UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

COLEGIADO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TÓPICOS DE ANÁLISE REAL COM UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DE CONTRAEXEMPLOS

Fábio Castro dos Santos Uchôa

Macapá-AP

2016

FÁBIO CASTRO DOS SANTOS UCHÔA

TÓPICOS DE ANÁLISE REAL COM UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DE CONTRAEXEMPLOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Matemática, da Universidade Federal do Amapá, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do Prof. Me. Marcel Lucas Picanço Nascimento

Macapá-AP

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

515
U17t Uchôa, Fábio Castro dos Santos.

Tópicos de análise real com uma abordagem através de contraexemplos / Fábio Castro dos Santos Uchôa; orientador, Marcel Lucas Picanço Nascimento. -- Macapá, 2016.

70 p.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Análise real. 2. Contraexemplos. 3. Corpos ordenados I. Nascimento, Marcel Lucas Picanço; orientador II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

FÁBIO CASTRO DOS SANTOS UCHÔA

TÓPICOS DE ANÁLISE REAL COM UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DE CONTRAEXEMPLOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial par a obtenção do Título de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá, Campus Marco Zero, aprovado pela Comissão de professores:

Marcel Lucas Picanço Nascimento

Prof. Me. Marcel Lucas Picanço Nascimento
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Kelmem da Cruz Barroso.

Prof. Me. Kelmem da Cruz Barroso
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Sérgio Barbosa de Miranda

Prof. Me. Sérgio Barbosa de Miranda
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Avaliado em: 19/09/16

Macapá-AP
2016

A minha família

e amigos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, por ter me dado a oportunidade de fazer este trabalho.

A Minha família e aos meus amigos, em especial ao amigo já falecido Oziel Amaral, por terem me dado forças e acreditado em mim.

Ao meu orientador Prof. Marcel Lucas Picanço, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções, conselhos e incentivos. Sinceramente sou muito grato.

A todos os professores e professoras do curso de matemática pelos ensinamentos e incentivos.

A Universidade Federal do Amapá, pela oportunidade de fazer o curso e por ter me dado suporte financeiro quando eu mais precisei.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

O gênio, esse poder que deslumbra os olhos humanos, não é outra coisa senão a perseverança bem disfarçada.

Johann Goethe

Resumo

Neste trabalho, utilizando uma abordagem diferenciada, mostramos através de contra-exemplos, o porquê das recíprocas de alguns dos principais teoremas da forma condicional ou implicativa que são encontrados nos textos da área de Análise real que tratam sobre Corpos ordenados, Sequências de números reais e Séries numéricas infinitas não serem válidas. Também apresentamos exemplos de situações quase não conhecidas, mas que, por provocarem uma instigação, resolvemos trabalhá-las.

Palavras-chave: Contraexemplos; Corpos ordenados; Sequências de números reais; Séries numéricas infinitas.

Abstract

In this work, using a different approach, we show through counterexamples, why the reciprocal of some of the main theorems of conditional or implicative form that are found in Real Analysis Area texts that deal Ordered field, Sequences of real numbers and Infinite numerical Series not be valid. We also present examples of situations hardly known, but that to cause an instigation, we decided to work them.

Keywords: Counterexample; Ordered field; Numerical sequences of real numbers; Infinite numerical series.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$ Conjunto dos Números Naturais

$\mathbb{Z}$ Conjunto dos Números Inteiros

$\mathbb{Q}$ Conjunto dos Números Racionais

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ Conjunto dos Números Irracionais

$\mathbb{R}$ Conjunto dos Números Reais

$\mathbb{C}$ Conjunto dos Números Complexos

$\exists$ Existe; Existe pelo menos um

$\forall$ Para todo; Qualquer que seja; Para cada

$\leq$ Menor do que ou igual a

$\geq$ Maior do que ou igual a

$<$ Menor do que

$>$ Maior do que

$\in$ Pertence

$\notin$ Não pertence

$\subset$ Está contido

∞ Infinito

$=$ Igual a

$\neq$ Diferente de

$:=$ Por definição

$+$ Mais

$-$ Menos

$A \times B$ A cartesiano B

$|$ Tal que; Tais que

$\dfrac{a}{b}$ a sobre b; a dividido por b

$f(x)$ f de x

$Sup\,A$ Supremo do conjunto A

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Somatório de a_n, em que n varia de 1 a mais infinito

Sumário

Introdução

Quando se estuda os fundamentos da lógica matemática, vide[4], verifica-se que um teorema nada mais é do que uma sentença condicional , se P, então Q, ou implicativa, P $\Rightarrow$ Q, da qual existe uma demonstração que garanta sua validade. Nesse caso, costumamos chamar a sentença P de hipótese e a sentença Q de tese. Também, juntamente com esse estudo, se estuda as técnicas de demonstrações: demonstração direta, demonstração indireta, demostração por redução a um absurdo (ou por contradição) e demonstração por contraexemplos. Esta última, não significa que não usaremos as outras citadas, tem um significado maior para este trabalho. Por esta razão, vamos detalhá-la mais:

Em matemática, quando é possível encontrar um exemplo de um elemento que satifaz a hipótese, mas contraria (não cumpre) a tese de uma sentença condicional ou implicativa, esse exemplo é chamado de Contraexemplo. Além disso, um único contraexemplo é suficiente para assegurar que determinada sentença é falsa.

Isso tudo acima é trabalhado com bastante frequência nos textos de matemática sobre Análise real, que, aliás, na maioria desses textos não é dada importância às recíprocas, vide [4], dos principais teoremas, ou seja, eles não trazem uma prova que justifique a validade ou não validade de tal afirmação. Por exemplo, no teorema *se F é um corpo ordenado, então F é infinito*, a recíproca não é válida, isto é, a firmação *se F é um corpo infinito, então F é ordenado*, é falsa. Um exemplo de um corpo que é infinito e não é ordenado seria o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos.

Neste trabalho, com o objetivo de lidar com esse pormenor, iremos pegar alguns dos principais teoremas e mostrar, utilizando a técnica de demonstração por contraexemplos, a validade ou não de suas recíprocas. Além disso, iremos, para complementar este trabalho, expor alguns exemplos de situações poucas conhecidas, por exemplo, o corpo que é ordenado por dois subconjuntos. Isso tudo será feito em 3 capítulos conhecidos dentro do estudo de análise real matemática. São eles: corpos ordenados; Sequências de números reais; Séries numéricas. E para o desenvolvimento destes capítulos, usaremos referências como [1], [2], [3] [6] e [7]. Agora vale ressaltar que os capítulos citados serão estruturados de uma maneira semelhante aos capítulos de um livro de Análise real comum de graduação, isto é, faremos um estudo, que será dividido em seções, dos principais tópico abordados dentro de cada capítulo,porém um estudo mais limitado, não fugindo do obejetivo do trabalho.

A escolha de trabalhar com a Análise na reta, mais precisamente os três tópicos citados acima, fazendo essa abordagem diferenciada, foi pelo simples fato da ausência de textos que trabalhem dessa maneira. Desta forma, acreditamos que este Trabalho de Conclusão de Curso torna-se diferenciado, ganhando valor para ser utilizado num estudo futuro de um acadêmico da área de matemática.

Capítulo 1

Corpos ordenados

Neste capítulo, vamos estudar a estrutura de corpos, corpos ordenados e a importância da ordenação de um corpo ser única. Algumas perguntas nos motivaram: Todo corpo infinito é ordenado? Todo corpo ordenado é arquimediano? Será que todo corpo ordenado admite somente uma ordenação? Todo corpo ordenado que admite somente uma ordenação é completo? O conjunto dos números racionais é denso em qualquer corpo ordenado?

1.1 Corpos

Iniciaremos com a definição e propriedades de corpos.

Definição 1.1 *Seja F um conjunto tal que $F \neq \emptyset$. Diz-se que F é um corpo, quando ele tem definida duas operações, $+ : F \times F \longrightarrow F$, que a cada $(x, y) \in F \times F$ associa um elemento $x + y \in F$ e $\cdot : F \times F \longrightarrow F$ que a cada $(x, y) \in F \times F$ associa um elemento $x \cdot y \in F$, as quais são chamadas, respectivamente, de adição e multiplicação, que satisfazem as seguintes condições especificadas abaixo.*

Para a adição:

A1. Associatividade: Para quaisquer $x, y, z \in F$, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$.

A2. Comutatividade: Para quaisquer $x, y, \in F$, tem-se $(x + y) = (y + x)$.

A3. Elemento neutro: Existe $0 \in F$ tal que $x + 0 = x$, qualquer que seja $x \in F$. O elemento 0 é chamado de zero.

A4. Simétrico: Todo elemento $x \in F$ possui um simétrico $-x \in F$ tal que $x+(-x) = 0$.

Para a multiplicação:

M1. Associatividade: Para quaisquer $x, y, z \in F$, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

M2. Comutatividade: Para quaisquer $x, y \in F$, vale $x \cdot y = y \cdot x$.

M3. Elemento neutro: Existe $1 \in F$ tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x$, qualquer que seja $x \in F$. O elemento 1 é chamado de um.

M4. Inverso: Todo $x \neq 0$ em F possui um inverso x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Por fim, as operações de adição e multiplicação num corpo F acham-se relacionadas por uma propriedade, com a qual fica completa a definição de corpo.

D1. Distributividade: Sejam x, y, $z \in F$, tem-se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Observação 1.1 *Devido à comutatividade, tem-se que* $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Podemos, a partir da definição, enuciar o seguinte resultado.

Proposição 1.1 *Sejam F um corpo. Então para quaisquer x, $y \in F$, valem as seguintes afirmações:*

(i) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$;

(ii) $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ *ou* $y = 0$;

(iii) $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$;

(iv) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Demonstração: Provemos (i): $x \cdot 0 + x = x \cdot 0 + 1 \cdot x = x(0+1) = x \cdot 1 = x \Rightarrow x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$. Agora provemos (ii): Se $y \neq 0$, então $x \cdot y = 0 \Rightarrow x \cdot y \cdot y^{-1} = 0 \cdot y^{-1} \Rightarrow x \cdot 1 = 0 \Rightarrow x = 0$. Por outra lado, se $x \neq 0$, então $x \cdot y = 0 \Rightarrow x^{-1} \cdot x \cdot y = x^{-1} \cdot 0 \Rightarrow 1 \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0$. Provemos (iii): Temos, em primeiro lugar, que $(-x) \cdot y + x \cdot y = (-x+x)y = 0 \cdot y = 0 \Rightarrow (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$. De forma análoga prova-se que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$. Daí temos (iv), pois $(-x) \cdot (-y) = -[-(x \cdot y)] = x \cdot y$.

Vejamos alguns exemplos de corpos.

Exemplo 1.1 *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, munido das operações de adição, $\frac{p}{q} + \frac{m}{n} := \frac{pn + mq}{qn}$, e multiplicação, $\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} := \frac{pm}{qn}$, forma um corpo, pois para quaisquer que sejam o valores $\frac{p}{q}$, $\frac{m}{n}$ e $\frac{r}{s}$ pertencentes a $\mathbb{Q}$, temos:*
1) *A adição é associativa:*

$$\begin{aligned}\left(\frac{p}{q} + \frac{m}{n}\right) + \frac{r}{s} &= \left(\frac{pn + mq}{qn}\right) + \frac{r}{s}\\ &= \frac{(pn + mq)s + rqn}{qns}\\ &= \frac{pns + mqs + rqn}{qns}\\ &= \frac{pns + (ms + rn)q}{qns}\\ &= \frac{p}{q} + \left(\frac{ms + rn}{ns}\right)\\ &= \frac{p}{q} + \left(\frac{m}{n} + \frac{r}{s}\right).\end{aligned}$$

2) *A multiplicação é associativa:*

$$\begin{aligned}\left(\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}\right) \cdot \frac{r}{s} &= \left(\frac{pm}{qn}\right) \cdot \frac{r}{s}\\ &= \frac{(pm)r}{(qn)s}\\ &= \frac{p(mr)}{q(ns)}\\ &= \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{mr}{ns}\right)\\ &= \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}\right).\end{aligned}$$

3) *A adição é comutativa:*

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} + \frac{m}{n} &= \frac{pn + mq}{qn} \\ &= \frac{mq + pn}{nq} \\ &= \frac{m}{n} + \frac{p}{q}. \end{aligned}$$

4) *A multiplicação é comutativa:*

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} &= \frac{pm}{qn} \\ &= \frac{mp}{nq} \\ &= \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}. \end{aligned}$$

5) *Elemento neutro da adição:*

O elemento neutro da adição é o número $0_{\mathbb{Q}} = \dfrac{0}{m}$*, seja qual for o* $m \in \mathbb{Z}*$*, pois para todo* $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\dfrac{p}{q} + \dfrac{0}{m} = \dfrac{pm + 0q}{qm} = \dfrac{pm}{qm} = \dfrac{p}{q}$.

6) *Elemento neutro da multiplicação:*

O elemento neutro da mutiplicação é o número $1_{\mathbb{Q}} = \dfrac{m}{m}$*, qualquer que seja* $m \in \mathbb{Z}*$*, pois para todo* $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{m}{m} = \dfrac{p}{q}$.

7) *Elemento simétrico da adição:*

Todo elemento $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *possui um simétrico* $\dfrac{k}{l} \in \mathbb{Q}$ *tal que* $\dfrac{p}{q} + \dfrac{k}{l} = 0_{\mathbb{Q}}$*, pois basta, para isso, fazer* $\dfrac{k}{l} = -\left(\dfrac{p}{q}\right)$.

8) *Elemento inverso da multiplicação:*

Para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, *com* $\frac{p}{q} \neq 0_{\mathbb{Q}}$, *existe* $\frac{i}{j} \in \mathbb{Q}$ *tal que* $\frac{p}{q} \cdot \frac{i}{j} = 1_{\mathbb{Q}}$, *pois basta, para tanto, fazer* $\frac{i}{j} = \frac{q}{p}$.

9) *Vale a distributividade:*

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} \cdot \left(\frac{m}{n} + \frac{r}{s}\right) &= \frac{p}{q} \cdot \frac{ms + rn}{ns} \\
&= \frac{p(ms + rn)}{qns} \\
&= \frac{pms + prn}{qns} \\
&= \frac{q}{q} \cdot \frac{(pms + prn)}{qns} \\
&= \frac{qpms + qprn}{qqns} \\
&= \frac{pmqs + prqn}{qnqs} \\
&= \frac{pm}{qn} + \frac{pr}{qs} \\
&= \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} + \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.2 *O conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais, munidos das operações de adição e multiplicação, é um corpo, pois a definição de corpo foi motivada justamente por este conjunto.*

Exemplo 1.3 *O conjunto* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{r + s\sqrt{2} \,|\, r, s \in \mathbb{Q}\}$, *juntamente com as operações de adição e multiplicação usuais de* $\mathbb{R}$, *é um corpo. De fato:*

1) *As propriedades associativa e comutativa são obviamente válidas para ambas as operações, pois* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$.

Verifiquemos então as demais.

2) *Elemento neutro da adição*

Existe $0_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *tal que*

$$r + s\sqrt{2} + 0_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = r + s\sqrt{2}$$

para todo $r + s\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. *Basta tomar* $0_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = 0_{\mathbb{Q}} + 0_{\mathbb{Q}}\sqrt{2}$.

3) *Elemento neutro da multiplicação*

Existe $1_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *tal que*

$$r + s\sqrt{2} \cdot 1_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = r + s\sqrt{2}$$

para todo $r + s\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. *Basta tomar* $1_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = 1_{\mathbb{Q}} + 0_{\mathbb{Q}}\sqrt{2}$.

4) *Elemento simétrico*

Para todo $r + s\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, *existe* $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *tal que*

$$r + s\sqrt{2} + x = 0_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}.$$

Basta tomar $x = -(r + s\sqrt{2})$.

5) *Elemento inverso.*

Para todo $r + s\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, *existe* $y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *tal que*

$$r + s\sqrt{2} \cdot y = 1_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}.$$

Basta tomar $y = \dfrac{r}{(r + 2\sqrt{2})^2} + \dfrac{s}{(r + 2\sqrt{2})^2}\sqrt{2}$.

Exemplo 1.4 *O conjunto* $\mathbb{C}$ *dos números complexos, munidos das operações de adição,* $(x, y) + (z, w) := (x + z, y + w)$, *e multiplicação,* $(x, y) \cdot (z, w) := (xz - yw, yz + xw)$, *forma um corpo, pois para quaisquer* (x, y), (z, w) *e* (t, v) *pertencentes a* $\mathbb{C}$, *temos:*

1) *A adição é associativa:*

$$\begin{aligned}
[(x, y) + (z, w)] + (t, v) &= (x + z, y + w) + (t, v) \\
&= (x + z + t, y + w + v) \\
&= (x, y) + (z + t, w + v) \\
&= (x, y) + [(z, w) + (t, v)].
\end{aligned}$$

2) *A multiplicação é associativa:*

$$\begin{aligned}
[(x, y) \cdot (z, w)] \cdot (t, v) &= (xz - yw, yz + xw) \cdot (t, v) \\
&= ((xz - yw)t - (yz + xw)v, (yz + xw)t + (xz - yw)v) \\
&= (xzt - ywt - yzv - xwv, yzt + xwt + xzv - ywv) \\
&= (x(zt - wv) - y(wt + zv), y(zt - wv) + x(wt + zv)) \\
&= (x, y) \cdot (zt - wv, wt + zv) \\
&= (x, y) \cdot [(z, w) \cdot (t, v)].
\end{aligned}$$

3) *A adição é comutativa:*

$$\begin{aligned}(x, y) + (z, w) &= (x + z, y + w)\\ &= (z + x, w + y)\\ &= (z, w) + (x, y).\end{aligned}$$

4) *A multiplicação é comutativa:*

$$\begin{aligned}(x, y) \cdot (z, w) &= (xz - yw, yz + xw)\\ &= (zx - wy, zy + wx)\\ &= (z, w) \cdot (x, y).\end{aligned}$$

5) *Elemento neutro da adição:*

O elemento neutro da adição é o $(0, 0)$*, pois para todo* $(x, y) \in \mathbb{C}$*,*

$$(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y).$$

6) *Elemento neutro da multiplicação:*

O elemento neutro da multiplicação é o $(1, 0)$*, pois para todo* $(x, y) \in \mathbb{C}$*,*

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x1 - y0, y1 + x0) = (x, y).$$

7) *Elemento simétrico:*

Para todo $(x, y) \in \mathbb{C}$*, existe* $(-x, -y) \in \mathbb{C}$ *tal que* $(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$*. A justificativa para isto é que todo* $x \in \mathbb{R}$ *possui um simétrico em* $\mathbb{R}$*.*

8) *Inverso multiplicativo:*

Para todo $(x, y) \in \mathbb{C}$*,* $(x, y) \neq (0, 0)$*, existe* $(u, v) \in \mathbb{C}$ *tal que* $(x, y) \cdot (u, v) = (1, 0)$*, pois basta, para tanto,* $(u, v) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\right)$*, isto é,* $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ *e* $v = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$*.*

9) *Vale a distributividade:*

$$
\begin{aligned}
(x,y)\cdot[(z,w)+(t,v)] &= (x,y)\cdot(z+t,w+v)\\
&= (x(z+t)-y(w+v),y(z+t)+x(w+v))\\
&= (xz+xt-yw-yv,yz+yt+xw+xv)\\
&= (xz-yw+xt-yv,yz+xw+yt+xv)\\
&= (xz-yw,yz+xw)+(xt-yv,yt+xv)\\
&= (x,y)\cdot(z,w)+(x,y)\cdot(t,v).
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.5 *O conjunto H das funções racionais $\dfrac{a(t)}{b(t)}$, onde $a(t)$ e $b(t)$ são polinômios de coeficientes racionais e $b(t)\neq 0$ para todo $t\in\mathbb{Q}$, munido das operaçoes de adição, $\dfrac{a(t)}{b(t)}+\dfrac{c(t)}{d(t)} := \dfrac{a(t)d(t)+c(t)b(t)}{b(t)d(t)}$, e multiplicação, $\dfrac{a(t)}{b(t)}\cdot\dfrac{c(t)}{d(t)} := \dfrac{a(t)c(t)}{b(t)d(t)}$, é um corpo, pois para todo $\dfrac{a(t)}{b(t)}$, $\dfrac{c(t)}{d(t)}$ e $\dfrac{e(t)}{f(t)}$ pertencentes a H, temos*

1) *A adição é associativa:*

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a(t)}{b(t)}+\frac{c(t)}{d(t)}\right)+\frac{e(t)}{f(t)} &= \left(\frac{a(t)d(t)+c(t)b(t)}{b(t)d(t)}\right)+\frac{e(t)}{f(t)}\\
&= \frac{(a(t)d(t)+c(t)b(t))f(t)+e(t)b(t)d(t)}{b(t)d(t)f(t)}\\
&= \frac{a(t)d(t)f(t)+c(t)b(t)f(t)+e(t)b(t)d(t)}{b(t)d(t)f(t)}\\
&= \frac{a(t)d(t)f(t)+(c(t)f(t)+e(t)d(t))b(t)}{b(t)d(t)f(t)}\\
&= \frac{a(t)}{b(t)}+\left(\frac{c(t)f(t)+e(t)d(t)}{d(t)f(t)}\right)\\
&= \frac{a(t)}{b(t)}+\left(\frac{c(t)}{d(t)}+\frac{e(t)}{f(t)}\right).
\end{aligned}
$$

2) *A multiplicação é associativa:*

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a(t)}{b(t)}\cdot\frac{c(t)}{d(t)}\right) &= \left(\frac{a(t)b(t)}{c(t)d(t)}\right)\cdot\frac{e(t)}{f(t)}\\
&= \frac{a(t)(c(t)e(t))}{b(t)(d(t)f(t))}\\
&= \frac{a(t)}{b(t)}\cdot\left(\frac{c(t)}{d(t)}\cdot\frac{e(t)}{f(t)}\right).
\end{aligned}
$$

3) *A adição é comutativa:*

$$\begin{aligned}\frac{a(t)}{b(t)}+\frac{c(t)}{d(t)} &= \frac{a(t)d(t)+c(t)b(t)}{b(t)d(t)}\\ &= \frac{c(t)b(t)+a(t)d(t)}{d(t)b(t)}\\ &= \frac{c(t)}{d(t)}+\frac{a(t)}{b(t)}\end{aligned}$$

4) *A multiplicação é comutativa:*

$$\begin{aligned}\frac{a(t)}{b(t)}\cdot\frac{c(t)}{d(t)} &= \frac{a(t)c(t)}{b(t)d(t)}\\ &= \frac{c(t)a(t)}{d(t)b(t)}\\ &= \frac{c(t)}{d(t)}\cdot\frac{a(t)}{b(t)}\end{aligned}$$

5) *Elemento neutro da adição:*

O elemento neutro da adição é a função racional $0_H = \dfrac{0}{c(t)}$, *sendo* $c(t)$ *um polinômio qualquer e diferente do polinômio identicamente nulo, pois para todo* $\dfrac{a(t)}{b(t)} \in H$ *vale,*

$$\frac{a(t)}{b(t)}+\frac{0}{c(t)}=\frac{a(t)c(t)+0b(t)}{b(t)c(t)}=\frac{a(t)c(t)}{b(t)c(t)}=\frac{a(t)}{b(t)}.$$

6) *Elemento neutro da multiplicação:*

O elemento neutro da mutiplicação é a função racional $1_H = \dfrac{c(t)}{c(t)}$, *sendo* $c(t)$ *um polinômio qualquer e diferente do polinômio identicamente nulo, pois para toda função racional* $\dfrac{a(t)}{b(t)} \in H$ *temos,*

$$\frac{a(t)}{b(t)}\cdot\frac{c(t)}{c(t)}=\frac{a(t)c(t)}{b(t)c(t)}=\frac{a(t)}{b(t)}.$$

7) *Elemento simétrico da adição :*

Todo função racional $\dfrac{a(t)}{b(t)} \in H$ *possui um simétrico* $\dfrac{x(t)}{y(t)} \in H$ *tal que*

$$\frac{a(t)}{b(t)} + \frac{x(t)}{y(t)} = 0_H,$$

pois basta, para isso, fazer $\dfrac{x(t)}{y(t)} = -\left(\dfrac{a(t)}{b(t)}\right)$.

8) *Elemento inverso da multiplicação :*

Para toda função racional $\dfrac{a(t)}{b(t)} \in H$*, existe* $\dfrac{z(t)}{w(t)} \in H$ *tal que* $\dfrac{a(t)}{b(t)} \cdot \dfrac{z(t)}{w(t)} = 1_H$*, pois basta, para tanto, fazer* $\dfrac{z(t)}{w(t)} = \dfrac{b(t)}{a(t)}$.

9) *Vale a distributividade:*

$$\begin{aligned}
\frac{a(t)}{b(t)} \cdot \left(\frac{c(t)}{d(t)} + \frac{e(t)}{f(t)}\right) &= \frac{a(t)}{b(t)} \cdot \frac{c(t)f(t) + e(t)d(t)}{d(t)f(t)} \\
&= \frac{a(t)(c(t)f(t) + e(t)d(t))}{b(t)d(t)f(t)} \\
&= \frac{a(t)c(t)f(t) + a(t)e(t)d(t)}{b(t)d(t)f(t)} \\
&= \frac{b(t)}{b(t)} \cdot \frac{(a(t)c(t)f(t) + a(t)e(t)d(t))}{b(t)d(t)f(t)} \\
&= \frac{b(t)a(t)c(t)f(t) + b(t)a(t)e(t)d(t)}{b(t)b(t)d(t)f(t)} \\
&= \frac{a(t)c(t)b(t)f(t) + a(t)e(t)b(t)d(t)}{b(t)d(t)b(t)f(t)} \\
&= \frac{a(t)c(t)}{b(t)d(t)} + \frac{a(t)e(t)}{b(t)f(t)} \\
&= \frac{a(t)}{b(t)} \cdot \frac{c(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{b(t)} \cdot \frac{e(t)}{f(t)}
\end{aligned}$$

1.2 Corpos Ordenados

Passemos, agora, a falar de Corpos Ordenados.

Definição 1.2 *Diz-se que F é um corpo ordenado quando se destaca, nele, um subconjunto P (chamado conjunto dos números positivos de F) tal que as seguintes condições são verificadas.*

(C1) $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$ e $xy \in P$;

(C2) Dado $x \in F$, temos:

ou $x = 0$, ou $x \in P$ ou $-x \in P$.

O conjunto definido como $-P = \{-x \,|\, x \in P\}$ é chamado de conjuntos dos números negativos de F. Então, devido a (C_2), temos que $F = P \cup (-P) \cup \{0\}$, sendo que $P, -P$ e $\{0\}$ são disjuntos entre si.

Em um corpo ordenado F, dizemos que x é menor do que y, e escrevemos $x < y$, se, e só se, $y - x \in P$. Nas mesmas circunstâncias, escrevemos $y > x$ para dizer que y é maior do que x. Também dizemos que x é menor do que ou igual a y, e escrevemos $x \leq y$, se, e somente se, $y - x \in P \cup \{0\}$. Nas mesma circunstâncias, escrevemos $y \geq x$ para dizer que y é maior do que ou igual a x.

Em particular $x > 0$ significa que $x \in P$, isto é, x é positivo, enquanto que $x < 0$ quer dizer que x é negativo, isto é, $-x \in P$. Se $x \in P$ e $y \in -P$, então $x > y$.

A relação de ordem $x < y$ em um corpo ordenado F têm as seguintes propriedades:

O1) Transitividade: se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$;

O2) Tricotomia: dados $x, y \in F$, de três, uma só acontece: ou $x = y$, ou $x < y$, ou $x > y$;

O3) Monoticidade da adição: se $x < y$, então, para todo $z > 0$, tem-se $x + z < y + z$;

O4) Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$, então, para todo $z > 0$, tem-se $xz < yz$. Se, por acaso, $z < 0$, então $x < y$ implica $xz > yz$.

Não faremos a demostração dessas propriedades aqui, mas o leitor interessado poderá vê-las em [6].

Definição 1.3 *Seja F um corpo. Diz-se que x é um quadrado em F se existir $y \in F$ tal que $x = y \cdot y$. Denotamos $y \cdot y$ por y^2.*

Teorema 1.1 *Seja F um corpo ordenado e $x \in F$, com $x \neq 0$. Então x tem quadrado positivo.*

Demonstração: Sendo $x \in F$ e $x \neq 0$, logo, de acordo com (C2), ou $x \in P$ ou $-x \in P$. Se $x \in P$, logo, de acordo com (C1), $x^2 = x \cdot x \in P$. Agora se $-x \in P$, então, devido ao item (C1) novamente, $(-x) \cdot (-x) = x \cdot x = x^2 \in P$. Portanto, concluímos que x tem quadrado positivo.

Observação 1.2 *Em particular, $1_F = 1_F \cdot 1_F = 1_F^2 > 0$, isto é, $1_F > 0$.*

Vejamos alguns exemplos de corpos ordenados.

Exemplo 1.6 *O corpo $\mathbb{Q}$ é ordenado pelo subconjunto*

$$P = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} | \, ab > 0 \right\}.$$

De fato, pois vale:

1) *Seja $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in P$, logo $ab > 0$ e $cd > 0$. Assim, temos que*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \in P,$$

pois $bd(ad + bc) = abd^2 + b^2cd > 0$. E

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in P,$$

pois $(ac)(bd) = (ab)(cd) > 0$.

2) *Seja $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Então (devido à tricotomia de $\mathbb{Z}$ e o fechamento da multiplicação em $\mathbb{Z}$) ou $ab > 0$ ou $ab < 0$ ou $ab = 0$.*

Portanto, ou $\frac{a}{b} \in P$ ou $-\frac{a}{b} \in P$ ou $\frac{a}{b} = 0$.

Exemplo 1.7 *O corpo H, Exemplo 1.5, é ordenado pelo conjunto P, conjunto de todas as funções racionais $\frac{f}{g} \in H$ tais que $\frac{f}{g} \neq 0$ e que, no polinômio fg, o coeficiente do termo de maior grau seja positivo. De fato, seja $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e $\dfrac{r(x)}{s(x)}$, onde $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$, $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \beta_k x^k$, $r(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \gamma_k x^k$ e $s(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{l} \delta_k x^k$. Logo $\alpha_n\beta_m$, $\gamma_d\delta_l > 0$.*

Assim, temos:

1) $\dfrac{f(x)}{g(x)} + \dfrac{r(x)}{s(x)} = \dfrac{f(x)s(x) + g(x)r(x)}{g(x)s(x)}$. *Como o termo de maior grau de $f(x)s(x)$ é $\alpha_n\delta_l x^{n+l}$, o de $g(x)r(x)$ é $\beta_m\gamma_d x^{m+d}$ e o de $g(x)s(x)$ é $\beta_m\delta_l x^{m+l}$ e $\alpha_n\beta_m$, $\gamma_d\delta_l > 0$, temos que $\dfrac{f(x)}{g(x)} + \dfrac{r(x)}{s(x)} \in P$, para todo x que satisfaz $g(x)s(x) \neq 0$.*

De modo semelhante ao do caso acima, verifica-se que $\dfrac{f}{g}\dfrac{r}{s} \in P$, para todo x que satisfaz $g(x)s(x) \neq 0$.

2) *Seja $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k}{\sum_{k=0}^{m} \beta_k x^k} \in H$. Se $h \neq 0_H$ e $h \notin P$, então $\alpha_n > 0$ e $\beta_m < 0$ (ou $\alpha_n < 0$ e $\beta_m > 0$). Dai, $-h \in P$, pois $-h(x) = \dfrac{-f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} (-\alpha)_k x^k}{\sum_{k=0}^{m} \beta_k x^k}$, e com isso $-\alpha_n < 0$ e $\beta_m < 0$ (ou $-\alpha_n > 0$ e $\beta_m > 0$).*

Analogamente, se $h \neq 0_H$ e $h \notin P$, entao $h \in P$.

Vamos, agora, mostrar como podemos considerar verdadeira as inclusões: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset F$.

Indiquemos com o símbolo 1_F o elemento neutro da adição do corpo ordenado F. Definamos uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_F$, onde $\mathbb{N}_F$ é um subconjunto de F formado pelos elementos 1_F, $1_F + 1_F$, $1_F + 1_F + 1_F, ...$, como

$$f(1) = 1_F \text{ e } f(m+1) = f(m) + 1_F.$$

Não faremos aqui a demostração, mas esta função tem as seguintes propriedades:

P1) f é bijetiva;

P2) $f(m+n) = f(m) + f(n), \forall\, n,\, m \in \mathbb{N}$;

P3) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n), \forall\, n,\, m \in \mathbb{N}$;

P4) $m < p \Rightarrow f(m) < f(p)$.

Por estas razões, costumamos identificar $\mathbb{N}_F$ com $\mathbb{N}$ e considerar $\mathbb{N} \subset F$. É o que faremos a partir de agora. Então consideremos que $\mathbb{N} \subset F$ e voltamos a escrever 1, em vez de 1_F.

Dado um corpo ordenado F e considerando $\mathbb{N} \subset F$, como estamos fazendo, temos que $-\mathbb{N} = \{-n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset F$. Além disso, temos (por definição) que $0 \in F$. Daí $\mathbb{Z}_F = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \cup \{0\}$ constitue um conjunto que se identifica com o conjuto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Assim, temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset F$.

Mais ainda, dados $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$, existe o inverso $n^{-1} \in F$. Podemos, portanto, nos referir ao conjunto formado por todos os elementos $m \cdot n^{-1} = \frac{m}{n} \in F$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. Evidentemente este conjunto identifica-se ao conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

Concluímos assim que, dado um corpo ordenado F, podemos considerar, de modo natural, as inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset F$.

Agora, vejamos um teorema a respeito de Corpos Ordenados.

Teorema 1.2 *Todo corpo ordenado é infinito.*

Demonstração: Seja F um corpo ordenado. Com a consideração feita acima, temos que $\mathbb{N} \subset F$. Como $\mathbb{N}$ é infinito, concluímos que F é infinito.

Vejamos, agora, um dos nossos contraexemplos, dos quais pretendemos abordar neste capítulo, que mostra a não validade da recíproca do Teorema 1.2.

Exemplo 1.8 (Um corpo infinito não ordenado) *Uma vez que $\mathbb{N} \subset \mathbb{C}$, de acordo com as considerações feitas anteriormente, temos que o corpo $\mathbb{C}$ do exemplo 1.4 é infinito,* *porém este não é ordenado. De fato, se $\mathbb{C}$ fosse ordenado, digamos por $\mathbb{C}^+$, então, de acordo com a condição (C2) da Definição 1.2, ou $i = (0,1) \in \mathbb{C}^+$ ou $-i = (0,-1) \in \mathbb{C}^+$. Suponhamos que ocorra $i = (0,1) \in \mathbb{C}^+$, então, de acordo com a condição (C1) da Definição 1.2, $i^2 = (-1,0) \in \mathbb{C}^+$ e $i^4 = (1,0) \in \mathbb{C}^+$, que é absurdo , segundo a condição (C2) da Definição 1.2. Consideremos, agora, que aconteça $-i = (0,-1) \in \mathbb{C}^+$, logo, novamente por (C1), $(-i)(-i) = i^2 \in \mathbb{C}^+$, o que não pode acontecer, pois no primeiro caso vimos que isso gera um absurdo. Portanto, $\mathbb{C}$ não pode ser ordenado.*

Se olharmos apenas para os conjuntos numéricos usuais, os que contém $\mathbb{N}$, veremos que $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente. Então constituiria talvez uma surpresa o fato de existir Corpos Ordenados nos quais o Conjunto dos Números Naturais é limitado superiormente. Afirmamos que a surpresa existe e nosso intuito, a partir de agora, será de mostrá-la. Primeiro, vamos às definições e teoremas.

Definição 1.4 *Sejam F um corpo ordenado e $A \subset F$. Diz-se que $\beta \in F$ é uma cota superior do conjunto A se $\beta \geq a$, para todo $a \in A$.*

Definição 1.5 *Diz-se que um subconjunto A de um corpo ordenado F é limitado superiormente se ele possuir uma cota superior.*

Definição 1.6 *Diz-se que um subconjunto A de um corpo ordenado F é ilimitado superiormente quando para todo $\beta \in F$, exitir $a \in A$ tal que $\beta < a$.*

Definição 1.7 (Supremo) *Seja $A \subset F$. Diz-se que $x \in F$ é o supremo (quando existir) do conjunto A se ele for a menor de suas cotas superiores. Nesse caso, usa-se a notação $x = sup\, A$.*

Assim, a fim de que $x \in F$ seja o supremo do conjunto A, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

(S1) x deve ser cota superior de A;

(S2) Se y for uma cota superior de A, então $x \leq y$.

As definições de cota inferior, conjunto limitado e ilimitado inferiormente e de ínfimo são análogas, e se y é ínfimo de um conjunto A, denotamos por $y = inf\, A$.

Teorema 1.3 *Num corpo ordenado F, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(A1) $\mathbb{N} \subset F$ *é ilimitado superiormente;*

(A2) *Dados $a, b \in F$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n.a > b$;*

(A3) *Dado qualquer $a \in F$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.*

Demonstração: (A1) $\Rightarrow$ (A2). Como $\mathbb{N}$ é ilimitado, então,de acordo com a Definição 1.6, dados $a, b \in F$, com $a > 0$, existe, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{b}{a} < n$ e, portanto, $n.a > b$. Provemos, agora, que (A2) $\Rightarrow$ (A3). Para $1, a \in F$, $a > 0$, existe, de acordo com o item (A2), um $n \in \mathbb{N}$ tal que $n.a > 1$, o que acarreta em $0 < \dfrac{1}{n} < a$. Por fim, provemos que (A3) $\Rightarrow$ (A1). Dado qualquer $b > 0$, existe, por (A3), um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{b}$, o que implica em $n > b$. Portanto, nenhum elemento positivo em F pode ser cota superior de $\mathbb{N}$. Obviamente, nenhum elemento menor que ou igual a 0 pode ser cota superior de $\mathbb{N}$. Logo $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente.

Definição 1.8 (Corpo ordenado arquimediano) *Diz-se que um corpo ordenado é arquimediano quando nele é válida qualquer uma das três afirmações equivalentes citadas no Teorema 1.3.*

Definição 1.9 (Corpo ordenado completo) *Diz-se que um corpo ordenado F é completo quando todo subconjunto não vazio, limitado superiormente, $A \subset F$, possui supremo em F.*

Observação 1.3 *O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.*

Teorema 1.4 *Seja F um corpo ordenado completo. Então F é arquimediano.*

Demonstração: Se $\mathbb{N} \subset F$ fosse limitado superiormente, existiria $c \in F$ tal que $c = sup\, \mathbb{N}$. Então $c - 1$ não seria cota superior de $\mathbb{N}$, isto é, existiria $n \in \mathbb{N}$ tal que $c - 1 < n$, o que implica em $c < n + 1 \in \mathbb{N}$, o que é contradição. Portanto, $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente.

Corolário 1.1 *O conjunto $\mathbb{Q}$ é arquimediano.*

Demonstração: Caso contrário, se $\mathbb{N}$ fosse limitado em que $\mathbb{Q}$, então seria limitado em $\mathbb{R}$, já que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Mas isso seria uma contradição, uma vez que $\mathbb{R}$ é arquimediano por ser um corpo ordenado completo. Portanto, o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ é arquimediano.

O fato de se questionar a existência de um Corpo Ordenado onde no qual $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente, isto é, de um Corpo Ordenado não arquimediano, partiu do Corolário 1.1. Agora, como prometido, vamos exibir um exemplo de um Corpo Ordenado no qual $\mathbb{N}$ é limitado. Com isso, responderemos a Pergunta: Todo corpo ordenado é arquimediano? Segue o exemplo.

Exemplo 1.9 (Um corpo ordenado não arquimediano) *O corpo ordenado H das funções racionais do Exemplo 1.7 é não arquimediano. De fato, o polinômio $a(t) = \dfrac{t}{1} = t \in H$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ o polinômio $a'(t) = \dfrac{t-n}{1} \in H$, pois o coeficiente de mais alto grau do polinômio $d(t) = (t-n)1$ é 1, ou seja, é maior que zero. Logo $t - n > 0$, isto é, $t > n$ para qual for o $n \in \mathbb{N}$ e, assim, $a(t)$ é uma cota superior para $\mathbb{N}$ em H. Portanto, $\mathbb{N}$ é limitado superiormente.*

Na maioria dos textos (ou quase todos) que tratam de Corpos Ordenados só trazem, nos seus exemplos quando são postos, exemplos de Corpos Ordenado de uma só ordenação. Partindo deste fato, surge então a pergunta: Será que todo corpo ordenado admite somente uma ordenação? Adiantamos que a resposta é não e é justificada pelo exemplo que procede o seguinte teorema, que, aliás, este foi o motivador para tal pergunta e por isso iremos enuciá-lo e demonstrá-lo como temos feito.

Teorema 1.5 $\mathbb{Q}$ *admite somente uma ordenação.*

Demonstração: Seja P o conjunto de numeros positivos de $\mathbb{Q}$. Suponhamos que exista um outro conjunto, digamos P', de números positivos em $\mathbb{Q}$. Mostremos que $P = P'$.De fato, temos que $1 \in P$ e $1 \in P'$, pois este número é um quadrado. Consequentemente, como a soma de números positivos é positiva, concluímos que $\mathbb{N} \subset P$ e $\mathbb{N} \subset P'$, pois $2 = 1 + 1 \in P$ e $2 = 1 + 1 \in P'$, $3 = 2 + 1 \in P$ e $3 = 2 + 1 \in P'$, e assim por diante.

Dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, temos que seu oposto multiplicativo, $\dfrac{1}{n}$, também pertence a P e a P'. De fato, se admitíssemos que $\dfrac{1}{n} \notin P$, teríamos $-\dfrac{1}{n} \in P \Longrightarrow -1 = n(\dfrac{-1}{n}) \in P$, o que é impossível. Analogamente, se admitíssemos $\dfrac{1}{n} \notin P'$, chegaríamos na mesma impossibilidade. Logo, o conjunto $A = \{\dfrac{1}{n} \in \mathbb{Q} | \, n \in \mathbb{N}\}$ está contido em P e em P'. Assim, concluímos que todo número da forma $\dfrac{m}{n}$, onde $m, n \in \mathbb{N}$, pertence a P e a P', pois $\dfrac{m}{n}$ é o produto do número positivo m com o número positivo $\dfrac{1}{n}$. Como os números da forma $-\dfrac{m}{n}$, onde $m, n \in \mathbb{N}$, não pertencem a P nem a P', temos que $P = P'$.

Exemplo 1.10 (Um corpo que é ordenável por duas ordens) *O corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ do Exemplo 1.3 é ordenado por dois subconjuntos de números positivos diferentes, a saber*

$$A = \{r + s\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \,|\; r + s\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^*\}$$

e

$$B = \{r + s\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \,|\; r - s\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^*\}.$$

A é diferente de B, pois $0 + 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{R}_+^*$, isto é, $\sqrt{2} \in A$, mas não pertence a B, pois, caso contrário, teríamos $\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^*$ e $-\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^*$, o que é impossível, segundo a condição (C2) da Definição 1.2.

Vamos mostrar que A ordena $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

1) *Sejam $r_1 + s_1\sqrt{2}$, $r_2 + s_2\sqrt{2} \in B$. Segundo à propriedade que os elemento do conjunto A têm, temos $r_1 + s_1\sqrt{2}$, $r_2 + s_2\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^*$. Logo, pela condição (C1) da Definição 1.2,*

$$(r_1 + s_1\sqrt{2}) + (r_2 + s_2\sqrt{2}), \;\; (r_1 + s_1\sqrt{2}) \cdot (r_2 + s_2\sqrt{2}) \in \mathbb{R}_+^*.$$

Como

$$(r_1 + s_1\sqrt{2}) + (r_2 + s_2\sqrt{2}) = (r_1 + r_2) + (s_1 + s_2)\sqrt{2},$$

$$(r_1 + s_1\sqrt{2}) \cdot (r_2 + s_2\sqrt{2}) = (r_1r_2 + 2s_1s_2) + (r_1s_2 + s_1r_2)\sqrt{2}$$

e

$$(r_1 + r_2), \, (s_1 + s_2), \, (r_1r_2 + 2s_1s_2), \, r_1s_2 + s_1r_2) \in \mathbb{Q},$$

concluímos que

$$(r_1 + s_1\sqrt{2}) + (r_2 + s_2\sqrt{2}), \;\; (r_1 + s_1\sqrt{2}) \cdot (r_2 + s_2\sqrt{2}) \in A,$$

ou seja, vale o fechamento em A para ambas as operações.

2) *Dado* $r+s\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, *que é um subconjunto de* $\mathbb{R}$, *temos que*

$$ou\ \ r+s\sqrt{2}\in\mathbb{R}_+^*,\ \ ou\ \ -(r+s\sqrt{2})\in\mathbb{R}_+^*,\ \ ou\ \ r+s\sqrt{2}=0,$$

pelo fato da tricotomia de $\mathbb{R}$, *que é equivalente a dizer que*

$$ou\ \ r+s\sqrt{2}\in A,\ \ ou\ \ -(r+s\sqrt{2})\in A,\ \ ou\ \ r+s\sqrt{2}=0,$$

Portanto, a condição (C2) é válida e com isso mostramos que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *é ordenado por pelo conjunto* A.

Agora mostremos que B *ordena* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

1) *Sejam* $r_1+s_1\sqrt{2},\ r_2+s_2\sqrt{2}\in B$. *Pela propriedade que os elementos de* B *têm, temos* $r_1-s_1\sqrt{2},\ r_2-s_2\sqrt{2}\in\mathbb{R}_+^*$. *Logo, pela condição (C1) da Definição 1.2,*

$$(r_1-s_1\sqrt{2})\cdot(r_2-s_2\sqrt{2}),\ (r_1-s_1\sqrt{2})+(r_2-s_2\sqrt{2})\in\mathbb{R}_+^*.$$

Como

$$(r_1-s_1\sqrt{2})(r_2-s_2\sqrt{2})=(r_1r_2+2s_1s_2)-(r_1s_2+s_1r_2)\sqrt{2},$$
$$(r_1-s_1\sqrt{2})+(r_2-s_2\sqrt{2})=(r_1+r_2)-(s_1+s_2)\sqrt{2}$$

e

$$(r_1+r_2),\ (s_1+s_2),\ (r_1r_2+2s_1s_2),\ (r_1s_2+s_1r_2)\in\mathbb{Q},$$

concluímos que

$$(r_1+r_2)+(s_1+s_2)\sqrt{2},\ (r_1r_2+2s_1s_2)+(r_1s_2+s_1r_2)\sqrt{2}\in B,$$

ou melhor, que

$$(r_1+s_1\sqrt{2})+(r_2+s_2\sqrt{2}),\ (r_1+s_1\sqrt{2})\cdot(r_2+s_2\sqrt{2})\in B.$$

Portanto, B *é fechado para ambas as operações, ou seja, vale (C1).*

2) *Dado* $r+s\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. *Se* $r+s\sqrt{2}=0$, *é direto que* $r+s\sqrt{2}\notin B$ *e* $-(r+s\sqrt{2})\notin B$. *Seja, então,* $r+s\sqrt{2}\neq 0$. *Mostremos que se* $r+s\sqrt{2}\in B$, *então* $-(r+s\sqrt{2})\notin B$. *De fato, se* $-(r+s\sqrt{2})\in B$, *então* $-r+s\sqrt{2}\in\mathbb{R}_+^*$, *contrariando o fato de que* $r+s\sqrt{2}\in B$, *pois* $r+s\sqrt{2}\in B$ *é equivalente a* $r-s\sqrt{2}\in\mathbb{R}_+^*$, *isto é, teríamos* $-r+s\sqrt{2},\ -(-r+s\sqrt{2})\in\mathbb{R}_+^*$.

1.3 A Importância da Unicidade da Ordenação

Nesta seção, veremos a importância que um Corpo Ordenado tem pelo fato dele possuir somente uma ordenação.

Lema 1.1 *Se $n \in \mathbb{N}$ e n^2 é par, então n é par.*

Demonstração: Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que n^2 é par. Suponhamos que n não seja par, isto é, n seja ímpar. Logo n é da forma $n = 2k+1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daí, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1 = 2m+1$, onde $m = 2k^2+2k \in \mathbb{Z}$. Portanto n^2 é impar, contrariando a hipótese de que n^2 é par. Portanto, n é par.

Teorema 1.6 *Não existe número racional cujo quadrado seja igual a 2.*

Demonstração: Suponhamos que exista $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e que $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 2$. Como todo número racional ou é uma fração irredutível ou pode ser escrito como uma fração irredutível, podemos considerar sem nenhum problema que p e q sejam primos entre si, isto é, o único divisor comum entre eles é 1. Po outro lado, temos que $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 2 \Longrightarrow p^2 = 2q^2$. Assim, p^2 é par e, de acordo com o Lema 1.1, p é par. Logo, $p = 2k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daí, $(2k)^2 = 2q^2 \Longrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Longrightarrow q^2 = 2k^2$ e, então, q^2 é par. Daí, novamente pelo Lema 1.1, q é par. Portanto p e q possuem o fator primo 2 em comum. Contradição.

Lema 1.2 *Sejam F um corpo ordenado completo e o conjunto P dos números positivos de F. Se $p \in P$, então existe um único $x \in P$ tal que $x^2 = p$.*

Demonstração: Seja $A = \{y \in F | \, 0 < y \text{ e } y^2 < p\}$. Observemos que $A \neq \emptyset$, pois se $0 < p < 1$, então $0 < p^2 < p$, isto é, $p \in A$. Se $p \geq 1$, então $p \geq 1^2 > 0$, isto é, $1 \in A$. E, também, A é limitado superiormente, pois se $0 < p < 1$, então $p < 1^2$ e daí 1 é cota superior de A, caso contrário, existiria um $y_0 \in A$ tal que $y_0 > 1$, que implica $y_0^2 > 1^2 = 1 > p$, ou seja, teríamos $y_0 \in A$ e $y_0^2 > p$. Contradição. Se $p \geq 1$, então $p^2 \geq p$ e daí p é cota superior de A, caso contrário, existiria $y_p \in A$ tal que $y_p > p$, que implica $p > y_p^2 > p^2$, isto é, $p > p^2$, ou ainda, $p < 1$. Contradição.

Como F é completo e A é um subconjunto de F não vazio e limitado superiormente, então, de acordo com a Definição 1.9, A possui supremo, digamos $x = sup\, A$. Claramente $x > 0$ e, como consequência disto, $2x + 1 > 0$. Afirmamos que $x^2 = p$. Para provar esta afirmação, suponhamos o contrário: que seja $x^2 < p$ ou $p < x^2$. Se $x^2 < p$, então temos que $p - x^2 > 0$ e, daí, por F ser arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \frac{p - x^2}{2x + 1}. \tag{1.1}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 &= x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq x^2 + (2x + 1)\frac{1}{n} \\ &\overset{(1.1)}{<} x^2 + (2x + 1)\frac{p - x^2}{2x + 1} \\ &= x^2 + (p - x^2) = p, \end{aligned}$$

o que implica $x + \dfrac{1}{n} \in A$, contrariando o fato de que x é cota superior de A.

Por outro lado, se $x^2 > p$, escolhemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{m} < \dfrac{x^2 - p}{2x}$, ou seja, $p < x^2 - \dfrac{2x}{m}$. Como $x = sup\, A$, existe um $a_0 \in A$ tal que

$$x - \frac{1}{m} < a_0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{m}\right)^2 < a_0^2. \tag{1.2}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} p < x^2 - \frac{2x}{m} &< x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} \\ &= \left(x - \frac{1}{m}\right)^2 \\ &\overset{(1.2)}{<} a_0^2. \end{aligned}$$

Logo, $p < a_0^2$, contrariando o fato de que $a_0 \in A$. Como excluímos as possibilidades $x^2 < p$ e $p < x^2$, concluímos que $x^2 = p$.

Para provar a unicidade, suponhamos que exista um outro numero $y \in P \cup \{0\}$ tal que $y^2 = p$. Dai, teríamos $x^2 = p = y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 0 \Rightarrow x+y = 0$

ou $x - y = 0$, ou seja, $x = y$ ou $x = -y$. Esta última afirmação não pode ser verdadeira, pois se fosse teríamos a contradição $x > 0$ e $y > 0$. Portanto, $y = x$.

Teorema 1.7 *Se F é um corpo ordenado completo, então F admite somente uma ordenacão.*

Demonstração: Seja F um corpo ordenado completo e suponhamos que ele seja ordenado por dois subconjuntos de números positivos, digamos P_1 e P_2, tal que $P_1 \neq P_2$. Seja $x \in P_1$ um número qualquer, logo, de acordo com o Lema 1.2, existe $y \in P_1$ tal que $x = y^2$ e, assim, de acordo com o Teorema 1.1, $x \in P_2$. Como x é arbitrário, concluímos que $P_1 \subset P_2$. Agora seja $z \in P_2$ um elemento qualquer, logo, pelos mesmos motivos do caso anterior, existe $t \in P_2$ tal que $z = t^2 \in P_1$. Desde que z é arbitrário, concluímos que $P_2 \subset P_1$. Portanto, $P_1 = P_2$. Contradição.

O Teorema 1.7 nos mostrou a importância que um corpo ordenado, que admite somente uma ordenação, tem. Agora veremos que a recíproca deste Teorema não é verdadeira, através do seguinte contraexemplo.

Exemplo 1.11 (Um corpo que tem somente uma ordenação, mas não é completo) *Vimos no Teorema 1.5 que o corpo $\mathbb{Q}$ admite somente uma ordenação, porém ele não é completo. Para provar isto, observemos que o conjunto $A = \{r \in \mathbb{Q} | \, r^2 < 2\}$ é não vazio ($1 \in A$) e limitado superiormente pelo número 2. Agora suponhamos que $\mathbb{Q}$ seja completo. Então, de acordo com a Definição 1.9, existe $c \in \mathbb{Q}$, com $c >$, tal que $c = sup\, A$. Como, de acordo com o Teorema 1.6, não existe número racional cujo quadrado seja igual a 2, segue que $c^2 < 2$ ou $c^2 > 2$. Suponhamos $c^2 < 2$, e, a partir daí, consideremos o número positivo*

$$d = min\left(\frac{2-c^2}{2(c+1)^2}, 1\right).$$

Temos então dois casos a serem analisados:

(1) Se $d = 1$, então $c^2 + d(2c + d) = c^2 + d(2c + 1)$. E se $d = \dfrac{2-c^2}{2(c+1)^2}$, então $c^2 + d(2c + d) < c^2 + d(2c + 1)$.

(2) Se $d = \dfrac{2-c^2}{2(c+1)^2}$, então $c^2 + d(c + 1)^2 = c^2 + (\dfrac{2-c^2}{2(c+1)^2})(c + 1)^2$. E se $d = 1$, então $c^2 + d(c + 1)^2 < c^2 + \dfrac{2-c^2}{2(c+1)^2}(c + 1)^2$.

Entao temos

$$
\begin{aligned}
(c+d)^2 = c^2 + 2cd + d^2 = c^2 + d(2c+d)& \\
&(1) \\
&\leq c^2 + d(2c+1) < c^2 + d(c^2+2c+1) \\
&= c^2 + d(c+1)^2 \\
&(2) \\
&\leq c^2 + \frac{2-c^2}{2(c+1)^2} \cdot (c+1)^2 \\
&= c^2 + \frac{2-c^2}{2} = \frac{2c^2-c^2+2}{2} = \frac{c^2+2}{2} \\
&< \frac{2+2}{2} = 2.
\end{aligned}
$$

Portanto, $(c+d)^2 < 2$*. Assim,* $c+d$ *é um número racional positivo maior que* c*, cujo quadrado é menor que 2, ou seja,* $c+d \in A$ *e* $c+d > c = sup\, A$*. Absurdo.*

Por outro lado, suponhamos que $c^2 > 2$*, e, a partir daí, podemos considerar o número positivo*

$$d = \frac{c^2-2}{2(c+1)^2}.$$

Sendo d *desta maneira, implica então em*

$$c^2 + 1 > -d. \tag{1.3}$$

Então temos

$$
\begin{aligned}
(c-d)^2 = c^2 - 2cd + d^2 = c^2 - d(2c-d)& \\
&(1.3) \\
&> c^2 - d(2c+c^2+1) = c^2 - d(c+1)^2 \\
&= c^2 - \frac{c^2-2}{2(c+1)^2} \cdot (c+1)^2 = c^2 - \frac{c^2-2}{2} \\
&= \frac{2c^2-c^2+2}{2} = \frac{c^2+2}{2} \\
&> \frac{2+2}{2} = 2.
\end{aligned}
$$

Portanto, $(c-d)^2 > 2$*. Assim,* $c-d$ *é um número racional positivo menor que* c*, cujo quadrado é maior que 2, ou seja,* $c-d$ *é uma cota superior de* A *menor que* $c = sup\, A$*. Novamente um absurdo.*

Em qualquer caso, concluímos que $A \subset \mathbb{Q}$ *é um conjunto não vazio e limitado superiormente que não admite supremo e, portanto,* $\mathbb{Q}$ *não é um corpo ordenado completo, segundo a Definição 1.9.*

Para finalizar este primeiro capítulo, vamos responder a pergunta: O conjunto dos números racionais é denso em qualquer corpo ordenado? Pela natureza dos números racionais, somos induzidos a pensar que em todo corpo ordenado em que $\mathbb{Q}$ está contido sempre existirá um número racional entre quaisquer dois elementos deste corpo ordenado, mas isso não é verdade, como veremos a seguir através do nosso último exemplo deste tópico.

Definição 1.10 *Seja $D \subset F$, onde F é um corpo ordenado. Dizemos que D é denso em F se, entre quaisquer dois elementos distintos de F, existir um elemento de D.*

Proposição 1.2 *Qualquer corpo ordenado F em que o conjunto dos números racionais é denso é arquimediano.*

Demonstração: Consideremos $a \in F$, $a > 0$. Claramente, $\frac{1}{a} > 0$, e, como $\frac{1}{a}, 0 \in F$ e $\mathbb{Q}$ é denso em F, então existe $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, com $n \neq 0$, tal que $0 < \frac{m}{n} < \frac{1}{a}$, onde tomamos, sem perda de generalidade, m, $n > 0$. Entao,

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{m}{n} < \frac{1}{a}.$$

Logo, $\frac{1}{n} < \frac{1}{a}$ donde $n > a$ e, consequentemente, a não é uma cota superior do conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais de F. E já que a é arbitrário, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, o que prova que F é arquimediano.

Observação 1.4 *A contrapositiva desta proposição estabelece que, num corpo ordenado não arquimediano, os numeros racionais não são densos.*

Exemplo 1.12 (Um corpo ordenado onde os números racionais não são densos) *O Exemplo 1.9 mostra que o corpo ordenado H não é arquimediano. Então, de acordo com a Obsevação 1.4, o conjunto $\mathbb{Q}$ não é denso em H.*

Capítulo 2

Sequências de números reais

Neste capítulo, faremos um breve estudo sobre sequências de números reais. Este foi motivado por algumas perguntas. Segue algumas delas: Existe sequência divergente que possui subsequência convergente? Há sequência que não possui nenhuma subsequência convergente? Toda sequência limitada é convergente? Se a sequência é ilimitada, então pode-se afirmar que mesmo assim ela contém uma subsequência convergente? Toda sequência que atende ao teorema de Bolzano Weiestrass é convergente?

2.1 Sequências de números reais

Iniciaremos com a definição de sequência de números reais.

Definição 2.1 *Uma sequência de números reais é uma função* $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$*, que faz corresponder a cada* $n \in \mathbb{N}$ *um número* $s(n) \in \mathbb{R}$*, o qual é designado por* s_n *e chamado de n-ésimo termo da sequência ou termo geral da sequência.*

Em vez de $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, também é costume escrever $(s_1, s_2, s_2, ...)$ ou $(s_n)n \in \mathbb{N}$, ou simplesmente (s_n), para indicar a sequência cujo o n-ésimo termo é s_n. Os números $s_1, s_2, s_3, ...$ são chamados termos da sequência e o conjunto formado por estes será representado por $\{s_1, s_2, s_3, ...\}$ ou $\{s_n\}$.

Vejamos alguns exemplos de sequências.

Exemplo 2.1 *A sequência* $(1, 2, 3, ...)$ *possui termo geral* $s_n = n$ *e* $\{1, 2, 3, ...\}$ *é seu conjunto de valores.*

Exemplo 2.2 $s_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *define a sequência* $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$ *e seu conjuntos de valores é* $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$.

Exemplo 2.3 *A sequência* $(0, 1, 0, 2, 0, 3, ...)$ *possui termo geral*

$$s_n = \begin{cases} 0, & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \\ \frac{n}{2}, & \textit{senão} \end{cases}$$

e $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ *é seu conjunto de valores.*

Exemplo 2.4 *A sequência* $(1, 2, 1, ...)$ *possui termo geral*

$$s_n = \begin{cases} 1, & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \\ 2, & \textit{senão} \end{cases}$$

e seu conjunto de valores é $\{1, 2\}$.

Exemplo 2.5 *A sequência* $(0, 1, 0, 1, ...)$ *tem como termo geral*

$$s_n = \begin{cases} 0, & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \\ 1, & \textit{senão} \end{cases}$$

e o conjunto dos seus valores é $\{0, 1\}$.

Exemplo 2.6 *A sequência* $(0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, ...)$ *não possui uma expressão para o seu termo geral, mas está bem definida por se tratar de uma sequência repetitiva. Seu conjunto de valores é* $\{0, 1, 2\}$.

Exemplo 2.7 *Pelo mesmo motivo do exemplo anterior, a sequência* $(2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, ...)$ *também está bem definida. Seu conjunto de valores é* $\{0, 1, 2\}$.

Exemplo 2.8 *A sequência* $(c, c, c, ...)$ *possui termo geral* $s_n = c$ *e seu conjuntos de valores é* $\{c\}$.

Na sequência do exemplo 2.5 os termos de índices ímpares formam a sequência $(0, 0, 0, \ldots)$. Neste caso dizemos que a sequência $(0, 0, 0, \ldots)$ é uma subsequência da sequência $(0, 1, 0, 1, ...)$. Vamos formalizar esse fato.

Definição 2.2 (Subsequência) *Dada uma sequência (s_n) de números reais, uma subsequência desta sequência é a restrição da função s a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_1 < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. Escreve-se $(s_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, ou $(s_{n_1}, s_{n_2}, \cdots, s_{n_i}, \cdots)$ ou $(s_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ para indicar a subsequência s'.*

Vejamos alguns exemplos de subsequências.

Exemplo 2.9 *A sequência do exemplo 2.3 possui as subsequências $(0, 0, 0, \ldots)$ e $(1, 2, 3, \ldots)$. A primeira é oriunda dos termos de índices ímpares e a segunda é oriunda dos termos de índices pares.*

Exemplo 2.10 *A sequência do exemplo 2.4 possui as subsequências $(1, 1, 1, \ldots)$ e $(2, 2, 2, \ldots)$. A primeira é oriunda dos termos de índices ímpares e a segunda é oriunda dos termos de índices pares.*

Exemplo 2.11 *A sequência do exemplo 2.5 possui as subsequências $(0, 0, 0, \ldots)$ e $(1, 1, 1, \ldots)$. A primeira é oriunda dos termos de índices ímpares e a segunda é oriunda dos termos de índices pares.*

Exemplo 2.12 *A sequência do exemplo 2.6 possui as subsequências $(0, 2, 0, 2, \ldots)$ e $(1, 1, 1, \ldots)$. A primeira é oriunda dos termos de índices ímpares e a segunda é oriunda dos termos de índices pares.*

Exemplo 2.13 *A sequência do exemplo 2.7 possui as subsequências $(2, 1, 2, 1, \ldots)$ e $(1, 0, 1, 0, \ldots)$. A primeira é oriunda dos termos de índices ímpares e a segunda é oriunda dos termos de índices pares.*

2.2 Sequências convergentes

Para algumas sequências de números reais existe um número real para o qual todos os seus termos, a partir de um certo termo, se aproximam deste número. Sequências com esta característica são ditas convergentes. Passemos então, nesta seção, a formalizar esse fato.

Definição 2.3 *Diz-se que uma sequência (s_n) é convergente se existir um número $L \in \mathbb{R}$ de modo que, dado qualquer $\epsilon > 0$, é sempre possível encontrar um índice $n_0 = n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > n_0 \Longrightarrow |s_n - L| < \epsilon.$$

Na definição 2.3 acima, dizemos que L é o limite da sequência (s_n), ou que a sequência (s_n) converge para L, e escreve-se

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} s_n = L \quad \text{ou} \quad \lim s_n = L \quad \text{ou} \quad s_n \longrightarrow L.$$

Vale ressaltar que, se o limite de uma sequência existe, então este será único.

2.3 Sequências divergentes

Vamos agora tratar de um outro tipo de sequência, as divergentes.

Definição 2.4 *Uma sequência que não cumpre a Definição 2.3 acima é dita divergente.*

De acordo com a Definição 2.4, existe somente dois tipos de sequências, as convergentes e as divergentes.

Vejamos agora um outro fato que diz respeito à sequência divergente.

Definição 2.5 *Diz-se que a sequência (s_n) tende para $+\infty$ se, dado qualquer $M > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$s_n > M, \forall n > n_0.$$

Nesse caso, escreve-se:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} s_n = +\infty \quad ou \quad \lim s_n = +\infty \quad ou \quad s_n \longrightarrow +\infty.$$

Definição 2.6 *Diz-se que a sequência* (s_n) *tende para* $-\infty$ *se, dado quelquer* $M > 0$, *existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$s_n < -M, \, \forall n > n_0.$$

Nesse caso, escreve-se:

$$\lim_{n \longrightarrow -\infty} s_n = -\infty \quad ou \quad \lim s_n = -\infty \quad ou \quad s_n \longrightarrow -\infty.$$

Dada uma sequência (s_n) e caso ela obedeça a Definição 2.5 ou a Definição 2.6, então (s_n) diverge. A explicação para tal é simples: $+\infty$ e $-\infty$ não representam números reais e, segundo a Definição 2.3, o limite precisa ser um número real.

Vejamos agora um resultado que caracteriza sequências divergentes. Mas antes vamos a um teorema, uma vez que este é essencial para construção desse resultado e também para a apresentação de um dos nossos contraexemplos deste capítulo.

Teorema 2.1 *Se* $\lim_{n \to +\infty} s_n = a$, *então toda subsequência de* (s_n) *converge para o limite* a.

Demonstração: Seja $(s_{n_1}, s_{n_2}, \ldots, s_{n_i}, \ldots)$ uma subsequência de (s_n). Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \;\Rightarrow\; |s_n - a| < \epsilon$. Em particular, para todos os termos s_{n_i}, com $n_i > n_0$, vale $|s_{n_i} - a| < \epsilon$. Portanto, (s_{n_i}) converge para o limite a.

Corolário 2.1 *Se* (s_{n_i}) *e* (s_{n_k}) *são subsequência de* (s_n) *que convergem para limites diferentes, então* (s_n) *diverge.*

Demonstração: Basta observar que este corolário é a contrapositiva do Teorema 2.1.

Agora vejamos alguns exemplos de sequências convergentes e de divergentes. Comecemos pelas convergentes.

Exemplo 2.14 *A sequência do exemplo 2.2 é convergente e seu limite é* $L = 0$. *De fato, para todo* $\epsilon > 0$, *bastar tomar* $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon}$, *e então teremos :*

$$n > \frac{1}{\epsilon} \Longrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Longrightarrow \frac{1}{n} = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon.$$

Exemplo 2.15 *A sequência do exemplo 2.8 é convergente e seu limite é $L = c$. De fato, basta observar que, para qualquer $\epsilon > 0$, temos*

$$|s_n - c| = |c - c| = 0 < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora vejamos alguns exemplos de sequências divergentes.

Exemplo 2.16 *Na sequência do exemplo 2.1, temos $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Portanto, esta sequência diverge.*

Exemplo 2.17 *Como vimos no Exemplo 2.10, a sequência $(1, 2, 1, 2, \ldots)$ possui as subsequências $(1, 1, 1, \ldots)$ e $(2, 2, 2, \ldots)$. A primeira destas convege, de acordo com o Exemplo 2.15, para 1 e a segunda converge, também acordo com o Exemplo 2.15, para 2. Portanto, de acordo com o Corolário 2.1, a sequência $(1, 2, 1, 2, \ldots)$ é divergente.*

Exemplo 2.18 *Vimos no Exemplo 2.11, que a sequência $(0, 1, 0, 1, \cdots)$ possui duas subsequências constantes diferente, e, portanto, convergem para limites diferentes.Logo, pela mesma justificativa usada no Exemplo 2.17, ela é divergente.*

Exemplo 2.19 *A sequência $(0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots)$, Exemplo 2.3, é divergente. De fato, suponhamos que esta sequência convirja, para o número real a, por exemplo. Logo, pelo Teorema 2.1, toda subsequência de $(0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots)$ converge para a. Em particular, a subsequência $(1, 2, 3, , \ldots)$. Contradição, pois esta subsequência é, de acordo com o Exemplo 2.16, divergente.*

Para finalizar esta seção, vamos expor, a seguir, dois contraexemplo dos quais pretendemos trabalhar neste capítulo. Além de expor também iremos falar como surgiram.

No Teorema 2.1, vimos que uma condição suficiente para que uma sequência tenha subsequência convergente é que esta deve ser convergente. Daí surge a primeira pergunta vista na introdução deste capítulo: Existe sequência divergente que possui subsequência convergente? A resposta é sim. Vamos justificar ela pelo seguinte exemplo.

Exemplo 2.20 (Uma sequência divergente com subsequência convergente) *Como vimos no Exemplo 2.18, a sequência $(0, 1, 0, 1, \cdots)$ é divergente e também possui duas subsequências convergente. Portanto temos um exemplo de uma sequência divergente com subsequências convergentes.*

Vamos agora responder a pergunta: Há sequência que não possui nenhuma subsequência convergente? Antes de respondermos tal pergunta, vamos ao fatos que nos levou a fazê-la.

Vimos no Exemplo 2.20 que existe sequência divergente possuindo subsequência convergente. Além disso, vimos no Teorema 2.1 que toda subsequência de uma sequência convergente é convergente. Por exemplo, a restrição da sequência convergente $(c, c, c, \ldots,)$, Exemplo 2.15, é uma subsequência convergente, pois quaisquer que seja sua restrição, esta será um subsequência que se identifica com a mesma. Portanto, temos sequência convergente possuindo subsequência convergente e sequência divergente possuindo subsequência convergente. Daí surge o fato de querer saber se há sequência que não possui nenhuma subsequência convergente. A resposta é sim, e é justificada pelo seguinte exemplo.

Exemplo 2.21 (Uma sequência com nenhuma subsequência convergente) *A sequência do Exemplo 2.1, $(1, 2, 3, \ldots)$ é um exemplo de uma sequência onde qualquer que seja a sua subsequência, esta será divergente. De fato, pois que o conjunto de valores dessa sequência é o conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais. Veja também que se (s_{n_k}) é uma subquência de (n), então o seu conjunto de valores, $\{s_{n_1}, s_{n_2}, \ldots\}$, é um subconjunto inifito de $\mathbb{N}$. Logo, $\{s_{n_1}, s_{n_2}, \ldots\}$ é ilmitado. Portanto, pelo contrapositiva do teorema 2.2, (s_{n_k}) não converge.*

2.4 Sequência limitada inferiormente, limitada superiormente, limitada e ilimitada

Aqui, definiremos sequência limitada inferiormente, limitada superiormente, limitada e ilimitada. Também apresentaremos um teorema que se relaciona com um destes conceitos. E, para finalizar a seção, apresentaremos mais um contraexemplo.

Definição 2.7 *Diz-se que a sequência (s_n) é limitada superiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $s_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.8 *Diz-se que a sequência (s_n) é ilimitada superiormente quando para todo*

$c \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s_n > c$.

Definição 2.9 *Diz-se que a sequência (s_n) é limitada inferiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $s_n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.10 *Diz-se que a sequência (s_n) é ilimitada inferiormente quando para todo $c \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s_n < c$.*

Definição 2.11 *Diz-se que a sequência (s_n) é limitada quando ela é limitada superiormente e inferiormente. Isto quivale dizer que existe $K > 0$ tal que $|s_n| \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou ainda, que $\{s_1, s_2, s_3, ...\} \subset [-K, K]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.12 *Diz-se que a sequência (s_n) é ilimitada quando ela não é limitada.*

Vejamos alguns exemplos de sequências limitadas.

Exemplo 2.22 *As sequências $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$, $(1, 2, 1, \ldots)$, $(0, 1, 0, \ldots)$, $(0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \ldots)$ e $(2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \ldots)$, Exemplos 2.2, 2.4, 2.5, 2.6 e 2.7, respectivamente, são limitadas, pois todos os seus termos pertencem ao $[-3, 3]$.*

Exemplo 2.23 *A sequência $(c, c, c, \ldots)$, Exemplo 2.8, é limitada, pois todos os seus termos pertencem ao intervalo $[-c, c]$.*

Vejamos um exemplo de uma sequência ilimitada.

Exemplo 2.24 *A sequência do Exemplo 2.1 é ilimitada superiormente, pois $X(s_n) = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$ e, como vimos no primeiro Capítulo 3, $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente em $\mathbb{R}$. Portanto, esta sequência é, de acordo com a Definição 2.12, limitada.*

Vejamos agora o teorema que relaciona convergência com um dos conceitos trabalhados anteriormente nesta seção, o de sequência limitada.

Teorema 2.2 *Se (s_n) é uma sequência convergente, então ela é limitada.*

Demonstração: Seja $a = \lim_{n\to+\infty} s_n$. Então, tomando $\epsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \;\Rightarrow\; |s_n - a| < 1$. Consideremos o conjunto $F = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n_0}, a-1, a+1\}$. Seja c o menor e d o maior elemento de F. Então todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[c, d]$. Portanto, a sequência (s_n) é limitada.

Para finalizar esta seção, vamos ao nosso contraexemplo prometido.

Se observamos, a recíproca do teorema 2.2 em forma de pergunta é uma das perguntas que colocamos na introdução deste capítulo. Então queremos saber se a recíproca deste teorema é verdadeira ou não. Certamente a resposta é não. Justifiquemos ela através do seguinte contraexemplo.

Exemplo 2.25 (Uma sequência limitada não convergente) *A sequência* $(1, 2, 1, \ldots)$*, Exemplo 2.4, é como vimos no Exemplo 2.22, limitada. Porém, de acordo com o Exemplo 2.18, ela é divergente.*

Observação 2.1 *Observe que não só a sequência* $(1, 2, 1, \ldots)$*, mas também as sequências* $(0, 1, 0, \ldots)$*,* $(0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \ldots)$ *e* $(2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \ldots)$*, Exemplos 2.5, 2.6 e 2.7, respectivamente, são limitadas e divergentes.*

2.5 Teorema de Bolzano-Weierstrass

Nesta seção, nosso objetivo será o de apresentar e demonstrar o Teorema de Bolzano-Weierstrass (TBW) e mostrar, como estamos fazendo, a não validade de sua recíproca. Mas antes disso, vamos definir sequência monótona e apresentar um teorema, pois isso será preciso para a demontração do teorema.

Definição 2.13 *Seja* (s_n) *uma sequência de números reais. Diz-se que* (s_n) *é não-decrescente quando* $s_n \leq s_{n+1}$ *para* $n \in \mathbb{N}$.

Observação 2.2 *Caso a desigualdade da Definição 2.13 seja estrita, dizemos neste caso que a sequência* (s_n) *é decrescente.*

Definição 2.14 *Seja* (s_n) *uma sequência de números reais. Diz-se que* (s_n) *é não-crescente quando* $s_n \geq s_{n+1}$ *para* $n \in \mathbb{N}$.

Observação 2.3 *Caso a desigualdade da Definição 2.14 seja estrita, dizemos neste caso que a sequência* (s_n) *é crescente.*

Definição 2.15 (Sequência monótona) *Dada uma sequência de números reais* (s_n) *e caso ela obedeça uma das duas definições anteriores,2.13 ou 2.14, dizemos neste caso que ela é uma sequência monótona.*

Costumamos juntar a palavra monótona com o tipo de sequência. Por exemplo, se (s_n) é não-decrescente, dizemos que ela é monótona não-decrescente.

Agora vejamos um teorema que diz respeito às sequências monótonas limitadas.

Teorema 2.3 *Se* (s_n) *é uma sequência monótona limitada, então* (s_n) *é convergente.*

Demonstração: Seja (s_n) monótona, digamos não-decrescente, limitada. Escrevemos $S = \{s_1, \ldots, s_n, \ldots,\}$ e $a = sup\, S$. Afirmamos que $a = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n$. De fato, dado $\epsilon > 0$, o número $a - \epsilon$ não é cota superior de S. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_{n_0} < a$. Assim, $n > n_0 \;\Rightarrow\; a - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \epsilon$ e daí $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = a$.

Para os demais casos prova-se de forma semelhante.

Agora com as definições acima e o teorema anterior, passamos ao Teorema de Bolzano-Weierstrass. Mas antes, vamos a um lema.

Lema 2.1 *Toda sequência* (s_n) *possui uma subsequência monótona.*

Demonstração: De fato, seja $D = \{s_n | \, n < p \;\Rightarrow\; s_n \geq s_p\}$. Chamemos os elementos de D de termos destacados. Então seja $\overline{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que s_n é um termo destacado. Se $\overline{\mathbb{N}}$ for um conjunto infinito, então a subsequência $(s_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ será monótona não-crescente. Se, entretanto, $\overline{\mathbb{N}}$ for finito, seja $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 > n$ para todo $n \in \overline{\mathbb{N}}$. Então s_{n_1} não é destacado, logo existe $n_2 > n_1$ com $s_{n_1} < s_{n_2}$. Por sua vez, s_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $s_{n_1} < s_{n_2} < s_{n_3}$. Prosseguindo desta maneira, obtemos uma subsequência crescente $s_{n_1} < s_{n_2} < \ldots < s_{n_k} < \ldots$.

Teorema 2.4 (Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência (s_n) limitada possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Seja (s_n) uma sequência limitada. Logo, pelo Lema 2.1, (s_n) possui uma subsequência monótona. Como (s_n) é limitada, então a subsequência monótona é limitada. Portanto, pelo Teorema 2.3, essa subsequência monótona converge.

Agora vamos, através do seguinte contraexemplo, mostrar que a recíproca do Teorema de Bolzano-Weierstrass não é válida.

Exemplo 2.26 (Uma sequência com uma subsequência convergente, porém ilimitada) *Na sequência $(0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots)$ a subsequência formada pelo termos de índices ímpares, $(0, 0, 0, \ldots)$, é convergente por se tratar de uma sequência constante. Além disso, o conjunto de valores de $(0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots)$ é $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, que contém $\mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ é ilimitado em $\mathbb{R}$, segue que o conjunto de valores da sequência é ilimitado. Portanto, a sequência $(0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots)$ é ilimitada.*

Capítulo 3

Séries númericas infinitas

Neste capítulo, faremos um estudo sobre séries numéricas infinitas, que são somas com um número infinito de parcelas. Como nos capítulos 1 e 2, algumas perguntas nos motivaram a escrever este capítulo. Seguem algumas delas: podemos afirmar que toda série cujo termo geral é zero, é convergente? Existem séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ em que $a_n \leq b_n$, com $\sum b_n$ convergente e $\sum a_n$ divergente? Pode-se analisar a convergência de qualquer série pelo teste da razão? Pode-se analisar a convergência de qualquer série pelo teste da raiz?

3.1 Séries convergente e divergentes

Comecemos falando sobre as séries convergentes e divergentes.

Dada uma sequência (a_n) de números reais, a partir dela formamos uma nova sequência (s_n) onde

$$s_1 = a_1, \;\; s_2 = a_1 + a_2, \;\; \ldots, \;\; s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \;\; \text{etc.}$$

Os números s_n são chamados de reduzidas ou somas parciais da série $\sum a_n$. A parcela a_n é chamada de n-ésimo termo ou termo geral da série.

Quando existir o limite $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, diremos que a série $\sum a_n$ é convergente e $s =$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n^+ \cdots + \cdots$ será a soma da série. Se $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existir, diremos que $\sum a_n$ é uma série divergente.

Às vezes é conveniente considerar séries do tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, ou seja, que começam com a_0 em vez de a_1.

Vejamos agora um resultado que podemos ultilizar para ver se determinada série converge.

Teorema 3.1 (Teste da comparação) *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries de termos não-negativos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq c \cdot b_n$ para todo $n > n_0$, então a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ acarreta na convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, enquanto que a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica na divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Demonstração: Desde que a_n e b_n são números reais não negativos e $\mathbb{R}$ é arquimediano, podemos então, sem perda de generalidade, supor que $a_n \leq cb_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, usando a monotonicidade da adição de $\mathbb{R}$, verificamos que as reduzidas s_n e t_n de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente, satisfazem a desigualdade $s_n \leq ct_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, usando o fato de a_n, $b_n \in \mathbb{R}^+$ junto,novamente, com a monotonicidade da adição, também verificamos que s_n e t_n formam sequências monótonas não-decrescente. Como $c > 0$, então (t_n) limitada implica (s_n) limitada e (s_n) ilimitada implica (t_n) ilimitada, pois $t_n \geq \frac{s_n}{c}$. E com isso encerramos a demonstração.

Na hipótese do Teste da comparação os termos gerais das séries a serem comparadas precisam ser não negativos. Será que, não respeitando essa condição, o teste pode falhar? Bom, a resposta é sim. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 3.1 (Série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e uma divergente $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tais que $a_n \leq b_n$) *Sejam as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, com $a_n = 0$ e $b_n = -\frac{1}{n}$. Notemos que $a_n \geq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Entretanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente enquanto que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é divergente. De fato, pois seja* s_n *a soma parcial da série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*. Então,* $s_n = 0$ *e, portanto, o limite da soma parcial existe. Logo, a séries de termo geral* a_n *é convergente. Por outro lado, observe que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *pode ser escrita como:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Como a série harmônica é convergente, concluímos que a série de termo geral b_n *é divergente.*

Vejamos agora uma condição necessária para a convergência de uma série.

Teorema 3.2 *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é uma série convergente, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração: Seja $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Então existe $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Evidetemente, tem-se que $s = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$. Portanto, $0 = s - s = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

A recíproca do Teorema 3.2 não é verdadeira. veja o contraexemplo a seguir:

Exemplo 3.2 (Uma série cujo termo geral tende a zero, mas que não converge) *A* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *(série harmônica) tem o seu termo geral tendendo para zero, mas ela não converge. De fato, suponhamos que* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *convirja para* s*. Então, pelo teste da comparação,* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ *também seriam convergentes, digamos para* t *e* u*, respectivamente. Além disso, como* $s_{2n} = t_n + u_n$*, só usar a associatividade da adição de* $\mathbb{R}$ *em* $s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$*, então* $s = t + u$*, quando* $n \to \infty$*. Mas*

$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{s}{2}$, *logo* $u = t = \frac{s}{2}$. *Por outro lado*

$$\begin{aligned} u - t &= \lim_{n\to\infty} (u_n - t_n) = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} \right) > 0, \end{aligned}$$

logo $u > t$. *Contradição.*

3.2 Série absolutamente convergente

Nesta seção, falaremos da definição de série absolutamente convergente e apresentaremos um resultado a respeito. E para finalizar a seção, daremos um contraexemplo relacionado, é claro, com que abordaremos aqui.

Definição 3.1 *Diz-se que uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente quando* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *é convergente.*

Lema 3.1 *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente se, e somente se, para cada* $\epsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon$ *quaisquer que sejam* $n > n_0$ *e* $p \in \mathbb{N}$.

Demonstração: De fato, basta notar que $|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| = |s_{n+p} - s_n|$, onde (s_n) é a sequência das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. E daí é só aplicar o critério de Cauchy na sequência (s_n).

Teorema 3.3 *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente, então, pelo Lema 3.1, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \;\Rightarrow\; ||a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}|| = |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \epsilon$, qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$. E pela desigualdade triangular,

$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \epsilon$, e então, novamente usando o Lema 3.1, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

O Teorema 3.3 nos diz que uma condição suficiente para que uma série seja convergente é que ela seja absolutamente convergente. Mas será que a recíproca poderia ser verdadeira, isto é, será que uma série que é convergente também seria absolutamente convergente? A resposta é não. Veja o contraexemplo a seguir.

Exemplo 3.3 (Uma série convergente, mas não absolutamente convergente) *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *é convergente, mas não é absolutamente convergente. De fato, as suas reduzidas de ordem par são*

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2}, \;\; s_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right),$$
$$s_6 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \;\; \textit{etc.}$$

Tem-se $s_2 < s_4 < s_6 < \ldots < s_{2n} < \ldots$, *pois cada par de parênteses encerra um número positivo. Enquanto isso, as reduzidas de ordem ímpar são*

$$s_1 = 1, \; s_3 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right), \; s_5 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right), \; \textit{etc.}$$

Portanto, $s_1 > s_3 > s_5 > \ldots > s_{2n-1} >$. *Logo existem* $s' = \lim_{n\to+\infty} s_{2n}$ *e* $s" = \lim_{n\to+\infty} s_{2n-1}$. *Como* $s_{2n-1} - s_{2n} = \frac{1}{2n+1} \to 0$, *segue que* $s' = s"$ *(escrevemos então* $s = s' = s"$*). Assim,* $\lim_{n\to+\infty} s_n = s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$. *Por outro lado ela não converge absolutamente, pois* $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *e, como sabemos, a série harmônica não é convergente.*

3.3 Séries alternadas

Nesta seção, vamos definir séries alternadas e apresentar o Teorema de Leibniz que trabalha a convergência de séries alternadas. No final exibiremos um exemplo relacionado com o teorema em questão.

Teorema 3.4 (Teorema de Leibniz) *Se* a_n *for uma sequência monótona decrescente tal que* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *é convergente.*

Demonstração: Seja $s_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n$. Então $s_{2n} = s_{2n_2} + a_{2n-1} - a_{2n}$ e $s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}$. Logo as somas parciais de ordem par formam uma sequência não-crescente, pois $a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0$, e as de ordem ímpar uma sequência não-crescente, pois $-a_{2n} + a_{2n+1} \leq 0$. Além disso, como $s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n}$, temos $s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n} \geq 0$. Isso msotra que

$$s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq \cdots \leq s_{2n-1} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1$$

e $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n-1}$, pois $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Logo (s_n) converge, como queriamos mostrar.

O exemplo que está relacionado com o Teorema de Leibniz surgiu do seguinte questionamento: se na hipótese do Teorema Leibniz o valor a_n da série tiver como limite um número real diferente de zero, o que acontece com a série? isto é, ela não será convergente?

Vamos responder estas perguntas através do único exemplo desta seção. Segue então o exemplo.

Exemplo 3.4 *Na série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n}{3n-1}$ *temos* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{3n-1} = \dfrac{2}{3} \neq 0$. *No entanto, é fácil verificar que as subsequências dos termos pares e dos termos ímpares da sequência* $\left((-1)^{n+1}\dfrac{2n}{3n-1}\right)$ *têm limites diferentes, donde se conclui que não existe o limite do termo geral* $(-1)^{n+1}\dfrac{2n}{3n-1}$, *Logo, Pela contrapositiva do Teorema 3.2, a série dada é divergente.*

Não seria um absurdo afirmar que as séries alternadas cujo termo a_n converge para um valor real diferente de zero são divergentes, apesar de ter usado o exemplo particular acima. De fato, basta usar a contrapositiva do teorema.

3.4 Testes de convergência

Nesta seção, apresentaremos dois resultados, que a eles damos o nome de teste, usados para verificar a convergência de uma determinada série. São eles: o Teste da razão (ou

Teste de d'Alembert) e o Teste da raíz (ou Teste de Cauchy). Além disso, colocaremos em discursão a eficácia desses testes, através de alguns exemplos.

Teorema 3.5 (Teste da razão) *Seja $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se existir uma uma constante c tal que $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq c < 1$ para todo n suficientemente grande (em particular se $\lim\limits_{n\to+\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$) então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ será absolutamente convergente.*

Demonstração: De fato, se, para todo n suficientemente grande vale $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq c = \frac{c^{n+1}}{c^n}$, então $\frac{|a_{n+1}|}{c^{n+}} \leq \frac{|a_n|}{c^n}$. Assim a sequência de números não-negativos $\frac{|a_n|}{c^n}$ é não-crescente a partir de uma certa ordem, logo é limitada. Como a série $\sum c^n$ é absolutamente convergente, segue-se do Teorema tal que $\sum a_n$ converge absolutamente. No caso particular de existir $\lim\limits_{n\to+\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = L < 1$, escolhemos um número c tal que $L < c < 1$ e teremos $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < c|$ para todo n suficientemente grande, recaíndo no caso anterior já demonstrado.

Prova-se que se $\lim\limits_{n\to+\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = L > 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Agora vejamos, através do exemplo a seguir, que se $\lim\limits_{n\to+\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = L = 1$, então o teste é inconcludente.

Exemplo 3.5 (Um tipo de série onde o teste da razão não é aplicado) *Como vimos no capítulo 3 a série hamônica, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$, é divergente. Além disso, o seu termo geral safisfaz*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Por outro lado, a série

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

tem a sua soma parcial satisfazendo:

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} &\leq 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{(n+1)^p} + \ldots + \frac{1}{(2^n-1)^p} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \ldots + \frac{1}{15^p}\right) + \ldots \\
&+ \left(\frac{1}{2^{(n-1)p}} + \ldots + \frac{1}{(2^n-1)^p}\right) \\
&\leq 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{2^{2p}}\right) + \left(\frac{1}{2^{3p}} + \ldots + \frac{1}{2^{3p}}\right) + \ldots \\
&+ \left(\frac{1}{2^{(n-1)p}} + \ldots + \frac{1}{2^{(n-1)p}}\right) \\
&= 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{2^2}{2^{2p}} + \frac{2^3}{2^{3p}} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)p}} \\
&= \frac{1 - (\frac{1}{2})^{(p-1)n}}{1 - (\frac{1}{2})^{p-1}} \\
&\leq \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^{p-1}},
\end{aligned}
$$

Ou seja, a sequência das somas parciais é monótona crescente e limitada superiormente, se $p > 1$, o que nos leva a concluir que a sequência é convergente. Então a série

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

é convergente para $p > 1$. E ainda, o seu termo geral satisfaz

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1.$$

Portanto, concluímos que quando $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ o teste da razão não é aplicado. Pois é inconcludente, ou seja, pode acontecer que a série seja convergente ou divergente.

Teorema 3.6 (Teste da raíz) *Quando existe um número real c tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (em particular, quando $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$) então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.*

Demonstração: Se $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$, então $|a_n| \leq c^n$ para todo n suficientemente grande. Como a série geométrica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c^n$ é convergente, segue, de acordo teste da comparação, que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge absolutamente. No caso particular de existir $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, escolhemos c tal que $L < c < 1$, que teremos $\sqrt[n]{|a_n|} < c$ para todo n suficientemete grande, recaindo no caso anterior já provado.

Prova-se que se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Agora vejamos, através do exemplo a seguir, que se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, então o teste é inconcludente

Exemplo 3.6 (Um tipo de série onde o teste da raiz não é aplicado) *O teste da raiz não se aplica à séries cujo o seu termo geral satizfaz*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

De fato, basta observar que as séries do Exemplo 3.5 têm seus termos gerais satisfazendo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = 1.$$

Ou seja, para estas séries o teste também é inconcludente, isto é, a série pode vir a convergir ou divergir.

3.5 Rearranjos

Se arranjarmos a ordem dos termos numa soma finita, então é claro que o valor da soma permanecerá inalterado. Mas esse nem sempre é o caso para uma série. Nesta seção, definiremos Rearranjos de séries e apresentaremos um teorema a respeito. E, finalizando o capítulo, abordaremos um contraexemplo relativo ao Teorema em questão

Definição 3.2 *Um rearranjo da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *é tomar uma bijeção* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *e considerar a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*, onde* $b_n = a_{\phi(n)}$*, isto é, é a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *obtida da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *mudando a ordem dos seus termos.*

Teorema 3.7 *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *for uma série absolutamente convergente com soma* s*, então qualquer rearranjo de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *tem a mesma soma* s*.*

Demonstração: Comecemos com uma série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, onde $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção e ponhamos $b_n = a_{\phi(n)}$. Afirmamos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. De fato, sejam $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ e $s_n = a_1 + \ldots + a_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, chamemos de m o maior dos números $\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n)$. Então $\{\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n)\} \subset [1, m]$. Segue-se que $t_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_j = s_m$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \leq s_m$. De modo análogo (considerando-se ϕ^{-1} em vez de ϕ) se vê que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s_m \leq t_n$. Concluímos que $\lim s_n = \lim t_n$, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

No caso geral, temos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n$, onde p_n e q_n são respectivamente a parte positiva e parte negativa de a_n. Todo rearranjo (b_n) dos termos de a_n origina um rearranjo (u_n) para os p_n e um rearranjo (v_n) dos q_n, de tal modo que cada u_n é parte positiva e cada v_n é parte negativa de b_n. Pelo que acabamos de ver, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n$. Logo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, o que prova o teorema.

Se a série não for absolutamente convergente, o Teorema 3.7 não é válido. Vejamos o contraexemplo a seguir.

Exemplo 3.7 (Uma série convergente com rearranjo divergente) *Vimos que a série harmônica alternada* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ *é converge. Além disso, não faremos aqui, mostra-se que* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log 2$*. Daí, adicionando zeros a esta série, vem*

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{\log 2}{2} \tag{3.1}$$

pois embora cada termo na sequência das somas parciais da nova série seja repetido, o seu limite não se altera. Somando a série harmônica alternada com a série 3.1, obtemos

a série
$$1\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots=\log 2+\frac{\log 2}{2}=\frac{3}{2}\log 2.$$
Ou seja, a série
$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4},$$
que é um rearranjo da série harmônica alternada, tem soma diferente da soma da série harmônica alternada.

Conclusão

Trabalhar às recíprocas de alguns dos principais teoremas da Análise real tem sua vantagem. Vimos que ao trabalhar dessa maneira, isto é, usando a idéia de demonstração por contraexemlos para demonstrar que às recíprocas dos principais teoremas não eram válidas, os significados das afirmações (teoremas) da forma condicional ou implicativa trabalhadas ficaram mais claras aos olhos do leitor, ou seja, o leitor conseguiu exergar, por exemplo, o motivo do autor ter colocado o teorema na forma condicional e não na forma bicondicional, vide [4], e também ele acaba se convencendo de que realmente a recíprocas dos teoremas ,de umas das forma ditas acima, não são válidas. E isso é importante que aconteça, pois para quem estuda pensando em fazer um exame de seleção de mestrado para à área, essa noção acaba sendo inerente. Agora é claro que a importancia não é somente para esses estudantes. É para os estudantes de matemática em geral.

Além da utilização do método do contraexemplo, vimos no trabalho exemplos de situações pouco conhecidas na área da Análise real em nível de graduação, por exemplo, o exemplo do corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, capítulo 1, que é ordenado por dois subconjuntos, e também vimos exemplos de casos em que a hipótese de alguns teoremas não eram levadas a risca, causando a inutilização do teorema é claro.

Portanto, podemos afirmar que ao longo deste Trabalho de Conclusão de Curso aprendemos que o estudo da Análise real pode se tornar ainda melhor, dependendo de como ele é feito, ou seja, se a gente buscar explorar mais os outros conceitos que o estudo de análise real exige, o de lógica matemática por exemplo.

Para os leitores que venham a se interessar por este trabalho, os mesmos poderão complementá-lo trabalhando, por exemplo, com *Derivadas*, *Funções contínuas*, *Limites de funções* e *Integrais de Riemann*. Ou então estender esse estudo à análise no $\mathbb{R}^n$, por exemplo.

Apêndice A

Noções de Conjuntos

A.1 Conjunto e Pertinência

Sabemos que conjunto é formado por objetos (com exceção do conjunto unitário). Os objetos são chamados de elementos. Quando um objeto x é um dos elementos que compõem o conjunto A, dizemos neste caso que x pertence a A e denotamos $x \in A$. Se, porém, x não é um elemnto de A, dizemos que x não pertence a A e denotamos $x \notin A$.

A.2 Conjuntos Numéricos

Definição A.1 *Chama-se conjunto dos números naturais, que costumamos denotar por* $\mathbb{N}$*, o conjunto formado pelos elementos* $1, 2, 3, \ldots$.

Notação: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Neste conjunto estão definidas duas operações, a adição e a multiplicação, que têm as seguintes propriedades:

P_1) $(m + n) + p = m + (n + p)$; $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$

$P_2)$ $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$

$P_3)$ $m + n = n + m$; $m \cdot n = n \cdot m$

Além dessas pripriedades acima, há outras que as operações definidas em $\mathbb{N}$ satisfazem, mas que, para este trabalho, não terão importância. Pontanto, elencaremos apenas esssas.

Definição A.2 *Chama-se conjunto dos números inteiros, que costumamos representar por $\mathbb{Z}$, o seguinte conjunto:*

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

As mesmas propriedade que são válidas em $\mathbb{N}$ também são válidas em $\mathbb{Z}$. Além dessas, vale:

$P_4)$ Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = 0$

Definição A.3 *Chama-se conjunto dos números racionais, que costumamos denotar por $\mathbb{Q}$, o conjunto de todos números da forma $\frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.*

Notação: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} | \, p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\}$

As operações de adição e a multiplicação em $\mathbb{Q}$ estão definidas, respectivamente, como:

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} := \frac{pn + mq}{qn} \text{ e } \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} := \frac{pm}{qn}$$

Definição A.4 *Um número que não é racional é chamado irracional.*

Vale ressaltar que essa definição de números irracionais está relacionada à descoberta, feita pelos gregos, de que a reta continha “furos”. Então, a partir daí, foi preciso completar $\mathbb{Q}$ criando uma novo conjunto que pudesse ficar em correspondência biunívoca com a reta. E então criou-se o conjunto dos números reais (que definiremos a seguir), ou seja, especificamente o conjunto dos irracionais são os elementos do conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Mas para mais detalhes o leitor pode consultar o trabalho de Ivan Aguiar & e Marina siqueiros da

Universidade federal Fluminense. Trabalho feito para um minicurso do 4º colóquio de matemática da Região Centro-Oeste.

Definição A.5 *Chama-se conjunto dos números Reais, que costumamos representar por $\mathbb{R}$, aquele formado por todos os números racionais juntamente com os números irracionais.*

Em $\mathbb{R}$ estão definidas duas operações, chamadas adição multiplicação, que fazem corresponder a cada par de elementos a soma $x + y$ e produto $x \cdot y$, respectivamente.

Esta operações têm as seguintes propriedades:

Para a adição:

A1. Associatividade: Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$.

A2. Comutatividade: Para quaisquer $x, y, \in \mathbb{R}$, tem-se $(x + y) = (y + x)$.

A3. Elemento neutro: Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. O elemento 0 é chamado de zero.

A4. Simétrico: Todo elemento $x \in \mathbb{R}$ possui um simétrico $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x+(-x) = 0$.

Para a multiplicação:

M1. Associatividade: Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

M2. Comutatividade: Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale $x \cdot y = y \cdot x$.

M3. Elemento neutro: Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. O elemento 1 é chamado de um.

M4. Inverso multiplicativo: Todo $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$ possui um inverso x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

De uma relação entre as duas operações, vale:

D1. Distributividade: Sejam x, y, $z \in \mathbb{R}$, tem-se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

A.3 Intervalos

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, como $a < b$, definimos:

1) Intervalo aberto de extremos a e b é o conjunto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\}$

2) Intervalo fechado de extremos a e b é o conjunto $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\}$.

3) Intervalo aberto à direita (ou fechado à esquerda) de extremos a e b é conjunto

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x < b\}$$

.

4) Intervalo aberto à esquerda (ou fechado à direita) de extremos a e b é o conjunto

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x \leq b\}$$

.

A.4 Conjuntos Finitos e Infinitos

Aqui, daremos a definição de Conjuntos Finitos e Conjunto Infinitos. comecemos pela definição de Conjunto Finito.

Seja $n \in \mathbb{N}$ e definimos o conjunto $I_n = \{p \in \mathbb{N} |\ p \leq n\}$. isto é, I_n é o conjunto de todos os números naturais maiores do que ou igual a n. Por exemplo, $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$. Então definimos:

Definição A.6 *Um conjunto A diz-se finito quando $A = \emptyset$ ou então existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : I_n \to A$.*

Escrevendo $a_1 = f(a_1),\ \ a_2 = f(a_2),\ \ \ldots, a_n = f(a_n)$ temos então $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Dados à bijeção f o nome de contagem dos elementos de A e ao número n de número de elementos de A ou número cardinal do conjunto finito A.

Agora definemos Conjunto Infinito.

Definição A.7 *Um conjunto* A *diz-se infinito quando não é finito, ou seja, quando* $A \neq \emptyset$ *e nem existe, seja qual for o* $n \in \mathbb{N}$*, uma bijeção* $f : I_n \to A$.

Apêndice B

Funções, Radiciação e Valor absoluto

Definição B.1 *Dados dois conjuntos não vazios A e B, chama-se produto cartesiano de A por B o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), com $x \in A$ e $y \in B$. Indicamos o produto cartesiano de A por B com a notação $A \times B$ (lê-se A cartesiano B). Assim, temos:*

$$A \times B = \{(x, y)| \ x \in \ \ e \ x \in B\}.$$

Definição B.2 *Chama-se relação binária de A em B todo subconjunto R de $A \times B$.*

Definição B.3 *Seja $R \subset A \times B$. Chama-se domínio de R o subconjunto $D(R)$ de A constituido pelos elementos x para cada um dos quais existe algum y em B tal que $(x, y) \in R$. Assim, temos:*

$$D(R) = \{x \in A| \ \textit{para algum} y \in B, (x, y) \in R\}.$$

Chama-se imagem de R o subconjunto de B constituido pelos elementos y para cada um dos quais existe algum x em A tal que $(x, y) \in R$. Assim, temos:

$$Im(R) = \{y \in B| \ \textit{para algum} x \in A \ \ (x, y) \in R\}.$$

Definição B.4 *Uma relação binária f de A em B recebe o nome de função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.*

Definição B.5 *Seja A um conjunto não vazio. Toda função $f : A \times A \to A$ recebe o nome de operação binária sobre A (ou em A).*

Dada uma operação binária $* : A \times A \to A$, qualquer, denotaremos $*(x, y) = x * y$, para todo $(x, y) \in A \times A$.

Definição B.6 *Sejam uma função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

e uma função polinomial não nula $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

e uma função racional, cujo domínio consiste em todos os números reais para os quais $g(x) \neq 0$.

B.1 Módulo de um número Real

Definição B.7 *Seja $x \in \mathbb{R}$, definimos módulo (ou valor absoluto) de x, e denotamos por $|x|$, por meio da relação:*

$$|x| = \begin{cases} -x, & se \quad x \leq 0, \\ x, & se \quad x > 0. \end{cases}$$

Vejamos algumas propriedades (das quais não faremos as demonstrações) que decorrem da definição de módulo:

I) $|x| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

II) $|0| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

III) $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$;

IV) $|x|^2 = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

V) $x \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

VI) $|x+y| \leq |x| + |y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$;

VII) $|x-y| \geq |x| - |y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$;

VIII) $|x| \leq a$ se, e somente se, $x \in [-a, a]$;

IX) $|x| \geq a$ e $a \geq$ se, e somente se, $x \leq -a$ ou $x \geq a$.

B.2 Radiciação

Definição B.8 *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, definimos raíz n-ésima de a, e denotamos por $\sqrt[n]{a}$, da seguinte forma:*

- *Sendo n é par e $a \geq 0$: $\sqrt[n]{a} = b$ se, e somente se, $b^n = a$, onde $b \geq 0$;*
- *sendo n ímpar e $a \in \mathbb{R}$: $\sqrt[n]{a} = b$ se, e somente se, $b^n = a$, com $b \in \mathbb{R}$.*

A expressão b^n já é conhecida pelo leitor e por isso não entraremos em detalhes. Com isso, encerramos a teoria básica.

Referências

[1] CORRÊA, F. J. S. A. *Introdução à análise real.* Pará, Belem. UFPA, 2001.

[2] GELBBAUM, B. R.; OLMSTED, J. M. H.*Counterexamples in Analysis.* Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 2003.

[3] FERRACINI, M. *Contraexemplos em análise.* 2012. 55 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2012.

[4] FILHO, D. C. M. *Um convite à Matemática: Fundamentos lógico com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades.* São Paulo, Campina Grande: UFCG, 2000.

[5] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos da Matemática Elementar 1: conjuntos e funções.* 7 ed. São Paulo: Atual, 1993. v.1

[6] LIMA, E.L. *Curso de análise.* 14 ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012. v.1.

[7] LIMA, E.L. *Análise real volume 1.* 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 189 p.