



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FRANK ELTON BRITO DA COSTA
JOEL OLIVEIRA DAS CHAGAS

SISTEMAS AUTÔNOMOS: APLICAÇÃO EM EPIDEMIOLOGIA

MACAPÁ - AP

2016

**FRANK ELTON BRITO DA COSTA
JOEL OLIVEIRA DAS CHAGAS**

SISTEMAS AUTÔNOMOS: APLICAÇÃO EM EPIDEMIOLOGIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao colegiado de Matemática como requisito
para obtenção do grau de Licenciatura em Ma-
temática. Orientador: Prof. Dr. Guzmán
Eulálio Isla Chamilco

MACAPÁ - AP

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

511

C837s Costa, Frank Elton Brito da.

Sistemas autônomos: aplicação em epidemiologia / Frank Elton Brito da Costa, Joel Oliveira das Chagas; orientador, Guzmán Eulálio Isla Chamilco. -- Macapá, 2016.

72 p.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Sistemas autônomos. 2. Modelo SIS. 3. Epidemiologia. I. Chagas, Joel Oliveira das. II. Chamilco, Guzmán Eulálio Isla, orientador. III. Fundação Universidade Federal do Amapá. IV. Título.

FRANK ELTON BRITO DA COSTA
JOEL OLIVEIRA DAS CHAGAS

SISTEMAS AUTÔNOMOS: APLICAÇÃO EM EPIDEMIOLOGIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do Grau de Licenciatura Plena em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá, campus Marco Zero, aprovado pela comissão de professores:

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco

Orientador

Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil

Colegiado de Ciências da Computação, UNIFAP

Prof. Dr. Gilberlândio Jesus Dias

Colegiado de Matemática, UNIFAP

MACAPÁ - AP

2016

*Aos meus pais, Francisco e Edileuza,
pela criação que me deram, incentivo e
amor. À minha esposa Lanna Galeno e
ao meu filho Arthur Costa, pelo amor,
carinho e alegria que me proporcionam.*

Frank Costa

A Deus que sempre me deu sabedoria e força para superar as dificuldades. À minha família, em especial aos meus pais, Jacivaldo Chagas e Doralice Oliveira, que sempre acreditaram em minha capacidade, e ao meu irmão Josiel Chagas pelo seu total apoio.

Joel Chagas

Agradecimentos

A Deus, em primeiro lugar, por me conceder uma família maravilhosa, amigos e oportunidades, principalmente para a realização deste trabalho.

À minha família, especialmente aos meus pais, Francisco Costa e Edileuza Brito, que sempre acreditaram na minha formação e me incentivaram em todos os momentos. E também à minha esposa Lanna Galeno e ao meu filho Arthur Costa, pela compreensão e paciência nos momentos que estive ausente, pelo amor, carinho e apoio em todos os momentos juntos.

Aos meus irmãos que, cada um com sua forma de amor completam minha família com felicidade e alegria.

Aos amigos que estiveram presentes e que, direta ou indiretamente, fizeram parte deste trabalho me proporcionando momentos de alegria e pura amizade. Em especial ao meu amigo e colega de graduação Joel Chagas, pelo esforço, empenho e dedicação para realizarmos juntos este trabalho. E também a todos aqueles que conheci nessa caminhada, que não mediram esforços em ajudar.

Ao meu orientador Prof. Dr. Guzmán Eulálio, pela paciência, dedicação e incentivo, por estar sempre disposto ajudar no pouco tempo que lhe coube.

Aos professores do colegiado de matemática, pelos ensinamentos.

A todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho, o meu sincero muito obrigado.

Frank Costa

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse ao longo de minha vida, por ter me dado saúde, sabedoria e força para superar as dificuldades.

À minha família, em especial aos meus pais, Jacivaldo Chagas e Doralice Oliveira pelo amor incondicional, que sempre estiveram me apoiando e me incentivando a continuar os estudos, que mesmo em meio a dificuldades financeiras sempre encontravam alguma maneira para me ajudar. Ao meu irmão Josiel Chagas pelo seu total apoio em todos os momentos que passamos juntos.

Ao meu colega e amigo Frank Costa, pelo seu total apoio e companheirismo para a elaboração desta monografia.

Ao meu amigo Walter Amaral, que foi uma pessoa que contribui grandemente para a elaboração desta monografia, pelos seus ensinamentos e conselhos, sempre serei grato por ter acreditado em minha capacidade.

Aos meus amigos da graduação que sempre acreditaram em minha capacidade, amigos de infância, amigos que conquistei recentemente, em especial a Ana Carolina Gonçalves e ao Jonatha da Silva pela colaboração neste trabalho e pelo espaço que sempre era disponibilizado para o nosso estudo.

A todos os professores do colegiado de matemática por me proporcionar o conhecimento, em especial ao meu orientador Prof. Dr. Guzmán Eulálio, pelo incentivo e empenho dedicado á elaboração deste trabalho.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Joel Chagas

O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis.

José de Alencar

Resumo

A modelagem matemática tem se mostrado uma ferramenta importante no estudo de Epidemiologia. Este trabalho tem como objetivo analisar a estabilidade do modelo matemático epidemiológico SIS para a Doença de Chagas, elaborado por meio de sistemas autônomos de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem. É estudado o modelo clássico SIS (Suscetível - Infectado - Suscetível) com mistura proporcional e transmissão vetorial como uma aplicação para o estudo de estabilidade na Doença de Chagas.

Palavras-chave: Sistemas Autônomos; Modelagem Matemática; Análise de Estabilidade; Modelo SIS; Epidemiologia.

Abstract

Mathematical modeling has been an important tool in Epidemiology study. This work aims to analyze the stability of the epidemiological mathematical model SIS for Chagas disease, developed through independent of linear ordinary differential equations of first order systems. It studied the classical model SIS (Susceptible - Infected - Susceptible) with proportional and transmission vector mixture as an application for the study of stability in Chagas disease.

Keywords: Autonomous Systems; Mathematical Modeling; Stability Analysis; Model SIS; Epidemiology.

Lista de Figuras

3.1	<i>Plano de fase para o Exemplo 3.1.</i>	38
3.2	<i>Plano de fase para o Exemplo 3.2.</i>	39
3.3	<i>Plano de fase para o sistema (3.4).</i>	43
3.4	<i>Plano de fase do sistema linear (3.12).</i>	47
3.5	<i>Plano de fase do sistema não linear (3.11).</i>	47
3.6	<i>Plano de fase do sistema linear (3.13).</i>	48
3.7	<i>Plano de fase do sistema não linear (3.11).</i>	48
4.1	<i>Diagrama compartimental para o Caso 1 do modelo SIS.</i>	53
4.2	<i>Plano de fase para o Caso 1 do modelo SIS.</i>	56
4.3	<i>Diagrama compartimental para o Caso 2 do modelo SIS.</i>	56
4.4	<i>Diagrama compartimental para o Caso 3 do modelo SIS.</i>	59
5.1	<i>Barbeiro.</i>	62

Lista de Tabelas

3.1	<i>Propriedades de Estabilidade e Instabilidade de Sistemas Lineares e Localmente Lineares, onde AE: assintoticamente estável; N: nó; NI: nó impróprio; NP: nó próprio; PE: ponto espiral; PS: ponto de sela; C: centro.</i>	49
-----	--	----

Sumário

1	Introdução	14
2	Fundamentos Teóricos	16
2.1	Sistemas de Equações Lineares Algébricas	16
2.2	Independência Linear	18
2.3	Autovalores e Autovetores	19
2.3.1	Autovalores e Autovetores de uma Matriz	19
2.4	Sistemas de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem	21
2.4.1	Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes	24
2.4.1.1	Autovalores Reais e Distintos	26
2.4.1.2	Autovalores Reais e Repetidos	27
2.4.1.3	Autovalores Complexos	31
3	Sistemas Autônomos e Estabilidade	35
3.1	Sistemas Autônomos	36
3.2	Estabilidade, Estabilidade Assintótica e Instabilidade	36
3.3	Sistemas Localmente Lineares	41
3.3.1	Primeiro Método de Lyapunov	43
4	Modelos Matemáticos em Epidemiologia	50
4.1	Modelo SIS	52
4.1.1	SIS com N constante (sem dinâmica vital)	52

4.1.2	SIS com N constante (com dinâmica vital)	56
4.1.3	SIS com N variável	59
5	Um Modelo SIS para a Doença de Chagas	61
5.1	A Doença de Chagas	61
5.2	Modelo SIS com Mistura Proporcional e Transmissão Vetorial	63
5.2.1	O Modelo	64
5.2.2	Pontos de Equilíbrio e Análise de Estabilidade	66
6	Conclusão	70
	Referências	71

Capítulo 1

Introdução

A história da humanidade ficou marcada inúmeras vezes por desastres relacionados a doenças epidemiológicas. Muitas delas foram capazes de dizimar grande parte da população de uma determinada região. Dentre elas podemos destacar a peste negra, que foi uma das maiores epidemias já registradas tendo seu início na China e se alastrou pela Europa durante o século XIV, e chegou a matar cerca de um terço da população europeia.

Podemos também citar o HIV que, desde a década de 80, passou a ter um significativo impacto nos índices de mortalidade em todo o mundo. E mais recentemente a população mundial ficou em alerta com a gripe suína.

A partir do surgimento dessas doenças, estudos passaram a ser desenvolvidos como objetivo de encontrar uma forma de controle dessas epidemias.

O estudo epidemiológico utilizando modelos matemáticos tem-se mostrado uma ferramenta importante para que se possa entender e prever o comportamento de uma epidemia e, adotar uma política de prevenção para que ela não se alastre causando um grande número de mortes em uma população.

A modelagem matemática nos permite ter um olhar amplo para os fatos da nossa realidade, e através dela, por exemplo, fazer grandes contribuições nas diversas áreas do conhecimento. Na epidemiologia a modelagem matemática é feita através de equações que indicam o comportamento da população e o ambiente, nos permitindo estudar esses comportamentos e trazer para a realidade através dos resultados obtidos com os modelos matemáticos.

Neste trabalho, procuraremos aplicar os conhecimentos matemáticos em um problema envolvendo epidemiologia. Com o objetivo principal de analisar a estabilidade do modelo matemático epidemiológico SIS para a Doença de Chagas, elaborado por meio de sistemas de equações diferenciais ordinárias.

Para isto, no capítulo 2 vamos abordar alguns fundamentos teóricos como: sistemas de equações lineares algébricas, independência linear, autovalores e autovetores, sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem.

No capítulo 3, abordamos a definição de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem. Também é apresentado o primeiro Método de Lyapunov que, permite analisar a estabilidade de sistemas localmente lineares através do cálculo dos autovalores do sistema linearizado.

No capítulo 4, é discutido o modelo matemático clássico em Epidemiologia: SIS, com três casos. O primeiro caso com N constante e sem dinâmica vital, o segundo caso com N constante e com dinâmica vital, e o terceiro caso com N variável.

No capítulo 5, são abordados os aspectos biológicos e históricos da doença de chagas, um mal que atinge milhares de pessoas, principalmente na América Latina. E por fim, a aplicação do modelo SIS para a Doença de Chagas.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados preliminares os quais usaremos no capítulo 3, no estudo de análise de estabilidade de sistemas. Primeiramente vamos rever alguns conceitos da álgebra linear que são importantes para a solução de sistemas lineares de equações diferenciais, focando na parte de sistemas lineares, independência linear, autovalores e autovetores. Por último vamos fazer um estudo sobre sistemas de equações diferenciais lineares, abordando na mesma soluções desses sistemas. Alguns resultados são facilmente demonstráveis, outros não, mas nosso objetivo neste capítulo é de obter apenas conceitos importantes para trabalharmos no capítulo 3, ou seja, não focaremos na parte de demonstrações desses resultados.

Para a elaboração deste capítulo utilizamos como base os livros, Boyce (2011), Boldrini (1980) e Zill (2001).

2.1 Sistemas de Equações Lineares Algébricas

Um sistema de equações lineares é um conjunto finito de equações lineares aplicadas num mesmo conjunto, igualmente finito, de variáveis. Logo de forma generalizada, um

sistema de equações lineares é da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2.1)$$

O sistema de equações lineares (2.1) pode ser escrito como uma equação matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{AX} = \mathbf{b}, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{A} é a matriz quadrada $n \times n$ dos coeficientes e o vetor \mathbf{b} é formado pelos resultados, e os componentes do vetor \mathbf{X} são as incógnitas. Se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, o sistema é dito homogêneo, caso contrário, ele é não homogêneo.

Se a matriz de coeficientes \mathbf{A} é invertível, isto é, se $\det \mathbf{A}$ é diferente de zero, então o sistema (2.2) possui uma única solução. Como \mathbf{A} é invertível, logo \mathbf{A}^{-1} existe e a solução do sistema linear pode ser determinado multiplicando \mathbf{A}^{-1} em ambos os lados da equação (2.2) pela esquerda,

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \quad (2.3)$$

Por outro lado, se \mathbf{A} for singular, ou seja, se $\det \mathbf{A} = 0$ então ou não existe solução para a equação (2.2), ou existe, porém não é única. Como \mathbf{A} é singular, ou seja, \mathbf{A}^{-1} não existe, logo a equação (2.3) não é mais válida. O sistema homogêneo

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

tem uma infinidade de soluções além da solução trivial. A situação para o sistema não homogêneo (2.2) é mais complicada. Esse sistema não tem solução, a menos que o vetor \mathbf{b} satisfaça uma determinada condição. Essa condição é que

$$(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0, \quad (2.5)$$

para todos os vetores \mathbf{y} tais que $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$, onde \mathbf{A}^* é a adjunta de \mathbf{A} . Se a condição (2.5) for satisfeita, então (2.2) tem uma infinidade de soluções. Cada uma dessas soluções

tem a forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(0)} + \boldsymbol{\xi}, \quad (2.6)$$

onde $\mathbf{x}^{(0)}$ é uma solução particular da equação (2.2) e $\boldsymbol{\xi}$ é qualquer solução do sistema (2.4). Podemos perceber que a uma semelhança entre a equação (2.6) e a solução de uma equação diferencial linear não homogênea.

Os resultados anteriores são importantes para classificar as soluções de sistemas lineares. No entanto, para resolver um sistema particular, é melhor, em geral usar redução de linhas para transformar o sistema em um muito mais simples, do qual a solução se existir pode ser escrita facilmente. Para fazer isso de maneira eficiente, podemos formar a **matriz aumentada**

$$\mathbf{A} | \mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{a}_{11} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} & \mathbf{b}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} & \mathbf{b}_n \end{array} \right] \quad (2.7)$$

juntando o vetor \mathbf{b} à matriz de coeficientes \mathbf{A} como uma coluna adicional. A linha pontilhada fica no lugar dos sinais de igualdade e particiona a matriz aumentada. Agora efetuamos as operações elementares na matriz aumentada de modo a transformar \mathbf{A} em uma matriz triangular, isto é, em uma matriz cujos elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos. Uma vez feito isso, é fácil ver se o sistema tem ou não solução e, se tiver, encontrá-las.

2.2 Independência Linear

Definição 2.1 Um conjunto de K vetores $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(k)}$ é dito **linearmente dependente** se existe um conjunto de números $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_k$ nem todos nulos, tais que

$$\mathbf{c}_1 \mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{c}_2 \mathbf{X}^{(2)} + \cdots + \mathbf{c}_k \mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

Em outras palavras, $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(k)}$ são linearmente dependentes se existe uma relação linear entre eles. Por outro lado, se o único conjunto $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_k$ para o qual a equação (2.8) é satisfeita é $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = \dots = \mathbf{c}_k = \mathbf{0}$, então $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(k)}$ são ditos **linearmente independentes**.

Vamos considerar um conjunto de n vetores, cada um deles com n componentes. Seja $x_{ij} = x_i^{(j)}$ a i -ésima componente do vetor $\mathbf{X}^{(j)}$ e seja $\mathbf{X} = (x_{ij})$. Então, a equação (2.8) pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)}c_1 + \cdots + x_1^{(n)}c_n \\ \vdots \\ x_n^{(1)}c_1 + \cdots + x_n^{(n)}c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}c_1 + \cdots + x_{1n}c_n \\ \vdots \\ x_{n1}c_1 + \cdots + x_{nn}c_n \end{bmatrix} = \mathbf{X}\mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

Se $\det \mathbf{X} \neq 0$, então a única solução da equação (2.8) é $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, mas se $\det \mathbf{X} = 0$, existem soluções não nulas. Logo, o conjunto de vetores $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(k)}$ é linearmente dependente se, e somente se, $\det \mathbf{X} \neq 0$.

2.3 Autovalores e Autovetores

Definição 2.2 *Seja V um espaço vetorial, sobre \mathbb{R} , e seja $T = V \rightarrow V$ uma transformação linear, um vetor $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, é um autovetor de V se existe um escalar λ de \mathbb{R} , tal que $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Neste caso λ é um autovalor de T associado a \mathbf{x} .*

2.3.1 Autovalores e Autovetores de uma Matriz

A equação

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (2.10)$$

pode ser vista como uma transformação linear que leva um vetor dado \mathbf{x} em um novo vetor \mathbf{y} . Vetores que são transformados em múltiplos de si mesmo são importantes em muitas aplicações. Para encontrar tais vetores, fazemos $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$, onde λ é um fator de proporcionalidade, e procuramos soluções das equações

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (2.11)$$

ou

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

Escrevendo a equação (2.12) explicitamente, temos

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Chamamos de \mathbf{B} a primeira matriz acima. Então $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Se $\det \mathbf{B} \neq 0$, sabemos que o posto da matriz \mathbf{B} é n e portanto o sistema de equações lineares homogêneo indicado acima tem uma única solução. Ora, como $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ (ou $\mathbf{x} = \mathbf{0}$) sempre é solução de um sistema homogêneo, então esta única solução seria a nula. Assim a única maneira de encontrarmos autovetores \mathbf{x} (soluções não nulas da equação acima) é termos $\det \mathbf{B} = 0$, ou seja,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (2.13)$$

Impondo esta condição determinamos primeiramente os autovalores λ que satisfazem a equação e depois os autovetores a eles associados. Observamos que

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

é um polinômio em λ de grau n .

$p(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) +$ termos de grau $< n$, e os autovalores procurados são as raízes deste polinômio. $p(\lambda)$ é chamado **polinômio característico**.

Portanto os valores de λ que satisfazem a equação (2.13) são chamados de **autovalores** da matriz \mathbf{A} , e as soluções não nulas correspondentes das equações (2.11) ou (2.12), obtidos usando-se um tal valor de λ , são chamados **autovetores** correspondentes, ou associados a λ .

2.4 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

A teoria geral para sistemas de equações lineares de primeira ordem

$$\begin{cases} x'_1 = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x'_2 = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \vdots \\ x'_n = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases} \quad (2.14)$$

é bastante semelhante à teoria para uma única equação linear de ordem n , ou seja, usaremos as mesmas linhas de raciocínio afim de estender para o estudo de sistemas de equações lineares de primeira ordem.

Afim de analisar o sistema (2.14) de maneira mais eficiente, usaremos notação matricial. Isto é, vamos considerar $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ como componentes de um vetor $x = \phi(t)$, da mesma forma, $g_1(t), \dots, g_n(t)$ componentes de um vetor $g(t)$ e $p_{11}(t), \dots, p_{nn}(t)$ são elementos de uma matriz $n \times n$ $P(t)$. Logo a equação (2.14) fica na forma

$$X' = P(t)X + g(t). \quad (2.15)$$

Dizemos que um vetor $x = \phi(t)$ é uma solução da equação (2.15) se suas componentes satisfazem o sistema de equações (2.14). Nesta seção, vamos supor que P e g são contínuas em algum intervalo $\alpha < t < \beta$, isto é, cada uma das funções escalares $p_{11}, \dots, p_{nn}, g_1, \dots, g_n$ é contínua nesse intervalo.

É conveniente considerar primeiro a equação homogênea

$$X' = P(t)X \quad (2.16)$$

determinada da equação (2.15) fazendo-se $g(t) = 0$. Uma vez resolvida a equação homogênea, existem vários métodos para se resolver a equação não homogênea (2.15).

Usaremos a notação

$$X^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \dots, X^{(k)}(t) = \begin{bmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{bmatrix}, \dots \quad (2.17)$$

para denotar soluções do sistema (2.16).

Teorema 2.1 *Se as funções vetoriais $\mathbf{X}^{(1)}$ e $\mathbf{X}^{(2)}$ são soluções do sistema (2.16), então a combinação linear $\mathbf{c}_1\mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{c}_2\mathbf{X}^{(2)}$ também é solução quaisquer que sejam as constantes \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 .*

Logo aplicando repetidamente o Teorema 2.1, chegamos a conclusão de que

$$\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(k)}$$

são soluções da equação (2.16), então

$$\mathbf{X} = \mathbf{c}_1\mathbf{X}^{(1)}(t) + \dots + \mathbf{c}_k\mathbf{X}^{(k)}(t) \quad (2.18)$$

também é solução qualquer que sejam as constantes $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_k$.

Exemplo 2.1 *Seja as seguintes soluções*

$$\mathbf{X}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} \quad e \quad \mathbf{X}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t}$$

do sistema

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_1 + x_2 \end{cases}. \quad (2.19)$$

De acordo com o Teorema 2.1,

$$\mathbf{X} = \mathbf{c}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + \mathbf{c}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t} = \mathbf{c}_1\mathbf{X}^{(1)}(t) + \mathbf{c}_2\mathbf{X}^{(2)}(t) \quad (2.20)$$

também satisfaz a equação (2.19).

Como indicamos anteriormente, aplicando repetidamente o Teorema 2.1, segue que toda combinação linear finita de soluções da equação (2.16) também é solução. O objetivo, agora, é saber se todas as soluções da equação (2.16) podem ser encontradas dessa mesma maneira. Por analogia, é razoável esperar que, para um sistema da forma (2.16) de ordem n , seja suficiente formar combinações lineares de n soluções escolhidas apropriadamente.

Sejam, então, $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ n soluções do sistema (2.16) de ordem n e considere a matriz $\mathbf{X}(t)$ cujas colunas são os vetores $\mathbf{X}^{(1)}(t), \mathbf{X}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{X}^{(n)}(t)$:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Da Seção 2.2 temos que, as colunas de $\mathbf{X}(t)$ são linearmente independentes para um valor dado de t se, e somente se, $\det \mathbf{X} \neq 0$ para esse valor de t . Esse determinante é chamado de **Wronskiano** das n soluções $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ e denotado por $W[\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}]$, ou seja,

$$W[\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}](t) = \det \mathbf{X}(t). \quad (2.22)$$

Logo as soluções $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ são linearmente independentes em um ponto se, e somente se, $W[\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}](t)$ não é zero nesse ponto. Daí temos o seguinte teorema.

Teorema 2.2 *Se as funções vetoriais $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ são linearmente independentes do sistema (2.16) em cada ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$, então cada solução $\mathbf{X} = \phi(t)$ do sistema (2.16) pode ser expressa como uma combinação linear de*

$$\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)},$$

$$\phi = c_1 \mathbf{X}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{X}^{(2)}(t) + \dots + c_n \mathbf{X}^{(n)}(t). \quad (2.23)$$

Note que, de acordo com o Teorema 2.1, todas as expressões da forma (2.23) são soluções do sistema (2.16), enquanto, pelo Teorema 2.2, todas as soluções da equação (2.16) podem ser escritos na forma (2.23). Se pensarmos nas constantes c_1, c_2, \dots, c_n como arbitrárias, então a equação (2.23) inclui todas as soluções do sistema (2.16), e é normal chamá-la de **solução geral**. Qualquer conjunto de soluções $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ da equação (2.16) que seja linearmente independente em cada ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$ é dito um **conjunto fundamental de soluções** para esse intervalo.

Teorema 2.3 *Se $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ são soluções da equação (2.16) no intervalo $\alpha < t < \beta$, então $W[\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}]$ ou é indenticamente nulo ou nunca se anula nesse intervalo.*

A importância do Teorema 2.3 reside do fato de este nos livrar da necessidade de examinar $W[\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}]$ em todos os pontos do intervalo de interesse e nos permitir determinar se $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções simplesmente calculando seu Wronskiano em qualquer ponto conveniente do intervalo.

O próximo teorema diz que o sistema (2.16) tem pelo menos um conjunto fundamental de soluções.

Teorema 2.4 *Sejam* $e^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, \dots , $e^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; além disso, suponha que $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ são soluções do sistema (2.16) que satisfazem as condições iniciais $\mathbf{X}^{(1)}(\mathbf{t}_0) = e^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}(\mathbf{t}_0) = e^{(n)}$, respectivamente, onde \mathbf{t}_0 é um ponto qualquer no intervalo $\alpha < \mathbf{t} < \beta$. Então, $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções para o sistema (2.16).

Uma vez encontrada um conjunto fundamental de soluções, pode-se gerar outros conjuntos formando-se combinações lineares (independentes) do primeiro conjunto. Para fins teóricos, o conjunto dado pelo Teorema 2.4 é, em geral, o mais simples possível.

Resumindo, qualquer conjunto de n soluções linearmente independente do sistema (2.16) constitui um conjunto fundamental de soluções. Sob as condições dadas nesta seção, tais conjuntos fundamentais sempre existem e toda solução do sistema (2.16) pode ser representada como uma combinação linear de qualquer conjunto fundamental de soluções.

2.4.1 Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Vamos concentrar a maior parte da nossa atenção em sistemas de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes, ou seja, sistemas da forma

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}, \tag{2.24}$$

onde \mathbf{A} é uma matriz constante $n \times n$. A menos que se diga o contrário, suporemos que todos os elementos de \mathbf{A} são números reais.

Para construir a solução geral do sistema (2.24), procedemos por analogia com o tratamento de equações lineares de segunda ordem. Procuramos, então, solução da equação (2.24) da forma

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\xi} e^{\lambda t}, \quad (2.25)$$

onde o expoente λ e o vetor constante $\boldsymbol{\xi}$ devem ser determinados. Substituindo \mathbf{X} dado pela equação (2.25) no sistema (2.24), obtemos

$$\lambda \boldsymbol{\xi} e^{\lambda t} = \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} e^{\lambda t}.$$

Dividindo por $e^{\lambda t}$ em ambos os lados, obtemos $\mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = \lambda \boldsymbol{\xi}$, ou

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \quad (2.26)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade ($n \times n$).

A equação matricial (2.26) é equivalente as equações algébricas simultâneas

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n = 0 \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} - \lambda)\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)\xi_n = 0 \end{cases}$$

Assim, para obter uma solução não trivial \mathbf{X} de (2.24) precisamos primeiramente obter uma solução não trivial desse sistema, em outras palavras, precisamos obter um vetor não trivial $\boldsymbol{\xi}$ que satisfaça (2.26). Mas para que (2.26) tenha outra solução e não a solução óbvia $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, devemos ter

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Essa equação polinomial em λ é chamada **equação característica** da matriz \mathbf{A} , suas soluções são os autovalores de \mathbf{A} . Uma solução $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$ de (2.26) correspondente a um autovalor λ é chamado um autovetor de \mathbf{A} . Logo uma solução do sistema homogêneo (2.24) é da forma (2.25).

Agora vamos estudar três casos para o sistema (2.24): autovalores reais e distintos, autovalores reais e repetidos e, finalmente, autovalores complexos.

2.4.1.1 Autovalores Reais e Distintos

Quando a matriz \mathbf{A} , ($n \times n$), tiver n autovalores reais e distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, um conjunto de n autovetores linearmente independentes $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}$ poderá ser obtido e

$$\mathbf{X}^{(1)} = \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \mathbf{X}^{(2)} = \xi^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \dots, \mathbf{X}^{(n)} = \xi^{(n)} e^{\lambda_n t}$$

será um conjunto fundamental de soluções de (2.24) em $(-\infty, \infty)$.

Teorema 2.5 *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ autovalores reais e distintos da matriz \mathbf{A} do sistema homogêneo (2.24) e sejam $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}$ os autovetores correspondentes. Então, a solução geral de (2.24) no intervalo $(-\infty, \infty)$ é dado por*

$$\mathbf{X} = c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{\lambda_n t}.$$

Exemplo 2.2 *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}. \quad (2.27)$$

Vamos calcular a solução geral do sistema (2.27) determinando os autovalores e os autovetores.

Em primeiro lugar, vamos determinar os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes.

Da equação característica

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

vemos que os autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$.

Para $\lambda_1 = -1$, (2.26) é equivalente a

$$\begin{cases} 3\xi_1 + 3\xi_2 = 0 \\ 2\xi_1 + 2\xi_2 = 0 \end{cases}.$$

Assim, $\xi_1 = \xi_2$. Tomando $\xi_2 = -1$, o autovetor correspondente será

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 4$, temos

$$\begin{cases} -2\xi_1 + 3\xi_2 = 0 \\ 2\xi_1 - 3\xi_2 = 0 \end{cases}$$

de tal forma que $\xi_1 = \frac{3\xi_2}{2}$ e, portanto, com $\xi_2 = 2$, o autovetor correspondente será

$$\xi^{(2)} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz de coeficientes A é uma matriz 2×2 e como determinamos duas soluções linearmente independentes de (2.27),

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} \quad e \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t},$$

concluimos que a solução geral do sistema é

$$X = c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t}.$$

2.4.1.2 Autovalores Reais e Repetidos

Naturalmente, nem todos os n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de uma matriz A $n \times n$ precisam ser distintos, ou seja, alguns autovalores podem ser repetidos. Por exemplo verifica-se imediatamente que a equação característica da matriz de coeficientes do sistema

$$X' = \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} X \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x'_1 = 3x_1 - 18x_2 \\ x'_2 = 2x_1 - 9x_2 \end{cases} \quad (2.28)$$

é $(\lambda + 3)^2 = 0$ e, portanto, $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ é uma raiz de **multiplicidade dois**. Para esse valor obtemos o único autovetor

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \text{logo,} \quad X^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} \quad (2.29)$$

é uma solução de (2.28). Porém, como estamos obviamente interessados em obter a solução geral do sistema, precisamos prosseguir e obter uma segunda solução.

Em geral, se m for um inteiro positivo, $(\lambda - \lambda_1)^m$ é um fator da equação característica e $(\lambda - \lambda_1)^{m+1}$ não for fator, diremos que λ_1 é um **autovetor de multiplicidade m** . Nesse caso, existem duas possibilidades:

i) Para algumas matrizes A $n \times n$, é possível obter m autovetores linearmente independentes $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}$ correspondentes a um autovalor λ_1 de multiplicidade $m \leq n$. Nesse caso a solução geral do sistema contém a combinação linear

$$c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{\lambda_1 t} + \dots + c_m \xi^{(m)} e^{\lambda_1 t}$$

ii) Se houver somente um autovetor correspondente ao autovalor λ_1 de multiplicidade m , então podem ser obtidas m soluções linearmente independentes da forma

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \xi_{(11)} e^{\lambda_1 t} \\ X^{(2)} &= \xi_{(21)} e^{\lambda_1 t} \\ &\vdots \\ X^{(m)} &= \xi_{m1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda_1 t} + \xi_{m2} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} e^{\lambda_1 t} + \dots + \xi_{mm} e^{\lambda_1 t}, \end{aligned}$$

onde os ξ_{ij} são vetores coluna.

Vamos Trabalhar exemplos que ilustram as possibilidades (i) e (ii) citados acima. Primeiramente vamos trabalhar com autovalores de multiplicidade dois. No primeiro exemplo apresentamos uma matriz para a qual podemos obter dois autovalores distintos, correspondentes a um autovalor duplo.

Exemplo 2.3 *Considere o sistema*

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} X. \quad (2.30)$$

Vamos calcular a solução geral do sistema (2.30). Calculando o determinante da equação característica

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1 - \lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

obtemos $p(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 5) = 0$, cujos os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 5$.

Para $\lambda_1 = -1$, (2.26) é equivalente a

$$(A - (-1)I)\xi = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos resolver esse sistema usando a eliminação de Gauss-Jordan, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & | & 0 \\ -2 & 2 & -2 & | & 0 \\ 2 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

A primeira linha da última matriz significa que $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0$. Tomando $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 0$ e $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 1$ obtemos, respectivamente, $\xi_1 = 1$ e $\xi_1 = 0$. Assim, temos dois autovetores correspondentes a $\lambda_1 = -1$:

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \quad e \quad \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Como nenhum dos autovetores é um múltiplo constante do outro, obtivemos duas soluções linearmente independentes,

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \quad e \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

correspondente ao mesmo autovetor.

Por último, para $\lambda_3 = 5$ (2.26) é equivalente a

$$(A - 5I)\xi = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A fim de obter a solução desse sistema vamos utilizar novamente a eliminação de Gauss-Jordan, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 & | & 0 \\ -2 & -4 & -2 & | & 0 \\ 2 & -2 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo temos que, $\xi_1 = \xi_3$ e $\xi_2 = -\xi_3$. Tomando $\xi_3 = 1$, obtemos $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = -1$, e portanto, um terceiro autovetor é

$$\xi^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Concluimos que a solução geral é

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}.$$

Suponha agora que λ_1 seja um autovalor de multiplicidade dois e que exista somente um autovetor associado a esse valor. Uma solução pode ser obtida da forma

$$\mathbf{X}^{(2)} = \xi t e^{\lambda_1 t} + \eta e^{\lambda_1 t}, \quad (2.31)$$

onde

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}.$$

Para ver isto, substituimos (2.31) no sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ e simplificamos:

$$(\mathbf{A}\xi - \lambda_1\xi)te^{\lambda_1 t} + (\mathbf{A}\eta - \lambda_1\eta - \xi)e^{\lambda_1 t} = \mathbf{0}.$$

Como esta última equação deve ser válida para todos os valores de t , devemos ter

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\xi = \mathbf{0} \quad (2.32)$$

e

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\eta = \xi. \quad (2.33)$$

A equação (2.32) estabelece simplesmente que ξ deve ser um autovetor de \mathbf{A} associado a λ . Resolvendo (2.32), determinamos uma solução $\mathbf{X}^{(1)} = \xi e^{\lambda t}$. Para obter a segunda solução $\mathbf{X}^{(2)}$, precisamos somente resolver o outro sistema (2.33) para obter η .

Exemplo 2.4 Vamos calcular a solução geral do sistema dado em (2.28).

Sabemos de (2.29) que $\lambda_1 = -3$ e que uma solução é $\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$. Identificando $\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ com $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$, segue de (2.33) que agora precisamos resolver

$$(\mathbf{A} - (-3)\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 6\eta_1 - 18\eta_2 = 3 \\ 2\eta_1 - 6\eta_2 = 1 \end{cases}$$

Como esse sistema é obviamente equivalente a uma equação, temos um número infinito de escolhas para η_1 e η_2 . Por exemplo, fazendo $\eta_1 = 1$ obtemos $\eta_2 = \frac{1}{6}$. Porém, para simplificar, vamos escolher $\eta_1 = \frac{1}{2}$ implicando $\eta_2 = 0$. Logo, $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. Assim, de (2.31), obtemos

$$\mathbf{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-3t} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t}.$$

A solução geral de (2.28) é então $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}^{(1)} + c_2\mathbf{X}^{(2)}$ ou

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \left[\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-3t} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t} \right].$$

2.4.1.3 Autovalores Complexos

Nesta seção, vamos considerar, novamente, um sistema de n equações homogêneas com coeficientes constantes

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}, \tag{2.34}$$

onde a matriz de coeficientes \mathbf{A} é real. Se procurarmos soluções da forma $\mathbf{X} = \boldsymbol{\xi}e^{\lambda t}$, então segue que, λ tem que ser um autovalor e $\boldsymbol{\xi}$ um autovetor associado da matriz de coeficientes \mathbf{A} . Lembrando que os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de \mathbf{A} são as raízes da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \tag{2.35}$$

e que os autovetores associados satisfazem

$$p(\lambda) = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \tag{2.36}$$

Se \mathbf{A} for real, então os coeficientes na equação polinomial (2.35) para λ são reais e os autovalores complexos terão que aparecer em pares conjugados. Por exemplo, se $\lambda_1 = \delta + i\mu$ for um autovalor de \mathbf{A} onde δ e μ são reais, então $\lambda_2 = \delta - i\mu$ também o é. Além disso, os autovetores associados $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ também são complexos conjugados. Para ver isso, suponha que λ_1 e $\xi^{(1)}$ satisfazem

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\xi^{(1)} = \mathbf{0}. \quad (2.37)$$

Calculando a equação complexa conjugada da equação (2.37) e observando que \mathbf{A} e \mathbf{I} são reais, obtemos

$$(\mathbf{A} - \bar{\lambda}_1 \mathbf{I})\bar{\xi}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad (2.38)$$

onde $\bar{\lambda}_1$ e $\bar{\xi}^{(1)}$ são os complexos conjugados de λ_1 e de $\xi^{(1)}$, respectivamente. Em outras palavras, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ é um autovalor e $\xi^{(2)} = \bar{\xi}^{(1)}$ é um autovetor associado. As soluções correspondentes

$$\mathbf{X}^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} \quad , \quad \mathbf{X}^{(2)}(t) = \bar{\xi}^{(1)} e^{\bar{\lambda}_1 t} \quad (2.39)$$

da equação diferencial (2.34) são, então, complexas conjugadas uma da outra. Portanto, podemos encontrar duas soluções reais da equação (2.34) correspondentes aos autovalores λ_1 e λ_2 , a saber, as partes reais e imaginárias de $\mathbf{X}^{(1)}(t)$ e de $\mathbf{X}^{(2)}(t)$ dadas pela equação (2.35).

Vamos escrever $\xi^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, onde \mathbf{a} e \mathbf{b} são reais; então,

$$\mathbf{X}^{(1)}(t) = (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{(\delta+i\mu)t} = (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{\delta t}(\cos\mu t + i \operatorname{sen}\mu t). \quad (2.40)$$

Separando $\mathbf{X}^{(1)}(t)$ em suas partes reais e imaginárias, obtemos

$$\mathbf{X}^{(1)}(t) = e^{\delta t}(\mathbf{a} \cos\mu t - \mathbf{b} \operatorname{sen}\mu t) + ie^{\delta t}(\mathbf{a} \operatorname{sen}\mu t + \mathbf{b} \cos\mu t). \quad (2.41)$$

Se escrevemos $\mathbf{X}^{(1)}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$, então os vetores

$$\mathbf{u}(t) = e^{\delta t}(\mathbf{a} \cos\mu t - \mathbf{b} \operatorname{sen}\mu t) \quad , \quad \mathbf{v}(t) = e^{\delta t}(\mathbf{a} \operatorname{sen}\mu t + \mathbf{b} \cos\mu t) \quad (2.42)$$

são soluções reais da equação (2.34).

por exemplo, suponha que $\lambda_1 = \delta + i\delta$ e que $\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n$ são reais e distintas. Sejam $\xi^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, $\xi^{(2)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$, $\xi^{(3)}, \dots, \xi^{(n)}$ os autovetores associados. Então, a solução da equação (2.34) é

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t) + c_3 \xi^{(3)} e^{\lambda_3 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{\lambda_n t}, \quad (2.43)$$

onde $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são dados pela equação (2.42). Enfatizando que essa análise se aplica apenas se a matriz de coeficientes \mathbf{A} na equação (2.34) é real, pois só nesse caso os autovalores e autovetores complexos têm que aparecer em pares conjugados.

Exemplo 2.5 Vamos encontrar um conjunto fundamental de soluções reais do sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{X}. \quad (2.44)$$

Primeiramente vamos obter os autovalores da matriz dos coeficientes do sistema (2.44).

Calculando a equação característica

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 8 \\ -1 & -2 - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

obtemos $p(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0$, cujos os autovalores são $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -2i$.

Como um dos autovalores produz duas soluções linearmente independentes, para o sistema (2.44), logo tomaremos apenas um autovalor para calcular um autovetor associado.

Para $\lambda_1 = 2i$, (2.36) é equivalente a

$$\begin{cases} (2 - 2i)\xi_1 + 8\xi_2 = 0 \\ -\xi_1 + (-2 - 2i)\xi_2 = 0 \end{cases}.$$

Assim $\xi_1 = -(2 + 2i)\xi_2$. Escolhendo $\xi_2 = -1$, obtemos

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 + 2i \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Logo um conjunto fundamental de soluções para o sistema (2.44) é

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 + 2i \\ -1 \end{bmatrix} e^{(2i)t}.$$

Para obter um conjunto de soluções reais precisamos encontrar a parte real e imaginária de $\mathbf{X}^{(1)}$. Logo utilizando a fórmula de Euler decorre que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 2 + 2i \\ -1 \end{bmatrix} \cdot (\cos(2t) + i \operatorname{sen}(2t)) \\ \mathbf{X}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 2 \cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t) \\ -\cos(2t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2 \cos(2t) + 2 \operatorname{sen}(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 2 \cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t) \\ -\cos(2t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} 2 \cos(2t) + 2 \operatorname{sen}(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix}$$

é um conjunto de soluções reais.

Temos que a solução geral do sistema (2.44) é

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \cos(2t) - 2 \operatorname{sen}(2t) \\ -\cos(2t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \cos(2t) + 2 \operatorname{sen}(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix}.$$

Capítulo 3

Sistemas Autônomos e Estabilidade

No capítulo 2 estudamos uma técnica de resolução de sistemas lineares da forma $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, que foi o método de autovalores e autovetores. Quando o sistema de equações diferenciais não é linear, em geral não é possível achar soluções em termos de funções elementares. Mostraremos, neste capítulo, que é possível obter informações valiosas sobre a natureza geométrica das soluções, analisando inicialmente soluções constantes especiais chamadas pontos críticos e procurando soluções periódicas. Para isso serão apresentados conceitos de estabilidade de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem autônomos, ou seja, sistemas cujas equações não dependem explicitamente da variável independente. Serão tratados os casos bidimensionais, pois estes permitem visualizar o comportamento das trajetórias no plano de fase; os casos de ordem n são análogos.

Para a elaboração deste capítulo utilizamos algumas definições e resultados que foram retirados da dissertação de mestrado da autora Luiz (2012).

3.1 Sistemas Autônomos

Definição 3.1 *Um sistema de equações diferenciais de primeira ordem é chamado **autônomo** quando pode ser escrito na forma*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} .$$

Assim a variável independente t não aparece explicitamente no membro direito das equações diferenciais.

3.2 Estabilidade, Estabilidade Assintótica e Instabilidade

Seja o sistema autônomo bidimensional

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) & , & x(t_0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) & , & y(t_0) = y_0 \end{cases} . \quad (3.1)$$

Suponha F e G funções contínuas, com suas derivadas parciais de primeira ordem contínuas definidas num domínio D do plano xy . Se $(x_0, y_0) \in D$ então existe uma solução $x = \phi_1(t)$ e $y = \phi_2(t)$ do sistema (3.1) satisfazendo as condições iniciais.

Escrevendo esse sistema na forma vetorial temos:

$$\frac{dX}{dt} = f(X) \quad , \quad X(t_0) = X_0 \quad (3.2)$$

sendo $X = (x, y)^T$, $f(X) = (F(x, y), G(x, y))^T$ e $X_0 = (x_0, y_0)^T$.

A solução do sistema pode ser escrita como $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))^T$, a qual será interpretada como um ponto se movendo no plano xy .

Uma característica importante do sistema (3.1) é que, no plano de fase, existirá apenas uma trajetória que passa pela condição inicial X_0 , ou seja, todas as soluções que

satisfazem a condição inicial têm a mesma trajetória, e assim, o plano de fase permite observar qualitativamente a estabilidade do sistema.

É chamado de **ponto crítico** ou **de equilíbrio** do sistema autônomo (3.1) $\mathbf{X}^0 = (\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ que satisfaz $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{0}$, ou seja, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ é uma solução constante desse sistema.

Definição 3.2 Um ponto crítico \mathbf{X}^0 é dito **estável** se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\sigma > 0$, tal que toda solução $\mathbf{X} = \phi(t)$, que satisfaz $\|\phi(t_0) - \mathbf{X}^0\| < \sigma$, existe para todo $t > 0$ e satisfaz $\|\phi(t) - \mathbf{X}^0\| < \epsilon$, para todo $t \geq 0$.

Ou seja, um ponto crítico é chamado estável se a diferença de $\|\phi(t_0) - \mathbf{X}^0\|$ é menor que um raio σ e menor que um raio ϵ próximo ao ponto crítico \mathbf{X}^0 .

Definição 3.3 Um ponto \mathbf{X}^0 é dito **assintoticamente estável** se é estável e ainda, se existe σ_0 , $0 < \sigma_0 < \sigma$, tal que se uma solução $\mathbf{X} = \phi(t)$ satisfaz $\|\phi(t) - \mathbf{X}^0\| < \sigma_0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t_0) = \mathbf{X}^0$.

Ou seja, um ponto crítico é chamado assintoticamente estável se é estável, e mais, quando calculamos $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t_0)$ esse limite tende ao ponto crítico \mathbf{X}^0 .

Definição 3.4 Um ponto crítico que não é estável é dito **instável**.

Ou seja, um ponto crítico é chamado instável se a diferença de $\|\phi(t_0) - \mathbf{X}^0\|$ é menor que um raio σ próximo ao ponto crítico \mathbf{X}^0 , e com o passar do tempo a solução geral se afasta do ponto crítico com uma diferença $\|\phi(t) - \mathbf{X}^0\| > \epsilon$.

Exemplo 3.1 Considere o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2xy \\ \frac{dy}{dt} = y - x^2 - y^2 \end{cases} .$$

A fim de encontrarmos os pontos críticos devemos fazer $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{0}$. Logo temos

$$\begin{cases} -x + 2xy = 0 \\ y - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} .$$

Resolvendo esse sistema obtemos os seguintes pontos críticos, $\mathbf{P}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{P}_2 = (0, 1)$, $\mathbf{P}_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $\mathbf{P}_4 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e o plano de fase desse sistema é dado pela figura abaixo:

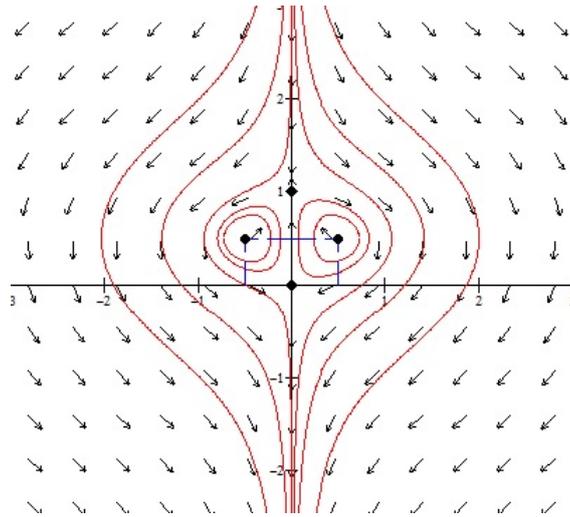


Figura 3.1: Plano de fase para o Exemplo 3.1.

Fonte: Os autores

Podemos observar, pelo plano de fase, que as pontos $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (0, 1)$ parecem ser instáveis, haja vista que as trajetórias que começam próxima a esses pontos se afastam dos mesmos. No entanto, os pontos $P_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $P_4 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ parecem ser estáveis, pois as trajetórias que começam próxima a eles, assim permanecem.

Exemplo 3.2 Considere o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y - 2 \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + 1 \end{cases}.$$

A fim de encontrarmos os pontos críticos devemos fazer $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{0}$. Vamos resolver esse sistema por substituição. Daí temos:

$$\begin{cases} -2x + y - 2 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Isolando a incógnita x na primeira equação obtemos, $x = \frac{2-y}{-2}$. Agora substituindo x na segunda equação obtemos, $\left(\frac{2-y}{-2}\right) - 2y + 1 = 0$ onde $y = 0$ e $x = -1$. Logo o ponto crítico é $P_1 = (-1, 0)$ e o plano de fase desse sistema é dado pela figura abaixo:

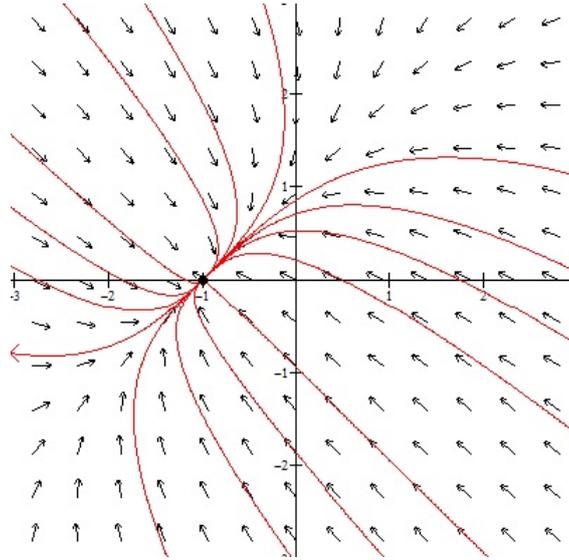


Figura 3.2: Plano de fase para o Exemplo 3.2.

Fonte: Os autores

Neste exemplo o ponto $P_1 = (-1, 0)$ parece ser assintoticamente estável, já que as trajetórias que começam próxima a ele, assim permanecem, e ainda tende ao próprio ponto.

O teorema a seguir caracteriza, através da natureza dos autovalores, o tipo de solução para o caso do sistema ser linear bidimensional.

Teorema 3.1 O ponto crítico X^0 do sistema linear $X' = AX$, onde $A_{2 \times 2}$, é: assintoticamente estável se os autovalores λ_1 e λ_2 são reais e negativos ou tem parte real negativa; estável, mas não assintoticamente estável, se os autovalores λ_1 e λ_2 são imaginários puros; instável se os autovalores λ_1 e λ_2 são reais e um deles é positivo, ou se ambos tem parte real positiva.

Demonstração 1 Ver Boyce (2011, p. 259-263).

Lema 3.1 Seja $X^0 = (0, 0)$ ponto crítico do sistema linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} X. \quad (3.3)$$

Dizemos que \mathbf{X}^0 :

(a) é assintoticamente estável se $\mathbf{tr}(\mathbf{A}) < 0$ e $\mathbf{det}(\mathbf{A}) > 0$

(b) é estável se $\mathbf{tr}(\mathbf{A}) = 0$ e $\mathbf{det}(\mathbf{A}) > 0$

(c) é instável se $\mathbf{tr}(\mathbf{A}) > 0$ ou $\mathbf{det}(\mathbf{A}) < 0$, onde \mathbf{A} é a matriz de coeficientes.

Demonstração 2 A matriz de coeficientes do sistema (3.3) é dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{bmatrix}$$

sendo que o traço e o determinante da matriz \mathbf{A} são, respectivamente:

$$\mathbf{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{22}$$

$$\mathbf{det}(\mathbf{A}) = \mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{22} - \mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{21}$$

Os autovalores λ associados à matriz \mathbf{A} , são dados por:

$$\lambda = \frac{(\mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{22}) \pm \sqrt{(\mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{22})^2 - 4(\mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{22} - \mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{21})}}{2}$$

$$\lambda = \frac{\mathbf{tr}(\mathbf{A}) \pm \sqrt{\mathbf{tr}(\mathbf{A})^2 - 4\mathbf{det}(\mathbf{A})}}{2}$$

Do teorema 3.1, note que:

(a) Para ocorrer estabilidade assintótica os autovalores devem ser complexos com parte real negativa ou reais negativos.

O primeiro caso ocorre se, inicialmente, $\mathbf{tr}(\mathbf{A}) < 0$ e $\mathbf{tr}(\mathbf{A})^2 - 4\mathbf{det}(\mathbf{A}) < 0$, ou seja, $\mathbf{tr}(\mathbf{A})^2 < 4\mathbf{det}(\mathbf{A})$. E como $\mathbf{tr}(\mathbf{A})^2 > 0$, então

$$0 < \mathbf{tr}(\mathbf{A})^2 < 4\mathbf{det}(\mathbf{A}) \Rightarrow 0 < 4\mathbf{det}(\mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{det}(\mathbf{A}) > 0$$

Para o caso dos autovalores serem reais negativos é necessário que $\mathbf{tr}(\mathbf{A}) < 0$ e $\mathbf{det}(\mathbf{A}) > 0$, e ainda,

Se $\mathbf{det}(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 < 0$, e nada podemos afirmar.

Se $\mathbf{det}(\mathbf{A}) < 0 \Rightarrow \sqrt{\mathbf{tr}(\mathbf{A})^2 - 4\mathbf{det}(\mathbf{A})} > |\mathbf{tr}(\mathbf{A})|$, e existirá $\lambda > 0$.

Logo, se $\mathbf{tr}(\mathbf{A}) < 0$ e $\mathbf{det}(\mathbf{A}) > 0$ então \mathbf{x}^0 é assintoticamente estável.

(b) Para ocorrer estabilidade os autovalores devem ser imaginários puros, e para isso é necessário que $\text{tr}(\mathbf{A}) = 0$ e $\text{tr}(\mathbf{A})^2 - 4\det(\mathbf{A}) < 0$, ou seja, $\det(\mathbf{A}) > 0$.

Logo, se $\text{tr}(\mathbf{A}) = 0$ e $\det(\mathbf{A}) > 0$ então \mathbf{x}^0 é estável.

(c) Para ocorrer instabilidade os autovalores devem ser complexos com parte real positiva ou reais com ao menos um autovalor positivo.

No primeiro caso, inicialmente deve ocorrer $\text{tr}(\mathbf{A}) > 0$ e $\text{tr}(\mathbf{A})^2 - 4\det(\mathbf{A}) < 0$, ou seja, $\text{tr}(\mathbf{A})^2 < 4\det(\mathbf{A})$. E como $\text{tr}(\mathbf{A})^2 > 0$, então

$$0 < \text{tr}(\mathbf{A})^2 < 4\det(\mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad 0 < 4\det(\mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}) > 0.$$

Para que ao menos um autovalor seja positivo, inicialmente deve ocorrer $\text{tr}(\mathbf{A})^2 - 4\det(\mathbf{A}) > 0$. Note que:

Se $\det(\mathbf{A}) < 0$, então $\sqrt{\text{tr}(\mathbf{A})^2 - 4\det(\mathbf{A})} > |\text{tr}(\mathbf{A})|$, independente do sinal de $\text{tr}(\mathbf{A})$. E com isso sempre existirá ao menos um autovalor positivo.

Se $\text{tr}(\mathbf{A}) > 0$, então $\text{tr}(\mathbf{A}) + \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A})^2 - 4\det(\mathbf{A})} > 0$, independente do sinal de $\det(\mathbf{A})$, e assim sempre existirá um autovalor positivo, ou então autovalores complexos com parte real positiva, e novamente ocorre instabilidade.

Dessa forma, se $\text{tr}(\mathbf{A}) > 0$ ou $\det(\mathbf{A}) < 0$ então \mathbf{x}^0 é instável.

3.3 Sistemas Localmente Lineares

Todo o estudo feito até o momento diz respeito a pontos críticos de sistemas autônomos lineares. No entanto, quando são considerados sistemas autônomos não lineares nem sempre isso é possível, principalmente por existirem, em alguns casos, muitos pontos críticos, o que permite que o comportamento de uma solução próxima a um ponto crítico possa ser influenciado pelo fato de também estar próxima a outro ponto crítico.

Exemplo 3.3 Considere o plano de fase do sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} = 3y - xy - 2y^2 \end{cases} . \quad (3.4)$$

Afim de encontrarmos os pontos críticos devemos fazer $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{0}$. Vamos resolver esse sistema por substituição. Daí temos:

$$\begin{cases} x - x^2 - xy = 0 \\ 3y - xy - 2y^2 = 0 \end{cases}.$$

Podemos perceber que o ponto $\mathbf{P}_1 = (0, 0)$ é um dos pontos críticos desse sistema. Agora isolando a incógnita \mathbf{y} na primeira equação obtemos $\mathbf{y} = 1 - \mathbf{x}$. Substituindo o valor de \mathbf{y} na segunda equação obtemos $-\mathbf{x}^2 + 1 = 0$, onde $\mathbf{x}_1 = 1$ e $\mathbf{x}_2 = -1$, resultando nos pontos críticos $\mathbf{P}_2 = (1, 0)$ e $\mathbf{P}_3 = (-1, 2)$.

Agora isolando \mathbf{x} na segunda equação obtemos $\mathbf{x} = 3 - 2\mathbf{y}$. Substituindo o valor de \mathbf{x} na primeira equação obtemos $-2\mathbf{y}^2 + 7\mathbf{y} - 6 = 0$, onde $\mathbf{y}_1 = \frac{3}{2}$ e $\mathbf{y}_2 = 2$, resultando nos pontos críticos $\mathbf{P}_4 = (0, \frac{3}{2})$ e $\mathbf{P}_5 = (-1, 2)$.

Logo os pontos críticos do sistema (3.4) são $\mathbf{P}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{P}_2 = (1, 0)$, $\mathbf{P}_3 = (-1, 2)$ e $\mathbf{P}_4 = (0, \frac{3}{2})$, e o plano de fase desse sistema é dado pela figura abaixo:

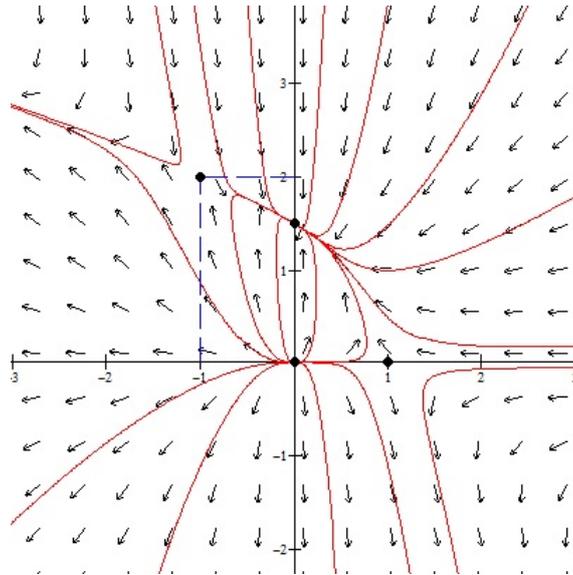


Figura 3.3: Plano de fase para o sistema (3.4).

Fonte: Os autores

Esse sistema possui quatro pontos de equilíbrio: $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (-1, 2)$ e $P_4 = (0, \frac{3}{2})$. Na figura 3.3, podemos observar o comportamento de várias trajetórias próximas aos pontos de equilíbrio. Por exemplo se forem tomadas condições iniciais próximas de $P_1 = (0, 0)$, algumas trajetórias se aproximam do equilíbrio P_2 e outras se afastam, inclusive de P_3 e P_4 .

3.3.1 Primeiro Método de Lyapunov

Considere agora um sistema autônomo não linear bidimensional

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}). \quad (3.5)$$

O objetivo é analisar o comportamento das trajetórias de (3.5) próximo a um ponto de equilíbrio \mathbf{x}^0 . Isso será feito procurando “aproximar” o sistema (3.5) por um sistema linear adequado.

Seja então

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{g}(\mathbf{X}) \quad (3.6)$$

onde $\mathbf{X}^0 = (\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ é um ponto crítico isolado desse sistema, ou seja, existe alguma vizinhança de centro \mathbf{x}^0 dentro da qual não há outro ponto crítico isolado do sistema

$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, ou seja, $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Para que o comportamento do sistema (3.6), esteja próxima do sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ deve-se ter $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ suficientemente pequeno, isto é,

$$\frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{X})\|}{\|\mathbf{X}\|} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \mathbf{X} \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

onde $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = (g_1(x, y), g_2(x, y))^T$ e $\mathbf{X} = (x, y)^T$.

Disso, é possível escrever $\|\mathbf{X}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ e $\|\mathbf{g}(\mathbf{X})\| = \sqrt{g_1^2(x, y) + g_2^2(x, y)}$, e assim, a condição (3.7) é satisfeita se, e somente se:

$$\frac{g_1}{r} \rightarrow 0, \frac{g_2}{r} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad r \rightarrow 0 \quad (3.8)$$

Deste modo, um sistema da forma (3.6) que satisfaz as condições (3.8) é chamada **sistema localmente linear na vizinhança do ponto crítico** (x^0, y^0) .

Voltando ao sistema (3.5), é possível reescrevê-lo na forma escalar:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (3.9)$$

Reescrevendo F e G como um polinômio de Taylor de ordem 1 na vizinhança do ponto crítico $\mathbf{X}^0 = (x^0, y^0)$, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x^0, y^0) + F_x(x^0, y^0)(x - x^0) + F_y(x^0, y^0)(y - y^0) + \eta_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x^0, y^0) + G_x(x^0, y^0)(x - x^0) + G_y(x^0, y^0)(y - y^0) + \eta_2(x, y) \end{cases}$$

onde:

$$\frac{\eta_1(x, y)}{\sqrt{(x - x^0)^2 + (y - y^0)^2}} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (x^0, y^0)$$

$$\frac{\eta_2(x, y)}{\sqrt{(x - x^0)^2 + (y - y^0)^2}} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (x^0, y^0)$$

Note que:

$$\begin{aligned} F(x^0, y^0) &= 0 = G(x^0, y^0), \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial(x - x^0)}{\partial t}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial(y - y^0)}{\partial t} \end{aligned}$$

Com isso, o sistema (3.9) pode ser escrito como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^0 \\ y - y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x(x^0, y^0) & F_y(x^0, y^0) \\ G_x(x^0, y^0) & G_y(x^0, y^0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x^0 \\ y - y^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix}$$

Em notação vetorial, tem-se:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial f(X^0)}{\partial t} U + \eta(X)$$

onde $U = (x - x^0, y - y^0)^T$ e $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$.

Se F e G tiverem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, essa aproximação de Taylor é válida e, conseqüentemente, o sistema será localmente linear, já que $\eta \rightarrow \mathbf{0}$. Logo, o sistema (3.9) é localmente linear na vizinhança do ponto $X^0 = (x^0, y^0)$ se F e G forem de classe C^2 . E ainda, o sistema que aproxima o sistema não linear (3.9) na vizinhança de X^0 é dado por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x(x^0, y^0) & F_y(x^0, y^0) \\ G_x(x^0, y^0) & G_y(x^0, y^0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

onde $u = (x - x^0)$ e $v = (y - y^0)$.

A matriz de coeficientes em (3.10) é a **Matriz Jacobiana** de F e G em relação a x e y , calculada no ponto crítico X^0 .

Exemplo 3.4 Considere o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 - 6 \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - y \end{cases} . \quad (3.11)$$

Tem-se $F(x, y) = x^2 + y^2 - 6$ e $G = x^2 - y$ são de classe C^1 , já que são funções polinômiais. Logo, o sistema é localmente linear, e assim é possível determinar os sistemas lineares que aproximam esse sistema não linear na vizinhança de cada ponto crítico.

Afim de encontrarmos os pontos críticos devemos fazer $\frac{dX}{dt} = \mathbf{0}$. Vamos resolver esse sistema por substituição. Daí temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6 = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases} .$$

Isolando a incógnita y na segunda equação obtemos, $y = x^2$. Agora substituindo o valor de y na primeira equação obtemos, $y^2 + y - 6 = 0$ onde, $y_1 = -3$ e $y_2 = 2$. Se $y_1 = -3$, então $x^2 = -3$ não têm soluções reais. Agora tomando $y_2 = 2$ obtemos os seguintes pontos críticos $P_1 = (\sqrt{2}, 2)$ e $P_2 = (-\sqrt{2}, 2)$, e a matriz Jacobiana é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -4 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, é possível encontrar os sistemas desejados. No ponto $P_1 = (\sqrt{2}, 2)$, o sistema linear correspondente é:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 4 \\ 2\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Afim de analisar a estabilidade do sistema (3.12), vamos fazer uso do Lema 3.1 analisando as características do traço e do determinante da matriz de coeficientes do sistema linear. Daí temos:

$$A = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 4 \\ 2\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, o traço e o determinante são:

$$\text{tr}(A) = 2\sqrt{2} - 1 > 0$$

$$\det(A) = -10\sqrt{2} < 0$$

Portanto pelo Lema 3.1 o ponto $P_1 = (\sqrt{2}, 2)$ é instável. Podemos visualizar esse caso nos planos de fase abaixo:

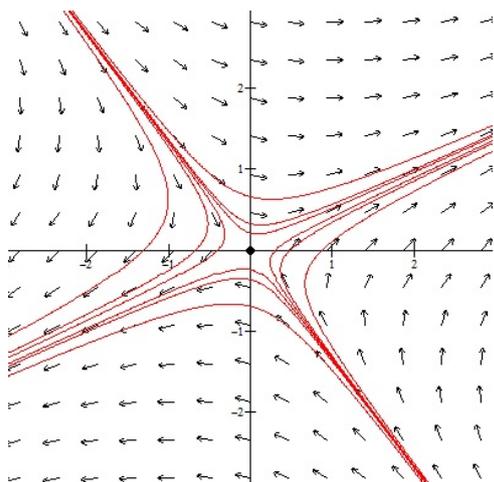


Figura 3.4: Plano de fase do sistema linear (3.12).

Fonte: Os autores

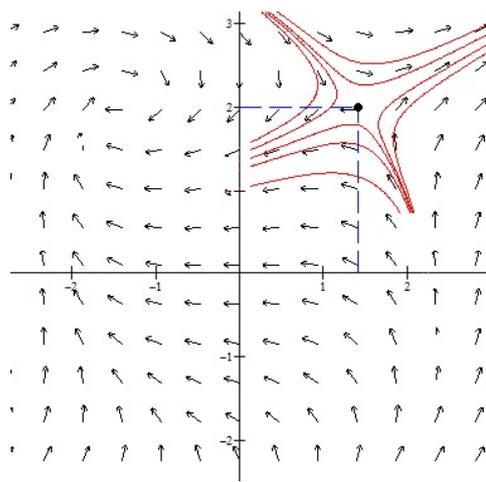


Figura 3.5: Plano de fase do sistema não linear (3.11).

Fonte: Os autores

Agora no ponto $\mathbf{P}_2 = (-\sqrt{2}, 2)$, o sistema linear associado é:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 4 \\ -2\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Afim de analisar a estabilidade do sistema (3.13), vamos usar novamente o Lema 3.1.

Daí temos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 4 \\ -2\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, o traço e o determinante são:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = -2\sqrt{2} - 1 < 0$$

$$\det(\mathbf{A}) = 10\sqrt{2} > 0$$

Portanto pelo Lema 3.1 o ponto $\mathbf{P}_2 = (-\sqrt{2}, 2)$ é assintoticamente estável. Podemos visualizar esse caso nos planos de fase abaixo:

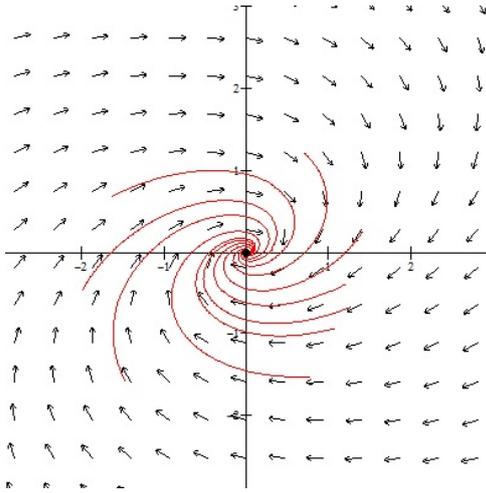


Figura 3.6: Plano de fase do sistema linear (3.13).

Fonte: Os autores

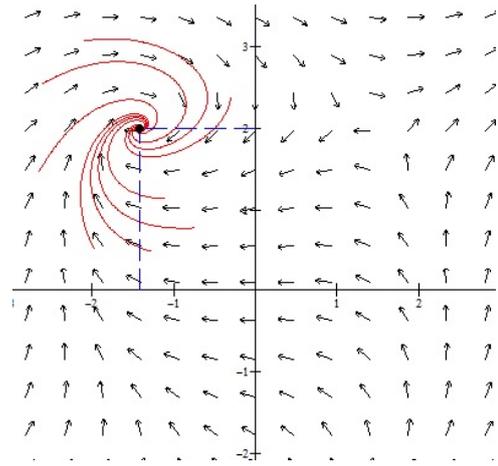


Figura 3.7: Plano de fase do sistema não linear (3.11).

Fonte: Os autores

No exemplo 3.4 podemos perceber que as trajetórias de $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ são boas aproximações do sistema não linear $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{g}(\mathbf{X})$ na vizinhança do ponto crítico \mathbf{X}^0 . Entretanto, não é possível afirmar isso em todos os casos. Veremos a seguir um teorema que estabelece o tipo de estabilidade de um ponto crítico de um sistema não linear a partir do sistema linear correspondente.

Teorema 3.2 sejam λ_1 e λ_2 os autovalores do sistema linear $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ correspondente ao sistema linear $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{g}(\mathbf{X})$. Então o tipo de estabilidade do ponto crítico $(0,0)$ do sistema linear $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{g}(\mathbf{X})$ são como descritos na tabela abaixo.

Autovalores	Sistemas Linear		Sistemas Localmente Linear	
	Tipo	Estabilidade	Tipo	Estabilidade
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	N	Instável	N	Instável
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	N	AE	N	AE
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	PS	Instável	PS	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	NP ou NI	Instável	N ou PE	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	NP ou NI	AE	N ou PE	AE
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib; a > 0$	PE	Instável	PE	Instável
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib; a < 0$	PE	AE	PE	AE
$\lambda_1 = ib; \lambda_2 = -ib$	C	Estável	C ou PE	Indeterminado

Tabela 3.1: *Propriedades de Estabilidade e Instabilidade de Sistemas Lineares e Localmente Lineares, onde AE: assintoticamente estável; N: nó; NI: nó impróprio; NP: nó próprio; PE: ponto espiral; PS: ponto de sela; C: centro.*

Fonte: Boyce (2011, p. 272)

Demonstração 3 *Ver Boyce (2011, p. 272) e Bessa (2011, p. 46-51).*

Capítulo 4

Modelos Matemáticos em Epidemiologia

A palavra epidemiologia vem do grego que significa “estudo sobre o povo”, é a ciência que estuda os fatores condicionantes e determinantes dos fenômenos de doença e saúde em uma população humana.

Segundo (Lilienfeld, 1980) a epidemiologia é a ciência que estuda os padrões e os fatores determinantes dos acontecimentos de doenças em populações humanas.

A epidemiologia, portanto, é um campo da ciência que olha os vários fatores genéticos, sociais ou ambientais, que determinam a ocorrência e a distribuição de saúde, doenças, defeitos, incapacidade e morte entre os grupos humanos.

Um dos primeiros estudos que se tem conhecimento acerca de doenças epidemiológicas foi feito por Daniel Bernoulli, em 1790, que teve como objetivo estudar a transmissão da varíola. Após esse início, juntamente com um estudo mais aprofundado na área de medicina, outros casos puderam ser analisados com mais detalhes.

Hamer, em 1906, analisou casos nos quais a taxa de transmissão da doença ocorria por meio de contato entre indivíduos suscetíveis e indivíduos infectados, conhecido como **Lei de Ação das Massas**. Na mesma época, Ronald Ross fez um estudo sobre a malária, para mostrar que sua transmissão se dava pela picada de um mosquito contaminado, e mais adiante, em 1908, elabo-

rou um modelo matemático mais detalhado para o estudo de tal doença. Contudo, um dos modelos de maior relevância e que mais influenciaram no desenvolvimento de modelos matemáticos foi o modelo SIR (Suscetível-Infetado-Recuperado), estudado por Kermack e McKendrick, em 1927, os quais concluíram que um número pequeno de indivíduos infectados, mesmo em contato com indivíduos suscetíveis, não geram uma epidemia.

A partir daí, diversos outros modelos matemáticos em epidemiologia passaram a ser estudadas como o SIS (Suscetível-Infetado-Suscetível) e suas derivações, o SIRS (Suscetível-Infetado-Recuperado-Suscetível) e suas derivações. Há essas derivações chamamos de modelos compartimentais, devido ao fato da população ser dividida em classes que indicam em qual estado se encontra o indivíduo. Como por exemplo podem ser citadas as classes:

- Imunidade Passiva (\mathbf{M}): indivíduos que nascem imunes, pois receberam anticorpos pela mãe;
- Transmissão Vertical (\mathbf{T}): indivíduos que já nasceram com a doença, adquirindo-a através da mãe infectada;
- Suscetíveis (\mathbf{S}): indivíduos sadios que estão suscetíveis a contrair a doença;
- Infectados (\mathbf{I}): indivíduos que contraíram a doença e podem transmiti-la aos indivíduos suscetíveis por transmissão direta;
- Portadores (\mathbf{P}): indivíduos portadores da doença que estão em período latente, isto é, foram infectados, mas ainda não transmitem a doença;
- Removidos (\mathbf{R}): indivíduos que foram infectados, mas não são mais portadores da doença, por motivo de isolamento, cura (adquirindo ou não imunidade) ou morte.

Assim, pode-se escrever a população total \mathbf{N} como a soma dos indivíduos das classes acima citadas, ou seja, $\mathbf{N} = \mathbf{M} + \mathbf{T} + \mathbf{S} + \mathbf{I} + \mathbf{P} + \mathbf{R}$. (LUIZ, 2012, p. 29-30)

De forma geral, o estudo de modelos matemáticos em epidemiologia tem como objetivo principal analisar a taxa de propagação da doença e a taxa de reprodutibilidade basal.

Nesse capítulo vamos trabalhar apenas com o modelo SIS e suas derivações, haja vista que vamos usar esse modelo para estudar a estabilidade de um sistema modelado. Afim de estudarmos três casos do modelo SIS, vamos considerar as doenças com transmissão direta, com nascimentos de pessoas sadias e suscetíveis ($\mathbf{T} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{M} = \mathbf{0}$) com período latente muito curto, que pode ser desprezado ($\mathbf{P} = \mathbf{0}$) e não havendo forma de isolamento ($\mathbf{R} = \mathbf{0}$).

4.1 Modelo SIS

Para a elaboração dos casos do modelo SIS a seguir, utilizamos alguns resultados que foram retirados da dissertação de mestrado da autora Luiz (2012).

O modelo SIS é utilizado para descrever doenças nas quais os indivíduos suscetíveis a adquirem, tornando-se infectados e, após a recuperação, não adquirem imunidade, tornando-se suscetíveis novamente. Neste caso não há período latente nem isolamentos.

As condições iniciais são:

$$\begin{aligned}I(0) &= I_0, \\S(0) &= S_0\end{aligned}$$

Serão estudados três casos de modelos SIS, os quais seguem.

4.1.1 SIS com N constante (sem dinâmica vital)

Neste caso, a população N é constante e não há dinâmica vital, ou seja, na população estudada não são considerados nascimentos nem mortes.

Seja α a taxa de transmissão da doença. Como essa transmissão se dá com o encontro entre indivíduos suscetíveis e infectados, então a variação de indivíduos suscetíveis em relação ao tempo pode ser modelado por αSI . Seja β a taxa de recuperação da doença. Considere a variação dos indivíduos infectados, então o retorno à classe de suscetíveis

será modelado por βI . Com isso, neste caso o modelo SIS pode ser representado pelo diagrama a seguir:

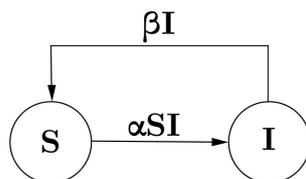


Figura 4.1: *Diagrama compartimental para o Caso 1 do modelo SIS.*

Fonte: Os autores

Note que, uma fração dos indivíduos suscetíveis, por meio do contato com os indivíduos infectados, adquirem a doença e passam para a classe de infectados. Do mesmo modo, os indivíduos infectados, ao se recuperarem, não adquirem imunidade e retornam à classe de suscetíveis.

Com isso, a dinâmica de uma doença com essas características pode ser descrita pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \end{cases}, \quad (4.1)$$

onde $\alpha, \beta > 0$ e $N = S + I$.

Então:

$$\begin{aligned} F(S, I) &= -\alpha SI + \beta I \\ G(S, I) &= \alpha SI - \beta I \end{aligned}$$

Afim de encontrarmos os pontos críticos de (4.1), devemos fazer $F(S, I) = 0 = G(S, I)$. Logo temos o sistema

$$\begin{cases} -\alpha SI + \beta I = 0 \\ \alpha SI - \beta I = 0 \end{cases},$$

onde as soluções desse sistema são os pontos críticos

$$P_1 = (S, 0) = (N - I, 0) = (N, 0)$$

e

$$P_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}, I \right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}, N - S \right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

Observe que, como a população total N é constante, os pontos P_1 e P_2 estão sobre a reta $N = S + I$.

A análise de estabilidade desses pontos será feita através das características do traço e do determinante da matriz de coeficientes do sistema linear, conforme os resultados apresentados no capítulo anterior. Para isso, é preciso determinar a matriz Jacobiana, dada por

$$J = \begin{bmatrix} F_s & F_I \\ G_s & G_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha I & -\alpha S + \beta \\ \alpha I & \alpha S - \beta \end{bmatrix}.$$

No ponto $P_1 = (N, 0)$, o sistema linear correspondente ao sistema (4.1) é:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha N + \beta \\ 0 & \alpha N - \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

cuja matriz de coeficientes é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha N + \beta \\ 0 & \alpha N - \beta \end{bmatrix}.$$

Logo, o traço e o determinante são:

$$\mathit{tr}(A) = \alpha N - \beta$$

$$\mathit{det}(A) = 0$$

Portanto, como os coeficientes são valores positivos ($\alpha, \beta > 0$), e a população total N é suficiente grande, segue que $\mathit{tr}(A) > 0$, e pelo Lema 3.1 e Teorema 3.2, o ponto $P_1 = (N, 0)$ é instável.

Para o ponto $P_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha} \right)$, o sistema linear correspondente ao sistema (4.1) é:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha N + \beta & 0 \\ \alpha N - \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

cuja matriz de coeficientes é

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha N + \beta & 0 \\ \alpha N - \beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, o traço e o determinante são:

$$\begin{aligned} \mathit{tr}(\mathbf{A}) &= -\alpha N + \beta < 0 \\ \mathit{det}(\mathbf{A}) &= 0 \end{aligned}$$

Com isso, através do Lema 3.1, nada se pode afirmar a respeito do ponto $\mathbf{P}_2 = (\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha})$. Então, será feito um estudo de $\frac{dI}{dt}$.

Como N é constante, e $N = \mathbf{S}(t) + \mathbf{I}(t)$, segue que $\mathbf{S} = N - \mathbf{I}$. Resolvendo $\frac{dI}{dt}$, temos:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha \mathbf{S} \mathbf{I} - \beta \mathbf{I} = \alpha(N - \mathbf{I})\mathbf{I} - \beta \mathbf{I} = \alpha \mathbf{I} \left[\left(N - \frac{\beta}{\alpha} \right) - \mathbf{I} \right]$$

Afim de resolver essa EDO de primeira ordem, vamos usar separação de variáveis.

Logo:

$$\mathbf{I} = \frac{\alpha N - \beta}{\alpha + \left[(\alpha N - \beta) \frac{1}{I_0} - \alpha \right] e^{-(\alpha N - \beta)t}}$$

Então, quando $t \rightarrow \infty$, $\mathbf{I} \rightarrow N - \frac{\beta}{\alpha}$. E conseqüentemente, $\mathbf{S} \rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$. Logo o ponto $\mathbf{P}_2 = (\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha})$ é assintoticamente estável.

Do sistema (4.1) segue que se $\mathbf{S} > \frac{\beta}{\alpha}$ e $\mathbf{I} \neq 0$ então $\frac{dI}{dt} > 0$ e $\frac{dS}{dt} < 0$. Assim, o ponto (\mathbf{S}, \mathbf{I}) se aproxima de $(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha})$ sobre a reta $N = \mathbf{S} + \mathbf{I}$. Do mesmo modo que se $\mathbf{S} < \frac{\beta}{\alpha}$, com $\mathbf{I} \neq 0$, então $\frac{dI}{dt} < 0$ e $\frac{dS}{dt} > 0$.

E novamente o ponto (\mathbf{S}, \mathbf{I}) se aproxima de $(\frac{\beta}{\alpha}, N - \frac{\beta}{\alpha})$ sobre a reta $N = \mathbf{S} + \mathbf{I}$. Veja a figura abaixo:

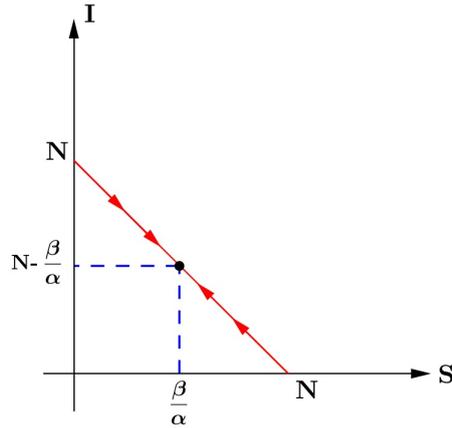


Figura 4.2: *Plano de fase para o Caso 1 do modelo SIS.*

Fonte: Os autores

4.1.2 SIS com N constante (com dinâmica vital)

Neste caso há dinâmica vital, ou seja, na população considerada há nascimentos e mortes, contudo, como a população total N é constante, considera-se que o número de nascimentos é igual ao número de mortes, e ainda, que os nascimentos são de indivíduos sadios.

Seja γ a taxa de natalidade, que é igual à taxa de mortalidade. Então, o modelo SIS neste caso pode ser representado pelo diagrama a seguir:

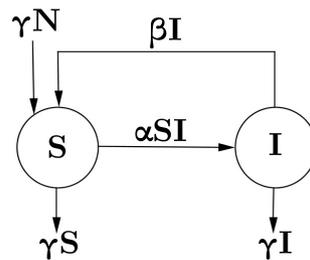


Figura 4.3: *Diagrama compartimental para o Caso 2 do modelo SIS.*

Fonte: Os autores

Note que a saída de indivíduos da classe de suscetíveis ocorre por morte ou equisição da doença, passando para a classe de infectados. Ainda na classe de suscetíveis, a entrada de indivíduos ocorre com os nascimentos (que são proporcionais à população total), assim

como os indivíduos que eram infectados e se recuperaram, não adquirindo imunidade. O sistema de equações diferenciais que descreve esse modelo é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I + \gamma N - \gamma S \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I - \gamma I \end{cases}, \quad (4.2)$$

onde $\alpha, \beta, \gamma > 0$ e $N = S + I$.

Como $N = S + I$, então

$$F(S, I) = -\alpha SI + \beta I + \gamma I$$

$$G(S, I) = \alpha SI - \beta I - \gamma I$$

Afim de encontrarmos os pontos críticos de (4.2), devemos fazer $F(S, I) = 0 = G(S, I)$. Logo temos o sistema

$$\begin{cases} -\alpha SI + \beta I + \gamma I = 0 \\ \alpha SI - \beta I - \gamma I = 0 \end{cases},$$

onde as soluções desse sistema são os pontos críticos

$$P_1 = (S, 0) = (N - I, 0) = (N, 0)$$

e

$$P_2 = \left(\frac{\beta + \gamma}{\alpha}, I \right) = \left(\frac{\beta + \gamma}{\alpha}, N - S \right) = \left(\frac{\beta + \gamma}{\alpha}, N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \right).$$

Observe que, novamente P_1 e P_2 estão sobre a reta $N = S + I$, pois N é constante.

A análise de estabilidade desses pontos também será feita através das características do traço e do determinante da matriz de coeficientes do sistema linearizado. A matriz Jacobiana é dado por

$$J = \begin{bmatrix} F_s & F_I \\ G_s & G_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha I & -\alpha S + \beta + \gamma \\ \alpha I & \alpha S - \beta - \gamma \end{bmatrix}.$$

No ponto $P_1 = (N, 0)$, o sistema linearizado correspondente ao sistema (4.2) é:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha N + \beta + \gamma \\ 0 & \alpha N - \beta - \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

cuja matriz de coeficientes é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha N + \beta + \gamma \\ 0 & \alpha N - \beta - \gamma \end{bmatrix}.$$

Logo, o traço e o determinante são:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= \alpha N - \beta - \gamma \\ \det(A) &= 0, \end{aligned}$$

e pelo Lema 3.1 e Teorema 3.2, o ponto $P_1 = (N, 0)$ é instável.

Para o ponto $P_2 = \left(\frac{\beta+\gamma}{\alpha}, N - \frac{\beta+\gamma}{\alpha}\right)$, o sistema linearizado correspondente ao sistema (4.2) é:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha N + \beta + \gamma & 0 \\ \alpha N - \beta - \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

cuja matriz de coeficientes é

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha N + \beta + \gamma & 0 \\ \alpha N - \beta - \gamma & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, o traço e o determinante são:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= -\alpha N + \beta + \gamma < 0 \\ \det(A) &= 0, \end{aligned}$$

e pelo Lema 3.1 nada se pode afirmar sobre o ponto $P_2 = \left(\frac{\beta+\gamma}{\alpha}, N - \frac{\beta+\gamma}{\alpha}\right)$. Então, será feito um estudo de $\frac{dI}{dt}$.

Novamente ocorre $S = N - I$. Resolvendo $\frac{dI}{dt}$, segue:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I - \gamma I = \alpha(N - I)I - \beta I - \gamma I = \alpha I \left[\left(N - \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \right) - I \right]$$

Afim de resolver essa EDO de primeira ordem, vamos usar separação de variáveis.

Logo:

$$I = \frac{\alpha N - \beta - \gamma}{\alpha + \left[(\alpha N - \beta - \gamma) \frac{1}{I_0} - \alpha \right] e^{-(\alpha N - \beta - \gamma)t}}$$

Então, quando $t \rightarrow \infty$, $I \rightarrow N - \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$. E conseqüentemente, $S \rightarrow \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$. Logo o ponto $P_2 = \left(\frac{\beta+\gamma}{\alpha}, N - \frac{\beta+\gamma}{\alpha}\right)$ é assintoticamente estável.

Deste modo, segue a mesma conclusão do Caso 1. Isto é, se $S > \frac{\beta}{\alpha}$ e $I \neq 0$, então $\frac{dI}{dt} > 0$ e $\frac{dS}{dt} < 0$. Logo, o ponto (S, I) se aproxima de $(\frac{\beta+\gamma}{\alpha}, N - \frac{\beta+\gamma}{\alpha})$ sobre a reta $N = S + I$. Conclusão análoga é obtida para $S < \frac{\beta}{\alpha}$ e $I = 0$.

Pode-se observar que ao considerar dinâmica vital no modelo SIS, quando a população é constante, a magnitude de cada coordenada do ponto de equilíbrio P_2 é alterada, mas o tipo de estabilidade permanece o mesmo para os dois pontos de equilíbrio existentes.

4.1.3 SIS com N variável

Neste caso é considerado a população total N variável. Ainda assim, é válida a equação $N(t) = S(t) + I(t)$ em cada instante de tempo.

Seja γ a taxa de natalidade e μ a taxa de mortalidade, onde $\gamma \neq \mu$. Deste modo, o diagrama que representa este modelo é o seguinte:

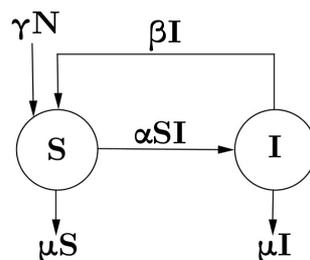


Figura 4.4: Diagrama compartimental para o Caso 3 do modelo SIS.

Fonte: Os autores

E o sistema de equações diferenciais é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I + \gamma N - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I - \mu I \end{cases}, \quad (4.3)$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \mu > 0$, $\gamma > \mu$ e $N(t) = S(t) + I(t)$.

Como $N = S + I$, então

$$\begin{aligned} F(S, I) &= -\alpha SI + \beta I + \gamma S + \gamma I - \mu S \\ G(S, I) &= \alpha SI - \beta I - \mu I \end{aligned}$$

Afim de encontrarmos os pontos críticos de (4.3), devemos fazer $\mathbf{F}(\mathbf{S}, \mathbf{I}) = \mathbf{0} = \mathbf{G}(\mathbf{S}, \mathbf{I})$. Logo temos o sistema

$$\begin{cases} -\alpha SI + \beta I + \gamma S + \gamma I - \mu S = 0 \\ \alpha SI - \beta I - \mu I = 0 \end{cases},$$

onde as soluções desse sistema são os pontos críticos

$$P_1 = (\mathbf{S}, \mathbf{I}) = (0, 0)$$

e

$$P_2 = (\mathbf{S}, \mathbf{I}) = \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}, \frac{-\beta - \mu}{\alpha} \right).$$

Note que, $P_1 = (0, 0)$ é um ponto de equilíbrio que não faz sentido estudar do ponto de vista biológico, e também que no ponto de equilíbrio $P_2 = (\mathbf{S}, \mathbf{I}) = \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha}, \frac{-\beta - \mu}{\alpha} \right)$ ocorre $\mathbf{I} = \frac{-\beta - \mu}{\alpha} < 0$. Assim, observa-se que não há ponto de equilíbrio. Bassanezi[2] observa que “para qualquer valor $\mathbf{I}_0 > 0$ a trajetória atinge o valor máximo para \mathbf{S} quando intercepta a isóclina (curva onde $\frac{d\mathbf{S}}{dt} = 0$) $\mathbf{I} = \frac{\mathbf{S}(\gamma - \mu)}{\alpha\mathbf{S} - (\beta + \gamma)}$ enquanto $\mathbf{I} \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ ”.

Capítulo 5

Um Modelo SIS para a Doença de Chagas

5.1 A Doença de Chagas

A Doença de Chagas ou Tripanossomíase Americana, é uma doença infecciosa parasitária causada pelo protozoário flagelado *Trypanosoma cruzi* (nome dado em homenagem ao médico brasileiro Oswaldo Cruz), a mesma tem como vetor o inseto hematófago da subfamília dos triatomíneos (família dos Reduviídeos) conhecido popularmente como “barbeiro”. Essa doença foi descoberta por volta de 1908 pelo médico e pesquisador brasileiro Carlos Justiniano Ribeiro Chagas.

Ao ser enviado para combater uma epidemia de malária na região de Lassance (município localizado no estado de Minas Gerais), Carlos Chagas foi informado de que havia uma infestação, nas casas daquela região, de um inseto hematófago da espécie *Triatoma infestans* conhecido como barbeiro devido ao fato dele sugar o sangue da face das pessoas durante a noite. Então Chagas resolveu investigar e constatou que no intestino desse inseto abrigava uma nova espécie de *Trypanosoma*.



Figura 5.1: *Barbeiro*.

Fonte: Portal de notícia CE, 2016

O principal meio de transmissão da doença é a vetorial, ou seja, através do contato das fezes do barbeiro com a pele lesionada após a picada do mesmo. Também existe outras formas de transmissão conhecida como vertical que, é quando a mãe contaminada passa para o filho ainda na gestação, e também através de alimentos contaminados e transfusões de sangue.

A forma normal de contrair a doença de acordo com Júnior:

O mecanismo normal de infecção ocorre quando algum inseto hematófago contaminado com o parasita pica as pessoas, geralmente à noite e na região da face, e resíduos de suas fezes, que estão contaminadas com o tripanosoma, aderem à pequena lesão aberta com o ferrão. A pessoa vitimada, no ato de coçar o local da picada, espalha as fezes do mosquito sobre o ferimento. Assim, ocorre a penetração dos parasitas nas células da pele atingindo a corrente sanguínea humana, bem como a de outros mamíferos.(2002, p. 11).

Após a contaminação existe um período de incubação que pode durar até duas semanas. Depois desse período se dá início a fase aguda da doença que dura de 3 a 8 semanas. Essa fase também é conhecida como assintomática devido apresentar apenas alguns sintomas como afirma Júnior (2002, p.12) “[...] a vítima apresenta um quadro que se resume a uma reação local à picada e febre alta contínua ou intermitente e, cansaço e desânimo decorrentes”.

A Doença de Chagas pode possuir duas fases de acordo com Júnior (2002, p.12) “[...]”

um longo período na forma crônica e a forma clínica ou final da doença”. A fase crônica é aquela que o paciente leva a doença consigo por alguns anos ou pela vida inteira, já a fase clínica é o estágio mais avançado da doença na qual atinge órgãos vitais do corpo e levando conseqüentemente a morte.

É importante ressaltar o trabalho de Carlos Chagas que foi o único pesquisador a descrever uma patologia por completo, ou seja, ele descobriu o agente etiológico, o vetor, hospedeiro, ciclo epidemiológico e os sintomas clínicos em humanos. Seu trabalho foi reconhecido em todo o mundo e também é de grande importância para a epidemiologia matemática que, ao longos dos anos, vem criando modelos para interpretar e descrever de forma mais precisa a dinâmica da Doença de Chagas.

A Doença de Chagas é um mal que atinge milhares de pessoas principalmente na América Latina, e a maioria dessas pessoas são as que se encontram na linha da pobreza na sociedade, ou seja, as localidades em que vivem não tem uma boa estrutura de moradia facilitando a disseminação da doença. Segundo a Organização Mundial da Saúde, a Doença de Chagas é uma das maiores endemias da América Latina ficando atrás somente da malária, “[...] estimando que existem entre 16 e 18 milhões de pessoas infectadas e cerca de outras 100 milhões de pessoas na América Central e América do sul sob risco de infecção”. (JÚNIOR, 2002, p. 13)

É importante ressaltar o trabalho de Carlos Chagas que foi o único pesquisador a descrever uma patologia por completo, ou seja, ele descobriu o agente etiológico, o vetor, hospedeiro, ciclo epidemiológico e os sintomas clínicos em humanos. Seu trabalho foi reconhecido em todo o mundo e também é de grande importância para a epidemiologia matemática que, ao longos dos anos, vem criando modelos para interpretar e descrever de forma mais precisa a dinâmica da Doença de Chagas.

5.2 Modelo SIS com Mistura Proporcional e Transmissão Vetorial

Para a elaboração deste modelo e o estudo de estabilidade do mesmo, utilizamos alguns resultados que foram retirados da dissertação de mestrado do autor Júnior (2002).

Para esse modelo vamos tratar matematicamente a dinâmica da transmissão da infecção de Chagas, analisando um modelo compartimental da doença do tipo SIS com dinâmica vital, ou seja, adotando distintas taxas de natalidade e mortalidade para a classe de indivíduos suscetíveis. Com essa caracterização, a população total \mathbf{N} é tal que $\mathbf{N}(t) = \mathbf{S}(t) + \mathbf{I}(t)$.

Neste modelo consideramos ambas as transmissões vertical e horizontal. O processo de transmissão horizontal ocorre através da transfusão de sangue de doadores contaminados.

A transmissão vetorial (também como mecanismo de transmissão horizontal) ocorre e evidentemente será devida a presença dos vetores transmissores que são portadores do agente patogênico. Neste caso não distinguimos os vetores que estão contaminados dos que não estão contaminados, entre a forma crônica e a clínica da infecção e não levamos em consideração a estrutura de idade da população. Nesta maneira, não consideramos o devido período de maturação para os recém-nascidos infectados. Consideramos também a força de infecção da doença dada por um termo que é descrito como mistura proporcional.

Podemos concluir que para o caso da Doença de Chagas, os mecanismos de transmissão do agente infeccioso (*Trypanosoma cruzi*) obedecem a uma cadeia de transferência, onde o principal mecanismo é o da transmissão vetorial, representada pela picada do barbeiro contaminado e em sequência ocorrem a transmissão via transfusão de sangue contaminado e a possibilidade de transmissão congênita.

5.2.1 O Modelo

Em se tratando de um modelo SIS com transmissão vetorial, adotamos uma taxa ν de transmissão vetorial da infecção para a população humana de suscetíveis devido à presença de vetores infecciosos. Assumimos essa taxa como constante na dinâmica da doença.

Para a transmissão horizontal adotamos aquela que ocorre via a transfusão de sangue contaminado que tem origem no fluxo de imigrantes de áreas infectadas para áreas nas quais a infecção não está se desenvolvendo. Assim, somente uma fração da população total está sendo infectada, razão pelo qual essa força de infecção é conhecida como mistura proporcional.

Supomos então que na população hospedeira na qual ocorre a infecção, cada indivíduo suscetível entre em contato com, em média C outros indivíduos. Logo, o número total médio de contatos por unidade de tempo t por suscetível na população total é CS , sendo que desse total a proporção $\frac{I}{S+I}$ é realizado com os indivíduos infectados. Assumimos ainda, que existe uma proporção ρ de contatos entre S e I que estão efetivamente transmitindo a doença. Então, a razão com a qual os suscetíveis tornam-se infectados é dado por

$$\rho CS \frac{I}{S+I} = K \frac{SI}{S+I}$$

onde $k = \rho C$.

Portanto, k é a razão de contatos dos suscetíveis e $\frac{I}{S+I}$ é a proporção do total de contatos, via transfusão de sangue contaminado, de cada suscetível que ocorre com indivíduos infectados.

As demais taxas adotadas, de acordo com as peculiaridades da doença para este caso, são as seguintes:

- b = taxa de natalidade na população dos suscetíveis;
- b' = taxa de natalidade na população dos infectados;
- r = taxa de mortalidade na população dos suscetíveis;
- r' = taxa de mortalidade na população dos infectados;
- c = taxa de remoção.

O processo de infecção via transmissão vertical, é caracterizado pela possibilidade do feto humano contrair a doença, o qual pode ocorrer na gestação ou no momento do parto. Nesse aspecto, assumimos uma proporção q da medida de probabilidade de transmissão vertical e a proporção complementar p como a medida de probabilidade de não transmissão vertical. Logo, $p + q = 1$. Com base nessas considerações podemos estabelecer as equações que regem a dinâmica da infecção para o caso aqui proposto:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (b - r - v)S + (b'p + c)I - k\frac{SI}{S + I} \\ \frac{dI}{dt} = (b'q - r' - c)I + vS + k\frac{SI}{S + I} \end{cases} \quad (5.1)$$

5.2.2 Pontos de Equilíbrio e Análise de Estabilidade

Afim de estudarmos a estabilidade do sistema (5.1) devemos fazer algumas alterações nesse sistema, com o objetivo de analisar a estabilidade em um sistema equivalente ao sistema (5.1).

Logo, as equações do modelo SIS (5.1) podem ser simplificadas com o objetivo de obtermos a equação dinâmica para a população hospedeira total, a qual é dividida na classe dos indivíduos suscetíveis e infectados, ou seja, $N(t) = S(t) + I(t)$. Somando as equações do sistema (5.1) e usando $N = S + I$, obtemos as seguintes equações equivalentes:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = (b - r)N + (r - b + b' - r')I \\ \frac{dN}{dt} = (b - r)S + (b' - r')I \end{cases} \quad (5.2)$$

Sendo a taxa de natalidade dos infectados menor do que a dos suscetíveis e a taxa de mortalidade maior, é razoável que o valor de $\alpha = (b - b') + (r' - r)$ seja positivo. O termo $b - b'$ em α , por exemplo, é uma taxa que representa o crescimento da população livre da infecção.

Para analisar o caso geral, em que $\frac{dN}{dt} \neq 0$, é conveniente introduzirmos as seguintes substituições:

$$\mathbf{x}(t) = \frac{S(t)}{N(t)} < 1, \quad \mathbf{y}(t) = \frac{I(t)}{N(t)} < 1, \quad \alpha = (b - r) - (b' - r')$$

Daí segue que $\mathbf{x} + \mathbf{y} = 1$. Logo, podemos com isto reduzir significativamente as equações do modelo inicial, para obter um outro sistema equivalente que rege a dinâmica do modelo em questão. Para tanto, considerando as proporções \mathbf{x} e \mathbf{y} dos indivíduos suscetíveis e infectados, respectivamente, e as equações dadas em (5.1) e (5.2), teremos:

$$\frac{dS}{dt} = x \frac{dN}{dt} + N \frac{dx}{dt}$$

$$(b - r - v)S + (b'p + c)I - k\frac{SI}{S + I} = (b - r)xN + (r - b + b' - r')xI + N\frac{dx}{dt}$$

$$(b - r - v)x + (b'p + c)y - kxy = (b - r)x + (r - b + b' - r')xy + \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -vx + (b'p + c)y - (k - \alpha)xy.$$

$$\frac{dI}{dt} = y\frac{dN}{dt} + N\frac{dy}{dt}$$

$$(b'q - r' - c)I + vS + k\frac{SI}{S + I} = (b - r)yS + (b' - r')(N - S)y + N\frac{dy}{dt}$$

$$(b - r')y - (b'p + c)y + vx + kxy = (b - r)xy - (b' - r')xy + (b' - r')y + \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = vx - (b'p + c)y + (k - \alpha)xy.$$

Esse tipo de análise é assumida em praticamente todos os modelos da Doença de Chagas que foram até então desenvolvidos.

Portanto, as equações dinâmicas equivalentes ao modelo (5.1) são:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -vx + (b'p + c)y - (k - \alpha)xy \\ \frac{dy}{dt} = vx - (b'p + c)y + (k - \alpha)xy \end{cases} \quad (5.3)$$

Afim de estudarmos a estabilidade do sistema (5.3) que é equivalente ao sistema (5.1), vamos usar o fato de que $x + y = 1$. Logo obtemos uma única equação diferencial de primeira ordem em y :

$$\frac{dy}{dt} = f(y) = v - (v + b'p + c - k + \alpha)y - (k - \alpha)y^2 \quad (5.4)$$

Vale resaltar que os zeros de $f(y)$ são os pontos de equilíbrio de $\frac{dy}{dt}$. Nesse caso, a estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação (5.4) dependerá do sinal da derivada de $f(y)$ calculado no ponto \bar{y} . Logo temos o seguinte teorema:

Teorema 5.1 *Seja \bar{y} um ponto crítico da equação diferencial autônoma $y' = g(y)$, onde g é diferenciável em \bar{y} .*

- Se $g'(\bar{y}) < 0$, então \bar{y} é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável;

- Se $g'(\bar{y}) > 0$, então \bar{y} é um ponto de equilíbrio instável.

Dessa forma, podemos proceder ao estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio do modelo dado pela equação (5.4) com base na variação do parâmetro $k - \alpha$ e considerando $v \neq 0$. Temos então os seguintes casos:

- a) Caso $k = \alpha$

A equação se quadrática se reduz a uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem dada por:

$$\frac{dy}{dt} = v - (b'p + c + v)y$$

Tomando $f(y) = v - (b'p + c + v)y$ e fazendo $f(y) = 0$, obtemos o único ponto de equilíbrio dado por:

$$\bar{y} = \frac{v}{b'p + v + c}$$

Sendo $f'(y) = -(b'p + v + c) < 0$, segue que $f'(\bar{y}) < 0$. Logo pelo Teorema (5.1), \bar{y} é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

- b) Caso $k - \alpha > 0$

Neste caso as raízes de (5.4) são dadas por:

$$y = \frac{-(v + b'p + c - k + \alpha) \pm \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 + 4v(k - \alpha)}}{2(k - \alpha)}$$

Onde os pontos de equilíbrio são:

$$\bar{y}_1 = \frac{-(v + b'p + c - k + \alpha) + \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 + 4v(k - \alpha)}}{2(k - \alpha)} > 0$$

$$\bar{y}_2 = \frac{-(v + b'p + c - k + \alpha) - \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 + 4v(k - \alpha)}}{2(k - \alpha)} < 0$$

Tendo em vista que $f'(y) = -(v + b'p + c - k + \alpha) - 2(k - \alpha)y$, claramente tem-se que $f'(\bar{y}_1) = -\sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 + 4v(k - \alpha)} < 0$, logo pelo Teorema (5.1), \bar{y}_1 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Para $f'(\bar{y}_2)$, tem-se que $f'(\bar{y}_2) = \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 + 4v(k - \alpha)} > 0$, logo pelo Teorema (5.1), \bar{y}_2 é um ponto de equilíbrio instável.

- c) Caso $k - \alpha < 0$

Neste caso as raízes de (5.4) são dadas por:

$$y = \frac{v + b'p + c - k + \alpha \pm \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 + 4v(k - \alpha)}}{2(\alpha - k)}$$

Onde os pontos de equilíbrio são:

$$\bar{y}_1 = \frac{v + b'p + c - k + \alpha - \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 - 4v(\alpha - k)}}{2(\alpha - k)} > 0$$

$$\bar{y}_2 = \frac{v + b'p + c - k + \alpha + \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 - 4v(\alpha - k)}}{2(\alpha - k)} > 0$$

Como $f'(y) = -(v + b'p + c - k + \alpha) + 2(\alpha - k)y$, segue claramente que $f'(\bar{y}_1) = -\sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 - 4v(\alpha - k)} < 0$, logo pelo Teorema (5.1), \bar{y}_1 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Para $f'(\bar{y}_2)$, tem-se que $f'(\bar{y}_2) = \sqrt{(v + b'p + c - k + \alpha)^2 - 4v(\alpha - k)} > 0$, logo pelo Teorema (5.1), \bar{y}_2 é um ponto de equilíbrio instável.

Sendo assim, ao estudarmos a estabilidade do sistema (5.3) estudamos automaticamente a estabilidade do sistema (5.1), haja visto que eles são equivalentes. Logo o objetivo neste capítulo foi concluído ao estudarmos a estabilidade do sistema modelado para a Doença de Chagas.

Conclusão

Neste trabalho, primeiramente, foram apresentados, alguns resultados preliminares os quais serviram de suporte para o estudo de análise de estabilidade de sistemas. Primeiramente foi visto alguns conceitos da álgebra linear que são importantes para a solução de sistemas lineares de equações diferenciais, focando na parte de sistemas lineares, independência linear, autovalores e autovetores. Por último fizemos um estudo sobre sistemas de equações diferenciais lineares e não lineares de primeira ordem, abordando na mesma soluções desses sistemas.

No capítulo 3, foi feito um estudo sobre a natureza geométrica das soluções, analisamos inicialmente soluções constantes especiais chamadas pontos críticos e procuramos soluções periódicas. Para isso foram apresentados conceitos de estabilidade de sistemas de equações diferenciais de primeira ordem autônomos, ou seja, sistemas cujas equações não dependem explicitamente da variável independente.

No capítulo 4, foi feito um estudo de um modelo clássico em Epidemiologia: SIS, com população constante e variável. A análise de estabilidade desse modelo foi feita através do primeiro método de Lyapunov, ou seja, pelas características dos autovalores do sistema.

No capítulo 5, inicialmente, foram abordados aspectos sobre a Doença de Chagas, tanto biológicos quanto históricos para um melhor conhecimento da doença. E finalmente, estudamos a estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema SIS para a Doença de Chagas, para isso fizemos uma substituição afim de analisar a estabilidade de um sistema equivalente ao principal, pois todos os estudos feitos para esse sistema, automaticamente foram satisfeitos para o sistema principal.

Referências

- [1] ALMEIDA FILHO, Naomar. **Epidemiologia sem Números, uma Introdução Crítica à Ciência Epidemiológica**. Rio de Janeiro: Campus, 1989. ISBN 85-1-70010-550-X p.9.
- [2] BASSANEZI, R. C. ; JR, W. C. F. **Equações Diferenciais com Aplicações**. 1. ed. São Paulo: Ed. HARBRA Ltda, 1988.
- [3] BESSA, G. R. **Teoria de Estabilidade de Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações: Modelos Presa-Predador e Competições entre Espécies**. 2011. Dissertação (Mestrado) - UNESP, IGCE, Rio Claro, 2011
- [4] BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear**. 3. ed. v. 1. São Paulo: Ed. Harper e Row do Brasil, 1980.
- [5] BOYCE, W. E. ; DIPRIMA, R. D. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2011.
- [6] JÚNIOR, D. da S. A. **Um Estudo sobre Epidemiologia Matemática - A Doença de Chagas**. 2002. 113 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Capinas 2002.
- [7] LEAVELL, Hugh R. ; CLARK, Edwin G. **Medicina Preventiva**. São Paulo, McGraw-hill do Brasil, RJ FENAME, 1978.

- [8] LUIZ, M. H. R. **Modelos Matemáticos em Epidemiologia**. 2012. 75 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2012.
- [9] MACMAHON, B.; PUGH, T.F. **Princípios y Métodos de Epidemiologia**. México, La Prensa Mexicana, 1975.
- [10] PORTAL DE NOTICIA CE. **Quatro municípios do Sertão Central tem alto risco de contaminação da doença de chagas**. 2016. Disponível em: <www.portaldenoticiace.com.br/2016/02/quatro-municipios-do-sertao-central-tem.html>. Acesso em 08 set. 2016.
- [11] ROUQUAYROL, M. Z. ; ALMEIDA FILHO, Noamar. **Epidemiologia e Saúde**. BR Rio de Janeiro: MEDSI, 2003.
- [12] SOUNIS, Emílio. **Epidemiologia Geral**. v. 1. São Paulo: Editora da Universidade do Paraná, Atheneu, 1985.
- [13] ZILL, D. G. **Equações Diferenciais**. 3. ed. v. 2. São Paulo: Ed. Pearson Makron Books, 2001.