde

$$\begin{aligned} A &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, \\ B &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n, \\ C &= b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2. \end{aligned}$$

O lado esquerdo da equação acima é uma soma de quadrados, não-negativos para todo x; em particular para $x = -\frac{B}{A}$. Substituindo este valor em x na equação temos:

$$A \cdot \frac{B^2}{A^2} - 2B \cdot \frac{B}{A} + C = \frac{AC - B^2}{A} \geq 0.$$

Como $A > 0$ então $AC - B^2 \geq 0$. E a desigualdade está provada. $\square$

Observação A.1 *A igualdade só é possível se*

$$xa_1 + b_1 = xa_2 + b_2 = \cdots = xa_n + b_n.$$

Que é o mesmo que

$$\frac{b_1}{a_1} = \cdots = \frac{b_n}{a_n} = -x.$$

Como aplicação do teorema A.1 vamos mostrar que as métricas definidas no exemplo 1.3 (o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$) satisfazem a desigualdade triângular.

Demonstração:

1° Métrica: mostrar que:

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \text{ cumpre } d_4) \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Observe que, para todo x, y, z $\in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ e $z = (z_1, \cdots, z_n)$, logo temos :

$$d(x,z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2}, \quad d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}, \quad d(y,z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2}$$

Então podemos afirmar que:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2},$$

Sejam $a_i = x_i - y_i$ e $b_i = y_i - z_i$, $i = 1, \cdots, n$ temos então

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2}.$$

Vamos elevar ambos os membros desta desigualdade ao quadrado, assim temos:

$$\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2}\right)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}_{1^\circ membro} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}(b_i)^2}_{2^\circ membro}$$

Vamos trabalhar o 1° membro desta desigualdade, ou seja;

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 = \sum\left[(a_i)^2 + 2a_i \cdot b_i + (b_i)^2\right] = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot b_i) + \sum_{i=1}^{n}(b_i)^2}_{1^\circ membro}$$

Voltando à desigualdade acima temos;

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot b_i) + \sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}(b_i)^2$$

Cancelando os termos(parcelas iguais) em ambos os membros desta desigualdade temos:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot b_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2}$$

que é uma consequência da desigualdade de Cauchy, assim concluimos então que a seguinte desigualdade é válida $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $\square$

2° Métrica: Mostrar que:

$d'(x,y) = |x_i - y_i| + \cdots + |x_n - y_n| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ cumpre $d_4)$ $d'(x,z) \leq d'(x,y) + d'(y,z)$.

Considere x, y, z $\in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ e $z = (z_1, \cdots, z_n)$. Daí temos, $d'(x,z) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|$, vamos somar e subtrair (y_i) dentro do módulo, ou seja;

$$d'(x,z) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i| = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i + y_i - z_i| = \sum_{i=1}^{n}|(x_i - y_i) + (y_i - z_i)|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}[|x_i - y_i| + |y_i - z_i|] \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n}|y_i - z_i| = d'(x,y) + d'(y,z),$$

Portanto, $d'(x,z) \leq d'(x,y) + d'(y,z)$. $\square$

3° Métrica: Mostrar que:

$d"(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\} = \displaystyle\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ cumpre $d_4)$ $d"(x,z) \leq d"(x,y) + d"(y,z)$.

Considere x, y, z $\in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ e $z = (z_1, \cdots, z_n)$. Daí temos, $d"(x, z) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - z_i|$, vamos somar e subtrair (y_i) dentro do módulo, ou seja;

$$d"(x,z) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - z_i| = d"(x,z) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i + y_i - z_i| = \max_{1 \le i \le n} |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)|$$

$$\le \max_{1 \le i \le n} [|x_i - y_i| + |y_i - z_i|] = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i| \ + \ \max_{1 \le i \le n} |y_i - z_i|,$$

Portanto $d"(x, z) \le d"(x, y) + d"(y, z)$. $\square$

A.2 2° versão

Teorema A.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz 2° versão) *Para todo x, $y \in E$, tem-se $|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$.*

Antes da demonstração deste teorema, vamos enunciar e provar o seguinte lema:

Lema A.1 *Dados x, $y \in \mathbb{R}^n$, com $y \ne 0$ e pondo se $\alpha = \frac{\langle x,y \rangle}{\|y\|^2}$, o vetor $z = x - \alpha y$ é ortogonal a y, isto é, $\langle z, y \rangle = 0$.*

Demonstração: Com efeito,

$$\langle z, y \rangle = \langle x - \alpha y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle \alpha y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \alpha \cdot \langle y, y \rangle =$$

$$= \langle x, y \rangle - \alpha \cdot \|y\|^2 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \cdot \|y\|^2 = \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle = 0$$

Portanto $\langle z, y \rangle = 0$. $\square$

De posse do lema, vamos mostrar o Teorema A.2.

Demonstração: Isto é óbvio se $y = 0$, mas se $y \ne 0$, tomamos $\alpha = \frac{\langle x,y \rangle}{\|y\|^2}$ Como acabamos de ver, o vetor $z = x - \alpha y$ é ortogonal a y. segue daí que:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle z + \alpha y, z + \alpha y \rangle = \langle z, z \rangle + \langle z, \alpha y \rangle + \langle \alpha y, z \rangle + \langle \alpha y, \alpha y \rangle =$$

$$\langle z, z \rangle + \alpha \langle z, y \rangle + \alpha \langle y, z \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle = \|z\|^2 + \underbrace{2\alpha \langle z, y \rangle}_{0} + \alpha^2 \|y\|^2 = \|z\|^2 + \alpha^2 \|y\|^2$$

Ou seja

$$\|x\|^2 = \|z\|^2 + \alpha^2 \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 \ge \alpha^2 \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 \ge \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \right)^2 \cdot \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 \ge \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2}$$

$$\Leftrightarrow \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \ge \langle x, y \rangle^2 \Leftrightarrow (\|x\| \cdot \|y\|)^2 \ge \langle x, y \rangle^2 \Leftrightarrow \|x\| \cdot \|y\| \ge \sqrt{\langle x, y \rangle^2} \Leftrightarrow \|x\| \cdot \|y\| \ge |\langle x, y \rangle|$$

Portanto $|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$. $\square$

Apêndice B

Operações com conjuntos

B.1 Complementares

Os conjuntos A e B são partes de um conjunto fundamental E, em relação ao qual estamos tomando os complementares.

1. $(A^c)^c = A$,

   Temos $x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A$. Logo $(A^c)^c = A$. $\square$

2. $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$,

   Suponhamos $A \subset B$. Então um elemento $x \in B^c$ não pode pertencer a B e, com maior razão não pertencerá a A. Logo $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c$, ou seja, $B^c \subset A^c$. Reciprocamente, se temos $B^c \subset A^c$ então, pelo que acabamos de ver, deve ser $(A^c)^c \subset (B^c)^c$. Usando 1, obtemos $A \subset B$. $\square$

3. $A = \emptyset \Leftrightarrow A^c = E$,

   $A = \emptyset \Leftrightarrow x \notin A$ para todo $x \in E \Leftrightarrow x \in A^c$ para todo $x \in E \Leftrightarrow A^c = E$. $\square$

4. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

   Como $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$, segue-se de C_2 que $(A \cup B)^c \subset A^c$ e $(A \cup B)^c \subset B^c$, donde $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$. Seja $X = A^c \cap B^c$. Temos $X \subset A^c$ e $X \subset B^c$. Por 2 , vem $A \subset X^c$ e $B \subset X^c$, donde $A \cup B \subset X^c$. Por 2 e 1 vem $X \subset (A \cup B)^c$, isto é, $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$. Concluimos que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.$\square$

5. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Como $A \subset A \cap B$ e $B \subset A \cap B$, segue-se de C_2 que $(A \cap B)^c \subset A^c$ e $(A \cap B)^c \subset B^c$, donde $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$. Seja $X = A^c \cup B^c$. Temos $X \subset A^c$ e $X \subset B^c$. Por 2 , vem $A \subset X^c$ e $B \subset X^c$, donde $A \cap B \subset X^c$. Por 2 e 1 vem $X \subset (A \cap B)^c$, isto é, $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$. Concluimos que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.$\square$