Universidade Federal do Amapá
Pró-Reitoria de Ensino e Graduação
Curso Licenciatura em Matemática

Gilson Teixeira Pereira

O TEOREMA DE ARZELÁ-ASCOLI

Macapá-AP
2016

Gilson Teixeira Pereira

O TEOREMA DE ARZELÁ-ASCOLI

Trabalho apresentada à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso, do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal do Amapá, como parte da exigência para obtenção do grau de licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Me. Sérgio Barbosa de Miranda

Área de Concentração: Matemática Pura e Aplicada
Orientador: ***Prof. Me. Sérgio Barbosa de Miranda.***

Macapá-AP
2016

Gilson Teixeira Pereira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

512.5
P436t Pereira, Gilson Teixeira.
O teorema de Arzelá-Ascoli / Gilson Teixeira Pereira; orientador, Sérgio Barbosa de Miranda. -- Macapá, 2016.
50 p.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Teorema de Arzelá-Ascoli. 2. Compacidade. I. Miranda, Sérgio Barbosa de , orientador II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

Macapá-AP
2016

Gilson Teixeira Pereira

O TEOREMA DE ARZELÁ-ASCOLI

Banca Examinadora:

Sérgio Barbosa de Miranda
Orientador: Prof. Me. Sérgio Barbosa de Miranda
Universidade Federal do Amapá-UNIFAP

Membro: Prof. Me. Kelmem da Cruz Barroso
Universidade Federal do Amapá-UNIFAP

Marcel Lucas Picanço Nascimento.
Membro: Prof. Me. Marcel Lucas Picanço Nascimento
Universidade Federal do Amapá-UNIFAP

Avaliado em: 01/06/2016

Macapá-AP
2016

Dedico este trabalho a Deus.
A minha família.
Aos meus amigos.
Aos meus professores.

Sou grato a Deus por este sonho realizado. Aos meus familiares que me apoiaram e oraram por mim, pelos ensinamentos de vida da minha mãe Maria do Carmo Teixeira Pereira, antes e durante o percurso acadêmico.

Ao Prof. Me. Sérgio Barbosa de Miranda, que me orientou com tanto carinho e paciência durante esta última fase do curso. Aos demais professores do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Amapá, pela dedicação e ensinamentos compartilhados.

Agradeço também a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho. A estas pessoas externo aqui meus sinceros agradecimentos.

“O grande professor inspira.”

(Willian Arthur Ward)

Lista de Figuras

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo apresentar um resultado de Análise Real utilizado nas mais diversas áreas da Matemática Pura e Aplicada, o Teorema de Arzelá-Ascoli, o qual nos fornecerá quais as condições necessárias para que uma sequência de funções contínuas definidas num subconjunto compacto dos números reais admita uma subsequência uniformemente convergente. Em seguida, abordaremos uma de suas aplicações importantíssima à Análise Real. Como suporte a este estudo, elencamos resultados primordiais para o desenvolvimento desta pesquisa. Primeiramente, coletamos conceitos básicos elementares, em seguida, demonstramos em duas versões o teorema principal.

Palavras-Chaves: Compacidade, Convergência Uniforme, Teorema de Arzelá-Ascoli, Equicontinuidade.

Abstract

This study aims to present the result of real analysis used in several areas of Pure and Applied Mathematics, the Arzelà-Ascoli theorem, which will provide us with which the necessary conditions for a sequence of continuous functions defined on a compact subset of real numbers admits a uniformly convergent subsequence. Then we'll cover one of its important applications to real analysis. In support of this study, we selected primary results for the development of this research. First, we collect elementary basics then demonstrated in two main versions theorem.

Keywords: Compactness, Convergence Uniform, Arzelà-Ascoli theorem, Equicontinuity.

Sumário

Introdução

A Análise é o ramo da Matemática que tem por objetivo investigar, generalizar regras e criar resultados afim de facilitar o seu bom entendimento e de outras áreas, como por exemplo, *Topologia*, *Geometria Diferencial*, *EDO-Equações Diferenciais Ordinárias*, dentre outras. Isto é, visa elaborar formulações rigorosas e precisas para ideias que até então eram intuitivas do cálculo.

Neste sentido, o resultado abordado no presente Trabalho, trata-se de um resultado com inúmeras aplicações tanto na *Análise Real* quanto na *Análise Funcional*, um resultado amplamente usado na Matemática Pura Aplicada por ser considerado um instrumento muito útil na demonstração de existência de soluções e na promoção de teorias matemáticas. Tudo isso, sem fazer ênfase na quantidade de conceitos matemáticos que o envolve. Tal resultado, é conhecido ou familiarizado pelos matemáticos como sendo *O Teorema de Arzelá-Ascoli.*

Uma vez reunidas todas as pesquisas, feito um estudo dos resultados que evidenciam o objetivo deste trabalho, nos preocupamos em organizar bem a sua estrutura para que, ao ser consultado, o leitor não venha ter dificuldades em entender o que abordamos aqui. Organizamos o mesmo em três capítulos. No **capítulo** 1**,** veremos alguns pré-requisitos que são indispensáveis para a compreensão do *Teorema de Arzelà-Ascoli.* No **capítulo** 2, estudaremos em detalhes o referido teorema e apresentaremos uma demonstração detalhada de fácil compreensão do mesmo em duas versões. Posteriormente, no **capítulo** 3, veremos uma das aplicações do referido teorema à Análise Real.

Contexto Histórico

De acordo com Oliveira [22] , Giulio Ascoli nasceu em 20 de janeiro de 1843 em Trieste, Itália e morreu em 12 de Julho de 1896 em Milão. Foi estudante da Escola Normal de Pisa, onde graduou-se em 1868. Por volta de 1872, tornou professor de Álgebra e Cálculo do *Politecnico di Milano University* e em 1879 foi professor de matemática na *Reale Istituto Tecnico Superiore*, onde, em 1901, o homenagearam afixando uma placa que o lembra. Membro correspondente do Istituto Lombardo, fez importantes contribuiçoes para a teoria de funções de uma variável real e à série de Fourier. Como por exemplo, introduziu equicontinuidade em 1884, um tema considerado como um dos conceitos fundamentais da teoria das funções reais.

Por outro lado, Oliveira aponta que Césare Arzelá, nasceu em 6 de março de 1847, em Santo Stefano di Magra, La Spezia, Itália e morreu em 15 de março de 1912, em sua Terra Natal. De família com meios financeiros limitados. Frequentou o liceu em Sarzana por dois anos 1856-1858. Posteriormente, ele foi para o Liceu, em Pisa, onde passou três anos 1858-1861. Após ter ganho um concurso de admissão para a Escola Normal Superior de Pisa, que lhe deu uma bolsa de estudos, ele começou seus estudos como um estudante de ciências matemáticas e física, em novembro de 1861. Em 1869 Arzelá graduou-se tendo seu trabalho concluído com a dissertação sobre a teoria do potencial. Depois de se formar, continuou a frequentar cursos de análise superior, física matemática e mecânica superior, entre outros. Iniciou sua carreira de professor no Liceu de Macerata e, após dois anos, pediu licensa para continuar seus estudos em Pisa no ano de 1872-1873, passando a frequentar um curso sobre elasticidade dado por Enrico Betti, que também o orientou em sua tese, um curso sobre a teoria de funções de uma variável real dada por Ulisse Dini. Há relatos de que Arzelá deixou várias contribuições, entre elas, o mais importante trabalho científico, onde elaborou o conceito de convergência uniforme gradual que dá uma condição necessária e suficiente para uma série de funções contínuas convergir para uma função contínua (1883). Na verdade, ele publicou três artigos em 1885: Sulla Integrazione por série; Sulla integrabilità di una serie di funzioni e Sui prodotti Infiniti. Quatro anos depois, Arzelá publicou o resultado para o qual ele é mais conhecido hoje em seu artigo Sulle Funzioni di linee (1895).

> *"Ele provou o resultado hoje conhecido como o Teorema de Arzelá-Ascoli sobre a existência de uma subsequência uniformemente convergente em cada sequência de funções equilimitada e equicontínua". (OLIVEIRA, 2014, p. 43).*

Ambos, tanto Arzelá quanto Ascoli estudadaram o conceito de equicontinuidade e o teorema de Arzelá era uma generalização de um muito mais fraco do que tinha sido provado por Ascoli, em 1884. Note-se que se hoje o teorema de Arzelá-Ascoli é um resultado sobre compacidade mas, essa ideia só foi introduzida por Maurice Fréchet em 1904.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo veremos alguns resultados preliminares utilizados no desenvolvimento desta monografia, que servirão de base para uma melhor compreensão do Teorema de Arzelá-Ascoli, citaremos algumas definições e resultados importantes da Análise Real, que serão utilizados no decorrer de nossa pesquisa. Tais resultados poderão ser verificados nas referências pelo leitor ou em qualquer outro livro que aborde tal teoria. Sendo que neste trabalho, serão enunciados apenas os resultados essenciais para o o desenvolvimento do assunto central.

1.1 Teorema de Bolzano-Weierstrass

A seguir estabeleceremos alguns resulatados importantes a respeito de sequências e subsequências que conduzem a uma poderosa ferramenta da Análise Real chamada de Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Definição 1.1. *Uma sequência numérica é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que associa a cada número* $n \in \mathbb{N}$ *a um número real* x_n*, chamado termo geral, termo de ordem* n *ou* n*-ésimo termo da sequência.*

Para todo n denotamos uma sequência numérica por (x_n).

Veremos agora que nem toda sequência possui limite e as que o possuem serão chamadas de *convergentes* e as outras *divergentes.*

Definição 1.2. *Uma sequência numérica* (x_n) *é dita convergente se existir um número real* L *tal que, dado qualquer número real positivo* $\epsilon > 0$*, existe um índice* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de modo que* $|x_n - L| < \epsilon, \forall n \geq n_0$.

Em línguagem simbólica temos:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L. \equiv .\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \epsilon.$$

Neste caso, dizemos que (x_n) *tende a* L *e escrevemos*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \qquad ou \qquad x_n \to L.$$

Se uma sequência não tem limite, diz-se que ela diverge.

A esse respeito, veja a citação abaixo segundo Lima [15] .

> *"O matemático iglês G. H. Hardy, um aficionado das competições esportivas, costumava dizer que, para bem entender a idéia de limite, deve-se pensar em dois competidores. Um deles, digamos, o mocinho, quer provar que $lim x_n = L$, enquanto o outro, digamos, o bandido, procura impedir-lo. O bandido fornece os épsilons (ϵ) enquanto o mocinho trata de conseguir, para cada $\epsilon > 0$ proposto como desafio, o n_0 correspondente (isto é, n_0 tal que $n > n_0$ implique $|x_n - L| < \epsilon$).*
>
> *O mocinho ganhará o jogo (e ficará portanto estabelecido que $lim x_n = L$) se, para qualquer $\epsilon > 0$ exibido pelo seu adversário, ele for capaz de obter um n_0 conveniente (isto é, tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \epsilon$). Por outro lado, para que o bandido ganhe a parada, basta que ele consiga achar um número real $\epsilon > 0$ para o qual nenhum n_0 que o mocinho venha a tentar, sirva. (Ou seja, esse ϵ deve ser tal que para todo n_0 exista $n > n_0$ com $|x_n - L| \geq \epsilon$)".* (LIMA, 2012, p. 108).

O resultado que vamos mostrar agora nos garante que uma sequência não pode admitir dois limites distintos.

Teorema 1.1. ***(Unicidade do limite).*** *O limite de (x_n) é único quando existe.*

Demonstração. Supomos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L_1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L_2$ tal que $L_1 \neq L_2$, ou seja $L_1 - L_2 \neq 0$. Seja $\epsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2} > 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L_1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\ n > n_1 \Rightarrow |x_n - L_1| < \epsilon.$$

Também temos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L_2$. Logo, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\ n > n_2 \Rightarrow |x_n - L_2| < \epsilon.$$

Tomando $n = max\{n_1, n_2\}$ para tal n as duas conclusões anteriores são válidas. Temos então

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - x_n| + |x_n - L_2| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |L_1 - L_2|.$$

Concluímos que $|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$, o que é absurdo. ■

Definição 1.3. *Chama-se supremo de um conjunto X, quando existir, ao número β que satifaz as seguintes condições:*

a) *$x \leq \beta$ para todo $x \in X$;*

b) *dada qualquer número $\epsilon > 0$, existe um elemento $x \in X$ tal que $\beta - \epsilon < x$.*

Neste caso, escreve-se $\beta = \sup X$ para indicar que β é o supremo do conjunto X.

Por outro lado, chama-se supremo de um conjunto X, quando existir, ao número α que satifaz as seguintes condições:

a) *$\alpha \leq x$, para todo $x \in X$;*

b) *dada qualquer número $\epsilon > 0$, existe um elemento $x \in X$ tal que $x < \alpha + \epsilon$.*

Neste caso, escreve-se $\alpha = \inf X$ para indicar que α é o ínfimo do conjunto X.

Observação 1.1. *O supremo, quando existe, pode pertencer ou não ao conjunto X.*

Definição 1.4. *Dado $X \subset \mathbb{R}$. Um número M diz-se o maior elemento (ou* elemento máximo, *em símbolos tem-se $M = \max X$) do conjunto X quando $M \geq x$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que M é uma cota superior de X,* pertencente *a X.*

Analogamente, diz-se que um número m é o menor elemento (ou elemento mínimo, em símbolos tem-se $m = \min X$) do conjunto X quando $m \leq x$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que m é uma cota inferior de X, pertencente a X.

Uma classe de sequências numéricas são as chamadas *sequências limitadas.* Tais sequências auxiliam a determinar o limite de uma dada sequência, permitindo assim, simplicar o cálculo de limite.

Definição 1.5. *Diz-se que uma sequência (x_n) é limitada à esquerda, ou limitada inferiormente, se existir um número real a tal que $a \geq x_n$ para todo n.*

Analogamente, (x_n) diz-se limitada à direita, ou limitada superiormente, se existir um número real b tal que $x_n \leq b$ para todo n. Quando a sequência é limitada à esquerda e à direita ao mesmo tempo, dizemos simplesmente que ela é limitada, o que é equivalente a firmar que existe um número real $c > 0$, tal que, $|x_n| \leq c$ para todo n.

O teorema seguinte é um importante resultado das sequências numéricas convergentes.

Teorema 1.2. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência. Se $\underset{n\to\infty}{lim} x_n = L$, então

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ tal\ que\ \forall\ n > n_0 \Rightarrow x_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon)\,.$$

Considerando

$$m = min\left\{x_1, x_2, .., L - \epsilon, L + \epsilon\right\}$$

e

$$M = max\left\{x_1, x_2, .., L - \epsilon, L + \epsilon\right\},$$

temos

$$x_n \in [a, b]\,,\ \forall\ n.$$

Portanto, (x_n) é limitada. ∎

A recípISSN do resultado anterior não é verdadeira. Existem sequências que são limitadas, mas que não são convergentes.

Exemplo 1.1. *A sequência $((-1)^n)$ é limitada, porém, assume alternadamente os valores 1 e -1, portanto, não coverge para nenhum desses valores.*

Uma outra classe importante especial de sequências numéricas, que surgem com muita frequência ao longo do estudo da Análise Real e bastante usuais, são as *sequências monótonas.*

Definição 1.6. *Dizemos que uma sequência (x_n) é monótona crescente, ou simplesmente crescente se $x_{n+1} > x_n$, para todo n. Da mesma forma uma sequência (x_n) é monótona decrescente, ou simplesmente decrescente se $x_{n+1} < x_n$, para todo n. Finalmente, uma sequência é monótonas se for crescente ou decrescente.*

Toda sequência monótona crescente, respectivamente, decrescente, é sempre limitada inferiormente, respectivamente, superiormente pelo seu primeiro termo.

Sequências monótonas limitadas são convergentes. Esse é o resultado que vamos estabelecer agora, ele nos dá uma condição suficiente para que uma sequência convirja.

Teorema 1.3. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Consideremos, para fixar as idéias, uma sequência (x_n) digamos crescente e, portanto, limitada inferiormente pelo seu primeiro termo x_1 em $\mathbb{R}$. A hipótese dela ser limitada significa que ela é limitada superiormente, isto é, existe uma costante real $c > 0$ tal que

$$|x_n| \leq c, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Assim, pelo Axioma 3.1 **(Ver Apêndice),** X possui supremo, digamos $sup\ X = S$, com

$$S \leq c.$$

Devemos mostrar que

$$x_n \to S.$$

De fato, pois

$$S - \epsilon < S,$$

donde temos que $S - \epsilon$ não pode ser cotar superior X. Daí, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n > n_0 \Rightarrow S - \epsilon < x_{n_0} < S \leq c.$$

Como a sequência é crescente, $x_{n_0} \leq x_n$ para todo $n > n_0$, de sorte que

$$\forall n > n_0 \Rightarrow S - \epsilon < x_{n_0} < x_n < S < S + \epsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = S$. ∎

Da mesma forma que falamos em sequência convergente ou divergente, pode-se falar em subsequência convergente ou divergente.

Definição 1.7. *Uma subsequência de uma sequência (x_n) é uma restrição dessa sequência a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < ...\}$ do conjunto $\mathbb{N}$, designada por (x_{n_k}), que a cada $n_k \in \mathbb{N}'$ associa o termo x_{n_k}.*

Lembremos que $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é infinito se, e somente se, é ilimitado, isto é, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}'$ com $n_k > n_0$.

Um primeiro resultado relacionado com subsequências nos diz que se uma sequência converge para um determinado limite, então todas as subsequências convergem e têm o mesmo limite.

Teorema 1.4. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$*, então toda subsequência de* (x_n) *converge para* L*.*

Demonstração. Se por hipótese $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, então

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ tal\ que\ \forall\ n > n_0 \Rightarrow x_n \in (L-\epsilon, L+\epsilon)\,.$$

Em particular, todo

$$n_k > n_0 \Rightarrow x_{n_k} \in (L-\epsilon, L+\epsilon)\,.$$

Portanto, $\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n_k} = L$. ■

Exemplo 1.2. *A sequência* $((-1)^n)$ *diverge, como já salientamos anteriormente, pois se convergisse para algum* $L \in \mathbb{R}$*, suas subsequências convergiriam para este mesmo valor. Mas*

$$\lim_{n\to\infty}\left((-1)^{2n}\right) = 1 \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty}\left((-1)^{2n+1}\right) = -1.$$

Definição 1.8. *Diz-se que* x_n *é um termo destacado quando*

$$\forall p > n \ \Rightarrow\ x_p \leq x_n.$$

Conforme enunciamos, apresentamos agora um resultado fundamental a respeito de seqüência numéricas. Trata-se do

Teorema 1.5. ***(de Bolzano-Weierstrass)****. Toda seqüência* (x_n) *limitada de números reais possui uma subseqüência convergente.*

Demonstração. Seja D o conjunto dos índices dos termos destacados de (x_n). Apriόre, vamos supor que D seja infinito, isto é, D tem a forma

$$D = \{n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k ...\}\,,$$

o que acarreta que a subsequência, digamos $(x_{n_k})_{n_k\in D}$ é limitada e decrescente. Logo, pelo Teorema 1.3, é convergente. Supondo D finito, neste caso, D assume a forma

$$D = \{n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k\}\,.$$

Tomemos agora n_1, como sendo estritamente maior do que qualquer que seja os índices n de D. Pois teremos a garantia, neste caso, de que o termo x_{n_1} não é destacado. Tomemos agora

$$n_2 > n_1 \ \Rightarrow\ x_{n_2} > x_{n_1}.$$

Seguindo a idéia, escolhemos

$$n_3 > n_2 > n_1 \ \Rightarrow\ x_{n_3} > x_{n_1}.$$

E assim sucessivamente.

Assim temos que $(x_{n_k})_{n_k\in D}$ é crescente, e portanto, segue novamente das hipóteses do Teorema 1.3 que a mesma é convergente.

O que conclui a demonstração. ■

1.2 Critério de Cauchy

Anteriormente vimos que para estudar a convergência de sequências, deveríamos ter um candidato a limite. O estudo das *Sequências de Cauchy* nos permitirá analisar a convergência de sequências sem que tenhamos que ter, a priore, um candidato a limite.

Definição 1.9. *Uma sequência (x_n) chama-se uma sequência de Cauchy, quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$.*

Usando os lemas a seguir, mostraremos que uma sequência é convergente se, e somente se, é de Cauchy.

Lema 1.1. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que (x_n) seja uma sequência convergente. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, então $\forall\ \frac{\epsilon}{2} > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$ temos

$$|x_m - L| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } |x_n - L| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Usando a desigualdade triangular obtemos

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - L| + |x_n - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \forall\ x \in X.$$

Logo (x_n) é de Cauchy. ■

Lema 1.2. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Com efeito, suponhamos que (x_n) seja uma sequência de Cauchy. Logo $\forall\ \epsilon > 0$, existe $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ vale $|x_m - x_n| < \epsilon$. Tomando $\epsilon = 1$ e um número natural $n_1 > n_0$ fixando $m = n_1$ segue

$$|x_n - x_{n_1}| < 1.$$

Logo para $n > n_0$ temos

$$x_n \in (x_{n_1} - 1, x_{n_1} + 1).$$

Assim, o Teorema 1.2, garante que (x_n) é limitada. ■

Agora vamos enunciar a equivalência entre convergência e o Critério de Cauchy.

Teorema 1.6. *Uma sequência é convergente se, e somente se, é de Cauchy.*

Demonstração. Já vimos no Lema 1.1 que se uma sequência é convergente, ela é de Cauchy. Assuma agora que (x_n) seja uma sequência de Cauchy. Pelo Lema 1.2, temos que (x_n) é limitada e pelo Teorema 1.5 **(de Bolzano-Weierstrass),** (x_n) possui uma subsequência, digamos (x_{n_k}) convergente, digamos para um certo $L \in \mathbb{R}$. Queremos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = L.$$

Com efeito, como (x_n) é uma sequência de Cauchy. Logo $\forall\ \epsilon > 0$, existe $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ vale

$$|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Temos ainda que se $\lim\limits_{n_k \to \infty} x_{n_k} = L$, para todo $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > n_1$ tem-se

$$|x_{n_k} - L| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Agora, tomando um termo da subsequência (x_{n_k}), digamos x_{n_t} tal que $n_t > n_0$ e $n_t > n_1$, vale

$$|x_{n_t} - L| < \frac{\epsilon}{2}\ e\ \ |x_n - x_{n_t}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assi,

$$|x_n - L| \leq |x_{n_t} - L| + |x_n - x_{n_t}| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo vale

$$|x_n - L| < \epsilon.$$

O que implica

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} = L, \forall\ n, k.$$

$\blacksquare$

1.3 Enumerabilidade em Subconjuntos de $\mathbb{R}$

Para nossos propósitos, faremos nesta seção uma apresentação sucinta dos conjuntos enumeráveis.

Indicaremos pelo símbolo I_n o conjunto

$$I_n = \{p \in \mathbb{N}|\ \ p \leq n\}.$$

Definição 1.10. *Um conjunto X chama-se finito quando é vazio ou quando existe, para cada $n \in \mathbb{N}$ uma bijeção*

$$f : I_n \to X.$$

No primeiro caso, diremos que X tem zero elementos. No segundo caso, diremos que $n \in \mathbb{N}$ é o número de elementos de X, ou seja, que X possui n elementos. Caso contrário, diz-se que X é um conjunto infinito.

Definição 1.11. *Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção*

$$f : \mathbb{N} \to X.$$

No segundo caso, dizemos que X é infinito enumerável.

Pondo

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), \ldots, x_n = f(n), \ldots,$$

podemos descrever X como sendo

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, ...\}.$$

Cada bijeção $f : \mathbb{N} \to X$ chama-se uma enumeração dos elementos de X.

Exemplo 1.3. *O conjunto* $\mathbb{N}$ *é claramente enumerável, basta tomar a identidade como bijeção.*

Exemplo 1.4. *O conjunto* $\mathbb{Z}$ *dos números inteiros é enumerável.*

Com efeito, pois uma bijeção f *pode ser assim definida:*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$n \longmapsto f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, \text{ se } n \text{ é par} \\ -\dfrac{(n+1)}{2}, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Corolário 1.1. *Seja* $f : X \longrightarrow Y$ *uma função injetiva. Se* Y *for finito então* X *também será. Além disso, o número de elementos de* X *não excede o de* Y*.*

Demonstração. Ao invés de uma demonstração formal, faremos um breve comentário sobre a prova. Uma função f injetiva estabelece uma correspondência um a um entre os elementos de X e Y. Assim, supomos Y finito, o domínio X deverá ser finito também, pois, caso fosse infinito, seria possível encontrar $x \in X$ que não estivesse relacionado com elemento algum $y \in Y$. Um absurdo, pois f é função. ∎

Corolário 1.2. X *é enumerável, então todo subconjunto* $Y \subset X$ *é enumerável.*

Demonstração. Suponha X enumerável. Então, existe uma bijeção

$$f : X \to \mathbb{N}.$$

Esta, por sua vez, fornece-nos a restrição

$$f|_y : Y \to f(Y)$$

de f ao subconjunto $Y \subset X$, que é também uma bijeção. Como $f(Y) \subset \mathbb{N}$, segue do Teorema 3.1 **(Ver Apêndice),** que $f(Y)$ é enumerável. Se $f(Y)$ for finito, como $f|_y$ é injetora, o Corolário 1.1 garante que Y seja finito e, portanto, enumerável. Caso seja $f^{-1}(Y)$ infinito, existe uma bijeção

$$g : \mathbb{N} \to f(Y).$$

Portanto,

$$(f|_y)^{-1} \circ g : \mathbb{N} \to Y$$

é bijeção, donde vem que Y é enumerável. ∎

Teorema 1.7. *Seja,* X, Y *conjuntos enumeráveis. O produto cartesiano* $X \times Y$ *é enumerável.*

Demonstração. Se X, Y são infinitos enumeráveis, existem funções injetivas

$$f_1 : X \to \mathbb{N} \qquad e \qquad f_2 : Y \to \mathbb{N}.$$

Definimos agora a função

$$g : X \times Y \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

dada por

$$g(x, y) = (f_1(x), f_2(x)).$$

A injetividade das funções f_1 e f_2 nos garante a de g. Vamos mostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Para isto, definimos a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (m, n) &\mapsto 2^m \cdot 3^n \end{aligned}.$$

Seja dados $(m, n), (m', n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ quaisquer. Temos que

$$f(m, n) = f(m', n') \Longrightarrow 2^m \cdot 3^n = 2^{m'} \cdot 3^{n'}.$$

Esta última igualdade implica

$$m = m' \ e \ n = n'.$$

De fato, se não fosse assim, teríamos

$$m \neq m' \ ou \ n \neq n'.$$

Isso implicaria um mesmo número

$$2^{m'} \cdot 3^{n'} = x = 2^m \cdot 3^n,$$

sendo decomposto, de duas meneira distintas, em fatores primos. Isso é um absurdo contra o Teorema Fundamental da Aritmética. Portanto,

$$\begin{aligned} f(m, n) = f(m', n') &\Longrightarrow 2^m \cdot 3^n = 2^{m'} \cdot 3^{n'} \\ &\Longrightarrow (m, n) = (m', n') \end{aligned}.$$

e f é injetiva. A função injetiva f, fornece uma bijeção

$$\overline{f} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}).$$

Como $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$, segue do Teorema 3.1 **(Ver Apêndice),** que $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ é enumerável. Como $\overline{f}$ é injetiva, obtemos que $\overline{f}$ é enumerável. Utilizando agora o fato de g ser injetiva, concluímos que $X \times Y$ é enumerável. ■

Exemplo 1.5. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.*

De fato, considere o conjunto

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}.$$

Temos que $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$ e, como já foi mostrado, $\mathbb{Z}$ é enumerável. Pelo Colorário 1.2*, $\mathbb{Z}^*$ é enumerável. Segue do Teorema* 1.7 *que o produto cartesiano*

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$$

é enumerável. Defina agora a seguinte função

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$$

dada por

$$f(m, n) = \frac{m}{n}.$$

Observando que f é sobrejetiva, o Corolário 3.1 ***(Ver Apêndice),*** *garante que o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável.*

Corolário 1.3. *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ conjuntos enumeráveis. A reunião*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

é enumerável.

Demonstração. Pela hipótese, $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, são conjuntos enumeráveis, então existem as sobrejeções

$$f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow X_1, f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow X_2, \ldots, f_n : \mathbb{N} \longrightarrow X_n, \ldots.$$

Definimos a sobrejeção

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X$$

dada por

$$f(m, n) = f_n(m).$$

Pelo Teorema 1.7, temos que o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Como a função

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X$$

é sobrejetiva e o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, segue-se Corolário 3.1 **(Ver Apêndice),** que X é enumerável. ■

Uma outra forte ferramenta que utilizaremos também na demonstração do teorema central desta monografia, além do Teorema 1.5, é o que vamos enunciar e demonstrar a seguir, o qual afirma que todo conjunto X de números reais contém um subconjunto enumerável K, que é denso em X. O mesmo será necessária para a construção da subsequência de funções a ser construida, além do próprio fato de que todo intervalo aberto em X conter um elemento de K.

Definição 1.12. *Diz-se que um ponto a é aderente ao $X \subset \mathbb{R}$ quando a é limite de alguma sequência de pontos $x_n \in X$.*

O conjunto formado por todos os pontos aderentes a um conjunto X chama-se de aderência ou fecho do conjunto X e escreve-se $\overline{X}$.

Exemplo 1.6. *O fecho dos intervalos (a, b), $[a, b)$ e $(a, b]$ é o intervalo $[a, b]$.*

Definição 1.13. *Dados $X, Y \subset \mathbb{R}$ com $X \subset Y$. Dizemos que X é denso em Y se $Y \subset \overline{X}$, isto é, quando todo ponto $y \in Y$ é aderente a X.*

Em outros termos, se $X \subset Y$, então X é denso em Y, se, e somente se, para todo $y \in Y$, existe $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to y$.

Definição 1.14. *Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se ponto interior de um conjunto X se X contém um intervalo aberto do qual a é elemento.*

Neste caso, escrevemos o conjutos dos pontos interiores de X por X°, denominado interior de X.

Exemplo 1.7. *Os conjutos* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ *e* $\mathbb{Q}$ *não possuem pontos interiores, ou seja,* $\mathbb{N}^\circ = \mathbb{Z}^\circ = \mathbb{Q}^\circ = \emptyset$.

Definição 1.15. *Um conjunto* X *é aberto quando todos os seus pontos são pontos interiores. Neste caso, temos* $X = X^\circ$.

Teorema 1.8. *Todo conjunto* X *de números reais contém um subconjunto enumerável* K*, denso em* X.

Demonstração. Seja K o referido subconjunto de X. Dado arbitrariamente $n \in \mathbb{N}$, pode-se exprimir a reta como reunião enumerável de intervalos de comprimento $\frac{1}{n}$. Basta notar que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $p \in \mathbb{Z}$, escolhamos um ponto

$$x_{pn} \in X \cap \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$$

se esta intersecção não for vazia (porquer se for vazia, x_{pn} não existirá). Assim, temos que o conjunto K dos pontos x_{pn} obtidos é enumerável. Provaremos agora a densidade de K em X, para isto, seja I um intervalo aberto contendo algum ponto $x \in X$. Para cada n suficientemente grande, o comprimento $\frac{1}{n}$ de cada intervalo

$$\left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$$

será menor do que a distância de x ao extremo superior de I. Assim temos existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$k \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) \subset I.$$

Logo

$$x \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) \cap K \neq \emptyset.$$

Assim, existe o ponto k_{pn}, com $k_{pn} \in I \cap K$. Isto mostra que todo intervalo aberto I que contém um ponto $x \in X$ contém também um ponto $k_{pn} \in K$. Logo K é denso em X. ■

1.4 Continuidade Uniforme

O conceito de continuidade uniforme que trataremos nesta seção aplica-se a propriedades de funções que sejam contínuas em todos os pontos de seus domínios. Funções com tais propriedades também são denominadas de funções globalmente contínuas. Neste tipo de continuidade, ao contrário da continuidade em apenas um ponto do domínio da função, é sempre possível, a partir do $\epsilon > 0$ dado, obter um único $\delta > 0$, que sirva simultaneamente para todos os pontos do domínio da função. Antes de estudar este tipo de continuidade, veremos algumas definições e teoremas:

Definição 1.16. *Um conjunto X diz-se fechado quando todo ponto aderente a X pertence a $\overline{X}$. Neste caso, temos $X = \overline{X}$.*

Exemplo 1.8. *Considere $X = [a, b]$. Temos $\overline{X} = [a, b]$. Portanto, X é fechado.*

Definição 1.17. *Diz-se um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado à direita ou limitado superiormente se existe um número real β tal que $x \leq \beta$, para todo $x \in X$. Do mesmo modo, X é limitado à esquerda ou limitado inferiormente se existe um número real α tal que $\alpha \leq x$, para todo $x \in X$. Se o conjunto X for limitado à direita e à esquerda ao mesmo tempo, é dito, simplesmente, conjunto limitado, isto é, existe existe uma constante $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$.*

Em espaços de dimensão finita, um conjunto X é dito compacto se ele é fechado e limitado.

Exemplo 1.9. *O Intervalo fechado $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, é compacto.*

Figura 1.1: **Intervalo** $[a, b]$.

A seguir, uma forma equivalente de caracterizar compactos em $\mathbb{R}$.

Teorema 1.9. *Um conjunto não vazio X é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos de X possui uma subsequência que converge para algum ponto de X.*

Demonstração. ($\Rightarrow$). Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, toda sequência (x_n) de pontos de X também é limitada. Então, pelo Teorema 1.5, (x_n) possui uma subsequência convergente cujo limite é um ponto de X, já que X é um conjunto fechado.

($\Leftarrow$). Se toda sequência (x_n) de pontos de X possui uma subsequência convergindo para algum ponto $a \in X$, então X é limitado porque, do contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$, poderíamos obter $x_n \in X$ com $|x_n| > n$. Ou seja, (x_n) é divergente. Assim, a (x_n) obtida não admitiria subsequência convergente. Além disso, temos que X é fechado, pois do contrário, existiria um ponto $a \notin X$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, onde cada $x_n \in X$. Neste caso, a sequência (x_n) não possuiria subsequência convergindo para um ponto de X pois todos suas subsequências teriam limite a. Logo, X é compacto. ■

Definição 1.18. *Um conjunto X, no qual todos os seus pontos são isolados, é chamado de conjunto discreto.*

Definição 1.19. *Um ponto $a \in \mathbb{R}$, é ponto de acumulação de X se existe uma sequência $x_n \subset X - \{a\}$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Neste caso, indicamos o conjunto dos pontos de acumulação de X por X'.*

Se X tem ponto de acumulação, então X é infinito.

Exemplo 1.10. $X = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\} \Rightarrow X' = \{0\}$.

Todo ponto de acumulação é também ponto de aderência. Porém, a recíproca é falça. Ou seja, se a é ponto de aderência de X e não é ponto de acumulação, então a é dito ponto isolado de X, isto é, existe $\epsilon > 0$, tal que

$$X \cap (a-\epsilon, a+\epsilon) = \{a\}.$$

Definição 1.20. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua no ponto a se $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta_{(\epsilon,a)} > 0$ tal que se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in X$ então $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.*

Dizemos que f é contínua se f é contínua em todos pontos de X.

Proposição 1.1. *Dados $a \in X'$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, então é contínua se, e somente se, toda sequência de pontos $(x_n) \subset X$, se $x_n \to a$ então $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$. Suponhamos que f é contínua em a e seja $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to a$. Assim, dado

$$\epsilon > 0, \exists\ \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Como $x_n \to a$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$, $\forall\ n \geq n_0$ e assim $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon, \forall\ n \geq n_0$.

Logo, $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

$(\Leftarrow)$. Supondo por absurdo que existe $\epsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$ e para todo $x \in X$ tal que $|x_n - a| < \delta$ tem-se $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$.

Tomando $\delta = \frac{1}{n}$, obtemos $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ e $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$, isso significa que $x_n \to a$ e $f(x_n) \nrightarrow f(a)$, o que contradiz a hipótese. Portanto, $f(x_n) \longrightarrow f(a)$. ■

Definição 1.21. *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua se dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta_{(\epsilon)}$ tal que para todo $x, x_0 \in X$ com $|x - x_0| < \delta$ tem se $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.*

Toda função uniformemente contínua é contínua, mas a recíploca não vale.

Exemplo 1.11. *Considere $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Dado $\epsilon > 0$, mostraremos que não se pode escolher $\delta > 0$ que não dependa de a tal que*

$$|x - a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon$$

seja qual for $a > 0$.

Com efeito, dado $\epsilon > 0$, suponhamos escolhido $\delta > 0$. Tomemos um número positivo a tal que $0 < a < \delta$ e $0 < a < \frac{1}{3\epsilon}$. Então, para $x = a + \frac{\delta}{2}$, temos $|x - a| < \delta$ mas

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{a + \frac{\delta}{2}} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{2}{2a + \delta} - \frac{1}{a}\right| = \frac{\delta}{(2a + \delta)a} > \frac{\delta}{3a \cdot a} > \frac{1}{3a} > \epsilon.$$

Provaremos agora um resultado de importância fundamental sobre continuidade uniforme.

Teorema 1.10. ***(de Heine Borel).*** *Se X é compacto, então toda aplicação contínua*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

é uniformemente contínua.

Demonstração. Soponhamos, por absurdo, que f não seja uniformemente contínua. Então existe um $\epsilon > 0$ tal que,

$$\forall\ \delta > 0,\ \exists\ x, x_0 \in D \textit{ tais que } |x - x_0| < \delta \textit{ e } |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon.$$

Tomando, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\delta = \frac{1}{n}$ construimos duas sequências $(x_n) \subset D$ e $(y_n) \subset D$ tais que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \textit{ e } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon, \forall\ n. \tag{1.1}$$

Podemos extrair uma subsequência de (x_n) (ainda denotada (x_n)) convergindo para $x_0 \in X$. Como

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

obtemos que (y_n) também converge para x_0. Sendo f contínua no ponto x_0, temos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0),$$

de sorte que temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}[f(x_n) - f(y_n)] &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) - \lim_{n\to\infty} f(y_n) \\ &= f(x_0) - f(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Porém, isso contradiz a desigualdade (11), para todo n. Portanto, f é uniformemente contínua. ■

Corolário 1.4. ***(da conservação do sinal).*** *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em a. Se $f(a) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X \cap \{a - \delta, a + \delta\}$, $f(x)$ tem o mesmo sinal que $f(c)$.*

Demonstração. Com efeito, para fixar as ideias, suponhamos que $f(a) > 0$. Devido à contínuidade, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon \textit{ para } a - \delta < x < a + \delta. \tag{1.2}$$

Se tomarmos o δ correspondente a $\epsilon = \frac{f(c)}{2}$, de (1.2) vem

$$\frac{1}{2} f(a) < f(x) < \frac{3}{2} f(a) \textit{ sempre que } a - \delta < x < a + \delta.$$

Portanto, $f(a) > 0$ neste intervalo e por isso $f(x)$ e $f(a)$ têm o mesmo sinal. Se $f(a) < 0$, toma-se o δ correspondente a $\epsilon = \frac{-1}{2} f(c)$ e chaga-se a mesma conclusão. ■

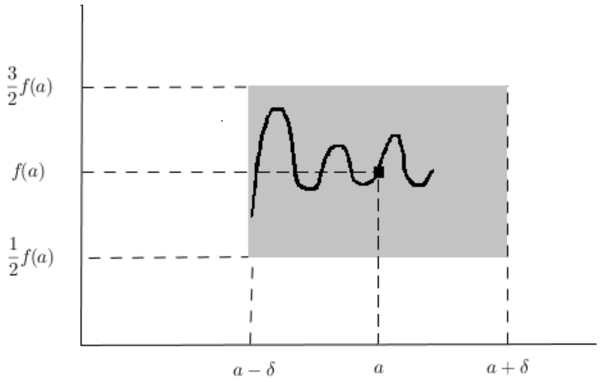

Figura 1.2: $f(x) > 0$ **para** x **próximo de** c **pois** $f(a) > 0$.

Nota: Se existe continuidade lateral em a, então existe um intervalo semi-fechado $[a, a+\delta)$ ou $(a-\delta, a]$ no qual f tem o mesmo sinal que $f(a)$.

A seguir vamos definir uma classe especial de funções cuja propriedade característica implica imediantamente, como veremos, a continuidade uniforme de seus membros em seus respectivos domínios. Essa classe de funções é importante em aplicações de análise, como por exemplo, na aplicação abordada no capítulo III.

Definição 1.22. *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita Lipschitz contínua, se existe $c > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c\,|x - x_0| \;\; \forall\; x, x_0 \in X.$$

Corolário 1.5. *Se $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, e f é Lipschitz, então f é uniformemente contínua em X.*

Demonstração. Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c\,|x - x_0| \;\; \forall\; x, x_0 \in X.$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \frac{\epsilon}{\delta}$. Então se $x, x_0 \in X$ e $|x - x_0| < \delta$, temos que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c\,|x - x_0| \leq c\delta = \epsilon,$$

o que mostra que f é uniformemente contínua em X. ∎

1.5 Convergência Pontual e Uniforme de Sequência de Funções

Para sequência de funções, diferentemente das sequências numéricas, para as quais existe uma única noção de limite, há diversos conceitos de limite. Veremos aqui os dois principais deles, *o limite pontual* e *o limite uniforme.*

Definição 1.23. *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma sequência de funções é uma função que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa uma função f_n definida em X com valores em $\mathbb{R}$.*

Notação: (f_n), $\forall\, x \in X$.

Definição 1.24. *Dizemos que uma sequência de funções* (f_n) *converge pontualmente (ou simplesmente) para uma função* f *quando, para todo* $\epsilon > 0$ *dado, existe* $n_{0(\epsilon,x)} \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\forall\, n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,\; \forall\, x \in X.$$

Notação: $f_n \to f$ pontualmente em X.

Exemplo 1.12. *Para todo* $x \in [0,1]$, *a sequência* $f_n(x) = x^n$, *converge pontualmente para uma função descontínua nesse intervalo dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \; se\; x \neq 1 \\ \\ 1, \; se\; x = 1. \end{cases}$$

Claramente, para cada $x \in [0,1)$ *temos*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

e

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 1,$$

para $x = 1$.

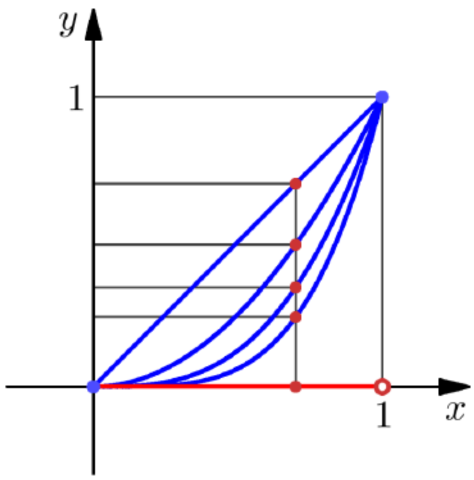

Figura 1.3: **Gráficos das funções** $f_n(x) = x^n$.

Um tipo de convergência de sequência funções mais restrita do que a pontual, chama-se *convergência uniforme*, que definiremos agora.

Definição 1.25. *Dizemos que uma sequência de funções* (f_n) *convergência uniformemente para uma função* f *quando, para todo* $\epsilon > 0$ *dado, existe* $n_{0(\epsilon)} \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\forall\, n > n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,\; \forall\, x \in X.$$

Notação: $f_n \to_u f$ em X.

1.5.1 Interpretação Geométrica da Convergência Uniforme

Definição 1.26. *Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$, chamamos de faixa de raio ϵ (e amplitude 2ϵ) em torno do gráfico de f ao conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x \in X$ e $|y - f(x)| < \epsilon$, ou seja, ao conjunto*

$$F(f;\epsilon) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, f(x) - \epsilon < y < f(x) + \epsilon\right\}.$$

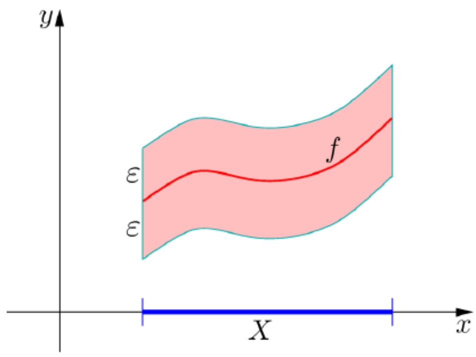

Figura 1.4: **Faixa de amplitude 2ϵ em torno do gráfico de f.**

Assim, dizer que $f_n \to_u f$ em X significa afirmar que, para todo $\epsilon > 0$ dado, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todas funções f_n, com $n > n_0$, têm seus gráficos contidos na faixa de raio ϵ em torno do gráfico de f.

Exemplo 1.13. *A sequência de funções $f_n(x) = \frac{x}{n}$, converge uniformemente para a função identicamente nula num conjunto limitado $[0, 1]$.*

De fato, dado $\epsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 > \frac{1}{\epsilon}.$$

Assim, se $n \geq n_0$ e $x \in [0, 1]$, então

$$\left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|}{n_0} < \epsilon.$$

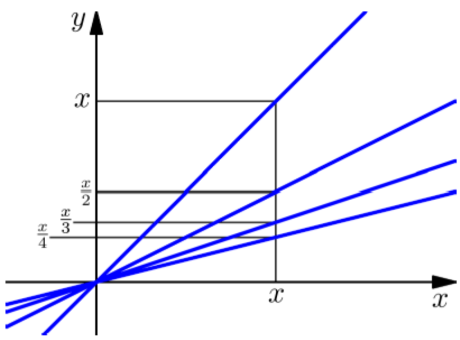

Figura 1.5: **Gráficos das funções $f_n(x) = \frac{x}{n}$.**

A convergência uniforme implica na convergência pontual. A recíploca, no entanto, não vale. Em particular, o Exemplo 1.12 mostra que uma sequêmcia de funções contínua pode convergir pontualmente para uma função descontínua. O resultado seguinte nos mostra que este inconveniente não ocorre se a convergência for uniforme.

Teorema 1.11. ***(Continuidade de sequência de funções).*** *Se $f_n \to_u f$ em X e todas as funções f_n são contínuas num ponto $x_0 \in X$, então f é contínua em x_0.*

Demonstração. Temos que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \ \forall \ x \in X.$$

Fixemos um número natural $n > n_0$. Como f_{n_0} é contínua em x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

se $|x - x_0| < \delta$, o que demonstra a continuidade de f em x_0. ■

No próximo teorema se cada f_n for contínua em $[a, b]$ então pelo Teorema 1.11, f é contínua e, portanto, integrável em $[a, b]$.

Teorema 1.12. ***(Passagem ao limite sob o sinal de integral)****. Se uma sequência (f_n) de funções integráveis num mesmo intervalo $[a, b]$ converge uniformemente para uma função f. Então:*

i) *f é integrável em $[a, b]$ e*

ii) $\displaystyle lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx = lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$

Em resumo:

$$\int_a^b lim f_n = lim \int_a^b f_n,$$

desde que $lim f_n$ seja uniforme.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$

$$\exists \ n_0 \in \mathbb{N} \ : \ n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4\,(b-a)}.$$

Feito isso, Fixemos $m > n_0$. Como f_m é integrável, existe uma partição de $[a, b]$ tal que w e $w^{'}$ são respectivamente as oscilações de f e f_m no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Da condição imediata da integrabilidade, Teorema 3.2 (Ver Apêndice), temos que

$$\sum_{i=1}^{m} w_i^{'}\,(t_i - t_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mas, para $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ quaisquer, vale

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(y) - f_m(y) + f_m(y) - f_m(y) + f_m(y) - f(x)| \\ &= |[f(y) - f_m(y)] + [f_m(y) - f_m(x)] + [f_m(x) - f(x)]| \\ &\leq |f(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)|\,. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq \frac{\epsilon}{4\,(b-a)} + w_i^{'} + \frac{\epsilon}{4(b-a)} \\ &= w_i^{'} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}. \end{aligned}$$

Portanto, em particular M_i e m_i em $[t_{i-1}, t_i]$, temos

$$w^{'} \leq w_i^{'} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} w\,(t_i - t_{i-1}) &\leq w_i^{'}\,(t_i - t_{i-1}) + \left[\frac{\epsilon}{2(b-a)}\right] \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1})\,. \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\sum_{i=1}^{m} w\,(t_i - t_{i-1}) < \epsilon.$$

Com isso,

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b \left[f(x) - f_n(x)\right] dx\right|.$$

Temos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável, e como

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)},\ com\ n > n_0.$$

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b \left[f(x) - f_n(x)\right] dx\right| &\leq \left|\int_a^b |f(x) - f_n(x)|\, dx\right| \\ &\leq \frac{(b-a)\epsilon}{4/(b-a)} < \epsilon,\ se\ n > n_0. \end{aligned}$$

Concluímos assim

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

■

1.6 Critério de Cauchy para Convergência Uniforme

Um critério importante para a convergência uniforme, análogo ao critério de Cauchy para sequências de números reais, é o *critério de Cauchy* que estabeleceremos agora para convergência uniforme de sequência de funções.

Definição 1.27. *Dizemos que uma sequência de funções (f_n) é uma sequência de Cauchy quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$ para todo $x \in X$.*

Teorema 1.13. *Uma sequência de funções (f_n) é uniformemente convergente se, e só se, é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$. Suponhamos que $f_n \to_u f$ em X. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \ \forall\ x \in X.$$

Logo,

$$m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \ \forall\ x \in X.$$

Portanto, (f_n) é uma sequência de Cauchy.

$(\Leftarrow)$. Se (f_n) é uma sequência de funções de Cauchy. Então, $(f_n(x))$ é uma sequência numérica de Cauchy para todo $x \in X$ e é, portanto, convergente para todo $x \in X$. Podemos, assim, definir uma função f tal que

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \ \forall\ x \in X. \tag{1.3}$$

Devemos mostrar que $f_n \to_u f$. Como (f_n) é uma sequência de Cauchy de funções temos

$$\forall\ x \in X,\ m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \Leftrightarrow f_m(x) - \epsilon < f_n(x) < \epsilon + f_m(x).$$

Assim, nesta última desigualdade acima, mantendo $n > n_0$ e $x \in X$ fixos e tomando $m \to \infty$, segue de (1.3)

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < \epsilon + f(x).$$

Ou seja, se $n > n_0$, então

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,\ \forall\ x \in X.$$

Logo, $f_n \to_u f$ em X. ■

Capítulo 2

O Teorema de Arzelá-Ascoli

Como ressaltamos anteriormente, dedicaremos este capítulo para demonstrar o resultado principal de estudo desta pesquisa.

No que se segue, conderemos o conjunto de funções contínuas de $X \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$

$$E = \left\{ \ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ contínua } \right\}.$$

Definição 2.1. *Um conjunto E de funções contínuas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se pontualmente limitado quando, para cada $x \in X$, existe $c_x > 0$ tal que $|f(x)| \leq c_x$ para toda $f \in E$.*

Dizer que um conjunto E de funções contínuas é pontualmente limitado significa que, para todo $x \in X$, o conjunto

$$\{f(x) \mid f \in E\}$$

é limitado.

Definição 2.2. *Um conjunto E de funções contínuas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se uniformemente limitado quando existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para toda $f \in E$ e todo $x \in X$.*

Nota: É importante resultar que se E for uniformemente limitado, de acordo com a difinição 2.2, c não depende de x.

Um conjunto E de funções, é uniformemente limitado se os gráficos de todas as funções de E estão contidos na faixa

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -c < f(x) < c\right\}.$$

Definição 2.3. *Dizemos que uma sequência de funções (f_n) é pontualmente (ou respectivamente, uniformemente) limitada se o conjunto de funções contínuas E é pontualmente (ou uniformemente) limitado.*

Teorema 2.1. *Seja (f_n) uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas num domínio compacto X. Então, f é limitada e (f_n) é uma sequência uniformemente limitada.*

Demonstração. Primeiro vejamos que f é limitada. De fato, como $f_n \to_u f$ em X, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < 1 \ \forall \ n \geq n_0 \ e \ x \in X.$$

Como,

$$|f(x)| - |f_{n_0}(x)| \leq |f_{n_0}(x) - f(x)| < 1$$

Logo,

$$|f(x)| < |f_{n_0}(x)| + 1 \; \forall \; x \in X.$$

Sendo f_{n_0} limitada, implica que f é limitada.

Seja agora $c > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq c \; \forall \; x \in X \; e \; n < n_0.$$

Sendo cada $f_1, ..., f_{n_0-1}$ são limitada por c em X. Tomando

$$c = max\{c_i\}, \forall \; 1 \leq i \leq n$$

tal que

$$|f_n(x)| \leq c_n.$$

E o fato de que

$$|f(x)| \leq c \; \forall \; x \in X.$$

Para $n \geq n_0$ temos

$$|f_n(x)| \leq |f(x)| \leq c + 1 \; \forall \; n \; e \; x \in X.$$

Assim, a sequência (f_n) é uniformemente limitada. ■

A recíproca desse teorema é falsa, em particular, por exemplo, temos a sequência de funções dada por $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$. Essa sequência, conforme veremos logo a seguir, apesar de convergir pontualmente para a função identicamente nula em $[0, 1]$, é limitada por

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{4}$$

para todo n e todo $x \in [0, 1]$, mas (f_n) não possui uma subsequência uniformemente convergente em $[0, 1]$. Caso contrário, se (f_n) admitisse alguma subsequência, a mesma deveria tender uniformemente a zero, o que é impossível, pois cada f_n assume o valor $\frac{1}{4}$ em algum ponto do intervalo $[0, 1]$.

Com efeito, como $f_n(0) = f_n(1) = 0$ para todo n e o intervalo é compacto, o ponto de máximo x_n da função f_n pertence ao intervalo aberto $(0, 1)$.

Logo,

$$f'_n(x_n) = 0,$$

ou seja,

$$nx_n^{n-1}(1 - x_n^n) - x_n^n n x_n^{n-1} = nx_n^{n-1}(1 - 2x_n^n) = 0.$$

Sendo $x_n \neq 0$, temos que

$$x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

e

$$f_n(x_n) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}.$$

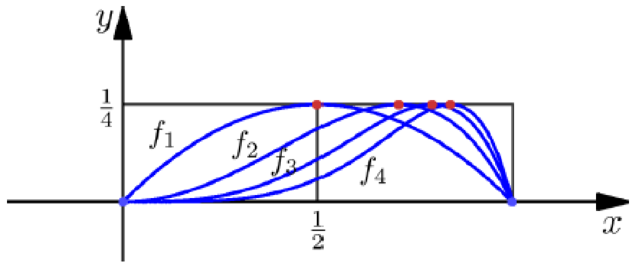

Figura 2.1: **Gráficos das funções** $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$.

Neste caso, como podemos perceber, não basta então que as funções f_n tomem valores no mesmo intervalo limitado para que toda sequência nesse mesmo intervalo possua uma subsequência uniformemente convergente. É preciso que a sequência possua uma hipótese adicional.

O Teorema de Arzelá-Ascoli, nosso principal resultado, a ser estabelecido neste capítulo, assevera que *equicontinuidade* é a hipótese adicional que o conjunto limitado precisa cumprir para ter uma subsequência uniformemente convergente.

2.1 Equicontinuidade

Definição 2.4. ***(Equicontinuidade).*** *Um conjunto E é dito equicontínuo no ponto $x_0 \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ em X implique $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, seja qual for $f \in E$. E diz-se equicontínuo quando é equicontínuo em todos os pontos de X. Analogamente, uma sequência de funções (f_n) diz-se equicontínua no ponto $x_0 \in X$ (respectivamente, equicontínua) quando o conjunto E o for.*

Observação 2.1. *Evidentemente, se E é equicontínuo no ponto x_0, então toda função $f \in E$ é contínua em x_0.*

Ávila [01] , interpretou equicontinuidade, em seu livro de (1999), da seguinte forma:

> "[...] *caso possamos determinar um único $\delta > 0$ para todas as funções f_n, então a continuidade estará sendo igual para todas as funções da sequência, isto é, estaremos tendo "equicontinuidade" (equi = igual)*." $(AVILA, 1999, p.237)$.

De acordo com próximo teorema, uma importante classe de funções equicontínuas é fornecida pelas funções uniformemente convergentes.

Teorema 2.2. *Seja (f_n) uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas num domínio compacto X. Então essa sequência é equicontína.*

Demonstração. Seja f o limite uniforme de f_n. Pelo Teorema 1.11, f é contínua. Em vista do Teorema 1.10, dado $\epsilon > 0$, é possível tomar $\delta_0 > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}, \tag{2.1}$$

para $|x - x_0| < \delta_0$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \forall\, x \in X. \tag{2.2}$$

Logo, se $|x - x_0)| < \delta_0$ e $n > n_0$, das relações (2.1) e (2.2) concluímos que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x_0)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f_n(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Como pelo Teorema 2.10, $f_1, ..., f_{n_0}$ e f são contínuas x_0, para cada i, $1 \leq i \leq n_0$, tomemos $\delta_j > 0$ tal que

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \epsilon,$$

para $|x - x_0| < \delta_j$. Portanto, se tomarmos $\delta = min\,\{\delta_0, \delta_1, ...\delta_{n_0}\}$, teremos que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x_0)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f_n(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $n > n_0$ e $|x - x_0| < \delta$.

Logo, o conjunto formado pelos elementos de (f_n) é equicontínuo no ponto $x_0 \in X$. Como $x_0 \in X$ é arbitrário, o mesmo é equicontínuo em X. ■

De acordo com Ávila [01] , os Teoremas 2.1 e 2.2 mostram que limitação e equicontinuidade são condições necessárias para que uma sequência de funções contínuas num domínio compacto seja uniformemente convergente. Veremos a seguir que essas condições garantem que a sequência possui uma subsequência uniformemente convergente

Teorema 2.3. ***(de Arzelá-Ascoli).*** *Toda sequência equicontínua e pontualmente limitada de funções $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ possui uma subsequência uniformemente convergente.*

Demonstração. Seja $K = \{k_1, k_2, ..., k_n, ...\}$ um subconjunto enumerável denso de X, garantido pelo Teorema 1.8 no capítulo 1.

Consideremo a sequência numérica $(f_n(k_1))_{n\in\mathbb{N}}$. Pelo Teorema 1.5, concluímos que existe uma subsequência $(f_{1n})_{n\in\mathbb{N}'}$ de (f_n) tal que a sequência numérica

$$(f_{11}(k_1), f_{12}(k_1), ..., f_{1n}(k_1), ...)$$

é convergente.

De modo análogo, obtemos uma subsequência $(f_{2n})_{n\in\mathbb{N}''}$ de (f_{1n}) tal que a sequência numérica

$$(f_{21}(k_2), f_{22}(k_2), ..., f_{2n}(k_2), ...)$$

é convergente.

Prosseguindo o processo, indefinidamente, obtemos um conjunto enumerável de subsequências (f_{jn}), j=1,2,3,..., da sequência original (f_n), tais que

$$(f_{1n}) \subset (f_n) \text{ } e \text{ } (f_{jn}) \subset (f_{j-1,n})$$

para $j > 1$, e as sequências numéricas

$$(f_{11}(k_1), f_{12}(k_1), ..., f_{1n}(k_1), ...)$$

$$(f_{21}(k_2), f_{22}(k_2), ..., f_{2n}(k_2), ...)$$

$$...$$

$$(f_{n1}(k_n), f_{n2}(k_n), ..., f_{nn}(k_n), ...)$$

$$...$$

são convergentes. Onde a sequência na n-ésima linha converge nos pontos $k_1, k_2, ..., k_n$, isto é, a sequência $(f_{jn}(k))$, sendo uma subsequência de todas as anteriores,

$$(f_{1n}(k)), (f_{2n}(k)), ..., (f_{j-1,n}(k)),$$

converge em $k_1, k_2, ..., k_n$.

Consideremos agora a sequência diagonal $(g_n) = (f_{nn})$, exceto para um número finito de termos, e observe que, para $n \geq j$, (f_{nn}) é subsequência de (f_{jn}), portanto, converge em $k_1, k_2, ..., k_n$. Isso implica que $(f_{nn}(k))$ converge em todos os elementos de K.

Devemos mostrar que a subsequência (f_{nn}) converge uniformemente em X. Para isso, seja $\epsilon > 0$ dado. Agora usando a hipótese de equicontinuidade de (f_n) e, em particular, a continuidade uniforme de (f_{nn}), existe um número $\delta > 0$ tal que

$$|f_{nn}(x) - f_{nn}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}, \ \textit{se} \ |x - x_0| < \delta \ \textit{e para todo } n. \tag{2.3}$$

Agora, pela densidade de K temos que para cada $x \in X$ dado e $\delta > 0$, existe $k_j \in K$, tal que, $k_j \in (-\delta + x, \delta + x)$, ou seja, $|x - k_j| < \delta$. Portanto, para cada $x \in X$, podemos fazer em (2.3) $x_0 = k_j$ tal que

$$|x - k_j| < \delta \Rightarrow |f_{nn}(x) - f_{nn}(k_j)| < \frac{\epsilon}{3}, \ \forall \ n. \tag{2.4}$$

Notemos também que como a sequência $(f_{nn}(k_j))$ é convergente, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|f_{nn}(k_j) - f_{mm}(k_j)| < \frac{\epsilon}{3}, \ \textit{sempre que } m, n \geq n_0. \tag{2.5}$$

Assim, usando a equicontinuidade e as relações (2.4) e (2.5) temos

$$\begin{aligned} |f_{nn}(x) - f_{mm}(x)| &\leq |f_{nn}(x) - f_{nn}(k_j)| + |f_{nn}(k_j) - f_{mm}(k_j)| + |f_{mm}(k_j) - f_{mm}(x)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \ \forall \ x \in X \ \textit{e} \ m, n \geq n_0. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 1.13, temos que a subsequência (f_{nn}) é de Cauchy e portanto converge uniformemente em K. ∎

Segundo Ávila (1999, p. 239), o Teorema 2.3, embora não seja uma recíproca dos Teoremas 2.1 e 2.2, está perto disso. O teorema seguinte é uma versão do Teorema de Arzelá-Ascoli nesse sentido, por estabelecer equivalência entre a convergência uniforme e as condições de limitação e equicontinuidade, que são as hipóteses usadas em 2.1 e 2.2.

Teorema 2.4. ***(de Arzelá-Ascoli).*** *Seja E um conjunto de funções contínuas definidas no compacto $X \subset \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *E é equicontínuo e uniformemente limitado.*

(ii) *E é equicontínuo e pontualmente limitado.*

(iii) *Toda sequência de funções $f_n \in E$ possui uma subsequência uniformemente convergente.*

Demonstração. Como por **(i)** E é um conjunto equicontínuo e uniformemente limitado temos que **(i)** $\longrightarrow$ **(ii)** e, pelo Teorema 2.3, que **(ii)** $\longrightarrow$ **(iii)**. Resta, então, mostrar que **(iii)** $\longrightarrow$ **(i)**. Para tal, suponhamos que toda sequência de funções de E possui uma subsequência uniformemente convergente.

• **Prova de que E é equicontínuo em** X.

Suponhamos, por absurdo, que E não é equicontína em algum ponto $x_0 \in X$. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ existem $x_n \in X$ e $f_n \in E$ tais que

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \ e \ |f_n(x_n) - f_n(x_0)| \geq \epsilon. \tag{2.6}$$

Por hipótese, existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tal que a subsequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ converge uniformemente em X. Então, pelo Teorema 2.2, o conjunto $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}'\}$ é equicontínuo em X. Assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon, \ \forall \ n \in \mathbb{N}'.$$

Em particular, tomando $n \in \mathbb{N}'$, $n > \frac{1}{\delta}$, temos que

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \ e \ |f_n(x_n) - f_n(x_0)| < \epsilon,$$

o que é uma contradição de $(2, 6)$. Logo, **(iii)** implica que E é equicontínuo.

• **Prova de que E é uniformemente limitado.**

Suponhamos, por absurdo, que E não é uniformemente limitado. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $f_n \in E$ tal que

$$sup_{x \in X} |f_n(x)| > n.$$

Por hipótese, existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tal que a subsequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ é uniformemente convergente em X. Então, como cada função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada, pois f_n é contínua num compacto, e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ é uniformemente convergente em X, em vista Teorema 2.1, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ é uniformemente limitada, o que é uma contradição.

Logo, **(iii)** implica que E é uniformemente limitado. ∎

Capítulo 3

Aplicação

Neste capítulo, como a princípio comentamos, veremos uma das dessas aplicações do Teorema de Aszelá-Ascoli, um exemplo de um problema de máximo e mínimo no qual, em vez de um ponto, busca-se uma função que torne máxima ou mínima uma certa expressão. O estudo desses problemas contistui o *Cálculo das Variações*, onde o Teorema de Aszelá-Ascoli é um instrumento muito útil para demonstrar a existência de soluções. Começaremos com um caso sem solução.

Consideremos o seguinte problema:

1º CASO: Seja $\mathtt{F}$ o conjunto das funções contínuas $f : [-1,1] \to [0,1]$ tais que $f(-1) = f(1) = 1$. Para cada $f \in \mathtt{F}$, seja

$$A(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx,$$

a área compreendida entre o gráfico de f e o eixo-OX.

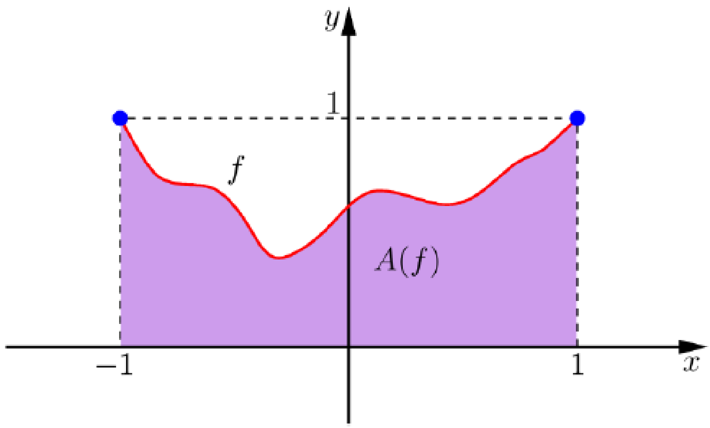

Figura 3.1: $A(f)$ **é a área da região hachurada.**

1ª AFIRMAÇÃO: Não existe $f_0 \in \mathtt{F}$ tal que $A(f_0)$ seja mínima, ou seja, $A(f_0) \leq A(f)$ para toda $f \in \mathtt{F}$.

Com efeito, a função $f : [-1,1] \to [0,1]$, definida por $f_n(x) = x^{2n}$, para cada n, pertence a $\mathtt{F}$ e

$$A(f) = \int_{-1}^{1} x^{2n} dx = \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|_{-1}^{1} = \left(\frac{1^{2n+1}}{2n+1} \right) - \left(\frac{-1^{2n+1}}{2n+1} \right) = \left(\frac{1^{2n+1}}{2n+1} + \frac{1^{2n+1}}{2n+1} \right) = \frac{2}{2n+1}.$$

Agora, supondo, por contradição, que existe $f_0 \in \mathtt{F}$ tal que

$$A(f_0) \leq A(f)$$

para toda $f \in \mathtt{F}$ temos que

$$A(f_0) \leq A(f_n) = \frac{2}{2n+1}, \ \forall \ n,$$

implica

$$A(f_0) = 0.$$

Absurdo, pois se $f_0 \in \mathtt{F}$, para todo $x \in [-1, 1]$, f_0 é contínua e pelo Corolário 1.4,

$$A(f_0) > 0.$$

Portanto, embora o

$$inf \{A(f) \mid f \in \mathtt{F}\} = 0,$$

não existe $f_0 \in \mathtt{F}$ tal que

$$A(f_0) = 0.$$

Agora vamos mostrar que apesar de o conjunto $\mathtt{F}$ ser uniformemente limitado, não é equicontínuo no intervalo $[-1, 1]$.

De fato, seja $\epsilon_0 = \frac{1}{3} > 0$. Como a sequência $\frac{1}{2^{1/2n}} \to 1$, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \frac{1}{2^{1/2n_0}} - 1 \right| < \delta$. Logo,

$$x_{n_0} = \frac{1}{2^{1/2n_0}} \in [-1, 1]$$

e

$$|f_{n_0}(x_{n_0}) - f_{n_0}(1)| = \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2} > \epsilon_0 = \frac{1}{3},$$

onde $f_{n_0}(x) = x^{2n_0}$ pertece a $\mathtt{F}$. Ou seja, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ podemos obter $x_\delta \in [-1, 1]$ e $f_\delta \in \mathtt{F}$ com

$$|x_\delta - 1| < \delta \ e \ |f_\delta(x_\delta) - f_\delta(1)| > \epsilon_0.$$

Logo, $\mathtt{F}$ é não equicontínuo.

<u>2º CASO</u>: Seja $c > 0$ fixo e consideremos o conjunto $\mathtt{E}_c$ formando pelas funções

$$f : [-1, 1] \to [0, 1]$$

tais que $f(-1) = f(1) = 1$ e

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c\,|x - x_0|$$

para quaisquer $x, x_0 \in [-1, 1]$.

Mostraremos, usando o *Teorema de Arzelá-Ascoli*, que existe uma função $f_c \in \mathtt{E}_c$ tal que

$$A(f_c) \leq A(f)$$

para toda $f \in \mathtt{E}_c$.

2^{a} AFIRMAÇÃO: O conjunto $\mathtt{E}_c$ é uniformemente limitado e equicontínuo. Além disso, se $f_n \in \mathtt{E}_c$, $n \in \mathbb{N}$, e $f_n \to f$ pontualmente em $[-1, 1]$, então $f \in \mathtt{E}_c$.

De fato, temos que

$$f(1) = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1,$$

$$f(-1) = \lim_{n\to\infty} f_n(-1) = 1,$$

$$|f(x) - f(x_0)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq c\,|x - x_0|\,,$$

e $f(x) \in [1, 1]$ quaisquer que seja $x, x_0 \in [-1, 1]$, pois

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq c\,|x - x_0| \;\; e\;\; 0 \leq f_n(x) \leq 1, \forall\, n.$$

Sendo $\mathtt{E}_c$ uniformemente limitado, temos que existe o

$$\mu_c = inf\,\{A(f) \mid f \in \mathtt{E}_c\}\,.$$

Logo, da definição de infímo, para cada n, existe $f_n \in \mathtt{E}_c$ tal que

$$\mu_c \leq A(f_n) \leq \mu_c + \frac{1}{n},$$

implica

$$\lim_{n\to\infty} A(f_n) = \mu_c.$$

Assim, pelo *Teorema de Arzelá-Ascoli*, a sequência (f_n) possui uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}'}$, que converge uniformemente para uma função $f_c \in \mathtt{E}_c$. Logo, pelo Teorema 1.12, segue

$$A(f_c) = \int_{-1}^{1} f_c(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{-1}^{1} f_{n_k}(x)dx = \lim_{n\to\infty} A(f_{n_k}) = \mu_c.$$

Ou seja, $A(f_c)$ é o valor mínimo de $A(f)$ para toda $f \in \mathtt{E}_c$.

Agora vamos determinar a função limite f_c para os seguintes casos:

C1) $\underline{c > 1;}$

C2) $\underline{c = 1;}$

C3) $\underline{0 < c < 1.}$

C1) $\underline{c > 0}$ temos que

$$f_c(x) = \begin{cases} (1-c) - cx, & \text{se } x \in \left[-1, \frac{1}{c} - 1\right] \\ 0, & \text{se } x \in \left[\frac{1}{c} - 1, 1 - \frac{1}{c}\right] \\ (1-c) + cx, & \text{se } x \in \left[1 - \frac{1}{c}, 1\right] \end{cases}$$

é a única função pertencente a $\mathtt{E}_c$ tal que $A(f_c) = min\,\{A(f) \mid f \in \mathtt{E}_c\}$. Então,

$$min\,\{A(f) \mid f \in \mathtt{E}_c\} = \frac{1}{c}.$$

Com efeito, como para toda $f \in \mathtt{E}_c$:

• $1 - f(x) = |f(-1) - f(x)| \leq c\,|x+1| = c\,(x+1)\ \ \forall\, x \in [-1,1]$ e $1 - c\,(x+1) \geq 0$ se, e só se, $x \in \left[-1, \frac{1}{c} - 1\right]$, temos que

$$f(x) \geq (1-c) - cx \geq 0$$

para todo $x \in \left[-1, \frac{1}{c} - 1\right]$.

• $1 - f(x) \leq |f(1) - f(x)| \leq c\,|1-x| = c\,(1-x)\ \ \forall\, x \in [-1,1]$ e $1 - c\,(1-x) \geq 0$ se, e só se, $x \in \left[1 - \frac{1}{c}, 1\right]$ temos que

$$f(x) \geq (1-c) + cx \geq 0$$

para todo $x \in \left[1 - \frac{1}{c}, 1\right]$.

Logo, $f_c : [-1,1] \to \mathbb{R}$, definida acima, pertence a $\mathtt{E}_c$, pois $0 \leq f_c(x) \leq 1$ e:

a) se $x, x_0 \in \left[-1, \frac{1}{c} - 1\right] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = c\,(x - x_0)$.

b) se $x, x_0 \in \left[1 - \frac{1}{c}, 1\right] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = c\,(x - x_0)$.

c) se $x \in \left[-1, \frac{1}{c} - 1\right]$ e $x_0 \in \left[\frac{1}{c} - 1, 1 - \frac{1}{c}\right] \Rightarrow$

$$|f(x) - f(x_0)| = 1 - c - cx = c\frac{1-c}{c} - cx \leq cx_0 - cx = c\,|x_0 - x|\,.$$

d) se $x \in \left[\frac{1}{c} - 1, 1 - \frac{1}{c}\right]$ e $x_0 \in \left[1 - \frac{1}{c}, 1\right] \Rightarrow$

$$|f(x_0) - f(x)| = 1 - c + cx_0 = c\frac{1-c}{c} + cx_0 \leq -cx + cx_0 = c\,|x_0 - x|\,,$$

pois $x \leq \frac{c-1}{c} \Rightarrow \frac{1-c}{c} \leq -x$.

e) se $x \in \left[-1, \frac{1}{c} - 1\right]$ e $x_0 \in \left[1 - \frac{1}{c}, 1\right] \Rightarrow$

$$|f_c(x) - f_c(x_0)| = |(1-c) - cx - (1-c) - cx_0| = c\,|x + x_0| \leq c\,|x_0 - x|\,,$$

pois $x < 0$.

Além disso, como $f(x) \geq f_c(x)$ para todo $x \in [-1,1]$ e toda $f \in \mathtt{E}_c$, temos que:

1) $A(f) \geq A(f_c)$ para toda $f \in \mathtt{E}_c$, ou seja,

$$A(f_c) = \frac{1}{c} = min\,\{A(f) \mid f \in \mathtt{E}_c\}\,.$$

2) Se $g \in \mathtt{E}_c$ e

$$A(g) = min\,\{A(f) \mid f \in \mathtt{E}_c\}\,,$$

então

$$A(g) = A(f_c) \Rightarrow \int_{-1}^{1} (g(x) - f_c(x))\,dx = 0 \Rightarrow g = f,$$

pois $g - f_c \geq 0$ em $[-1, 1]$ e $g - f_c$ é contínua. Ou seja, f_c é o único ponto de mínimo do problema.

De modo análogo, podemos provar que:

C2) $\underline{c = 1}$

$$f_c(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \in [-1, 0] \\ \\ x, & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

é a única função pertencente a $\mathtt{E}_c$ tal que $A(f_c) = min\,\{A(f) \mid f \in \mathtt{E}_c\}$. Então,

$$min\,\{A(f) \mid f \in \mathtt{E}_c\} = 1.$$

C3) $\underline{0 < c < 1}$

$$f_c(x) = \begin{cases} (1 - c) - cx, & \text{se } x \in [-1, 0] \\ \\ (1 - c) + cx, & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

é a única função pertencente a $\mathtt{E}_c$ tal que $A(f_c) = min\,\{A(f) \mid f \in \mathtt{E}_c\}$. Então,

$$min\,\{A(f) \mid f \in \mathtt{E}_c\} = 2 - c.$$

Nas figuras abaixo mostramos os gráficos das funções f_c em cada um dos casos possíveis.

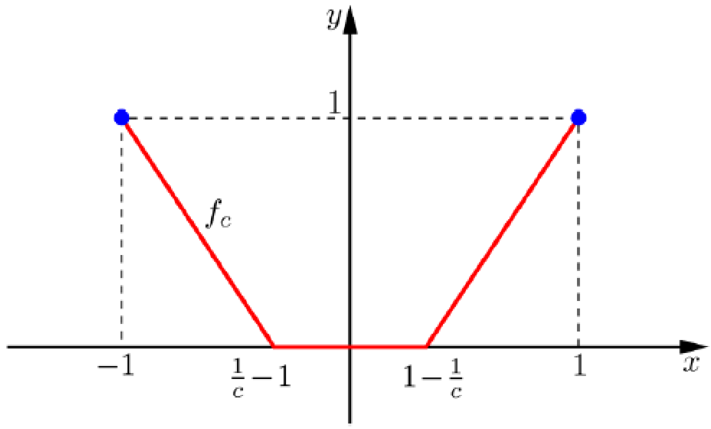

Figura 3.2: **Gráfico de f_c para** $c > 1$.

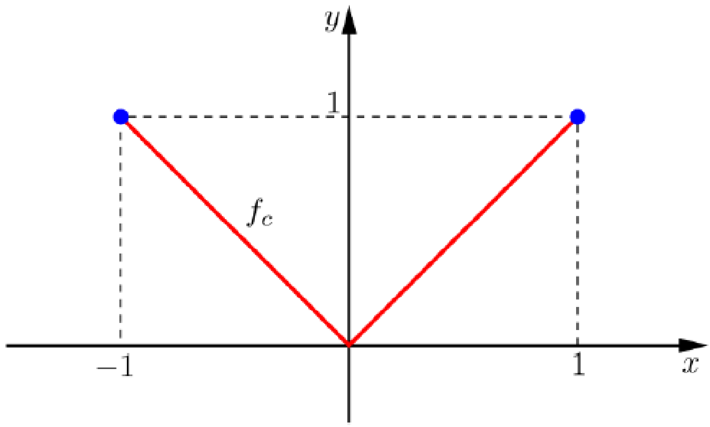

Figura 3.3: **Gráfico de f_c para** $c = 1$.

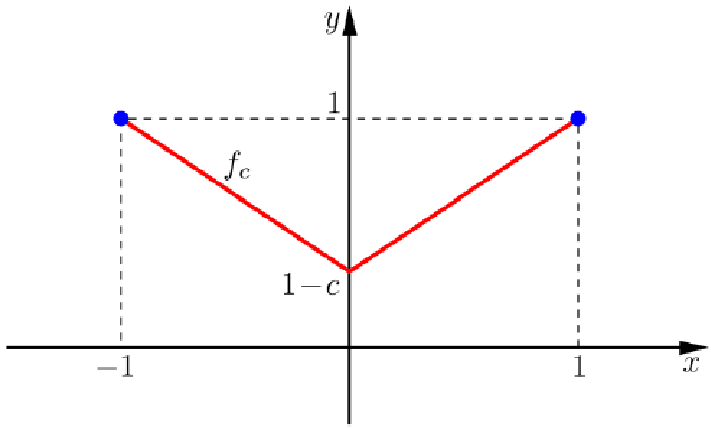

Figura 3.4: **Gráfico de f_c para** $0 < c < 1$.

Conclusão

Neste Trabalho de Conclusão de Curso, optamos por apresentar o Teorema de Aszelá-Ascoli e uma de suas aplicações à Análise Real. Para obter sua demonstração, foi necessário o estudo de diversos conceitos relacionados a análise matemática.

Diante de todo o processo de busca pelo conhecemento para obter a sua supracitada demonstração, ficou evidenciado o quanto é necessário se empenhar, persistir, para se conseguir êxido no detalhamento de suas comprovações, ler constantemente, fazer, refazer, e isso por muitas vezes, até se conseguir compreender o que esta sendo exposto por uma determinada ideia.

Em suma, diante do estudo que propomos neste trabalho, esperamos que em face do que foi apresentado, possamos contribuir para uma melhor compreensão por parte do leitor. E assim, instigá-los à pesquisa, não só do teorema de Arzelá-Ascoli e das suas aplicações, mas também de que qualquer outro resultado que se queira conhecer da análise matemática. E que possivelmente, diante de toda complexidade e da riqueza de conceitos existentes neste trabalho, o mesmo sirva de auxílo, de motivação, de referencial teórico para os apaixonados pela Matemática e educadores que se debruçam sobre o tema de melhoria da qualidade de ensino em sala de aula nas Universidades.

Apêndice

Neste Apêndice vamos recordar agumas conceitos e resultados importante utilizados neste trabalho.

Axioma 3.1. ***(Completude do conjunto dos reais)***. *Todo subconjunto dos reais limitado superiormente admite um supremo.*

Teorema 3.1. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Corolário 3.1. *Se $g : X \to Y$ é sobrejetiva e X é enumerável, então, Y é enumerável.*

Definição 3.1. *Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em $a \in X \cap X'$ se o limite abaixo existe e é finito.*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Fazendo $h = x - a$, o limite da expressão acima pode ser rescrito como:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{h}$$

e, denotado por

$$f^{'}(a) = \lim_{x \to a^{+}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ou por qualquer outras dessas notações:

$$Df(a) \qquad ou \qquad \frac{df}{dx}(a) \qquad ou \qquad \frac{df}{dx}.$$

Se f for derivável em todo ponto do seu domínio, então dizemos simplesmente que f é derivável.

Definição 3.2. *Diz-se que f é de classe C^1 se as primeiras derivadas de f são contínuas em X e denota-se por $f \in C^1(X)$. De classe C^n se f possui derivadas de ordem n contínuas em X e denotamos por $f \in C^n(X)$. De classe C^∞ se f possui derivadas de qualquer contínuas em X escreve-se $f \in C^\infty(X)$.*

Definição 3.3. *Uma partição do intervalo $[a, b]$ é qualquer subconjunto finito de pontos $P = \{t_0, ..., t_n\} \subset [a, b]$ tal que $a, b \in P$.*

Os intervalos $I_i = (t_{i-1}, t_i)\,,\ i = 1, ..., n$, são chamados subintervalos da partição P. O comprimento dos subintervalos I_i da partição P são denotados por

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1},\ i = 1, ..., n.$$

Note que

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = b - a.$$

Definição 3.4. *Define-se a suma inferior de Riemann da função f, com relação a pertição P, por*

$$s(f; P) = \sum_{i=1}^{n} inf(f(I_i))\Delta x_i$$

e a suma superior por

$$S(f; P) = \sum_{i=1}^{n} sup(f(I_i))\Delta x_i.$$

Definição 3.5. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. A integral inferior e superior de f são definidas respectivamente por*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{P\in\mathcal{P}} \{S(f; P)\}\,.$$

e

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{P\in\mathcal{P}} \{s(f; P)\}\,.$$

Quando

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

diz-se que f integrável.

Teorema 3.2. ***(Condição imediata de integrabilidade)***. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *f é limitada;*

(ii) *Para todo $\epsilon > 0$, existem partições P e Q de $[a, b]$ tais que*

$$S(f; Q) - s(f; P) < \epsilon.$$

(iii) *Para todo $\epsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, ..., t_n\}$ de $[a, b]$ tais que*

$$S(f; P) - s(f; P) = \sum_{i=1}^{m} w\,(t_i - t_{i-1}) < \epsilon.$$

Referências

[1] ÁVILA, G. S. S. - **Introducão à Análise Matemática** . 2ª.ed. rev- São Paulo:Edgard Blücher, 1999.

[2] BOYER, C. B. - **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. Edgard Blücher,1974. 488p.

[3] BOYER, C. - **História da Matemática**, Ed. Edgar Blucher, São Paulo - SP.

[4] BARRETO, A. C. - **Tópicos de Análise**. Rio de Janeiro: Ed. IMPA, 1971. 235p.

[5] BLOCH, M. **Introdução à História**. - Trad. Maria Manuel e Rui Grácio. Portugal: Ed. Publicações Europa - América 179p.

[6] BOTTAZZINI, U. - **The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass**.Trad. Warren Van Egmond. New York: Ed.Springer-Verlag, 1986.332p.

[7] BLOCH, M. **Introdução à História**. - Trad. Maria Manuel e Rui Grácio. Portugal: Ed. Publicações Europa - América 179p.

[8] BRIETZKE, E. H. M.; SILVA, P. R.- **Análise**. São José do Rio Preto, 1967.

[9] BOURBAKI, N. - **Elementos de historia de las matemáticas**. Trad. Jesús Hernández. Madrid: Ed. Alianza ,1976. 401p.

[10] CORRÊA, F. J. S. A. - **Introducão à Análise Matemática**. v.1.11ª.ed. Belém-pará :UFPA , 2002.

[11] DOERING, C. I. - **Introducão à análise matemática na reta: 1º Colóquio de atemática da região norte**. Belém: UFRGS, 2010.

[12] FIGUEIREDO, D. G. - **Análise I**. 2.ed. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos, 1975.

[13] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo vol 1**. 5ªed. Livros Técnicos e Científicos, 2001.

[14] LIMA, E. L. - **Curso de Análise**. v.1.11ª.ed. Rio de Janeiro:IMPA , 2012.

[15] LIMA, E. L. - **Análise Real**. v.1.12ª.ed. Rio de Janeiro: Associação Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2010.

[16] LIMA, E. L. - **Espaços Métricos.** 4ª.ed. Rio de Janeiro, Projeto Euclides, IMPA 2005.

[17] LIMA, L, R. - **Relatório de Pesquisa: Enumerabilidade em Subconjunto em $\mathbb{R}$.** Porto Velho:UNIR/SBM, 2013.

[18] MOREIRA, C. N. - **Curso de Análise Real**. v.2.1ª.ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008.

[19] MACIEL, A. B.; LIMA, O. A. - **Introducão à Análise Real**. Campina Grande: PB, 2005.

[20] NERI, C. - **Curso de Análise Real.** 1ª.ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 1973.

[21] OLIVEIRA, R. M.; BRITO, E. A.- **Tópicos Introdutórios de Análise Real: Corpo ordenado completo.** Macapá - AP: Universidade Federal do Amapá, 2006.

[22] OLIVEIRA, M. N.- **O Teorema de Arzelá-Ascoli e Aplicaçöies** Campinas Grandes-PB: Universidade Estadual de Paraíba, Centro de Ci encias e Tecnologia, 2014.

[23] STEWART, J.- **Cálculo.** v.1.5ª.ed. São Paulo-SP: Pioneira Thomson Learning, 2006.