Universidade Federal do Amapá
Curso Licenciatura em Matemática

Josiel Rodrigues de Andrade Fonseca
Núbia Cristina Pereira da Luz

NOÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR COM A FORMA CANÔNICA DE JORDAN: APLICAÇÕES

Macapá-Ap
2016

Josiel Rodrigues de Andrade Fonseca
Núbia Cristina Pereira da Luz

NOÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR COM A FORMA CANÔNICA DE JORDAN: APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao curso de Matemática, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciatura Plena em Matemática, Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal do Amapá - Unifap.
Orientador: Dr. Erasmo Senger.

Macapá-Ap
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

512.897
F676n Fonseca, Josiel Rodrigues de Andrade.

Noções de álgebra linear com a forma canônica de Jordan: aplicações / Josiel Rodrigues de Andrade Fonseca, Núbia Cristina Pereira da Luz; orientador, Erasmo Senger. -- Macapá, 2016.
51 p.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Matrizes. 2. Equações diferenciais. I. Luz, Núbia Cristina Pereira da. II. Senger, Erasmo, orientador. III. Fundação Universidade Federal do Amapá. IV Título.

Josiel Rodrigues de Andrade Fonseca
Núbia Cristina Pereira da Luz

NOÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR COM A FORMA CANÔNICA DE JORDAN: APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao curso de Matemática, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciatura Plena em Matemática, Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal do Amapá - Unifap.

Trabalho aprovado. Macapá-Ap, 20 de setembro de 2016.

Dr. Erasmo Senger
Orientador
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Ma. Eliane Vaz
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Ma. Elifaleth Rego Sabino
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Macapá-Ap

2016

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Pr. Josias Dias Fonseca, Ms. Elza Rodrigues de Andrade Fonseca. (Josiel R. de A. Fonseca)

Este trabalho é dedicado ao meu pai e minha mãe, Luiz Carlos Silva da Luz e Alice pereira Fernandes. (Núbia Cristina P. da Luz)

AGRADECIMENTOS

Obrigado meu Deus, pelo seu amor e graça, dando-me força e saúde, guardando e podendo enfim alcançar mais uma vitória - à de poder graduar-me. Porém, não há espaço e palavras suficientes, para mensurar a gratidão por suas benevolências em minha vida, e durante minha graduação.

Agradeço aos meus pais, Pr Josias e Ms Elza, que acreditaram sempre em mim, apoiando-me em todos os momentos.

Grato, pelos meus irmãos, que não mediram esforços para me ajudar, dispensando motivação, suprimentos e até mesmo moradia.

Agradeço a minha esposa, pela abnegação, em decorrência de minha ausência, mesmo com os conflitos que tivemos pelo caminho, seus carinhos e preocupações não me faltaram, obrigado pela dedicação no lar, com nossos filhos, você é de grande estima e dedicação.

Agradeço aos meus irmãos eclesiásticos, pelas orações e carinho.

A todos os meus colegas de trabalho, no secular da vida, e a todos os meus colegas de estudo, muito carismáticos e esforçados.

Excepcionalmente, agradeço ao professor e orientador Erasmo Senger, que nos confiou esse trabalho árduo.

A todos os professores que enaltecem essa instituição e nossas vidas.

No geral, obrigado a UNIFAP, e a todos os que nos ajudaram direta e indiretamente.

(Josiel R. de A. Fonseca)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que nos criou e foi criativo nesta tarefa, seu fôlego de vida para mim foi sustento e me deu coragem para questionar realidades e propor sempre um novo mundo de possibilidades.

Agradeço ao meu pai Luiz Carlos Silva da Luz, e minha mãe Alice Pereira Fernandes, que não está mas entre nós, mas mesmo assim me ajudou eu tenho plena certeza de alguma forma, pois esse era um dos sonhos dela em vida, e esse trabalho nada mais é também uma forma expressiva de demonstrar todo o meu amor a ela.

Agradeço aos meus filhos que me entenderam por não me ter por perto em alguns momentos de suas vidas, e é por eles também todo o meu esforço de concluir esse trabalho.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Erasmo Senger, pela paciência e incentivo que tornaram possível a conclusão deste trabalho, enfim, a todos os professores do colegiado de matemática e meus colegas da turma 2012 meu muito obrigado.

(Núbia Cristina P. da Luz)

"A filosofia está escrita em um grande livro que está diante dos nossos olhos - e este é o universo - mas não poderemos entender este livro se antes não aprendermos a linguagem e compreendermos os símbolos no qual está escrito. Este livro está escrito em linguagem matemática ... Sem a qual nos perderemos em vão por um labirinto escuro."

(Galileo Galilei)

RESUMO

Neste trabalho apresentado desenvolvemos um método eficaz de resolução de matrizes $n \times n$, além disso mostramos como calcular determinantes, autovalores e autovetores, matrizes inversas e sistemas de equações lineares quando comparamos esse método de resolução de matrizes pela forma normal de Jordan com o método de Laplace ou até mesmo Cramer, notaremos verdadeiramente que o método mas eficaz, certamente será o de Jordan. O método de resolução de matrizes que utilizamos neste trabalho elaborado chamado de Forma normal de Jordan, tem complexidade da ordem polinomial, enquanto o método de Laplace segue uma complexidade de ordem exponencial. Para compreender esses fenômenos o trabalho maior do aluno vai ser entender e ter como pré-requisito a Álgebra Linear, especificamente, noções de bases no $\mathbb{R}^n$ e de matrizes e transformações lineares. Este trabalho trata de tópicos como, multiplicidade algébrica e geométrica autovalores e autovetores, polinômio minimal, exponencial de matrizes, teorema de Cayley-Hamillton, entre outros, esse trabalho irá ser útil pra quem pretender aprofundar seus estudos e para aqueles interessados também em outras áreas mas que seguem a mesma vertente. Um dos objetivos deste trabalho também será generalizar os resultados obtidos para sistemas de equações lineares, onde C é uma matriz constante $n \times n$ e x é uma função diferenciável de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$,justamente nestes casos não temos uma solução que podemos desenvolvê-la como no caso dos escalares. Esse método intuitivo nos sugere o seguinte definir a exponencial e A^t de uma matriz At,verificar logo se suas propriedades ,nos permitirá generalizar no caso de escalar para sistemas. Estes e outros resultados serão obtidos para classificar uma matriz. Ao final serão elucidados problemas com uma demonstração e aplicação.

Palavraschave: Matriz; Transformações lineares; Forma de Jordan; Equações Diferenciais.

ABSTRACT

In this presented work developed hum Effective Method of resolution of MATRIZes $n\ timesn$, In Addition show How to Calculate Determinants, eigenvalues and eigenvectors, inverse MATRIZes and Linear Systems of Equations When we compare This MATRIZes Resolution Method For the normal form of Jordan with Laplace method OR EVEN Even Cramer, we note truly That method but effective, certainly sera the Jordan. The MATRIZes resolution method que use this work Prepared Called Jordan normal form, HAVE Complexity of polynomial order, while the Laplace method follows a exponential order of complexity. To understand processes Phenomena Work Increased student entender Sor and will have as a pre - Requirement linear algebra, specifically bases Notions in R^n and MATRIZes and linear transformations. This Work Is topics as Multitude Algebraic and geometric eigenvalues and eigenvectors, minimum Polinomio, exponential MATRIZes, Cayley theorem - Hamillton, Other between, THAT Work Ira Be Useful for those who want to further their studies and for those interested Also in OTHER areas but following a SAME shed. One of the objectives of this study Also Sera generalize the results obtained paragraph linear equations systems, $WhereC$ AND A constant array $n\ timesn$ and xA and differentiable function of R in R^n, just these cases do not have a que Solution We dEVELOPS it As in the case of scalars. This intuitive method nsa Suggests Next Set exponential and A^t of a matrix A, VerificAR logo is YOUR properties, will allow us to generalize any case climb Para Systems. These and other results are obtained paragraph classify An array. THE elucidated final Serao Problems A Demonstration and Application.

Keywords: Matrix; linear transformations ; Jordan form; Differential Equations.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Conforme Dante (2014), a necessidade de escrever mensagens sigilosas é muito antiga. Ao longo da história reis, rainhas, generais, entre outros buscaram meios eficientes de comunicação entre seus aliados. Segundo (IEZZI ET AL,2010), as matrizes teriam surgido com a escola inglesa Trinity Colege, em um artigo do matemático Arthur Caylay(1821-1895), datado de 1858. Vale lembrar, no entanto que, bem antes, no século III A.C., os chineses já desenvolviam um processo de resolução de sistemas lineares em que apareciam implícita a ideia de matrizes.

Caylay criou as matrizes no contexto de estrutura algébrica, sem pensar em suas aplicações práticas que apareceriam posteriormente. As transformações geométricas no plano (ou transformação 2D-duas dimensões) são muito usadas pela computação gráfica para construção de figuras de imagens. Tais imagens podem ser percebidas nos efeitos especiais utilizados no cinema, na TV e nos sistemas multimídia em geral, serve de ferramenta de auxilio em várias áreas da atividade humana, essas transformações citadas acima são conhecidas na área da matemática como translação, rotação e escala.

Este trabalho foi pensado e elaborado para que possamos entender e compartilhar os nossos conhecimentos sobre a álgebra. Com base nesse conhecimento podemos fazer com que os alunos do ensino de graduação compreendam o assunto a ser estudado, porque, onde e quando acontece esse fenômeno algébrico: Antigamente poderíamos resolver matrizes utilizando o método de Cramer que serve para resolver matrizes até 4×4. Mas quando nos deparamos com uma matriz maior temos que utilizar o método de Gauss, por escalonamento e por fim a forma normal de Jordan se tornou um método mais eficaz, porque ele trabalha com um numero menor de elementos e um número maior de zeros, tornando essa matriz triangular e depois diagonalizável, e assim generalizando para qualquer sistema de equações lineares.

Os professores de matemática tem dificuldade em mostrar aplicações dos conteúdos matemáticos, deixando dúvidas para o aluno, onde é possível emprega-las, e para que servem, incluindo fórmulas prontas e sem significados, tornando a disciplina desinteressante.Pensando nisso fizemos este trabalho rico em informações e onde ele possa responder essas questões. No passo seguinte faremos uma breve consideração preliminar, que dará uma explanação no conteúdo a ser abordado. Os estudos da Álgebra Linear são ramificações da matemática que se apoderam dos assuntos relativos a espaços vetoriais, os espaços representados por setas e linhas, ou melhor espaços lineares, porém, esses mesmos não se prendem a meros simbolismos de setas, podem também ser deduzidos pelo curso em que podem ser tomados, são estudos que podem associar vetores entre dois espaços vetoriais ou com outras possibilidades de representações geométricas.

Representações geométricas no espaço, por exemplo, o $\mathbb{R}^3$ (um conjunto de pontos), perceptíveis e de convenção universal, no nosso espaço e tempo, com dimensões, tais como, profundidade, altura e largura. Esta álgebra e seus vetores (com a aritmética que podem ser estudadas neles) são um meio de estudo de grande valor, englobando, Computação, Engenharias, Biologia, Química, entre outras ciências ciências.

No segundo capítulo temos a fundamentação teórica iniciando com espaços vetoriais, introduzindo uma observação geral do conteúdo, definição de espaços vetoriais, suas operações aritméticas, iremos também esclarecer algumas das suas propriedades algébricas, nos ajuda na compreensão de corpos vetoriais que se classificam dentro do contexto de espaços vetoriais voltando nossa atenção para espaços matriciais da forma quadrada $n \times n$. Tomando esses espaços vetoriais podemos então fazer operações como soma, multiplicação por um escalar. Um exemplo muito relevante de espaços vetoriais é destacado nas Considerações Preliminares no sub-tópico (2.2), que vem falar dos Espaços Vetoriais Matriciais. Usaremos esse espaço como objeto de estudo, que também leva-nos a compreender Sistemas Lineares, de ordem finita e quadrada, pois as matrizes possuem características algébricas singulares.

No 3º capítulo faremos um estudo sobre transformações lineares, em seguida falaremos também de núcleo e imagem, isomorfismo e automorfismo.

No 4º capítulo abordaremos o polinômio característico, onde será essencial acharmos usando as propriedades de autovalores e autovetores para chegar-mos no ápice do trabalho. No penúltimo capítulo temos a descrição do teorema de Cayley-Hamilton, existem algumas relações importantes, entre polinômio característico $P(\lambda)$ e polinômio minimal $m(\lambda)$ de um operador linear T trataremos destes polinômios para depois introduzir o teorema de Cayley Hamilton.

Porém, por vezes, esses sistemas matriciais podem aparecer de maneira complicada, sem que possam ser diagonalizados, então, esse trabalho vem trazendo uma saída desses problemas, tratando-se da Forma Canônica de Jordan. Uma forma de representação matricial por meio do auxílio de outras matrizes, fazendo o produto delas, obtendo assim uma matriz quase diagonal, que se demonstra eficaz para a obtenção de novos resultados.

N0 5º capítulo veremos uma das formas mais simples de representação matricial de um operador linear, conhecida como a Forma canônica de Jordan, pois esta representação é uns dos objetivos centrais deste trabalho. Agora vamos utilizar os resultados encontrados e demonstrados, para construir nosso principal objetivo, já no 6º e ultimo capítulo, que são as aplicações utilizando a Forma Canônica de Jordan.

2 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Neste tópico temos como pré-requisito algumas definições, propriedades e teoremas muito específicos para se compreender o conhecimento abordado sobre álgebra linear. Não iremos fazer demonstrações pois ficou como aprendizado durante a disciplina de álgebra linear, no decorrer do curso, e o objetivo maior deste trabalho não é repassá-las novamente, e sim tratarmos da forma canônica de Jordan.

2.1 Espaços vetoriais

O entendimento dos estudos da Álgebra Linear, se consiste na compreensão de Corpos Vetoriais que por serem tantos, de uma forma generalizada podemos defini-los dentro do contexto geral de Espaços Vetoriais e serão apresentados alguns. No obstante, a atenção maior será voltada para Espaços Matriciais de Forma Quadrada, pois as mesmas possuem características algébricas peculiares.

Também podemos destacar espaços que se representam no âmbito dos reais a partir de elementos singulares, como: $\mathbb{R}^1$ - o espaço unidimensional com representação gráfica sendo uma reta; $\mathbb{R}^2$ - espaço de pares ordenados representado pelo plano cartesiano de ordenada x e abscisa y; $\mathbb{R}^3$ - com três elementos de um vetor tem-se uma representação de um ponto no espaço tridimensional. A partir daí, as deduções gráficas passam a ser mais trabalhosas de se inquerirem.

Em todos os espaços vetoriais podem ser realizados a Soma e a Multiplicação por um Escalar, assim como, tem-se, Combinações Lineares.

Portanto, temos a seguinte,

Definição 1:[Espaço vetorial] Temos $V \neq \emptyset$, um espaço vetorial em $\mathbb{R}$, quando se sucedem as seguintes Propriedades:

I - A adição de dois elementos que se transformam em um, conotados pela seguinte função, $F : \begin{cases} V^2 \to V \\ (x, y) \to x + y \end{cases}$, obedecendo:

- I_1 : $x + y = y + x, \forall x, y \in V$ (vale a comutatividade);
- I_2 : Existe um vetor nulo que satisfaz $0 + x = x, \forall 0, x \in V$ (existe o elemento neutro da soma);
- I_3 : $-x + x = 0 \; \forall \; x, -x \in V$(existe um vetor inverso);
- I_4 : Para a soma de três elementos, $x + (y + z) = (x + y) + z$, temos a comutatividade, $\forall x, y, z \in V$.

II - A multiplicação de um escalar em um vetor é definida por, $F : \begin{cases} \mathbb{R} \times V \to V \\ (\alpha, x) \to \alpha x \end{cases}$, obedecendo:

II_i : $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,\ \forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ x \in V$ (a comutatividade na multiplicação de escalares por vetor);

II_{ii} : $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,\ \forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ x \in V$ (há uma distribuitividade de vetor na soma de escalares);

II_{iii} : $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ x,\ y \in V$ (há uma distribuitividade de escalar na soma de vetores);

II_{iv} : $1x = x, \forall x \in V$, 1 sendo um escalar real (1 representa o elemento neutro da multiplicação)

Dos espaços já citados a priori, tomemos as provas mediante Callioli, et al (1926, pg.45 - exemplos 1 e 5 ; pg.47 - exercícios resolvidos 1 e 2).

Como já havia Strang (2009, Prefácio:§4º) dito: "O poder desta disciplina aparece quando você tem dez ou mil variáveis em vez de duas".

Definição 2:[Subespaço vetorial] Um subespaço do espaço vetorial $V \in \mathbb{R}$ é um subconjunto $L \neq \emptyset$, que satisfaz os requisitos de V; as propriedades de soma e multiplicação por escalar em V, são atribuídas ao subespaço, ou seja:

i) Se somarmos quaisquer vetor x e y no subespaço, $x + y$ permanece no subespaço, $\forall x, y \in L, x + y \in L$

ii) Ao multiplicarmos um vetor qualquer x, por um escalar α, αx continua no subespaço, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, e $\forall x \in L, \alpha x \in L$.

Definição 3:[Independência linear] Dado um conjunto de vetores $L \subset V$, $L = \{x_i$, com $1 \leq i \leq n(n \in \mathbb{N})\}$, e escalares $\alpha_i \in \mathbb{R}$, com $1 \leq i \leq n(n \in \mathbb{N})$. Analizemos suas combinações

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$$

Se tivermos todos os escalares "α_{is}" iguais a zero, certamente produzirá o vetor nulo: $0x_1 + \ldots + 0x_n = 0$. Se tão somente assim podemos obter zero, então, os vetores "x_{is}" são independentes.

Analogamente deduzimos que,

Definição 4:[Dependência linear] Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que $L \subset V(L \neq \emptyset)$ é linearmente Dependente (L.D.) se, e somente se, a combinação de vetores $x_1, \ldots, x_n \in L$ $(n \in \mathbb{N})$, com um conjunto de escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}(n \in N)$, sem que todos os escalares sejam iguais a zero,

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0.$$

Definição 5:[Espaços geradores] Se um espaço vetorial V consistir de todas as combinações lineares de $L_1, \ldots, L_n$, então, esses vetores geram o espaço. Todo vetor v em V é alguma combinação linear dos L_n:

Todo v surge do L_n, $v = \alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_n L_n$ para alguns coeficientes α_n.

Fixando vetores $v_1, \ldots, v_n$ em V, o conjunto L de todos os vetores de V que são combinação linear destes, é um subespaço vetorial. L é chamado de Subespaço Gerador por $v_1, \ldots, v_n$ e usamos a notação

$$L = [v_1, \ldots, v_n]$$

Dizemos que V é finitamente gerado se existe $L \subset V$, L finito, de maneira que $V = [L]$.

Definição 6:[Base] Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Uma base de V é um subconjunto finito $B \subset V$, para o qual as seguintes condições se verificam:

1. $[B] = V$
2. B é linearmente independente.

Ou seja, uma base para V é uma sequência de vetores que:

1.i. Esses vetores são geradores de V.

2.ii. Os vetores são linearmente independentes, logo, são limitados;

Proposição 1: Todo espaço vetorial finitamente gerado admite uma base.

2.2 Matrizes

Usaremos como objeto de estudo as matrizes (deduzindo Sistemas Lineares) de ordem quadrada, logo, são estes espaços finitamente gerados,possuindo, então, uma base, da qual serão constatadas como valores próprios e vetores próprios.

Definição 7:[Matrizes] Chama-se matriz do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ a todo ordenamento de elementos que se obtém dispondo mn posições segundo a ordem de m linhas e n colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

De um modo geral podemos conotar a matriz A por, $A = [a_{ij}]_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,m}$, onde temos a_{ij} como o elemento geral da matriz, destacamos i e j do referido elemento, como os índices que indicam a posição dos elementos, assim sendo, i pronuncia-se índice de linha e j é o índice de coluna.

Os elementos de ordem da matriz m e n, no geral, nos dão propriedades como: quando $m = n$ dizemos que a matriz é quadrada; sendo $m \neq n$, então a matriz é retangular; com $m = 1$ temos um vetor-linha, ou melhor, matriz-linha; para $n = 1$ tem-se vetor-coluna, a matriz coluna.

Temos como notação geral $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes do tipo $m\times n$ sobre $\mathbb{R}$.

Representando o conjunto das matrizes com m linhas e 1 coluna de elementos em $\mathbb{R}$, as matrizes colunas são,

$$M_{m\times 1}(\mathbb{R}) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R};\ i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1.$$

Representando o conjunto das matrizes com 1 linhas e n coluna de elementos em $\mathbb{R}$, as matrizes em forma de linha são,

$$M_{1\times n}(\mathbb{R}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R};\ i = 1;\ j = 1, 2, \dots, n$$

Uma matriz quadrada possui as seguintes atribuições:

Sendo $a_{ij} = 0$ para $i > j$, temos a matriz triangular superior;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \ddots & a_{33} & a_{34} \\ 0 & \dots & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Sendo $a_{ij} = 0$ para $i < j$, temos a matriz triangular inferior, a seguir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Ao se ter $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$, denota-se a matriz diagonal por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{33} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

A matriz identidade de ordem n, I_n, é a matriz diagonal de ordem n com elementos diagonais iguais a 1,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposição 2: Dadas as matrizes A e B definidas por, $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$; $B = [b_{kl}] \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, dizemos que as mesmas são iguais se, e somente se,

$$\begin{cases} m = p \\ n = q \end{cases} \text{e} \quad a_{ij} = b_{ij};\ i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n.$$

Definição 8: Dadas as matrizes, $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $A + B$ é a operação de matrizes que resulta em uma matriz $m \times n$ cujo os elementos resultantes (c_{ij}) dar-se-ão por $a_{ij} + b_{ij}$, ou melhor

$$A + B = [c_{ij}]$$

sendo $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, por assim dizer,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n};$$

2. αA é a matriz retangular ou quadrada, cujo elemento resultante c_{ij} é αa_{ij},

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$$

3. A matriz cujo todos os elementos são iguais a zero, 0, é a representação da matriz nula, melhor dizendo
$$0_{m\times n}$$

4. Definimos uma matriz cujo todos os elementos são negativos, por
$$-A = (-1)A = [-a_{ij}].$$

Teorema 1: Para $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tem-se

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Associatividade da Adição)
2. $A + B = B + A$ (Comutatividade da Adição)
3. $A + 0 = 0 + A = A$ ($0_{m\times n}$ é o elemento neutro da adição)
4. A+(-A)=(-A)+A=0 ($-A$ é a simétrica de A)
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (distributividade de um escalar pela soma de matrizes)
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributividade de uma matriz pela soma de escalares)
7. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ (comutatividade da multiplicação)
8. $1A = A$ (1 representa o elemento neutro da multiplicação de matriz)

Definição 9:[Multiplicação de matrizes] Para $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B = [bjk] \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ a matriz produto AB resulta numa matriz $C = [c_{ik}]$, em que os elementos se comportam de tal maneira:

$$a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} \qquad (i = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, p)$$

$$AB = [\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}]_{m\times p}.$$

Ou seja, a multiplicação de matrizes só é possível se o número colunas de uma matriz for igual ao número de linhas de outra matriz.

2.3 Sistemas de equações

Definição 10: Uma equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é definida por

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

onde $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ são os coeficientes e b sendo o termo independente.

Definição 11: Um sistema de equações lineares é uma ordenação limitada de equações lineares.

Um sistema de m equações em n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1, \ldots, m$$

Resumindo: $Ax = b$, ou melhor (decompondo em forma de matrizes),

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

Onde A é a matriz do sistema, x é a matriz coluna das n incógnitas, b matriz coluna dos termos independentes.

Definição 12: Uma solução do sistema de equações lineares nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência ordenada de números

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

tais que sendo feitas as substituições $x_i = \alpha_i, i = 1, \ldots, n$ dentro do sistema, resultará numa transformação em que todas as equações se tornem em identidades.

Resolvemos um sistema de equações lineares definindo suas incógnitas, quando houverem todas seus valores, do contrário o sistema é dito incompleto e indeterminado (não existe solução).

As soluções serão avaliadas a partir da dedução de Polinômio Característico, no 5º capítulo.

3 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Neste capítulo, serão abordados diferentes orientações e comportamentos que as matrizes podem fazer. Comportamentos esses dos quais podemos destacar: o Espaço Nulo, que sempre "corre" para o vetor nulo; os vetores são dados como Espaço Coluna (na forma matricial). Mas, também, podem ser notados que, de um espaço-vetorial-coluna, esse pode ser **transformado** em um espaço-vetorial-linha, e vice-verça. Assim como, se for tomado um vetor x n-dimensional, quando esse vetor se "choca" com um espaço matricial T, logo, há uma mudança de curso, e surge um novo vetor Tx. Ocorre uma mudança de espaço, completamente, mediante a nova matriz.

Porém, as matrizes se comportam com certas limitações, a seguir:

I. A origem é sempre estável em sí, pois, $T0 = 0$, para toda a matriz;

II. Se o vetor x vai para x', então $4x$ devidamente segue para $4x'$. O que corresponde a dizer, que do produto cx deve seguir, então, para cx', haja à vista que, $T(cx) = c(Tx)$;

III. Se os vetores x e y vão para x' e y', então $x + y$ segue para $x' + y'$, pois, $T(x + y) = Tx + Ty$.

Podemo resumir essas argumentações na seguinte,

Definição 13: Sejam U e V espaços vetoriais, uma transformação linear $T : U \to V$, é uma aplicação que satisfaz as seguintes condições:

i) $T(u + v) = T(u) + T(v);\ \forall\ u, v \in U$ e V, respectivamente;

ii) $T(\lambda u) = \lambda T(u);\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}, \forall\ u \in U$. Mesclando (i) e (ii), segue,

(iii) $\forall\ a, b \in \mathbb{N}$ e para todos os vetores x e y, a multiplicação de matrizes são lineares se:

$$T(cx + dy) = c(Tx) + d(Ty).$$

Então, toda a matriz T na transformação $T(x)$ que atende a esses critérios é uma **Transformação Linear**.

Exemplo 1: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por, $T(x, y) = (x, y, x + y)$, então, entenderemos que, para os vetores $u = (1, 2)$ e $v = (-2, 3)$, tem-se:

$u = (1, 2); u \Rightarrow T(1, 2) = (1, 2, 1 + 2) = (1, 2, 3)$

$v = (-2, 3); v = T(-2, 3) = (-2, 3, -2 + 3) = (-2, 3, 1)$

$T(u + v) = T(u) + T(v)$

$(-1, 5, 4) = (1, 2, 3) + (-2, 3, 1)$

Multiplicação por um escalar real (λ):

$\lambda = -3$ escalar.

$-3u = -3(1, 2) = (-3, -6)$

$T(-3u) = T(-3, -6) = (-3, -6, -9)$

$T(-3u) = -3T(u) = -3(1, 2, 3) = (-3, -6, -9)$ ■

Proposição 3: Sejam U e V espaços vetoriais com uma transformação linear $T : U \to V$, então valem as seguintes propriedades:

PI- $T(0u) = 0v$, isto é, a imagem do vetor nulo de u é o vetor nulo de V, ou seja, o vetor nulo do domínio é transformado no vetor nulo do contradomínio v.

PII- $T(-u) = -T(u)$, isto é, a imagem de u, é o vetor de U.

PIII- $T(u - v) = T(u) - T(v)$, ou seja, a imagem da diferença de dois vetores é igual a diferença de suas imagens.

Se a primeira propriedade não for válida, logo, podemos eliminá-la, pois, não será uma transformação linear, mas se ela for válida, não poderá ser afirmada, ainda deverá satisfazer as outras propriedades.

Verifiquemos se as aplicações abaixo são transformações lineares:

1) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, é tal que, $T(x, y) = (x, y, x + y)$.

   a) $T(0, 0) = (0, 0, 0)$, satisfazendo PI;

   b) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$
   $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$
   $T(\lambda u) = T(\lambda x_1, \lambda y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda x_1 + \lambda y_1) =$
   $(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda(x_1 + y_1)) = \lambda(x_1, y_1, x_1 + y_1) =$
   $\lambda T(x_1, y_1) = \lambda T(u)$, satisfazendo PII;

   c) $T(u + v) = T(u) + T(v)$. Sejam $u = (x, y), v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
   $T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) =$
   $= (\underline{x_1} + \underline{\underline{x_2}}, \underline{y_1} + \underline{\underline{y_2}}, \underline{(x_1 + y_1)} + \underline{\underline{(x_2 + y_2)}}) =$

$= \underbrace{(x_1, y_1, x_1 + y_1)}_{T(x_1,y_1)} + \underbrace{(x_2, y_2, x_2 + y_2)}_{T(x_2,y_2)} = T(u) + T(v)$, o que se corresponde a PIII.

$\therefore T$ é uma transformação linear. ■

2) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que, $T(x, y, z) = (x, yz + 1)$.

a) $T(0, 0, 0) = (0, 0)$. $T(0, 0, 0) = (0, 0 \cdot 0 + 1) = (0, 1) \neq ((0, 0)$.

Logo T não é uma transformação linear, pois não satisfaz PI, como determina uma $T.L.$. ■

Proposição 4: Conhecendo as imagens dos vetores de uma base do domínio de uma $T.L.$

$T : U \to V$

$\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de U.

$T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)$.

Se v é um vetor qualquer de V, então:

$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$.

$T(v) = a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + \ldots + a_nT(u_n)$.

Isso mostra que uma transformação linear $T : U \to V$ fica completamente definida quando se conhecem as imagens dos vetores de uma base de V.

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ base canônica $\mathbb{R}^2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$

$T(1, 0), T(0, 1) \in \mathbb{R}^3$

$v = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \Rightarrow T(v) = T(x(1, 0)) + T(y(0, 1))$

$T(v) = T(x, y) = xT(1, 0)yT(0, 1)| = xT(1, 0) + yT(0, 1)$

Exemplo 3: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; 1 $T(1, -1) = (1, 1, 2)$ e $T(2, 0) = (2, -1, 1)$

$\{(1, -1), (2, 0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$

Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$(x, y) = a(1, -1) + b(2, 0)$

$(x, y) = (a, -a) + (2b, 0) = (a + 2b, a)$

$$\begin{cases} \text{a+2b=x} \Rightarrow 2b = x - a \Rightarrow 2b = x + y \Rightarrow b = \dfrac{x+y}{2} \\ \text{-a=y} \Rightarrow a = -y \end{cases}$$

$$(x, y) = -y(1, -1) + (\frac{x+y}{2})(2, 0)$$
$$T(x, y) = -yT(1, -1) + (\frac{x+y}{2})T(2, 0)$$
$$T(x, y) = -y(1, 1, 2) + (\frac{x+y}{2})(2, -1, 1)$$

$$T(x,y) = (-y,-y,-2y) + (x+y, \frac{-x-y}{2}, \frac{x+y}{2})$$
$$T(x,y) = (-y+x+y, -\frac{x-y}{2} - y, \frac{x-y}{2} - 2y) =$$
$$= (x, \frac{-x-y-2y}{2}, \frac{x+y-4y}{2}) =$$
$$= (x, \frac{-x-3y}{2}, \frac{x-3y}{2}) =$$
$$T(1,-1) = (1, \frac{-1-3(-1)}{2}, \frac{1-3(-1)}{2}) =$$
$$= (1, \frac{-1+3}{2}, \frac{1+3}{2}) = (1, \frac{2}{2}, \frac{4}{2}) = (1,1,2)$$
$$T(2,0) = (2,-1,1) = (2, -\frac{2-0}{2}, \frac{2-0}{2}) = (2,-1,1).$$

■

3.1 Núcleo e Imagem

Definição 14:[Núcleo] Seja $T : V \to W$, uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $v \in V$, tais que $T(v) = \mathbf{0}$, é chamado núcleo de T, sendo denotado por $\ker(T)$. Isto é

$$\ker(T) = \{v \in V; T(v) = \mathbf{0}\}$$

Exemplo 4:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \to x+y$$

Neste caso temos $\ker T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y = 0\}$, isto é, $\ker T$ é a reta $y = -x$. Podemos dizer ainda que $\ker T = \{(x,-x); x \in \mathbb{R} = \{x(1,-1); x \in \mathbb{R}\} = [(1,-1)]. \Im T = \mathbb{R}$, pos dados $w \in \mathbb{R}$, $w = T(w,0)$.

Proposição 5: Seja $F : U \to V$ uma transformação linear. Então:

a) $\ker(F)$ é um sub-espaço vetorial de V;

b) A transformação linear F é injetora, se e somente se, $\ker(F) = \{0\}$.

Demonstração:

a) como $F(0) = 0$, então $F(u_1) = F(u_2) = 0$. Daí $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2) = 0 + 0 = 0$. Portanto, $u_1 + u_2 \in (F)$.

Teorema 2:[Do Núcleo e da Imagem] Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, com a mesma dimensão finita n e suponhamos $F : U \to V$, uma transformação linear. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:

(I) F é sobrejetora;

(II) F é injetora;

(III) F é bijetora;

(IV) F transforma uma base de V, isto é, B é uma base de V, então, $F(B)$ é base de V.

3.2 Isomorfismo e Automorfismo

Definição 15: Entende-se por isomorfismo do espaço vetorial U, no espaço vetorial V, uma transformação linear $F : U \to V$, que seja bijetora. Um isomorfismo $F : U \to U$, é um automorfismo de U.

Exemplo 5: O operador idêntico $I : U \to U$, dado por $I(u) = u$, para todo vetor u no espaço vetorial trivial é um exemplo de um automorfismo de U. ■

Exemplo 6: $F : \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ definida por $F(x, y) = x + (x + y)t$ é tambem um isomorfismo. De fato.

(I) $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2) \Rightarrow x_1 + (x_1 + y_1)t = x_2 + (x_2 + y_2)t \Rightarrow x_1 = x_2$ e $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Logo, provamos que F é injetora.

(II) Dado $F(t) = a + bt \in P_1(\mathbb{R})$, $\exists\ u \in \mathbb{R}^2$, tal que, $u = (a, b - a)$, para que se tenha $F(u) = F(t)$. Então F é sobrejetora.

(III) $F((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = x_1 + x_2 + (x_1 + x_2 + y_1 + y_2)t = x_1 + (x_1 + y_1)t + x_2 + (x_2 + y_2)t = F = (x_1, y_1) + F(x_2, y_2)$. ■

Proposição 6: Se F é um isomorfismo de U e V, então, $F^{-1} : V \to U$, também é um isomorfismo (de V em U).

Demonstração:

(I) Suponhamos v_1, $v_2 \in V$ e $F^{-1}(v_1) = F^{-1}(v_2) = u$. Então, $F(u) = v_1$ e $F(u) = v_2$. Daí, $v_1 = v_2$. Logo F^{-1} é injetora.

(II) Para verificar que F^{-1}, é sobrejetora, então, existe u_1, $u_2 \in U$ de maneira que $F(u_1) = v_1(\Leftrightarrow F^{-1}(v_1) = u_1)$ e $F(u_2) = v_2(\Leftrightarrow F^{-1}(v_2 = u_2)$ substituindo esses resultados na igualdade inicial:
$u = F^{-1}(F(u_1) + F(u_2)) = F^{-1}(F(u_1 + u_2)) = u_1 + u_2 = F^{-1}(v_1) + F^{-1}(v_2)$.
Voltando a igualdade inicial:
$F^{-1}(v_1 + v_2) = F^{-1}(v_1) + F^{-1}(v_2)$

(III) $F^{-1}(\lambda v) = \lambda F^{-1}(v), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall v \in V$.

Observação: A proposição acima nos diz que sempre que existir um isomorfismo $F : U \rightarrow V$, também existe um isomorfismo $F^{-1} : V \rightarrow U$ (isomorfismo inverso de F) e devido a isso, dizemos ; neste caso, que U e V são espaços isomorfos. Dois espaços vetoriais isomorfos U e V muitas vezes são considerados indistintos. Para tanto, se F é o isomorfismo considerado de $U \rightarrow V$, indica-se cada elemento $u \in U$ com sua imagem $F(u) \in V$.

4 POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Daremos continuidade aos nossos estudos, em que, dada uma transformação linear $T : V \to V$ e fixando uma base β poderemos reduzir o problema para encontrar autovalores e autovetores para T à determinação de autovalores para a matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$.

Buscaremos definições de autovalores e autovetores para efetuarmos novos cálculos. Com certeza é um procedimento complicado de efetuar. Para facilitar nossos cálculos podemos encontrar um método mais simples e prático para encontrar os autovalores e autovetores de uma matriz real A, de ordem $n \times n$ (uma matriz quadrada).

Seja A uma matriz de ordem n. Quais são os autovalores e os autovetores advindos da matriz A? Sabemos que são exatamente aqueles que satisfazem a equação $(A - \lambda I)v = 0$.

Vamos escrever explicitamente esta equação:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Iremos chamar de $\mathbf{B}$ a matriz acima. Logo $\mathbf{B}v = 0$. Se $\det \mathbf{B} \neq 0$, sabemos que o posto da matriz $\mathbf{B}$ é n e portanto, o sistema de equações lineares homogêneo indicado acima tem uma única solução. Bem, como $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, (ou $v = 0$) sempre é solução de um sistema homogêneo, então, esta única solução será nula. A única maneira de encontrarmos autovetores v é termos $\det \mathbf{B} = 0$, ou seja,

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Primeiramente, para determinarmos autovalores λ que satisfazem a equação, em seguida iremos calcular os autovetores associados aos valores próprios. Vejamos,

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

Veja que $P(\lambda)$ é chamado de polinômio característico de A e os autovalores procurados são as raízes deste polinômio.

Mediante a tais argumentações, podemos destacar a seguinte

Definição 16:[O polinômio característico de uma matriz, associada a uma transformação linear] Seja $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, a transformação linear associada à matriz A em relação a base canônica, isto é, $T_A(v) = Av$. Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de A, e um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$, são soluções da equação $Av = \lambda v, v \neq 0$. Dito isto, temos que, seja β uma base de V, então, temos as equivalencias:

$$Tv = \lambda v \Rightarrow [T]_\beta^\beta [v]_\beta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [[T]_\beta^\beta - \lambda I][v]_\beta = 0 \Rightarrow$$
$$\det([T]_\beta^\beta - \lambda I) = 0$$

observamos que a última condição é dada por $P(\lambda) = 0$, onde $P(\lambda)$ é o polinômio característico da matriz $[T]_\beta^\beta$, e sendo λ, as raízes deste polinômio, os autovalores procurados.

Exemplo 8: Seja a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$, a matiz associada a transformação é dada por,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tomamos o polinômio característico por meio do determinante a seguir,

$$\det(A - I\lambda) = \det \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-3-)(2-\lambda) + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2 = P(\lambda).$$

$$P(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \text{ ou } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -2.$$

Logo, os autovalores associados, vem:

i) Com $\lambda = 1$, temos:
$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, então, $\begin{bmatrix} -3x + 4y \\ -x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$
Temos que x=y.

Portanto, os autovetores associados a $\lambda = 1$, são os vetores $v = (x, x), x \neq 0$.

ii) Sendo $\lambda = 2$, temos:
$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, então, $\begin{bmatrix} -3x + 4y \\ -x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$
ou $x = 4y$.

Os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda = -2$ são da forma: $v = (4y, y)$, $y \neq 0$ (ou $v = (x, \frac{1}{4}x)$). ■

Exemplo 9: Seja a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (4x+5y, 2x+y)$, a matriz associada a transformação é dada por,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tomamos o polinômio característico por meio do determinante a seguir,

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \left| \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$P(\lambda) = (4-\lambda)(1-\lambda) - 10 = 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 - 10 = \lambda^2 - 5\lambda - 6$$

Fazendo $P(\lambda) = 0$, temos como soluções: $\lambda_1 = 6$, e $\lambda_2 = -1$. Portanto, o Polinômio Característico se dará por:

$$P(\lambda) = (\lambda - 6)(\lambda + 1)$$

■

Exemplo 10: Seja a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (3x - 1y + z, -1x + 5y - z, x - y + 3z)$, a matiz associada a transformação é dada por,

$$T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(T - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Cujo, Polinômio Característico é:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 39\lambda + 33$$

■

4.1 Auto Valores e Auto Vetores

Vejamos uma transformação linear de um espaço vetorial nele mesmo $T : V \to V$. A pergunta é a seguinte: Que vetores seriam levados neles mesmos por esta transformação linear. Dado $T : V \to V$, quais seriam os vetores $v \in V$, tais que, $T(v) = v?$, onde v é chamado de vetor fixo. Consideremos algumas transformações que já foram elucidadas para tentar responder essa pergunta.

Exemplo 11: (Aplicação Identidade)

$$\begin{aligned} I : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

Nesse caso,todo $\mathbb{R}^2$ é fixo uma vez que $I(x, y) = (x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(Reflexão no eixo x)

$$\begin{aligned} r_x : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y) \text{ ou} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Intuitivamente notamos que todo vetor pertencente ao eixo x é mantido fixo pela transformação r_x. De fato:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, $r_x(x, 0) = (x, 0)$.

Estes vetores são únicos com estas propriedades, visto isto procuramos os vetores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tais que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

logo, encontramos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + 0y = x \\ 0x - y = y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = x \\ -y = y \end{cases}.$$

Então, as únicas soluções desse sistema são vetores do tipo $(x, 0)$, ou seja, são os vetores que pertencem ao eixo-x. ■

Exemplo 12:[Aplicação Nula]

$$N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (0, 0).$$

Neste caso o único vetor que é fixo pela aplicação dada é o vetor nulo, $N(0, 0) = (0, 0)$. ■

Dado uma transformação linear de um espaço vetorial $T : V \to V$, queremos saber quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo, procuramos um vetor $v \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, tais que:

$$T(v) = \lambda v.$$

Observamos $T(v)$ será um vetor de mesma direção que v. Por ser vetores de uma mesma direção entenderemos sobre vetores na mesma reta suporte.

Então, com $v = 0$ satisfaz a equação para todo λ, interessando determinar vetores $v \neq 0$ satisfazendo a condição acima. O escalar λ deverá ser chamado de autovalor ou valor característico de T e o vetor v um auto vetor ou autovetor característico de T. Para formalizar este conceito. Se quisermos dar uma designação usual de um operador linear para uma transformação linear $T : V \to V$, de um espaço vetorial nele mesmo.

Definição 16:[Autovalores e Autovetores] Dada uma matriz quadrada A, entende-se por autovalor e autovetor de A em relação à base canônica, isto é, $T_A(v) = Av$. Assim um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de A, e um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$, são soluções da equação $Av = \lambda v$, $v \neq 0$.

Observamos que a λ pode ser o número 0, embora v não possa ser um vetor nulo. Usando a definição iremos calcular autovalores e autovetores no exemplo a seguir:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$V \mapsto 2v$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Nesse caso 2 é um autovalor T e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$, é um autovetor de T associado ao autovalor 2.

Logo toda transformação, generalizando, temos λ como autovalor e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$, temos como autovetor correspondente. Ou seja,

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$v \mapsto \lambda v, \lambda \neq 0$$

Observe que $T(v)$ é sempre um vetor na mesma direção que v:

i) $\lambda < 0, T$ inverte o vetor.

ii) $|\lambda| > 1, T$ dilata o vetor.

iii) $|\lambda| < 1, T$ contrai o vetor.

iv) $\lambda = 1, T$ é identidade.

Exemplo 13: Seja A, uma matriz $n \times n$ dos coeficientes diagonais, a seguir,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dados os vetores $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ teremos:

$$Ae_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11}e_1 \text{ e , em geral,}$$

$Ae_i = a_{ii}e_i$. Sabemos que estes vetores da base canônica $\mathbb{R}^n$ são autovetores para A, e o autovetor e_i é associado ao autovalor a_{ij}. ■

As noções de autovalor e autovetor de uma transformação linear (ou matriz) são fundamentais por exemplo em física atômica, porque os níveis de energia dos átomos e moléculas são dados por autovalores de determinadas matrizes. Também o estudo dos fenômenos de vibração, análise de estabilidade de um avião e muitos outros problemas de física levam a procura de autovalores e autovetores. Também são usados na resolução de sistemas de Equações Diferenciais, como as noções de Espaços Vetoriais.

Autovalores e Autovetores são conceitos importantes da matemática, com aplicações práticas em áreas diversificadas como mecânica quântica, processamentos de imagens, análise de vibrações, mecânica dos sólidos, estatística, dentre outros estudos.

4.2 Teorema de Cayley - Hamilton: O Polinômio Minimal

Definição 17: O polinômio minimal de T é um polinômio mônico de grau k ($k \in \mathbb{N}$), isto é, um polinômio mônico da forma:

$$m_A(x) = x^k + b_{k-1}x^{(k-1)} + \dots + b_1x + b_0, k \in \mathbb{N}, \text{ tal que:}$$

1. $m_A(x) = 0$, isto é, o polinômio m anula a matriz A, e

2. $m_A(x)$ é o polinômio de menor grau dentre todos os polinômios que anulam A.

Em particular, temos o fato de que o polinômio minimal e o polinômio característico possuem as mesmas raízes.

Observação: O polinômio mônico possui o coeficiente do termo x^k, igual á 1 ($a_k = 1$).

Teorema 3: Seja $T : V \to V$, um operador linear num espaço de dimensão finita n e $A = [T]$ é uma representação matricial de T relativa a uma base a de V fixada, então T é diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal $m(x)$ é da forma $m_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\dots(x - \lambda_s)$ onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ são os autovalores distintos de $T(s \in \mathbb{N})$.

Exemplo 11: Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dado por $T(x, y, z, w) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, -w)$, obtenha o polinômio minimal de T (T é diagonalizável).

$$A = T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

Deve-se encontrar a associação do polinômio minimal e o polinômio característico, então, temos:

$m_A(\lambda) = P_A(\lambda) = ?$

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

para facilitar usa-seo calculo dos cofatores. Daí

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)^2$$

Candidatos a $m_A(\lambda)$:

$$f_1(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

$$f_2(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$$

$$f_3(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^4$$
$$f_4(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)^2$$

Na verdade, os fatores serão lineares se forem do tipo $(x - L_1)(x - L_2)\ldots(x - L_n)$. Ou seja,

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\ldots(x - \lambda_n)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

$$f_1(A) = [A - 3I] \cdot (A + I)$$

$$f_1(A) = \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$m_A(x) = (x - 3)(x + 1) \Rightarrow T$, com os seus operadores sendo distintos então ele é diagonalizável. ■

4.3 Diagonalização de Operadores

Podem ser constados as diagonalizações de operadores na seguinte,

Definição 18: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Um operador $T : V \to V$ se diz diagonalizável se existir uma base de V formada por vetores próprios de T. Se $B = \{e_1, \ldots, en\}$ for uma base feita de autovetores de T, então

$$(T)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os autovetores de T.

Segue daí que

$$P_T(x) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - x & & & \\ & \lambda_2 - x & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n - x \end{pmatrix} = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\dots(\lambda_{n-x})$$

e assim $P_t(x)$ se decompõe em fatores lineares.

Teorema 4: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um operador linear $T \in L(V)$ é diagonalizável se, e somente se,

1. O polinômio característico de T tem todas as suas raízes em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2. A multiplicidade algébrica de cada autovalor λ_i de T é igual à dimensão de $V(\lambda_i)$

Exemplo 15: Dada a matriz A, 2 por 2, na forma,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos como polinômio característico da matriz A, sendo, $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$.

Fazendo $p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, temos então os autovalores: $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$

Autovetores:

Autovetor associado a $\lambda_1 = 3$

$Ax = \lambda_1 x \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ -4x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} x_1 - x_2 = 3x_1 \\ -4x_1 + x_2 = 3x_2 \end{cases}$$

Deduzimos daí, que,

$$-x_2 = 3x_1 - x_1$$

$$-x_2 = 2x_1$$

$$x_2 = -2x_1$$

$v_1 = (x_1, -2x_1)$

$v_1 = (1, -2)$

Autovetor associado a $\lambda_2 = -1$

$Ax = \lambda_2 x \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ -4x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} x_1 - x_2 = -x_1 \\ -4x_1 + x_2 = -x_2 \end{cases}$$

Provendo que,

$$x_1 - x_2 = -x_1$$

$$x_1 + x_1 = x_2$$

$$2x_1 = x_2$$

$$x_1 = \frac{x_2}{2}$$

$v_2 = (2, 4)$

A é diagonalizável?

$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$

Observação: D corresponde a matriz diagonal.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}; P^{-1} =? P \cdot P^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + z & y + w \\ -2x + 2z & -2y + 2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + z = 1 \Rightarrow x + x = 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} = z \\ -2x + 2z = 0 \Rightarrow 2z = 2x \therefore z = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + w = 0 \Rightarrow y = -w \\ -2y + 2w = 1 \Rightarrow -(-2w) + 2w = 1 \Rightarrow 4w = 1 \Rightarrow w = \frac{1}{4} \therefore y = -w; y = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1/2 + 4/4 & -1/2 - 1/4 \\ -1/2 - 4/4 & -1/2 + 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 6/4 & -3/4 \\ -2/4 & -1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

■

Exemplo 16: Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por, $T(x, y) = \{4x + 4y; x + 4y\}$, com a matriz associada a transformação, sendo,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Tomamos o polinômio característico com o seguinte determinante,

$$P_A(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 4 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix}$$

$(4 - \lambda)(4 - \lambda) - 4 = 0 \Rightarrow 16 - 4\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$; resulta nos autovalores: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 6$.

Tomemos, então, os autovetores associados aos autovalores, respectivamente.

Para $\lambda_1 = 2$, temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 4y = 2x \\ x + 4y = 2y \Rightarrow x = 2y - 4y \Rightarrow x = -2y \end{cases}$$

$v_1 = \binom{2}{-1}$

Para $\lambda_2 = 6$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 4y = 6x \\ x + 4y = 6y \Rightarrow x = 6y - 4y \Rightarrow x = 2y \end{cases}$$

$v_2 = \binom{2}{1}$

Temos, então, a matris associada aos autovetores M, na forma,

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que $M^{-1} \cdot A \cdot M \Rightarrow$ Matriz Diagonal. Temos tambem, que $M \cdot M^{-1} = I$ e $M^{-1} \cdot M = I$, então

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + 2c = 1 \\ -a + c = 0 \Rightarrow c = a \end{cases} \quad 2a + 2c = 12a + 2a = 14a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} 2b + 2d = 0 \Rightarrow b = -d \Rightarrow b = -\dfrac{1}{2} \\ -b + d = 1 \Rightarrow -(-d) + d = 1 \Rightarrow 2d = 1 \Rightarrow d = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 3/2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

resultando na Matriz Diagonalizada. ■

5 A FORMA CANÔNICA DE JORDAN - $\mathfrak{J}$

Podemos observar a aplicabilidade das definições de matrizes diagonalizáveis em decorrência de aspectos inerentes a seus polinômios e seus autovalores assim como seus autovetores. Em vista de que é mais fácil de entender o comportamento de uma matriz diagonal, do que uma matriz repleta de dados fora de sua diagonal, visamos encontrar uma matriz adequada aos estudos.

Um bom exemplo dessa colaboração, é a resolução de sistemas de equações diferenciais (que será visto a posteriori). No obstante, nem todos os operadores matriciais são diagonalizáveis, como vimos nos exemplos anteriores.

O nome é uma referência a Marie Ennemond Camille Jordan que foi um matemático francês. [9] É conhecido pelos seus trabalhos em teoria dos grupos e análises. Estudou na École Polytechnique. Foi engenheiro e mais tarde ensinou na École Polytechnique e no Collége de France. Nasceu em 5 de janeiro de 1878 , França. Faleceu em 22 de janeiro de 1922 em Paris, França. Com obra "Traite des substitution et des Algébriques". Orientado por Joseph Alfred Serret, Victor Pniseux. Filho Eduard.

Influenciou nos estudos: grupos finitos; Àlgebra linear e multilinear; teoria dos números; topologia de poliedros, equações diferenciais e mecânica. [10] Introduziu o conceito de homotopia entre caminhos e definiu o grupo de homotopia de uma superfície. Ele foi o primeiro a tratar formalmente da teoria de grupos finitos, introduziu o conceito de série de composição, provou o teorema de Jordan-Hölder. O trabalho de Jordan "Traité des substitutions et des é equations algébraique", publicado em 1870, possui um exaustivo estudo da teoria de Galois, e é o primeiro livro escrito sobre a teoria de grupos. O teorema da forma canônica de Jordan para matrizes também se encontra no livro.

Definiremos a priori, notações que serão abrangidas nas definições a seguir.

Seja $p_T(\lambda)$ o polinômio característico de T. Temos a sua fatoração por:

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_n - \lambda)^{m_n} ((\lambda - \alpha_1)^2 + \beta_{10^2})^{p_1} \dots ((\lambda - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^{p_k}$$

- Onde $\lambda_r \neq \lambda_s$, e $(\alpha_r, \beta_r) \neq (\alpha_s, \beta_s)$ se $r \neq s$.
- Note que cada $\alpha_r + i\beta_r$ é uma raiz complexa de $p_T(\lambda)$.
- Note tambem que $m_1 + \dots + m_n + 2p_1 + \dots + 2p_k = \dim U$.

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T, denotaremos $J(\lambda; r)$ a matriz quadrada de ordem r, a seguir,

$$J(\lambda;r)=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda\end{bmatrix}_{r\times r}$$

$$=\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}_{r\times r}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}_{r\times r}=\lambda I+N,$$

Onde I é a matríz identidade de ordem r e N é uma matriz nilpotente.

Se $\alpha+i\beta$ é uma raiz complexa de $p_T(\lambda)$, definimos

$$R(\alpha,\beta;r)=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta & \alpha\end{bmatrix}$$

Teorema 5:[Da forma canônica de Jordan]Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T\in L(U)$. Se

$$p_T(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)^{m_1}\dots(\lambda_n-\lambda)^{m_n}((\lambda-\alpha_1)^2+\beta_{10^2})^{p_1}\dots((\lambda-\alpha_k)^2+\beta_k^2)^{p_k}$$

onde $\lambda_r\neq\lambda_s,(\alpha_r,\beta_r)\neq(\alpha_s,\beta_s)$ se $r\neq s$, e $\beta_r>0$, então existe uma base de U com relação a qual a matriz de T é da forma

$$J=(J_1,\dots,J_p,R_1,\dots,R_q),$$

onde $J_1,\dots,J_p$ são da forma $J(\lambda;r)$ para algum $r\in\mathbb{N}$ e $(\alpha,\beta)\in\{(\alpha_1,\beta_1),\dots,(\alpha_k,\beta_k)\}$.

Fazendo a denotação do teorema, temos

$$\mathfrak{J}=\begin{bmatrix}\mathfrak{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{J}_u\end{bmatrix}.$$

Cada bloco de Jordan é uma matriz triangular com apenas um autovalor λ_i e um autovetor:

$$\mathfrak{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Dada uma matriz quadrada A, queremos escolher M de modo $M^{-1}AM$ seja o mais próximo de uma diagonal quando possível. No caso mais simples, A possui um conjunto completo de autovetores que se tornam as colunas de M (de outro modo conhecemos como S). A forma de Jordan é $M^{-1}AM = \mathfrak{J}$; ela é construída inteiramente a partir de blocos 1 por 1, $\mathfrak{J}_i = \lambda_i$, e o objetivo de uma matriz diagonal é plenamente alcançado. No caso mais geral é mais difícil, faltam alguns autovetores e uma forma diagonal torna-se impossível. Nesse momento, este caso é a nossa principal preocupação.

Definição 19: A forma canônica de Jordan, é uma forma de representar uma matriz ou um operador linear através de uma matriz semelhante à original que é quase uma matriz diagonal. No corpo dos números complexos, esta forma é uma matriz triangular superior, em que os únicos elementos não nulos são aqueles da diagonal ou imediatamente acima da diagonal.

Corolário 9.1: A matriz de um operador T com relação a uma base qualquer é semelhante a uma matriz da forma: $\mathfrak{J} = (\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_p)$ (caso Complexo)
$\mathfrak{J} = (\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_p, R_1, \ldots, R_q)$ (caso real).

Se uma matriz A tem s autovalores linearmente independentes, então, é similar a uma matriz $\mathfrak{J}$ que está na forma de Jordan, com s blocos quadrados na diagonal:

$$\mathfrak{J} = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} \mathfrak{J}_1 & & \\ & \vdots & \\ & & \mathfrak{J}_s \end{bmatrix}$$

Cada bloco possui um autovetor, um autovalor e número 1 acima da diagonal:

$$\mathfrak{J}_i = \begin{bmatrix} \mathfrak{J}_1 & 1 & \\ & \vdots & 1 \\ & & \mathfrak{J}_s \end{bmatrix}$$

Um exemplo de uma matriz de Jordan:

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \\ & & [0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{J}_1 & & \\ & \mathfrak{J}_2 & \\ & & \mathfrak{J}_3 \end{bmatrix}$$

O autovalor duplo $\lambda = 8$ apresenta apenas um único autovetor na primeira direção da coordenada $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$;com resultado $\lambda = 8$ aparece apenas um único bloco $\mathfrak{J}_1$. O autovalor tripo $\lambda = 0$ possui dois autovetores, e_3 e e_5, que correspondem a dois blocos de Jordan $\mathfrak{J}_2$ e $\mathfrak{J}_3$. Se A tivesse cinco autovetores, todos os blocos seriam 1 por 1, e J seria diagonal.

A pergunta chave é a seguinte:

1- Se A é uma matriz 5 por 5, sobre que condições sua forma de Jordan será esse mesmo $\mathfrak{J}$?

2- Quando existirá um M tal como $M^{-1}AM = \mathfrak{J}$?

3- Como o primeiro pré requisito, qualquer matriz A similar deve compartilhar dos mesmos autovalores $(8, 8, 0, 0, 0)$ porem a matriz diagonal com esses autovalores não é similar a $\mathfrak{J}$ (e a nossa pergunta realmente diz-respeito aos autovetores).

Reescrevemos $M^{-1}AM = \mathfrak{J}$, simplificando:

$AM = M\mathfrak{J}$; com isso iremos respondê-la

$$A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 1 & & & \\ 0 & 8 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

utilizando uma coluna por vez, vamos resolver as multiplicações:

$$Ax_1 = 8x_1 \text{ e } Ax_2 = 8x_2 + x_1$$
$$Ax_3 = 0x_3 \text{ e } Ax_4 = 0x_4 + x_3 \text{ e } Ax_5 = 0x_5$$

Reconhecendo as condições de A, deve haver 3 autovalores que unidos, assim como $\mathfrak{J}$ tem. O A que tiver $\lambda = 8$ será inserida exatamente na primeira coluna de M, como seria inserida exatamente na primeira coluna de $S : Ax_1 = 8x_1$. E já que as outras duas chamadas de x_3 e x_5, são inseridas na terceira e quinta colunas de $M : Ax_3 = Ax_5 = 0$. E finalmente, deverá haver outros dois vetores especiais, os autovetores generalizados x_2 e x_4. x_2 pertence a uma sequencia de vetores, iremos considera-lo e o guiamos por x_1 e o descrevemos pela equação:

$Ax_1 = 8x_1$ e $Ax_2 = 8x_2 + x_1$, de fato, x_2 é o único vetor alternativo na sequência, e o bloco correspondente $\mathfrak{J}_1$ possui ordem 2.

Vamos descrever duas sequencias diferentes a seguir:

$Ax_3 = 0x_3$ e $Ax_4 = 0x_4 + x_3$ e $Ax_5 = 0x_5$, uma na qual x_4 sucede x_3 e outra em que x_5 está isolado: sendo assim os blocos $\mathfrak{J}_2$ e $\mathfrak{J}_3$ são do tipo 2 por 2 e 1 por 1.

Tendo isso em vista, consideramos que:

A busca pela forma de Jordan de A, torna-se uma busca por essas sequências de vetores, cada uma guiada por um autovetor: para cada i,

$Ax_i = \lambda x_i$ ou $Ax_i = \lambda_i x_i + x_{i-1}$.

Precisamos mostrar como essas sequências podem ser construídas para cada matriz A, tendo em vista que os vetores x_i são inseridos nas colunas de M e cada sequência produz em bloco único em $\mathfrak{J}$. Logo se essas sequências forem compatíveis com as equações abaixo:

a) $Ax_1 = 8x_1$ e $Ax_2 = 8x_2 + x_1$

b) $Ax_3 = 0x_3$ e $Ax_4 = 0x_4 + x_3$ e $Ax_5 = 0x_5$

Nosso $\mathfrak{J}$ será a forma de Jordan de A.

Iremos partir do fato em que a matriz do tipo 1 por 1, já está em sua forma de Jordan, sendo assim, podemos deduzir que a construção é realizada para todas as matrizes de ordem inferior a n (esta é a hipótese de indução) e assim vamos explicar os passos para uma matriz de ordem n.

A seguir, os três principais passos; e logo após uma descrição geral, aplicaremos em um exemplo específico.

1º passo: Suponhamos que A é singular, se isso acontece, seu espaço-coluna possui dimensão $r < n$, se observamos apenas dentro do espaço menor, a hipótese de indução garante que uma forma de Jordam é possível - deverá haver r vetores independentes w_i no espaço-coluna, de modo que:

$$Aw_i = \lambda_i w_i \text{ ou } Aw_i = \lambda_i + w_{i-1}.$$

2º passo: Vamos supor que o espaço nulo e o espaço coluna de A tenha uma interseção de dimensão p, óbvio que cada vetor no espaço nulo será um autovetor correspondente a $\lambda = 0$. Portanto, deve haver p sequencias no 1º passo que partiram desse autovetor, e estamos interessados nos vetores w_i que aparecem no fim das sequências. Cada um desses vetores p está no espaço-coluna, logo, cada um é uma combinação das colunas de $A : w_i = Ay_i$ algum y_i.

3º passo: Sempre terá dimensão $n - r$, o espaço nulo. Portanto, independentemente de sua interseção p-dimensional com espaço-coluna, deve conter $n - r - p$ vetores de base adicionais fora dessa intercessão. Agora, vamos juntar os três passos para obtermos o teorema de Jordan.

Teorema 6: Os r vetores w_i, os p vetores y_i e os $n - r - p$ vetores Z_i, formam sequências de Jordan para a matriz A, e esses vetores são linearmente independentes. Eles são inseridos nas colunas de M e $\mathfrak{J} = M^{-1}AM$ na forma de Jordan.

Para renumerar esses vetores como $x_1, \ldots, x_n$ e equipará-los com a equação:

$$Ax_i = \lambda_i x_i \text{ ou } Ax_i = \lambda_i x_i + x_i - 1$$

Logo, cada y_i deve ser inserido imediatamente após w_i de onde se originou; isso completa uma sequência em que $\lambda_i = 0$. Os $Z's$ ficam bem no final, cada um isolado em sua própria sequência; novamente, o autovalor é zero, tendo em vista que os $Z's$ permanecem no espaço nulo. Os blocos com os autos valores diferente de zero já foram finalizados no 1º passo, os blocos com os autovalores zero são expandidos em uma linha e uma coluna no segundo passo, já no terceiro passo contribui para qualquer bloco 1×1 $\mathfrak{J}_i = [0]$.

Vamos demonstrar um exemplo; assumiremos $(8, 8, 0, 0, 0)$ como valores:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1º passo: O espaço coluna tem dimensão $r = 3$ e é gerado pelos vetores de coordenadas e_1, e_2, e_3, e_5. Se quisermos observar dentro desse espaço iremos ignorar a terceira e a quarta linhas e colunas de A; o que nos resta apresentar autovalores $(8, 8, 0)$ logo a origem dos vetores na sua forma de Jordan será:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os vetores de w_1 estão no espaço-coluna, eles completam a sequencia para $\lambda = 8$ e iniciam a sequencia para $\lambda = 0$:

$$Aw_1 = 8w_1,\ Aw_2 = 8w_2 + w_1,\ Aw_3 = 0w_3.$$

2º passo: O espaço nulo de A contém e_2 e e_3, então, sua interseção com o espaço-coluna é gerado por e_2. Portanto, $p = 1$ e, como esperado, há uma sequência na equação:

$Aw_1 = 8w_1$, $Aw_2 = 8w_2 + w_1$, $Aw_3 = 0w_3$, correspondente a $\lambda = 0$. O vetor w_3 aparece no fim e também no início dessa sequência, e $w_3 = A(e_4 - e_1)$. Logo, $4 = e_4 - e_1$.

3º passo: O exemplo tem-se $n - r - p = 5 - 3 - 1 = 1$, e $z = e_3$, está no espaço nulo, mas fora do espaço coluna será este Z que produzirá um bloco (1×1) em $\mathfrak{J}$, juntando os cinco vetores, as sequências completas serão:

$Aw_1 = 8w_1, Aw_2 = 8w_2 + w_1, Aw_3 = 0w_3, Ay = 0y + w_3, Az = 0z$

Com isto complementamos a demonstração de que cada á é similar a alguma matriz de Jordan ($\mathfrak{J}$). Exceto para o reordenamento de blocos, é similar apenas uma dessas matrizes $\mathfrak{J}$; há uma única forma de Jordan para A.

Portanto o conjunto de todas as matrizes é dividida em numeros de famílias, com a seguinte propriedade:

Todas as matrizes na mesma família possuem a mesma forma de Jordan e são todas similares entre sí, mas nenhuma matriz em famílias diferente é similar.

Exemplo 17: Seja a matriz triangular superior dada por,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com $\lambda = (0, 0, 0)$,
essa matriz tem posto $r - 2$ e apenas um autovetor. Dentro do espaço-coluna há uma única sequência $w_1 w_2$, que coincide com as duas últimas colunas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \ \text{ e } \ A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou}$$

$$Aw_1 = 0 \ \text{ e } \ aw_2 = 0w_2 + w_1$$

Sendo assim, o espaço-nulo fica completamente no espaço-coluna i e é gerado por w_i. Portanto, $p = 1$, no passo 2 e o vetor y origina-se da equação

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \text{ cuja solução é } y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente a sequência da matriz $w_1 w_2$ vai dentro da matriz M.

Vamos comparar as equações:

a) $Ax_1 = 8x_1$ e $Ax_2 = 8x_2 + x_1$

b) $Ax_3 = 0x_3$ e $Ax_4 = 0x_4 + x_3$ e $Ax_5 = 0x_5$

Daí, temos uma combinação perfeita na forma de Jordan nosso exemplo será exatamente o $\mathfrak{J}$ que escrevemos antes. Se colocarmos cinco vetores nas colunas de M deverá fornecer $AM = M\mathfrak{J}$ ou $M^{-1}AM = \mathfrak{J}$:

$$M = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Façamos a multiplicação $M^{-1}AM$, para tomarmos a prova.

Usando o método de multiplicação de Filippov, o único ponto técnico é verificar a independência de todo conjunto w_i, y_i e z_i. Com isso suponhamos que alguma combinação seja equivalente a zero:

$$\sum c_i w_i + \sum d_i y_i + \sum y_i z_i = 0$$

Vamos multiplicar por A, e utilizar a equação $Aw_i = \lambda_i w_i$ ou $Aw_i = \lambda_i w_i + w_{i-1}$, para w_i, assim como $Az_i = 0$,

$$\sum c_i \begin{bmatrix} \lambda_i w_i \\ ou \\ \lambda_i w_i + w_{i-1} \end{bmatrix} + \sum djAy_i = 0$$

é uma combinação de w_i que eram independentes pela hipótese de indução (logo eles atendem a forma de Jordan dentro do espaço coluna), concluímos que cada d_i deve ser zero. Voltando para a equação anterior, disso se tira $\sum c_i w_i = -\sum y_i z_i$, e o lado esquerdo está no espaço coluna. Como os $z's$ eram independentes desse espaço, cada y_i deve ser zero. Finalmente, $\sum c_i w_i = 0$ e a independência de w_i produz $c_i = 0$.

Se A original não tivesse no singular, os três passos teriam sido complicados em vez de $A' = A - cl$ (o c constante é escolhido para tomar A' singular e pode ser qualquer um dos autovalores de A). O algorítimo coloca A na forma de Jordan $M^{-1}A'M = \mathfrak{J}'$ produzindo sequências x_i a partir de w_i, y_i e z_i. Então, a forma de Jordan para utilizar as mesmas sequencias e o mesmo M: $M^{-1}A'M = M^{-1}A'M + M^{-1}CM = \mathfrak{J}' + cl\mathfrak{J}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ e } M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\blacksquare$

Observação: Forma de Jordan $\mathfrak{J} = M^{-1}AM$, se A tem s autovetores independentes, sua matriz de autovetores "generalizados" M oferece $J = diag(J_1, \ldots, J_s)$. O bloco J_k e $\lambda_k I_k + N_k$, em que N_k tem números 1 na diagonal 1. Cada bloco possui um autovalor λ_k e um autovetor $(1, 0, \ldots, 0)$.

6 APLICAÇÃO

O projeto de uma estrutura composta por vigas metálicas exige resolver um sistema de equações lineares; quanto mais complexo for esta estrutura, maior será o número de equações e de variáveis. A matriz dos coeficientes do sistema deve ser invertível para que a estrutura não colapse. Para uma mesma estrutura sujeita as forças externas variáveis, pode-se encontrar uma matriz-coluna das forças que atuam sobre as vigas multiplicando-se as inversas da matriz-coluna das forças externas.

Mostra-se, a partir da utilização dos conteúdos decorridos, as correspondências preliminares da Álgebra Linear com os assuntos inerentes a equações diferenciais, solucionando assim problemas de sistemas de equações diferenciais $\frac{dU}{dt} = Cu$, revelando que a matemática tem interligações contundentes, havendo resoluções em diversas áreas.

6.1 Aplicação em sistema de equações diferenciais lineares

Definição 20: Considere um sistema de equações lineares homogêneos de primeira ordem com coeficientes constantes:

$$\frac{dU}{dt} = Cu \Rightarrow \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + \ldots + c_{1n}u_n \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} = c_{n1}u_1 + c_{n2}u_2 + \ldots + c_{nn}u_n \end{cases}$$

sendo uma combinação linear de $c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + \ldots + c_{1n}u_n$ e sendo C uma matriz quadrada, $C = (c_{ij})_1^n$, dos coeficientes das equações e o vetor $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sendo uma matriz coluna. É necessário encontrar uma solução para o sistema no instante $t = 0$, ou seja, u_0 (um Problema de Valor Inicial - P.V.I.).

Expandindo a coluna u em potências de t:

$$u = u_0 + u_0't + u_0''\frac{t^2}{2!} + \ldots$$

Derivando sucessivamente o sistema de equações $\frac{dU}{dt} = Cu$, tem-se:

$$\frac{d^2U}{dt^2} = C\frac{du}{dt} = C^2u,$$
$$\frac{d^3U}{dt^3} = C^3u, \ldots$$

trocando t por 0, segue:

$$U1_0 = Cu_0, U_0'' = C^2 u_0, \ldots$$

A série acima fica:

$$U = u_0 + tCu_0 + \frac{t^2}{2!}C^2 u_0 + \ldots + e^{Ct} u_0.$$

Temos que $\frac{d}{dt}(e^{Ct}) = \frac{d}{dt}(I + Ct + \frac{C^2t^2}{2!} + \ldots) = C + C^2 t + \frac{C^3t^2}{2!} + \ldots + Ce^{Ct}$ e $\frac{dx}{dt} = Cx$. Então, $u = e^{Ct}u_0$ é solução da equação diferencial $\frac{du}{dt} = Cu$.

A solução mais generalizada para $\frac{dU}{dt} = Cu$ é a combinação $c_1u_1 + \ldots + c_nu_n$ e a combinação que equivale a u_0 no momento $t = 0$, é então, $u_0 = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$, ou $u = Mc$, ou $c = M^{-1}u_0$. Isso implica que:

$$U(t) = Me^{Jt}M^{-1}u_0,$$

é a solução geral para um sistema de equações diferenciais.

Exemplo 18: Dado o problema de valor inicial (P.V.I.) a seguir:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = Cu \\ U(0) = D \end{cases}$$

onde

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista, a dedução da solução do P.V.I., sendo dado por $U(t) = e^{Ct}D$. Então, com auxilio da forma de Jordam de C que é dada a seguir

$$J_C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Temos tambem que, sendo $C = M \cdot J_C \cdot M^{-1}$, temos ainda que

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tal como, } M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/9 & -1/3 & -1/9 \\ -1/9 & 1/3 & 10/9 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

A saber que, sendo $e^{Ct} = Me^{J_c t}M^{-1}$, sendo também,

$$e^{J_C t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

segue-se então, que,

$$e^{Ct} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(te^{2t} + 3e^{2t}) + \frac{e^{-t}}{9} - \frac{e^{2t}}{9} & -\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} & \frac{1}{3}(-te^{2t} - 3e^{2t}) - \frac{e^{-t}}{9} + \frac{10e^{2t}}{9} \\ -\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} & e^{-t} & \frac{e^{-t}}{3} - \frac{e^{2t}}{3} \\ \frac{1}{3}te^{2t} + \frac{e^{-t}}{9} - \frac{e^{2t}}{9} & -\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} & -\frac{1}{3}te^{2t} - \frac{e^{-t}}{9} + \frac{10e^{2t}}{9} \end{bmatrix}$$

Fazendo o produto de e^{Ct} com a matriz D, seque,

$$U(t) = \begin{bmatrix} 2(-\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3}) + \frac{2e^{-t}}{9} - \frac{11e^{2t}}{9} + \frac{2}{3}(te^{2t} + 3e^{2t}) \\ -\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t} \\ -\frac{1}{3}te^{2t} + \frac{2}{9}e^{-t} + \frac{16}{9}e^{2t} \end{bmatrix}$$

que é a solução desejada para o P.V.I. ■

Exemplo 19: Considere o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = Cu \\ U(0) = D \end{cases}$$

onde

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sendo, então, calculada a forma de Jordan de C, dada por

$$J_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \text{ logo } e^{J_C t} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{bmatrix}$$

Ainda temos que Sendo M a matriz de mudança de base tal que $J_C = M^{-1}CM$, tem-se

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 0 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

então,

$$e^{Ct} = Me^{J_C t}M_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 16 \\ 0 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & /15 \\ 0 & 1/3 & -5/6 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix}$$

Daí, a solução do P.V.I., é dada por:

$$U(t) = \begin{bmatrix} 2(\frac{e^t}{15} - \frac{5e^{4t}}{3} + \frac{8e^{6t}}{5}) + \frac{5e^t}{3} - \frac{2e^{4t}}{3} \\ 2e^{4t} + \frac{5e^{4t}}{2} - \frac{5e^{6t}}{2} \\ -e^{6t} \end{bmatrix}$$

■

CONCLUSÃO

Concluímos neste trabalho que a álgebra linear está interligada nos seus conteúdos, um precisa do outro, agora entendemos que tudo está correlacionado, mostramos a ampla e valiosa utilidade da álgebra especificamente a forma canônica de Jordan, melhorar e agilizar os cálculos matemáticos envolvendo matrizes quadradas de ordem $n \times n$ e suas propriedades, podemos resolver um grande problema para a solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias, mostrando outra vez que tudo na matemática está interligada, e que sempre hajam grandes pesquisas e pesquisadores que possam facilitar os cálculos possam ser eles simples ou complexos e torná-los acessíveis de resolvê-los não importando se sejam grandes ou dificultosos.

É essencial que conheçam a teoria por traz desses cálculos e torne as propriedades dessa forma como ferramenta crucial para finalizar o problema em questão e assim poder chegar num resultado tão esperado, trazendo assim motivação e interesse para que o aprendizado e seus métodos de educação possam alçar voos mais longos do que aqueles antes desse trabalho alcançado.

Observa-se o quanto é importante a aplicação da Álgebra Linear. Compreendendo desse texto, uma correlação dos assuntos, transcendendo o âmbito da Álgebra, que se abrangem tão significantemente, trazendo uma linha de conhecimento sistematizado. O desempenho algébrico que se estende para dar soluções de problemas em Equações Diferenciais, revela um força que dá capacidade de resolução de problemas, ou melhor dizer sistemas, sejam esses simples ou não, o que vem trazendo mais motivações de envolvimento nos conteúdos para resoluções de problemas matemáticos.

REFERENCIAS

[1] ALMEIDA, Arthur Gilzeph Farias. *A Forma Canônica de Jordan e Algumas Aplicações*. 2011. 55 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Centro de Ciências e Tecnologia - CCT da Universidade Estadual da Paraíba - Uebp, Universidade Estadual da Paraíba - Uebp, Paraíba, 2011. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/427/1/PDF - Arthur Gilzeph Farias Almeida.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2016.

[2] BOLDRINI, José Luiz et al. Álgebra Linear. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980. 411 p.

[3] CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*. 7. ed. São Paulo: Atual, 2000. 351 p.

[4] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2014. 624 p.

[5] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de Matemática Elementar: sequências, matrizes, determinantes, sistemas*. 7. ed. São Paulo: Atual, 2010. 232 p. vl. 4.

[6] LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear*. 7. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2006. 357 p.

[7] STRANG, Gilbert. *Álgebra linear e suas aplicações*. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. 445 p.

[8] SNIDER, Arthur David; SAFF, Edward B.; NAGLE, R. Kent. *Equações Diferenciais*. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2012. 570 p.

[9] Site:<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Biographies/Jordan.html>. Visitado em: 6 set 2016.

[10]Site:<http://www.annales.org/archives/x/jordan.html>. Visitado em: 6 set 2016.