UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUACÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
José Pastana de Oliveira Neto

Existência de solução fraca para um problema de Dirichlet não-linear com a condição de Ambrosetti-Rabinowitz

Macapá - AP
2014

José Pastana de Oliveira Neto

Existência de solução fraca para um problema de Dirichlet não-linear com a condição de Ambrosetti-Rabinowitz

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Matemática como requisito para obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do Prof. Msc. Kelmem da Cruz Barroso.

Macapá - AP
2014

José Pastana de Oliveira Neto

Existência de solução fraca para um problema de Dirichlet não-linear com a condição de Ambrosetti-Rabinowitz

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá, Campus Marco Zero, aprovado pela Comissão de professores:

Prof. Msc. Kelmem da Cruz Barroso.
(Orientador)
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof. Dr. Gilberlandio Jesus Dias.
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sótil.
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Macapá - AP
2014

A minha família.
E a eu.
Dedico.

AGRADECIMENTOS

Eu, José Pastana de Oliveira Neto, agradeço primeiramente a Deus por guiar me no caminho dos estudos, mesmo em momentos difíceis da vida.

Agradeço a minha mãe, Odinea Furtado Correa, e a meu pai, Francisco Souza de Oliveira, pela oportunidade de viver, e por tantas outras, e também a minha família.

Agradeço ao professor Kelmem da Cruz Barroso, pela sua excelente orientação, pontualidade, e rigorosidade durante suas orientações, e também por sua grande paciência em suportar minhas teimosias.

Agradeço também ao grande parceiro, Ítalo Bruno Mendes Duarte, pelo seu apoio durante meus estudos, e pela sua amizade.

Agradeço a minha namorada Gabriela Coutinho da Cunha, pela sua paciência, e por apoiar-me sempre.

A todos muito obrigado!

“Prefiro consumir minhas loucuras, para assim deformar minha mente, do que deixar passar algo despercebido.”

(José Pastana)

Resumo

Neste trabalho, o objetivo principal é provar a existência de solução fraca para o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u = 0 & \partial\,\Omega \end{cases}$$

conhecido como problema de Dirichlet não-linear, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira suave e, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de **Carathéodory** satisfazendo algumas condições, entre elas:

- (H3) Existem $\mu > 2$ e $r > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,t) \leq t f(x,t) \;\; \forall x \in \overline{\Omega},\; |t| \geq r, \text{ onde } F(x,t) = \int_0^t f(x,z)dz,$$

conhecida como a condição de **Ambrosetti-Rabinowitz**. As ferramentas principais para resolver o problema, será, o método variacional e o Teorema do **Passo da Montanha**.

Palavras-chave: Ambrosetti-Rabinowitz, Passo da Montanha, Espaço de Sobolev, método variacional, solução fraca.

Abstract

In this work, the main goal is to prove the existence of weak solution to the following problem:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u = 0 & \partial\,\Omega \end{cases}$$

known as Dirichlet problem nonlinear, where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geq 2)$ is a bounded domain with smooth boundary and $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function of **Carathéodory** satisfy certain conditions, including :

- (H3) There $\mu > 2$ and $r > 0$ such that

$$0 < \mu F(x,t) \leq t f(x,t) \;\; \forall x \in \overline{\Omega},\; |t| \geq r, \text{ where } F(x,t) = \int_0^t f(x,z)dz,$$

the condition known as **Ambrosetti-Rabinowitz**. The main tools for solving the problem, the variational method and the Theorem **Mountain-pass**.

Keywords: Ambrosetti-Rabinowitz, Mountain-pass, Sobolev Space, variational method, weak solution.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudaremos a existência de solução fraca para o seguinte problema,

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u = 0 & \partial\,\Omega \end{cases}$$

conhecido como problema de Dirichlet não-linear, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira suave e, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de **Carathéodory** satisfazendo algumas condições, em que uma das principais é:

- (H3) Existem $\mu > 2$ e $r > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,t) \leq t f(x,t) \;\; \forall x \in \overline{\Omega},\; |t| \geq r, \text{ onde } F(x,t) = \int_0^t f(x,z)dz,$$

conhecida como a condição de **Ambrosetti** e **Rabinowitz**, onde o método utilizado para resolver o mesmo, será, o método variacional e usar o **Teorema do Passo da Montanha** para encontrar um ponto crítico do funcional,

$$\psi(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x,u) \right) dx,$$

definido no Espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, que é o funcional associado ao problema.

No primeiro capítulo do desenvolvimento do trabalho, estudaremos o método variacional e provaremos dois lemas de fundamental importância para o desenvolvimento do trabalho, ainda no mesmo capítulo enunciaremos e demonstraremos dois **Teoremas de Deformação**, que serão uados para a demonstração do Teorema do Passo da Montanha.

Agora por fim, no capitulo seguinte, encerraremos o trabalho com uma aplicação do Teorema do Passo da Montanha, que será resolver o problema acima.

Capítulo 2

Os Teoremas de Deformação e o Teorema do Passo da Montanha

2.1 Alguns resultados

Definição 2.1.1. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ *um domínio limitado e seja* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função, dizemos que* f *é uma função de* ***Carathéodory****, quando* f *satisfaz as seguintes condições:*

1) $f(\cdot, s)$ *é mensurável em* Ω *para todo* $s \in \mathbb{R}$ *fixado,*

2) $f(x, \cdot)$ *é contínua em* $\mathbb{R}$ *para quase todo* $x \in \Omega$.

Defini-se, o operador de Nemytskii N_f, por f, i.e, $(N_f u) = f(x, u(x))$, para toda função mensurável $u : \Omega \to \mathbb{R}$. É possível mostrar, que o operador está bem definido no espaço das funções mensuráveis em Ω.

Definição 2.1.2. *Um campo pseudo-gradiente para* $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *é uma aplicação localmente lipshitziana,* $V : Y \to X$*, onde,*

$$Y = \{u \in X \mid \psi'(u) \neq 0\}, \tag{2.1}$$

satisfazendo as seguintes condições:

1) $\|V(u)\| \leq 2\,\|\psi'(u)\|$

2) $\psi'(u).V(u) \geq \|\psi'(u)\|^2$

(Veja a definição de $\psi'(u)$*, no apêndice 4.1.2)*

Lema 2.1.1. *Sob as hipóteses da definição acima, existe um campo pseudo-gradiente V para ψ em Y.*

Demonstração. Dado $u \in Y$, temos $\psi'(u) \neq 0$ e

$$\|\psi'(u)\| = \sup\{\langle \psi'(u), w\rangle : \|w\| = 1\}.$$

Segue da definição de supremo que, dado

$$\epsilon = \frac{\|\psi'(u)\|}{3} > 0,$$

existe $w_u \in X$ com $\|w_u\| = 1$ e

$$\langle \psi'(u), w_u\rangle > \|\psi'(u)\| - \epsilon.$$

Então

$$\langle \psi'(u), w_u\rangle > \frac{2}{3}\|\psi'(u)\|.$$

Consideremos a função $v : Y \longrightarrow X$ dada por

$$v(u) = \frac{3}{2}\|\psi'(u)\| w_u$$

e denotando $v = v(u)$, temos

$$\|v\| = \frac{3}{2}\|\psi'(u)\| < 2\|\psi'(u)\|. \tag{2.2}$$

Por outro lado, vem

$$\langle \psi'(u), v\rangle = \frac{3}{2}\|\psi'(u)\| \langle \psi'(u), w_u\rangle,$$

daí

$$\langle \psi'(u), v\rangle > \frac{3}{2}\|\psi'(u)\| \frac{2}{3}\|\psi'(u)\|,$$

logo,

$$\langle \psi'(u), v\rangle > \|\psi'(u)\|^2.$$

Como ψ' é contínua, existe uma vizinhança aberta N_u de v em Y tal que

$$\|v\| < 2\|\psi'(w)\|, \ \ \forall\, w \in N_u \tag{2.3}$$

e

$$\langle \psi'(w), v\rangle > \|\psi'(w)\|^2 \ \ \forall\, w \in N_u. \tag{2.4}$$

Desde que a família $\{N_u, u \in Y\}$ é uma cobertura aberta de Y, como Y é métrico, logo, é paracompacto, (ver [5]), podemos refinar a cobertura N_u por uma cobertura aberta localmente finita, em outras palavras, existe um refinamento localmente finito N_{u_i} de Y. No que segue, considerando

$$\rho_i(u) = dist\left(u, (N_{u_i})^c\right), \ \ \forall\, u \in Y,$$

e

$$V(u) = \sum_i \frac{\rho_i(u)}{\sum_j \rho_j(u)} v_i \ \ \forall\, u \in Y \tag{2.5}$$

onde

$$v_i = \frac{3}{2} \left\|\psi'(u_i)\right\| w_{u_i}.$$

Sendo N_{u_i} localmente finita, daí, cada $u \in Y$, só pertence apenas a um número finito de N_{u_i}. Logo as somas definidas em (2.5) são finitas, pois ρ_i se anula fora de N_{u_i}. Assim $V(u)$ é uma combinação convexa dos vetores $v_i'.s$, que verificam

$$\|v_i\| < 2 \left\|\psi'(u)\right\|, \ \ \forall\, u \in N_{u_i},$$

e

$$\langle \psi'(u), v_i \rangle > \left\|\psi'(u)\right\|^2, \ \ \forall\, u \in N_{u_i}.$$

Logo, dado $u \in Y$, vem

$$V(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_i = \frac{\rho_1(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_1 + ... + \frac{\rho_n(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} v_n$$

implicando

$$\|V(u)\| \leq \frac{\rho_1(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_1\| + ... + \frac{\rho_n(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_n\|.$$

Portanto

$$\|V(u)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i(u)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} \|v_i\| = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j(u)} . \sum_{i=1}^{n} \rho_i(u) \|v_i\|.$$

Sendo as somas acima finitas para cada u, segue que

$$\|V(u)\| \leq 2 \left\|\psi'(u)\right\|$$

e

$$\langle \psi'(u), V(u) \rangle \geq \left\|\psi'(u)\right\|^2.$$

Vamos mostrar agora que, V é localmente Lipschitziana, para isso, basta mostrarmos que a parcela

$$\frac{\rho_i(u)}{\sum_{j=1}^{n}\rho_j(u)}.\,\|v_i\|$$

é localmente Lipschitziana. Note que para cada i, $\|v_i\|$ é constante, vamos mostrar que no caso de duas parcelas a função

$$g(u) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u)+\rho_2(u)}$$

é localmente Lipschitziana. Para tanto, Considerando z arbitrário tal que $u, v \in U_z$, temos

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u)+\rho_2(u)} - \frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v)+\rho_2(v)},$$

de onde segue

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)\rho_1(v) + \rho_1(u)\rho_2(v) - \rho_1(u)\rho_1(v) - \rho_1(v)\rho_2(u)}{\alpha}$$

onde

$$\alpha = \left[\rho_1(u)+\rho_2(u)\right].\left[\rho_1(v)+\rho_2(v)\right].$$

Então

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)\rho_2(v) - \rho_1(v)\rho_2(u)}{\alpha}.$$

Assim, somando e subtraindo $\rho_1(v)\rho_2(v)$ no numerador da fração acima, obtemos

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_2(v)\left[\rho_1(u)-\rho_1(v)\right]}{\alpha} + \frac{\rho_1(v)\left[\rho_2(v)-\rho_2(u)\right]}{\alpha}$$

e ainda

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{\rho_2(v)}{\alpha}\left|\rho_1(u)-\rho_1(v)\right| + \frac{\rho_1(v)}{\alpha}\left|\rho_2(v)-\rho_2(u)\right|.$$

Ora, sendo ρ_1, ρ_2 funções Lipschitzianas, temos que existem, $K_1, K_2 > 0$ tais que

$$\left|\rho_1(u)-\rho_1(v)\right| \leq K_1\|u-v\| \;\; e \;\; \left|\rho_2(v)-\rho_2(u)\right| \leq K_2\|u-v\|.$$

Portanto

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{\rho_2(v)}{\alpha}K_1\|u-v\| + \frac{\rho_1(v)}{\alpha}K_2\|u-v\|.$$

Desde que $\rho_1(u)+\rho_2(u) > 0$, existe $a > 0$ tal que $\rho_1(u)+\rho_2(u) > a > 0$, como ρ_1, ρ_2, são funções contínuas, logo existe uma vizinhança U_z de u tal que

$$\rho_1(v)+\rho_2(v) > a \;\; \forall\, v \in U_z.$$

Com isso

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{1}{a} K_1 \|u - v\| + \frac{1}{a} K_2 \|u - v\|,$$

pois,

$$\frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v) + \rho_2(v)} \leq 1, \quad \frac{\rho_2(v)}{\rho_1(v) + \rho_2(v)} \leq 1.$$

Logo

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{1}{a} (K_1 + K_2) \|u - v\|, \ \ \forall\, u, v \in V_z.$$

Mostrando assim que g é localmente lipschitziana. Concluíndo assim que V é um campo vetorial pseudo-gradiente para ψ em Y.

□

2.1.1 Método Variacional a um problema de Dirichlet não-linear

Seja o seguinte problema de Dirichlet não-linear

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ \quad u = 0 & \partial\, \Omega \end{cases} \tag{2.6}$$

Onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira suave e, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory satisfazendo a seguinte condição de crescimento:

- (H1) $\exists\, c, d \geq 0$ e $0 \leq \sigma < \frac{(N+2)}{(N-2)}$ se $N \geq 3$ $[0 \leq \sigma < \infty$ se $N = 1, 2]$

tais que

$$|f(x, t)| \leq c\, |t|^{\sigma} + d.$$

Estamos interessados em encontrar soluções fracas do problema acima, isto é, funções $u \in H_0^1(\Omega)$, tais que

$$\int_{\Omega} [\nabla u . \nabla v - f(x, u) v]\, dx = 0 \ \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.7}$$

Para isso, lembrando que o método variacional consiste em associar ao problema acima um funcional, de tal modo que pontos críticos do funcional sejam soluções fracas do problema. O candidato natural a funcional associado ao problema (2.6), é dado por $\psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, tal que

$$\psi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} F(x, u).$$

Assim, esta solução fraca será ponto crítico do funcional $\psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ se, e somente se, este funcional satisfizer

$$\psi'(u).v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(x,u)v \;\; \forall \, v \in H_0^1(\Omega).$$

O lema abaixo, confirmará que, de fato, este é o funcional associado ao problema (2.6).

Lema 2.1.2. *Suponha que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as condições de Carathéodory e a condição de crescimento (H_1). Então o funcional*

$$\psi(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x,u) \right] dx, \;\; u \in H_0^1(\Omega),$$

está bem definido e, de fato, $\psi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$\psi'(u).v = \int_\Omega [\nabla u . \nabla v - f(x,u)v] \, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.8}$$

Onde

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,z)dz.$$

Portanto, $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (2.6) se, e somente se, u é um ponto critico de ψ.

Demonstração. Vamos sempre considerar o espaço $H_0^1(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

a qual é equivalente a norma usual do espaço $H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\| = \left(\int_\Omega (u^2 + |\nabla u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde verifica-se pela desigualdade de Poincaré (ver Teorema 4.1.1, Apêndice).

Vamos primeiramente mostrar que sob a condição $(H1)$, temos que ψ está bem definido. Para isso, vamos escrever,

$$\psi_1(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \;\text{ e }\; \psi_2(u) = \int_\Omega F(x,u) dx.$$

Note que,

$$\psi_1(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \frac{1}{2} \|u\|^2 < +\infty,$$

pois, $u \in H_0^1(\Omega)$. Agora para concluímos que ψ está bem definido, basta mostrarmos que ψ_2 também é finito. Vamos começar mostrando a seguinte desigualdade

$$|F(x,t)| \leq d\,|t| + c\frac{|t|^{\sigma+1}}{\sigma+1}, \text{ onde } 0 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2} \text{ e } N > 2. \tag{2.9}$$

Para isso vamos analisar dois casos: Caso (a) $t \geq 0$, por (H_1) temos

$$|F(x,t)| \leq \int_0^t |f(x,z)|\,dz \leq d\int_0^t dz + c\int_0^t |z|^\sigma\,dz = dt + \frac{ct^{\sigma+1}}{\sigma+1} = d\,|t| + \frac{c\,|t|^{\sigma+1}}{\sigma+1}$$

Caso (b) $t < 0$, segue

$$|F(x,t)| = \left|\int_0^t f(x,z)dz\right| = \left|-\int_t^0 f(x,z)dz\right| \leq \int_t^0 |f(x,z)|\,dz,$$

logo,

$$|F(x,t)| \leq d\int_t^0 dz + c\int_t^0 |z|^\sigma\,dz$$

ou seja,

$$|F(x,t)| \leq d(-t) - c\frac{|t|^{\sigma+1}}{\sigma+1},$$

concluímos,

$$|F(x,t)| \leq d\,|t| + c\frac{|t|^{\sigma+1}}{\sigma+1}.$$

Consequentemente (2.9), vale. Como $u \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$|\psi_2| \leq \int_\Omega |F(x,t)|\,dx \leq c_3\int_\Omega |u|\,dx + c_4\int_\Omega |u|^{\sigma+1}\,dx < +\infty$$

por causa da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\sigma+1}(\Omega)$, (Ver a desigualdade do Teorema 4.1.2, tem i Apêndice), onde $\sigma + 1 \in [1, 2^*]$. Portanto ψ está bem definido.

Vamos provar agora que $\psi \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ com

$$\psi'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u)v dx,\ u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Dividiremos está prova em dois casos:

1^o **caso:** $N > 2$.

Seja,

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx := \frac{1}{2}\langle u, u\rangle.$$

Vamos mostrar que ψ é Fréchet Difenciável com derivada contínua. Para isso, (ver as definições 4.1.2, 4.1.3 e 4.1.4. Apêndice). Inicialmente vamos calcular a derivada de Gateux de ψ_1. Temos

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u) = \lim_{h \to 0} \frac{\psi_1(u + hv) - \psi_1(u)}{h}.$$

Logo,

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}\langle u + hv, u + hv\rangle - \frac{1}{2}\langle u, u\rangle}{h}$$

daí obtemos

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u) = \lim_{h \to 0} \left[\langle u, v\rangle + \frac{1}{2}h\langle v, v\rangle\right] = \langle u, v\rangle.$$

Esta derivada de Gateux, é a candidata natural a derivada de Fréchet. Dai, nosso objetivo é mostrar que,

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$

onde, $r_1(v) = \psi_1(u + v) - \psi_1(u) - \langle u, v\rangle$, para podermos concluir que, de fato, esta derivada de Gateux é a de Fréchet. A partir daí, temos

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{\psi_1(u + v) - \psi_1(u) - \langle u, v\rangle}{\|v\|} = \lim_{\|v\| \to 0} \frac{\frac{1}{2}\langle u + v, u + v\rangle - \frac{1}{2}\langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle}{\|v\|}$$

o que nos dá,

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{\psi_1(u + v) - \psi_1(u) - \langle u, v\rangle}{\|v\|} = \lim_{\|v\| \to 0} \frac{1}{2}\frac{\|v\|^2}{\|v\|} = \lim_{\|v\| \to 0} \frac{1}{2}\|v\| = 0.$$

Isto mostra de ψ_1 é Fréchet Diferenciável em $H_0^1(\Omega)$, com

$$\psi_1'(u).v = \langle u, v\rangle$$

e consequentemente ψ_1 é contínua. Vamos mostrar agora a continuidade de ψ_1', para podermos concluir que $\psi_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Consideremos $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$, com $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ quando $n \to \infty$. Mostraremos que

$$\psi_1'(u_n) \longrightarrow \psi_1'(u) \text{ em } \left(H_0^1(\Omega)\right)'$$

ou equivalentemente

$$\|\psi_1'(u_n) - \psi_1'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} \longrightarrow 0.$$

Por definição segue

$$\|\psi_1'(u_n) - \psi_1'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \sup_{\|v\| \leq 1} |(\psi_1'(u_n) - \psi_1'(u)).v|.$$

Note que

$$\left|\left(\psi_1'(u_n) - \psi_1'(u)\right).v\right| = \left|\psi_1'(u_n).v - \psi_1'(u).v\right| = \left|\langle u_n, v\rangle - \langle u, v\rangle\right| = \left|\langle u_n - u, v\rangle\right|.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (Ver Teorema 4.1.3, Apêndice), temos

$$\left|\left(\psi_1'(u_n) - \psi_1'(u)\right).v\right| \leq \|u_n - u\|.\|v\| \leq \|u_n - u\|,$$

pois $\|v\| \leq 1$. E agora pela definição de supremo, obtemos

$$\sup_{\|v\|\leq 1} \left|\left(\psi_1'(u_n) - \psi_1'(u)\right).v\right| \leq \|u_n - u\|.$$

Portanto

$$\|\psi_1'(u_n) - \psi_1'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo, ψ_1' é contínua. De onde concluímos que $\psi_1 \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$.

Vamos prosseguir de maneira análoga para

$$\psi_2(u) = \int_\Omega F(x,u)dx, \text{ onde } F(x,t) = \int_0^t f(x,z)dz.$$

Mostraremos então que ψ_2 é Fréchet Diferenciável com derivada contínua, para assim concluímos que, de fato, ψ é de classe C^1. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ fixado e para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, consideremos

$$r_1(v) = \psi_2(u+v) - \psi_2(u) - \int_\Omega f(x,u)vdx. \tag{2.10}$$

Precisamos mostrar que

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{r_1(v)}{\|v\|} = 0,$$

ou seja, $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|v\| < \delta \Rightarrow |r_1(v)| \leq \epsilon.\|v\| \tag{2.11}$$

de (2.10) vem

$$r_1(v) = \int_\Omega (F(x,u+v) - F(x,u))dx - \int_\Omega f(x,u)vdx.$$

Segue do Teorema fundamental do Calculo (Ver Teorma 4.1.4 Apêndice), que

$$F(x,u+v) - F(x,u) = \int_0^1 \frac{d}{dz}F(x,u+zv)dz. \tag{2.12}$$

Note que

$$\frac{d}{dz}F(x,u+zv) = \frac{d}{dz}\int_0^1 f(x,u+zv).v,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dz}F(x,u+zv) = f(x,u+zv).v,$$

passando a integral com limites de integração de 0 a 1, na igualdade acima, obtemos

$$\int_0^1 \frac{d}{dz}F(x,u+zv)dz = \int_0^1 f(x,u+zv).vdz.$$

Portanto, de (2.12) e da definição de $r_1(v)$, vem

$$r_1(v) = \int_\Omega \left[\int_0^1 f(x,u+zv)vdz\right]dx - \int_\Omega f(x,u)vdx$$

daí

$$r_1(v) = \int_\Omega \left[\int_0^1 \left(f(x,u+zv) - f(x,u)\right).vdz\right]dx$$

então

$$|r_1(v)| \leq \int_\Omega \left[\int_0^1 |\left(f(x,u+zv) - f(x,u)\right)v|\, dz\right]dx. \tag{2.13}$$

Seja, $q = 2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $r = \frac{2N}{N+2}$, onde $\frac{1}{q}+\frac{1}{r} = 1$. Como $v \in H_0^1(\Omega)$, então pela imersão contínua de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, (Ver Teorema 4.1.2, item i Apêndice), temos $v \in L^q(\Omega)$.

Vamos agora mostrar que $f(\cdot,u(\cdot)) \in L^r(\Omega)$. veja, desde que f satisfaz a condição de crescimento (H_1), temos

$$\int_\Omega |f(x,u)|^r dx \leq \int_\Omega [d + c|u|^\sigma]^r dx \leq k\int_\Omega [|d|^r + |c|^r . |u|^{\sigma r}]\, dx,$$

onde $k > 0$. Dai,

$$\int_\Omega |f(x,u)|^r dx \leq M|\Omega| + c\int_\Omega |u|^{\sigma r} dx. \tag{2.14}$$

Agora basta mostrarmos que a ultima integral é finita. Notemos que a condição de crescimento (H_1), é valida também para $1 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2}$, com $N > 2$. Agora,

$$1 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2} \Longrightarrow 1 < r \leq \sigma.r < 2^*, \text{ com } N > 2.$$

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$. Usando a imersão contínua de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\sigma.r}(\Omega)$, (Ver Teorema 4.1.2, item i Apêndice), obtemos que $u \in L^{\sigma.r}(\Omega)$, o que implica

$$\int_\Omega |u|^{\sigma.r} dx < +\infty.$$

logo de (2.14) temos,

$$\int_{\Omega} |f(x,u)|^r \, dx < +\infty.$$

mostrando assim que, $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^r(\Omega)$.

Em (2.13) aplicando o Teorema de Fubini (Ver Teorema 4.1.5, Apêndice), obtemos,

$$|r_1(v)| \leq \int_0^1 \left[\int_{\Omega} |(f(x, u+zv) - f(x,u))\, v| \, dx \right] dz.$$

Agora, usando Holder, (Ver Teorema 4.1.6, Apêndice) segue

$$|r_1(v)| \leq \int_0^1 \|f(\cdot, u+zv) - f(\cdot, u)\|_{L^r(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)} \, dz \tag{2.15}$$

Afirmação 1: Vale a convergência

$$f(\cdot, u+zv) \longrightarrow f(\cdot, u) \;\; em \;\; L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$$

uniformemente para $z \in [0,1], \forall\, x \in \Omega$ quando $v \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Note que esta afirmação é equivalente a

$$f(\cdot, u+zv_n) \longrightarrow f(\cdot, u) \;\; em \;\; L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$$

uniformemente para $z \in [0,1], \forall\, x \in \Omega$ com $v_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$ quando $n \longrightarrow +\infty$.

Demonstração da afirmação 1: Consideremos $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$, com $v_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Segue da imersão contínua de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$, (Ver Teorema 4.1.2, item i Apêndice), que existe $K > 0$;

$$\|v_n\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)} \leq K \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}$$

daí, se $v_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$, então

$$v_n \longrightarrow 0 \;\; \text{em} \;\; L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega). \tag{2.16}$$

Logo, (Ver Teorema 4.1.7, Apêndice), existe uma subsequência de (v_n), que ainda denotaremos por, (v_n) e $g \in L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$ tal que

$$|v_n(x)| \leq g(x) \;\; \text{q.t.p} \;\; x \in \Omega,$$

e

$$v_n \longrightarrow 0 \;\; \text{q.t.p} \;\; x \in \Omega.$$

Daí,

$$|(u+zv_n)(x)| \leq (|u|+g)(x) \; \text{q.t.p} \;\; x \in \Omega, \;\; \forall\, z \in [0,1] \tag{2.17}$$

e

$$(u + zv_n)(x) \longrightarrow u(x) \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega. \tag{2.18}$$

Agora, usando o fato de f ser uma função de Caracthéodory, juntamente com o (lema 4.1.2, Apêndice), e (2.18), temos

$$f(x, (u + zv_n)(x)) \longrightarrow f(x, u(x)) \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega,$$

ou seja,

$$|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{q}{\sigma}} \longrightarrow 0 \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega.$$

Além disso, usando a condição de crescimento (H_1), e a limitação uniforme em (2.17) e o fato de Ω ser limitado, resulta que existe uma função $J \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{q}{\sigma}} \leq J,$$

de onde segue usando o Teorema da convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema 4.1.8, Apêndice), que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_\Omega |f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{q}{\sigma}} \, dx \right) = 0.$$

Observação: mostramos que dado (v_n), com $v_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$ quando $n \longrightarrow +\infty$, existe uma $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ satisfazendo

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_\Omega |f(x, (u + zv_{n_k})(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{q}{\sigma}} \, dx \right) = 0. \tag{2.19}$$

Vamos supor que não ocorra a convergência uniforme. Então, existem $\epsilon_0 > 0$ e $z_{n_k} \in [0, 1]$ tal que

$$\|f(\cdot, (u + z_{n_k} v_{n_k})(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)} \geq \epsilon_0, \ \ \forall \, n_k \in \mathbb{N}. \tag{2.20}$$

Vamos prosseguir com os mesmos argumentos desde de (2.16) até (2.19). Considerando uma $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$, com $v_n \longrightarrow 0$, em particular, $v_{n_k} \longrightarrow 0$ temos novamente da imersão contínua de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$ (Ver Teorema 4.1.2 item i Apêndice), que

$$v_{n_k} \longrightarrow 0 \ \ em \ \ L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega). \tag{2.21}$$

logo, (Ver Teorema 4.1.7, Apêndice), temos que existem, uma $(v_{n_{k'}}) \subset (v_{n_k})$ e $g \in L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$ tal que

$$\left|v_{n_{k'}}(x)\right| \leq g(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega,$$

e

$$v_{n_{k'}} \longrightarrow 0 \text{ q.t.p } x \in \Omega.$$

Daí

$$\left|(u + z_{n_{k'}} v_{n_{k'}})(x)\right| \leq (|u| + g(x))(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega, \; z_{n_{k'}} \in [0,1]. \tag{2.22}$$

e

$$(u + z_{n_{k'}} v_{n_{k'}})(x) \longrightarrow u(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega. \tag{2.23}$$

Novamente, usando o fato de f ser uma função de Caracthéodory, juntamente com o (lema 4.1.2, Apêndice) e (2.23), temos

$$f(x, (u + z_{n_{k'}} v_{n_{k'}})(x)) \longrightarrow f(x, u(x)) \text{ q.t.p } x \in \Omega.$$

Ou seja,

$$\left|f(x, (u + z_{n_{k'}} v_{n_{k'}})(x)) - f(x, u(x))\right|^{\frac{q}{\sigma}} \longrightarrow 0 \text{ q.t.p } x \in \Omega.$$

Agora usando a condição de Crescimento (H_1), a limitação uniforme em (2.22) e o fato de Ω ser limitado, resulta que existe uma função $J_1 \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\left|f(x, (u + z_{n_{k'}} v_{n_{k'}})(x)) - f(x, u(x))\right|^{\frac{q}{\sigma}} \leq J_1,$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, (Ver Teorema 4.1.8, Apêndice) temos

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_\Omega \left|f(x, (u + z_{n_{k'}} v_{n_{k'}})(x)) - f(x, u(x))\right|^{\frac{q}{\sigma}} dx \right) = 0,$$

ou seja,

$$\left\|f(\cdot, (u + z_{n_{k'}} v_{n_{k'}})(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\right\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)} < \epsilon \;\; \forall\, n_{k'} \geq n_0$$

o que contradiz (2.20). Assim concluímos a demonstração da **afirmação 1**.

A **afirmação 1** significa que, dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\|v\| < \delta \Rightarrow \|f(\cdot, u + zv) - f(\cdot, u)\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)} < \epsilon,$$

uniformemente em $z \in [0,1]$. Como $1 < r < \frac{q}{\sigma}$ e Ω é limitado, (Ver Teorema 4.1.9, Apêndice), Vale a seguinte imersão contínua

$$L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega).$$

Daí, usando a desigualdade da imersão, vem

$$\|v\| < \delta \Rightarrow \|f(\cdot, u + zv) - f(\cdot, u)\|_{L^r(\Omega)} < C\epsilon, \tag{2.24}$$

uniformemente em $z \in [0, 1]$. Substituindo (2.24) em (2.15), temos

$$|r(v)| \leq C\epsilon. \|v\|_{L^q}(\Omega).$$

Assim, pela imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pois $q = 2^*$, (Ver Teorema 4.1.2, item i Apêndice), resulta em

$$|r(v)| \leq C_1\epsilon \|v\|, \text{ sempre que } \|v\| < \delta,$$

mostrando (2.11). Concluído assim que o funcional ψ_2, é Fréchet Diferenciável, com

$$\psi_2'(u).v = \int_\Omega f(x, u)vdx, \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Agora vamos mostrar que ψ_2' é contínuo. Considere $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$, com $v_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Como no item anterior, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, (Ver Teorema 4.1.8, Apêndice), vem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{q}{\sigma}}\, dx\right) = 0.$$

Sendo $1 < r < \frac{q}{\sigma}$ e Ω é limitado, (Ver Teorema 4.1.9, Apêndice), temos a imersão contínua

$$L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega).$$

Daí, existe $K > 0$;

$$\|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))\|_{L^r(\Omega)} \leq K. \|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)}$$

então

$$\|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))\|_{L^r(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quando } v_n \longrightarrow 0 \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

por outro lado, sabemos que

$$\|\psi_2'(u + v_n) - \psi_2'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \sup_{\|v\|\leq 1} |(\psi_2'(u + v_n) - \psi_2'(u))\,.v|\,. \tag{2.25}$$

Note agora que

$$|(\psi_2'(u+v_n) - \psi_2'(u)) .v| = \left| \int_\Omega [f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))] \, vdx \right|$$

daí

$$|(\psi_2'(u+v_n) - \psi_2'(u)) .v| \leq \int_\Omega |[f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))] \, v| \, dx.$$

Usando Hölder, (Ver Teorema 4.1.6, Apêndice), segue

$$\int_\Omega |[f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))] \, v| \, dx \leq \|f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))\|_r \cdot \|v\|_q \, .$$

e agora usando a imersão contínua de Sobolev, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, (Ver Teorema 4.1.2, item i Apêndice), vem que existe um $K > 0$ tal que

$$\|f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))\|_r \cdot \|v\|_q \leq K \, \|f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))\|_r \cdot \|v\| \, .$$

Como

$$\|f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))\|_{L^r(\Omega)} \longrightarrow 0 \;\text{ quando }\; v_n \longrightarrow 0 \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega)$$

resulta que, também

$$\|f(x,(u+zv_n)(x)) - f(x,u(x))\|_r \cdot \|v\|_q \longrightarrow 0.$$

Então

$$|(\psi_2'(u+v_n) - \psi_2'(u)) .v| \longrightarrow 0,$$

e combinando com (2.25), temos

$$\|\psi_2'(u+v_n) - \psi_2'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} \longrightarrow 0.$$

Isto mostra que ψ_2', é contínuo para $N > 2$. Logo $\psi_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

2^o **Caso:** $N = 2$.

Neste caso basta prosseguir de maneira análoga ao primeiro caso, fazendo apenas algumas modificações que listaremos: Primeiramente, substituamos a imersão contínua

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \;\text{ onde }\; q = 2^*$$

(Ver Teorema 4.1.2, item i Apêndice), pela imersão

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ com } 1 \leq q < \infty$$

(Ver Teorema 4.1.2, item ii Apêndice). Em seguida, usando a imersão acima, mostra-se que

$$f(\cdot, u) \in L^{\frac{\rho}{\rho-1}}(\Omega),$$

onde $\frac{r}{r-1}$ é o conjugado de r, e

$$f(x, u + zv) \longrightarrow f(x, u) \text{ em } L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$$

uniformemente em $s \in [0, 1]$. Unindo os dois casos, mostra-se que $\psi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, com

$$\psi'(u).v = \int_{\Omega} [\nabla u.\nabla v - f(x, u)v]\, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

□

2.2 Os Teoremas de Deformação

Definição 2.2.1. *Seja $\psi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 num espaço de Banach X. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de ψ se $\psi(u) = c$ para algum ponto crítico $u \in X$. O conjunto de todos os pontos críticos no nível c será designado por K_c, isto é,*

$$K_c = \{u \in X \mid \psi'(u) = 0,\ \psi(u) = c\}. \tag{2.26}$$

Também, designamos por ψ^c o conjunto de todos os pontos u, em níveis menores ou iguais a c, isto é,

$$\psi^c = \{u \in X \mid \psi(u) \leq c\}. \tag{2.27}$$

Um ingrediente fundamental para os métodos topológicos que consideraremos é o chamado Teorema de Deformação. A grosso modo, ele nos diz quando e como podemos deformar um funcional no nível ψ^{c_1} em ψ^{c_2} nível, para $c_1 > c_2$ ou $c_1 < c_2$.

Teorema 2.2.1. ***(Teorema de Deformação)**: Seja $\psi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 no Espaço de Banach X. Suponha que $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon, \delta > 0$ são tais que*

$$\|\psi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta} \tag{2.28}$$

para todo $u \in \psi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$. *Então existe* $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ *tal que, para todo* $u \in X$ *e* $t \in [0,1]$, *tem-se:*

i) $\eta(0,u) = u$,

ii) $\eta(t,u) = u$ *se* $u \notin \psi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$,

iii) $\eta(1, \psi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \psi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$.

Onde, dados um subconjunto $S \subset X$ e $\delta > 0$, S_δ designa a vizinhança fechada de S, definida por:

$$S_\delta = \{u \in X : dist(u,s) \leq \delta\}.$$

Demonstração. Consideremos os seguintes subconjuntos de X:

$$A = \psi^{-1}\left([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\right) \cap S_{2\delta}$$

e

$$B = \psi^{-1}\left([c-\epsilon, c+\epsilon]\right) \cap S_\delta.$$

Pelo lema 2.1.1, existe um campo pseudo-gradiente V para ψ em Y, onde

$$Y = \{u \in X : \psi'(u) \neq 0\}.$$

Pela definição do conjunto A, temos que, $A \subset Y$. De fato, por (2.28), temos,

$$\|\psi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta} > 0, \ \forall u \in A.$$

logo, $\psi'(u) \neq 0$, mostrando que $A \subset Y$. Considerando a aplicação $\rho : X \to \mathbb{R}$ localmente lipschitziana definida por

$$\rho(u) = \frac{dist(u, \overline{A^c})}{dist(u, \overline{A^c}) + dist(u,B)} \tag{2.29}$$

e notemos que ρ está bem definida. Veja, supondo por absurdo que

$$dist(u, X-A) + dist(u,B) = 0.$$

Então existem, $z_n \in (X - A)$ e $v_n \in B$, tais que

$$z_n \to u, \;\; v_n \to u.$$

Segue da definição de A, que

$$\psi(z_n) > c + 2\epsilon \;\text{ ou }\; \psi(z_n) < c - 2\epsilon,$$

então

$$\psi(u) \geq c + 2\epsilon \;\text{ ou }\; \psi(u) \leq c - 2\epsilon.$$

Por outro lado, temos pela definição de B, que

$$c - \epsilon \leq \psi(v_n) \leq c + \epsilon,$$

passando o limite, vem

$$c - \epsilon \leq \psi(u) \leq c + \epsilon.$$

Que é um absurdo. Portando ρ está bem definida. Temos

$$\rho(u) = 1 \;\text{ em }\; B, \; \rho(u) = 0 \;\text{ em }\; \overline{A^c} \tag{2.30}$$

e notemos ainda pela definição de ρ que,

$$0 \leq \rho(u) \leq 1 \;\text{ em }\; X. \tag{2.31}$$

Se $f : X \to X$ é uma aplicação definida por,

$$f(u) = \frac{-\rho(u)}{\|V(u)\|} \cdot V(u) \;\text{ se }\; u \in A \tag{2.32}$$

e

$$f(u) = 0 \;\text{ se }\; u \in A^c \tag{2.33}$$

temos que f é localmente lipschitziana, (Ver Lema 4.1.1 Apêndice). Como $\|f(u)\| \leq 1$ para cada $u \in X$, com isso, o problema de Cauchy, que denotamos por (PC),

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt}(t) = f(w(t)) \\ w(0) = u \end{cases} \tag{2.34}$$

possui uma única solução, (Ver [1]), a qual denotaremos por $w(t, u)$, sendo definida para todo $t \geq 0$. No que segue, considerando a aplicação

$$\eta : [0, 1] \times X \to X,$$

definida por

$$\eta(t,u) = w(\delta t, u). \tag{2.35}$$

Assim

$$\eta(0,u) = w(0,u) = u \tag{2.36}$$

isto é

$$\eta(0,u) = u \ \text{ quando } \ t = 0 \tag{2.37}$$

mostrando (i). Seja $u \in A^c$ e defina $w_1(t) = u$. Note que pela definição de f segue,

$$f(w_1(t)) = 0 \Rightarrow w_1'(t) = 0, \ \text{ pois } \ f(w_1(t)) = w_1'(t)$$

ou ainda, se $u \in A^c$, tem-se $f(u) = 0$. Daí,

$$\begin{cases} \frac{dw_1}{dt}(t) = f(w_1(t)) \\ w_1(0) = u \end{cases} \tag{2.38}$$

logo, pela unicidade da solução do (PC), devemos ter,

$$w_1(t) = w(t,u) = u, \ \text{ para quaisquer } \ u \in A^c, \ t \in [0,1],$$

e por consequência,

$$\eta(t,u) = u, \ \forall u \in A^c, \ \forall t \in [0,1].$$

O que mostra (ii). Agora, observe que para $t \geq 0$,

$$w(t,u) - w(0,u) = \int_0^t \frac{d}{d\tau}(w(\tau,u))d\tau$$

assim,

$$\|w(t,u) - w(0,u)\| = \left\| \int_0^t \frac{d}{d\tau}(w(\tau,u))d\tau \right\|$$

e ainda,

$$\|w(t,u) - w(0,u)\| \leq \int_0^t \|f(w(\tau,u))\| \, d\tau$$

o que implica pela definição de f,

$$\|w(t,u) - u\| \leq \int_0^t \frac{\|\rho(w(\tau,u))\|}{\|V(w(\tau,u))\|} \|V(w(\tau,u))\| \, d\tau$$

$$\|w(t,u) - u\| \leq \int_0^t 1 d\tau = t \tag{2.39}$$

o que mostra que se $u \in S$, então

$$w(t,u) \subset S_\delta \ \ \forall \ \ t \in [0,\delta]$$

isto é,

$$w(t,S) = \eta(t,S) \subset S_\delta \ \ \forall \ \ t \in [0,1]. \tag{2.40}$$

Note também que para cada $u \in X$ fixado, a função $t \longmapsto \psi(w(t,u))$ é não-crescente, pois,

$$\frac{d}{dt}\psi(w(t,u)) = \psi'(w(t,u)).w'(t,u)$$

$$\frac{d}{dt}\psi(w(t,u)) = \psi'(w(t,u)).f(w(t,u))$$

$$\frac{d}{dt}\psi(w(t,u)) = \psi'(w(t,u)).\frac{-\rho(w(t,u))V(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|}$$

e pela definição de campo pseudo-gradiente temos,

$$\frac{d}{dt}\psi(w(t,u)) \leq \frac{-\rho(w(t,u)).\left\|\psi'(w(t,u))\right\|^2}{\|V(w(t,u))\|} \leq 0. \tag{2.41}$$

Seja agora, $u \in (\psi^{c+\epsilon} \cap S)$ temos os dois casos.

Caso (a): Se $\psi(w(\hat{t},u)) < c-\epsilon$ Para algum $\widehat{t} \in [0,\delta)$ tem-se

$$\psi(\eta(1,u)) = \psi(w(\delta,u)) \leq \psi(w(\widehat{t},u)) < c-\epsilon$$

pois, $\psi(w(\cdot,u))$ é decrescente, donde segue,

$$w(\delta,u) \in \psi^{c-\epsilon}.$$

por outro lado de (2.39)

$$\|w(\delta,u)-u\| \leq \delta,$$

assim,

$$w(\delta,u) \in S_\delta$$

implicando que

$$w(\delta,u) \in \left(\psi^{c-\epsilon} \cap S_\delta\right)$$

segue da definição de η, que

$$\eta(1,u) \in \left(\psi^{c-\epsilon} \cap S_\delta\right)$$

e portanto

$$\eta(1, \psi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \left(\psi^{c-\epsilon} \cap S_\delta\right)$$

Caso (b): Note que $\forall\, t \in [0, \delta]$, temos

$$\psi(w(t,u)) \leq \psi(w(0,u)) = \psi(u) \leq c + \epsilon$$

o que implica

$$\psi(w(t,u)) \leq c + \epsilon.$$

Supondo que

$$w(t,u) \in B = \psi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) \cap S_\delta \quad \forall\, t \in [0,\delta],$$

uma vez que

$$\psi(w(\delta,u)) - \psi(u) = \int_0^\delta \frac{d}{dt}\psi(w(t,u))dt,$$

ou seja

$$\psi(w(\delta,u)) = \psi(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt}\psi(w(t,u))dt,$$

seque da definição (2.1.2) e (2.41) que

$$\psi(w(\delta,u)) \leq \psi(u) - \frac{1}{2}\int_0^\delta \|\psi'(w(t,u))\|\, dt. \tag{2.42}$$

De fato, lembrando que

$$\|V(w(t,u))\|_X \leq 2\,\|\psi'(w(t,u))\|_{X'}\,,$$

daí

$$-\frac{\|\psi'(w(t,u))\|_{X'}^2}{2\,\|\psi'(w(t,u))\|_{X'}} \geq -\frac{\|\psi'(w(t,u))\|_{X'}^2}{\|V(w(t,u))\|_X}$$

agora integrando de 0 a δ, obtemos

$$-\int_0^\delta \frac{\|\psi'(w(t,u))\|^2}{\|V(w(t,u))\|}dt \leq -\frac{1}{2}\int_0^\delta \|\psi'(w(t,u))\|\, dt,$$

de (2.41) e pelo fato de $\rho \equiv 1$ em B, temos

$$\int_0^\delta \frac{d}{dt}\psi(w(t,u))dt \leq -\int_0^\delta \frac{\|\psi'(w(t,u))\|^2}{\|V(w(t,u))\|}dt,$$

portanto

$$\int_0^\delta \frac{d}{dt}\psi(w(t,u))dt \leq -\frac{1}{2}\int_0^\delta \|\psi'(w(t,u))\|\, dt,$$

e ainda

$$\psi(w(\delta,u)) = \psi(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt}\psi(w(t,u))dt \leq \psi(u) - \frac{1}{2}\int_0^\delta \|\psi'(w(t,u))\|\, dt,$$

o que mostra (2.42). Como queríamos demonstrar.

De (2.28) e de $\psi(u) \leq c+\epsilon$, e usando (2.42), vem

$$\psi(w(\delta,u)) \leq c+\epsilon - \int_0^\delta \frac{1}{2}.\frac{4\epsilon}{\delta}dt = c+\epsilon - \frac{1}{2}.\frac{4\epsilon}{\delta}\delta = c-\epsilon.$$

Portanto, em qualquer dos casos (a) ou (b), mostramos que

$$\eta(1,u) = w(\delta,u) \in \left(\psi^{c-\epsilon} \cap S_\delta\right) \ \text{ se } \ u \in \left(\psi^{c+\epsilon} \cap S\right).$$

Mostrando (iii). Isto encerra a demostração do **Teorema** 2.2.1 **de Deformação**. □

Seja X um espaço de Banach e $\psi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1.

Definição 2.2.2. *Dizemos que $(u_n) \subset X$, é uma sequência **Palais-Smale-(PS)**, no nível c, denotada por $(PS)_c$ quando*

$$\psi(u_n) \to c \ \ e \ \ \psi'(u_n) \to 0.$$

Definição 2.2.3. *Dizemos que ψ, verifica a condição de (PS), quando toda sequência $(PS)_c$ para $c \in \mathbb{R}$, admite uma subsequência que converge forte em X, isto é,*

$$\psi(u_n) \to c \ \ e \ \ \psi'(u_n) \to 0,$$

existem $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ e $u_0 \in X$ tal que

$$u_{n_k} \to u_0 \ \ em \ \ X.$$

Teorema 2.2.2. ***(Teorema de Deformação)****: Suponha que $\psi \in C^1(X,\mathbb{R})$ satisfaz a condição **(PS)**. Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de ψ então, para todo ϵ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C\left([0,1] \times X, X\right)$ tal que (para qualquer $u \in X$ e $t \in [0,1]$) :*

i) $\eta(0,u) = u$,

ii) $\eta(t,u) = u$ *se* $u \notin \psi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$,

iii) $\eta(1,\psi^{c+\epsilon}) \subset \psi^{c-\epsilon}$.

Demonstração. Uma vez que por hipótese c não é valor critico de ψ, existem $\alpha, \beta > 0$ tais que,

$$\text{se } \; u \in \psi^{-1}\left([c-2\alpha, c+2\alpha]\right) \Rightarrow \|\psi'(u)\| \geq \beta,$$

pois caso contrário, para quaisquer $\alpha, \beta > 0$ existirá

$$u_{\alpha,\beta} \in \psi^{-1}\left([c-2\alpha, c+2\alpha]\right) \;\; \text{com} \;\; \|\psi'(u_{\alpha,\beta})\| < \beta.$$

Considerando

$$\alpha = \frac{1}{2n}, \; \beta = \frac{1}{n} \; \text{ e } \; u_n = u_{\alpha_n,\beta_n},$$

temos

$$c - \frac{1}{n} \leq \psi(u_n) \leq c + \frac{1}{n} \; \text{ e } \; \|\psi'(u_n)\| < \frac{1}{n}.$$

Daí

$$\psi(u_n) \longrightarrow c \; \text{ e } \; \psi'(u_n) \longrightarrow 0,$$

quando $n \longrightarrow \infty$.

Como ψ verifica a condição **(PS)**, existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{n_k} \longrightarrow u.$$

Desde que $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$, temos

$$\psi(u_{n_k}) \longrightarrow \psi(u) \; \text{ e } \; \psi'(u_{n_k}) \longrightarrow \psi'(u),$$

portanto, pela unicidade do limite segue

$$\psi(u) = c \; \text{ e } \; \psi'(u) = 0.$$

Logo, c é um valor crítico de ψ, contradizendo a hipótese. Daí, usando o Teorema 2.2.1 de Deformação, com $X = S$, $\epsilon \in (0, \alpha]$ fixado e $\delta = \frac{4\epsilon}{\beta}$, concluímos a demonstração do Teorema 2.2.2 de Deformação.

□

2.3 O Teorema do Passo da Montanha

Vamos agora apresentar uma primeira ilustração do método minimax, a qual tem provado ser uma ferramenta poderosa na abordagem de muitos problemas não-lineares em equações diferenciais, o chamado Teorema do **Passo da Montanha** de **Ambrosetti** e **Rabinowitz**.

Teorema 2.3.1. ***(Teorema do Passo da Montanha):*** *Seja X um espaço de Banach e seja $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição de* ***Palais-Smale (PS)*** *[ou $(PS)_c$]. Suponha que, se*

$$e \in X \ \ e \ \ 0 < r < \|e\| \tag{2.43}$$

são tais que

$$a \equiv \max\{\psi(0), \psi(e)\} < \inf_{\|u\|=r} \psi(u) \equiv b, \tag{2.44}$$

Então

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \psi(\gamma(t)) \tag{2.45}$$

é um valor crítico de ψ com $c \geq b$. Onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \ tal \ que \ \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

é a classe de caminhos ligando 0 a e.

Demonstração. Seja

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \psi(\gamma(t)) \tag{2.46}$$

Afirmamos que c está bem definido. pois, sendo $\psi \in C^1(X, R)$ e $\gamma \in C([0,1], X)$, segue que $\psi \circ \gamma$ é uma aplicação contínua, e sendo $[0,1]$ um conjunto compacto, temos que $\psi \circ \gamma$ possui em $[0,1]$, um máximo, e por isso trocamos o supremo por máximo em (2.45) pois, como $\gamma([0,1])$ é compacto em X, então $\psi(\gamma(t))$ também é compacto. Notemos que,

$$\gamma([0,1]) \cap \partial B_r \neq \emptyset \tag{2.47}$$

para qualquer $\gamma \in \Gamma$, pois $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = e$ e $0 < r < \|e\|$ por hipótese. Portanto,

$$\max_{t \in [0,1]} \psi(\gamma(t)) \geq b = \inf_{\partial B_r} \psi, \ \ \text{pois,}$$

pela definição de b, temos

$$b \leq \psi(u), \ \forall \ u \in X; \ \|u\| = r.$$

considerando a função

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} \tag{2.48}$$

definida por,

$$t \to g(t) = \|\gamma(t)\| \;\; \forall t \in [0,1] \tag{2.49}$$

seque-se que g é contínua, note que:

$$g(0) = \|\gamma(0)\| = \|0\| = 0, \;\; g(1) = \|\gamma(1)\| = \|e\| > r \tag{2.50}$$

isto é, $g(0) < r < g(1)$, então pelo teorema do valor intermediário existe t_0 em $(0,1)$ tal que,

$$g(t_0) = \|\gamma(t_0)\| = r.$$

logo existe $u_0 = \gamma(t_0) \in X$, tal que $\|u_0\| = r$, assim, $b \leq \psi(u_0)$ e

$$\psi(u_0) = \psi(\gamma(t_0)) \leq \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t))$$

implicando que

$$b \leq \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t))$$

sendo $\gamma \in \Gamma$ arbitrários, temos

$$b \leq c \leq \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t)).$$

Agora suponha que c não é um valor crítico de ψ. Então pelo **Teorema** 2.2.2 **de Deformação**, para,

$$0 < \epsilon < \frac{(b-a)}{2}, \;\; \text{existe} \;\; \eta \in C([0,1] \times X, X) \tag{2.51}$$

tal que,

ii) $\eta(t,u) = u \; se \; u \notin \psi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$,

iii) $\eta(1, \psi^{c+\epsilon}) \subset \psi^{c-\epsilon}$,

Agora, pela definição de c, como um ínfimo sobre Γ, podemos escolher um $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que,

$$c < \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma_0(t)) \leq c + \epsilon. \tag{2.52}$$

Considere o caminho $\hat{\gamma}(t) = \eta(1, \gamma(t))$. Por (ii) e pelo fato que $2\epsilon < b - a$, segue-se que $\hat{\gamma} \in \Gamma$, pois,

$$\hat{\gamma}(0) = \eta(1,0) = 0 \;\; \text{e} \;\; \hat{\gamma}(1) = \eta(1,e) = e \tag{2.53}$$

uma vez que

$$\psi(0), \psi(e) \leq a < b - 2\epsilon. \tag{2.54}$$

De (2.52) seque,

$$\gamma_0(t) \in \psi^{c+\epsilon} \tag{2.55}$$

De (iii) e (2.55) temos,

$$\hat{\gamma}_0(t) = \eta(1, \gamma_0(t)) \in \psi^{c-\epsilon}, \ \forall t \in [0,1],$$

ou seja

$$\psi(\hat{\gamma}_0(t)) \leq c - \epsilon, \ \forall t \in [0,1],$$

logo

$$\max_{t\in[0,1]} \psi(\hat{\gamma}_0(t)) \leq c - \epsilon,$$

e sendo

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t)),$$

temos

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} \psi(\hat{\gamma}_0(t)) \leq c - \epsilon$$

então

$$c \leq c - \epsilon.$$

Que é um absurdo. Portanto c é um valor crítico de ψ. Isto encerra a demonstração do Teorema do Passo da Montanha 2.3.1. □

Capítulo 3

Uma aplicação do Teorema do Passo da Montanha

3.1 Existência de solução fraca para o problema de Dirichlet não-linear com a condição de Ambrosetti-Rabinowitz.

Neste capítulo estudaremos a existência de solução fraca para o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u = 0 & \partial\,\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira suave e, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de carathéodory, satisfazendo as seguintes condições:

- (H1) $\exists\, c, d \geq 0$ e $0 \leq \sigma < \frac{(N+2)}{(N-2)}$ se $N \geq 3$ $[0 \leq \sigma < \infty$ se $N = 1, 2]$

tais que

$$|f(x,t)| \leq c\,|t|^{\sigma} + d,$$

- (H2) $f(x,t) = o(|t|)$ quando $t \to 0,$ uniformemente em $x,$

- (H3) Existem $\mu > 2$ e $r > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,t) \leq t f(x,t) \;\; \forall \;\; |t| \geq r, \;\; onde.$$

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,z)dz.$$

Note que o funcional ψ, associado ao problema (2.6), também é o funcional associado ao problema (3.1).

1^o **Caso**: $N > 2$.

Lema 3.1.1. **a)** *u=0 é um ponto de mínimo local estrito para* ψ*:*

b) *Dado* $0 \neq v \in H_0^1(\Omega)$ *(digamos* $\|v\| = 1$*), existe* $\rho_0 > 0$*;* $\psi(\rho_0 v) \leq 0$*:*

Demonstração. (a), pela hipótese (H_2), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|t| \leq \delta \Rightarrow |f(x,t)| \leq \epsilon |t|,$$

portanto

$$|F(x,t)| \leq \frac{\epsilon}{2} |t|^2 \ \ se \ \ |t| \leq \delta \tag{3.2}$$

uma vez que a condição de crescimento (H_1) implica que,

$$|F(x,t)| \leq A_\epsilon |t|^{\sigma+1} \ \ se \ \ |t| \geq \delta \tag{3.3}$$

podemos combinar as duas equações acima, obtendo

$$|F(x,t)| \leq \frac{\epsilon}{2} |t|^2 + A_\epsilon |t|^{\sigma+1} \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \Omega. \tag{3.4}$$

daí, obtemos,

$$\psi(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \int_\Omega F(x,u)dx \geq \frac{\|u\|^2}{2} - \frac{\epsilon}{2} \|u\|_{L^2}^2 - A_\epsilon \|u\|_{L^{\sigma+1}}^{\sigma+1}, \tag{3.5}$$

logo pelas imersões contínuas de Sobolev, temos,

$$\psi(u) \geq \frac{\|u\|^2}{2} - K_\epsilon \|u\|^2 - M \|u\|^{\sigma+1}, \tag{3.6}$$

ou seja,

$$\psi(u) \geq \|u\|^2 \left(\frac{1 - 2K_\epsilon}{2} - M \|u\|^{\sigma-1} \right) \ \forall \ u \in H_0^1(\Omega)$$

para ϵ suficientemente pequeno e fixado temos,

$$0 < r < \left(\frac{1 - 2K_\epsilon}{2M} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

e escolhendo

$$\alpha = r^2 \left[\frac{1 - 2K_\epsilon}{2} - M r^{\sigma-1} \right]$$

temos,

$$\psi(u) \geq \alpha > 0, \ \psi(0) = 0, \ \text{ para } \ \|u\| = r.$$

(b) Notemos que a condição (H_3) conhecida como a condição de Ambrosetti e Rabinowitz, implica na existência de contantes $c_1, c_2 > 0$ tais que,

$$|F(x,t)| \geq c_1 |t|^{\mu} - c_2 \quad \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Observação: Como $\mu > 2$, então F é uma função superquadrática em t, pela desigualdade acima. Vamos dividir a prova da existência das constantes em dois casos:

1^o **caso:** $t > 0$. Pela condição (H_3), temos

$$0 < \frac{\mu}{t} \leq \frac{f(x,t)}{F(x,t)},\ \ t \geq r,\ \ x \in \overline{\Omega},$$

implicando

$$\int_r^t \frac{\mu}{z} dz \leq \int_r^t \frac{f(x,z)}{F(x,z)} dz,$$

daí

$$\mu \ln |z| \Big|_r^t \leq \ln |F(x,z)| \Big|_r^t,\ \ t \geq r,\ \ x \in \overline{\Omega},$$

ou ainda

$$\mu \ln(t) - \mu \ln(r) \leq \ln(F(x,t)) - \ln(F(x,r)),\ \ t \geq r,\ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Com isso

$$\ln \left(\frac{t}{r}\right)^{\mu} \leq \ln \frac{F(x,t)}{F(x,r)},\ \ t \geq r,\ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Implicando

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,r)}{r^{\mu}} t^{\mu},\ \ t \geq r,\ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Pela condição de crescimento (H_1), podemos considerar

$$K_1 = \min_{x \in \overline{\Omega}} F(x,r).$$

Com isso, podemos escrever,

$$F(x,t) \geq \frac{K_1}{r^{\mu}} t^{\mu},\ \ t \geq r,\ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Portanto,

$$F(x,t) \geq C_1 t^{\mu},\ \ t \geq r,\ \ x \in \overline{\Omega}. \tag{3.8}$$

Onde $C_1 = \frac{K_1}{r^{\mu}}$ e $C_1 > 0$.

2^o **Caso:** $t < 0$. pela condição (H_3), segue

$$\frac{f(x,t)}{F(x,t)} \leq \frac{\mu}{t},\ \ t \leq -r,\ \ x \in \overline{\Omega}.$$

o que implica
$$\int_t^{-r} \frac{f(x,z)}{F(x,z)}dz \leq \int_t^{-r} \frac{\mu}{z}dz, \ \ t \leq -r, \ \ x \in \overline{\Omega},$$
daí, com os mesmos argumentos anteriores, chegaremos

$$\ln(F(x,-r)) - \ln(F(x,t)) \leq \mu \ln |-r| - \mu \ln |t| \,, \ \ t \leq -r, \ \ x \in \overline{\Omega},$$

com isso, temos
$$\ln\left(\frac{F(x,-r)}{F(x,t)}\right) \leq \ln\left(\left|\frac{r}{t}\right|\right)^{\mu}, \ \ t \leq -r, \ \ x \in \overline{\Omega},$$
e ainda,
$$\frac{F(x,-r)}{F(x,t)} \leq \left|\frac{r}{t}\right|^{\mu}, \ \ t \leq -r, \ \ x \in \overline{\Omega},$$
assim,
$$\frac{1}{F(x,t)} \leq \left|\frac{r}{t}\right|^{\mu} . \frac{1}{F(x,-r)}, \ \ t \leq -r, \ \ x \in \overline{\Omega},$$
equivalentemente,
$$F(x,t) \geq \left|\frac{r}{t}\right|^{-\mu} .F(x,-r), \ \ t \leq -r, \ \ x \in \overline{\Omega},$$
Considerando
$$K_2 = \min_{x \in \overline{\Omega}} F(x,-r).$$
Temos
$$F(x,t) \geq \left|\frac{t}{r}\right|^{\mu} .K_2, \ \ t \leq -r, \ \ x \in \overline{\Omega}.$$
Então
$$F(x,t) \geq C_2. |t|^{\mu}, \ \ t \leq -r, \ \ x \in \overline{\Omega}. \tag{3.9}$$
Com $C_2 = \frac{K_2}{|r|^{\mu}}$ e $C_2 > 0$. Seja $c_1 = \min\{C_1, C_2\}$. Logo, por (3.8) e (3.9), vem

$$F(x,t) \geq c_1 |t|^{\mu}, \ \ \forall \ |t| \geq r, \ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Considerando
$$M = \min\left\{F(x,t) \mid x \in \overline{\Omega}, \ t \in [-r,r]\right\}.$$
Temos
$$F(x,t) \geq M, \ \ \text{para} \ \ (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-r,r].$$
Consideremos agora $c_2 > 0$, de modo que

$$c_2 \geq c_1 r^{\mu} - M \Rightarrow c_2 \geq c_1 |t|^{\mu} - M, \ \ \forall \ \ t \in [-r,r],$$

ou seja,

$$M \geq c_1 |t|^{\mu} - c_2, \;\; \forall \;\; t \in [-r, r].$$

Portanto

$$F(x,t) \geq c_1 |t|^{\mu} - c_2, \;\; \forall \;\; t \in [-r, r], \;\; x \in \overline{\Omega}. \tag{3.10}$$

e

$$F(x,t) \geq c_1 |t|^{\mu} - c_2, \;\; \forall \;\; |t| \geq r, \;\; x \in \overline{\Omega}. \tag{3.11}$$

De 3.10 e 3.11 segue (3.7). Com isso, temos

$$\psi(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \int_{\Omega} F(x,u)dx \leq \frac{\|u\|^2}{2} - c_1 \|u\|^{\mu}_{L^{\mu}} + c_2 |\Omega| \tag{3.12}$$

de sorte que dado $v \in H^1_0(\Omega)$ com $\|v\| = 1$, e escolhendo $\delta = c_1 \|v\|^{\mu}_{L^{\mu}} > 0$, obtemos,

$$\psi(\rho.v) \leq \frac{1}{2}\rho^2 - \delta\rho^{\mu} + c_2 |\Omega| \longrightarrow -\infty \quad quando \quad \rho \longrightarrow \infty.$$

em particular, existe $\rho_0 > 0$ tal que $\psi(\rho_0 v) \leq 0$. □

Lema 3.1.2. *Se $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função de Carathéodory do problema (3.1), satisfazendo as condições $(H_1) - (H_3)$, então o mesmo possui uma solução fraca não-trivial $u \in H^1_0(\Omega)$.*

Demonstração. Vamos agora começar mostrando que o funcional ψ satisfaz a condição $(P.S)$. Seja u_n uma sequência de $(PS)_c$, isto é,

$$\psi(u_n) \longrightarrow c, \qquad \psi'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Vamos mostrar que u_n possui uma subsequência que converge forte em $H^1_0(\Omega)$, Primeiramente, mostraremos que u_n é limitada em $H^1_0(\Omega)$. Veja,

$$\psi(u_n) = \frac{\|u\|^2}{2} - \int_{\Omega} F(x,u_n)dx,$$

então

$$\psi'(u_n)u_n = \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} f(x,u_n)u_n dx.$$

Além disso, note que $\psi'(u_n) \to 0$ implica que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\psi'(u_n)\| < \epsilon, \; \forall \, n \geq n_0,$$

ou seja,

$$|\psi'(u_n)u_n| \leq \epsilon \|u_n\| \ \forall\, n \geq n_0. \tag{3.13}$$

Note ainda que,

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega F(x,u_n)dx - \left(\frac{1}{\mu}\|u_n\|^2 - \frac{1}{\mu}\int_\Omega f(x,u_n)u_n dx\right).$$

segue

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx.$$

Considerando o conjunto $V_n = \{x \in \Omega; |u_n| \geq r\}$, temos

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 +$$

$$\int_{V_n} \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx + \int_{V_n^c} \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx.$$

Da condição de Ambrosetti-Rabinowitz (H_3), obtemos

$$\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \geq 0, \ \forall\, x \in V_n,$$

implicando

$$\int_{V_n} \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx \geq 0,$$

daí

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 + \int_{V_n^c} \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right)dx,$$

consequentemente temos

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - \int_{V_n^c} \left|\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right|dx.$$

Novamente, pela condição de crescimento (H_1), temos que

$$g(x,u_n) = \left|\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right|$$

é limitada em $\overline{\Omega} \times [-r,r]$, logo existe $C > 0$ tal que

$$|g(x,u_n)| \leq C, \ \forall\, (x,u_n) \in \overline{\Omega} \times [-r,r]$$

então
$$\left|\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right| \leq C,\ \forall\ (x,u_n) \in \overline{V_n^c}.$$
Com isso, temos
$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - \int_{\overline{V_n^c}} C dx,$$
e a partir daí
$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - C\left|\overline{V_n^c}\right|,$$
além disso, temos
$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - C\left|\Omega\right|,$$
ou seja
$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - C_2. \tag{3.14}$$
Por outro lado temos
$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \leq \left|\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n\right|,$$
então
$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \leq |\psi(u_n)| + \frac{1}{\mu}|\psi'(u_n).u_n|.$$
Como $|\psi(u_n)| \leq C$ e (3.13), segue
$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\psi'(u_n).u_n \leq C + \frac{1}{\mu}\epsilon\|u_n\|, \tag{3.15}$$
para n suficientemente grande. De (3.14) e (3.15), tem-se
$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - c_2 \leq c + \frac{1}{\mu}\epsilon\|u_n\|$$
daí
$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 \leq \hat{K} + \frac{1}{\mu}\epsilon\|u_n\|$$
com $\hat{K} = c + c_2 > 0$ o que implica que $\|u_n\|$ é limitada.

Vamos agora provar que (u_n) possui uma subsequência que converge forte em $H_0^1(\Omega)$. Veja, sabemos que o funcional dado pelo lema 2.1.2 é de classe $C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$, e ainda que,
$$\psi'(u).v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u)v dx, \tag{3.16}$$

em que, $\psi'(u) \in (H_0^1(\Omega))'$. como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, então pelo Teorema da Representação de Riesz, (Ver Teorema 4.1.11, Apêndice), temos

$$\psi'(u).v = \langle \nabla\psi(u), v \rangle, \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \ \text{ com } \ \|\psi'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \|\nabla\psi(u)\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{3.17}$$

consideremos agora

$$J'(u).v = \int_\Omega f(x,u)v dx \tag{3.18}$$

daí,

$$\psi'(u).v = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - J'(u).v, \ \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.19}$$

usando novamente o Teorema da Representação de Riesz (Ver Teorema 4.1.11, Apêndice), para (3.18), segue,

$$J'(u).v = \langle \nabla J(u), v \rangle, \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \ \text{ com } \ \|J'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \|\nabla J(u)\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{3.20}$$

logo substituindo (3.17) e (3.20) em (3.19) temos,

$$\langle \nabla\psi(u), v \rangle = \langle u, v \rangle - \langle \nabla J(u), v \rangle,$$

então,

$$\langle \nabla\psi(u), v \rangle = \langle u - \nabla J(u), v \rangle \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

daí,

$$\nabla\psi(u) = u - \nabla J(u). \tag{3.21}$$

Agora mostraremos que

$$T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \ \text{ com } \ T(u) = \nabla J(u), \tag{3.22}$$

é um operador compacto.

Lembremos atreves das propriedades de operadores compactos, que uma das formas para mostrarmos a compacidade de T, é, mostrarmos que para toda sequência limitada, $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, teremos que a sequência $T(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ possui uma subsequência convergente. (Ver Teorema 4.1.13, Apêndice). Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo então existe uma subsequencia que continuaremos denotando por u_n tal que converge fracamente em $H_0^1(\Omega)$, ou seja,

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega).$$

Da imersão compacta de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega),\ \forall\, r \in [1, 2^*)$ (Ver Teorema 4.1.12, item i Apêndice), implica

$$i : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^r(\Omega)$$

é um operador linear compacto, pela própria definição de imersão compacta. Daí i leva sequências convergindo fracamente $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, em sequências convergindo fortemente em $L^r(\Omega)$, isto é,

$$u_n \longrightarrow u \ \text{ em } \ L^r(\Omega).$$

ou seja, converge na topologia forte de $L^r(\Omega)$, e portanto, converge na norma,

$$\|u_n - u\|_{L^r(\Omega)} \longrightarrow 0 \tag{3.23}$$

Agora, fixando r, com $\sigma + 1 \leq r < 2^*$ e considerando q o conjugado de r, isto é, $q = \frac{r}{r-1}$. Vamos mostrar que

$$f(\cdot, u_n(\cdot)) \longrightarrow f(\cdot, u(\cdot)) \ \text{ em } \ L^q(\Omega).$$

Note, segue de (3.23) e pelo (ver Teorema 4.1.7, Apêndice), que existe uma subsequência de (u_n), que ainda denotaremos por (u_n) tal que,

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega,$$

e

$$|u_n(x)| \leq G(x) \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ G \in L^q(\Omega). \tag{3.24}$$

Como f é uma função de Carathéodory, juntamente com o (lema 4.1.2, Apêndice), temos

$$f(x, u_n(x)) \longrightarrow f(x, u(x)) \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega,$$

daí

$$|f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{r}{\sigma}} \longrightarrow 0 \ \text{ q.t.p } \ x \in \Omega.$$

Agora, usando a condição de crescimento (H_1), a limitação uniforme em (3.24) e o fato de Ω ser limitado, resulta na existência de uma função $\varphi \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{r}{\sigma}} \leq \varphi,$$

donde segue usando o Teorema da convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema 4.1.8, Apêndice), que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_\Omega |f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{r}{\sigma}}\, dx \right) = 0,$$

ou seja,

$$f(\cdot, u_n(\cdot)) \longrightarrow f(\cdot, u(\cdot)) \text{ em } L^{\frac{r}{\sigma}}(\Omega).$$

Como $1 < q < \frac{r}{\sigma}$ e Ω é limitado (Ver Teorema 4.1.9, Apêndice), vale a imersão contínua

$$L^{\frac{r}{\sigma}}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Portanto,

$$\|f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty. \tag{3.25}$$

Observe que

$$\|T(u_n) - T(u)\| = \|J'(u_n) - J'(u)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)'} = \sup_{\|v\| \leq 1} |(J'(u_n) - J'(u)).v|.$$

Porem,

$$|(J'(u_n) - J'(u)).v| = \left| \int_\Omega (f(x, u_n) - f(x, u)).vdx \right|,$$

implicando que

$$|(J'(u_n) - J'(u)).v| \leq \int_\Omega |(f(x, u_n) - f(x, u))v| \, dx,$$

usando Hölder (ver Teorema 4.1.6, Apêndice), obtemos

$$|(J'(u_n) - J'(u)).v| \leq \|f(\cdot, u_n(\cdot) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} \|v\|_{L^r(\Omega)}.$$

Usando a imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, com $r \in [\sigma + 1, 2^*]$ (Ver Teorema 4.1.2, item i Apêndice), segue que existe um $M > 0$ tal que

$$|(J'(u_n) - J'(u)).v| \leq M \|f(\cdot, u_n(\cdot) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} \|v\|,$$

de onde obtemos

$$|(J'(u_n) - J'(u)).v| \leq M \|f(\cdot, u_n(\cdot) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)},$$

pois $\|v\| \leq 1$. Assim,

$$\|J'(u_n) - J'(u)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)'} \leq M \|f(\cdot, u_n(\cdot) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)},$$

isto é,

$$\|T(u_n) - T(u)\| \leq M \|f(\cdot, u_n(\cdot) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)}. \tag{3.26}$$

Portento, de (3.25) e (3.26), concluímos que, existe uma subsequência, que ainda denotaremos por $T(u_n)$, tal que

$$\|T(u_n) - T(u)\| \longrightarrow 0.$$

Mostrando assim que T é compacto.

Por outro lado

$$\psi'(u_n) \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \|\psi'(u_n)\|_{(H_0^1(\Omega))'} \longrightarrow 0, \tag{3.27}$$

logo, por (3.17) e (3.27), temos

$$\|\nabla\psi(u_n)\| \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \nabla\psi(u_n) \longrightarrow 0. \tag{3.28}$$

Sendo

$$\nabla\psi(u_n) = u_n - T(u_n) \Rightarrow u_n = \nabla\psi(u_n) + T(u_n). \tag{3.29}$$

Como o operador T é compacto, vem

$$\|T(u_n) - T(u)\| \longrightarrow 0. \tag{3.30}$$

Passando o limite em (3.29) e usando as convergências (3.28) e (3.30), obtemos uma subsequência tal que

$$u_n \longrightarrow T(u) \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega),$$

mostrando assim a **condição (PS)** . Mostramos a **condição (PS)** para $N > 2$.

já o 2^o caso, em que $N = 2$, basta substituirmos a imersão contínua

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \;\; 1 \leq q \leq 2^*,$$

(Ver Teorema 4.1.2, item i Apêndice), pela imersão contínua

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \;\; 1 \leq q < +\infty,$$

(Ver Teorema 4.1.2, item ii Apêndice). E a imersão compacta

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \;\; 1 \leq q < 2^*,$$

(Ver Teorema 4.1.12 item i Apêndice) pela imersão compacta

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \;\; 1 \leq q < +\infty,$$

(Ver Teorema 4.1.12 item ii Apêndice). Em suma, aplicando o **Teorema do Passo da Montanha** 2.3.1, concluímos a existência de um ponto critico de ψ, e com o lema 2.1.2 verifica-se que esse ponto crítico é uma solução fraca do problema (3.1).

$\square$

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Apêndice A

Definição 4.1.1. *Uma função f de X em $\mathbb{R}$ é dita X-mensurável, (ou simplesmente mensurável), se para qualquer numero real α, tem-se*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}.$$

Definição 4.1.2. *Sejam E e F espaços de Banach e U um aberto em E. Dizemos que uma aplicação $\psi : U \to F$ é Fréchet-diferenciável no ponto $x_0 \in U$ se existe um operador linear contínuo $A : E \to F$ tal que*

$$\psi(x_0 + h) = \psi(x_0) + A(h) + r(x_0, h),$$

para todo h, tal que $x_0 + h$ pertence a uma bola aberta centrada em x_0, e contida em U, onde $r(x_0, h) = o(\|h\|)$, isto é:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|r(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Neste caso A é chamada de derivada de Fréchet de ψ em x_0, a derivada de Fréchet no ponto x_0, quando existe, é única, denotamos por $\psi'(x_0)$.

Definição 4.1.3. *Se B é um aberto de um espaço de Banach X, dizemos que ψ é de classe C^1 em B, ou que $\psi \in C^1(B, \mathbb{R})$ quando a derivada de Fréchet de ψ existe em todo $x \in B$ e a aplicação $\psi' : B \to X'$ é contínua. Onde X' denotará o dual de X.*

Definição 4.1.4. *Dado um espaço de Banach X e um funcional $\psi : X \to \mathbb{R}$, dizemos que ψ possui derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ quando existem um funcional linear $T_0 \in X'$ tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\psi(u + tv) - \psi(u) - T_0 v}{t} = 0, \quad \textit{para todo } v \in X.$$

Definição 4.1.5.

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ é mensurável}, \int_\Omega |u|^p < +\infty \right\}.$$

Definição 4.1.6.

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega), j = 1, ..., N \right\}.$$

Onde $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ denota a j-ésima derivada fraca de u, ou seja,

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Quando $p = 2$ e $m = 1$ escrevemos $W_0^{m,p}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. Todo o trabalho foi desenvolvido sobre $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 4.1.1. ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Então, existe uma constante $C = C(\Omega, p)$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p}, \ \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \ \ 1 \leq p \leq +\infty.$$

Teorema 4.1.2. *Sejam Ω um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $(N \geq 2)$, Ω de classe C^m e $1 \leq p \leq +\infty$. Então as imersões são contínuas:*

i) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ 1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^*$ *se* $mp < N$.

ii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ 1 \leq q \leq +\infty$ *se* $mp = N$.

Como consequência das imersões, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{W^{m,p}}.$$

Para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 4.1.3. ***(Desigualdade de Schwarz)****: Seja $(X, \langle , \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno. Então:*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| . \|y\|.$$

Teorema 4.1.4. ***(Teorema Fundamental do Cálculo)****: Sejam G um espaço vetorial normado completo e $f : [a,b] \longrightarrow G$ contínua, são equivalentes:*

i) Se F é uma integral indefinida de f, então

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt, \;\; \forall \; x \in [a,b]$$

ii) Se F é uma primitiva de f, então

$$F'(x) = f(x) \;\; \forall \, x \in [a,b].$$

Teorema 4.1.5. ***(Teorema de Fubine)****: Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para todo $x \in \Omega_1$,*

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ e } \left(\int_{\Omega_2} F(x,y)dy\right) \in L^1_x(\Omega_1).$$

De maneira análoga, para $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ e } \left(\int_{\Omega_1} F(x,y)dy\right) \in L^1_y(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

Teorema 4.1.6. ***(Desigualdade de Holder)****: Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $p \geq 1$. Então,*

$$f.g \in L^1(\Omega)$$

e

$$\int_{\Omega} |f.g| \, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \, \|g\|_{L^q(\Omega)} \, .$$

Teorema 4.1.7. *Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tal que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) tal que*

i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω;

ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ q.t.p em Ω.

Teorema 4.1.8. ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)****: Seja f_n uma sequência de funções integráveis. Suponha que*

i) $f_n \to f(x)$ *q.t.p em* Ω

ii) $|f_n(x)| \leq g(x)$ *q.t.p* Ω*, para alguma função* $g \in L^1(\Omega)$*. Então,*

$$f \in L^1(\Omega) \;\; e \;\; \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Teorema 4.1.9. *Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ *é um conjunto limitado e* $1 \leq p \leq q$*. Se* $u \in L^q(\Omega)$*, então* $u \in L^p(\Omega)$*, e além disso, a imersão*

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é contínua.

Teorema 4.1.10. ***(Imersão de Sobolev)****: Sejam Ω um domínio suave em $\mathbb{R}^N$, $m \geq 0$ e $1 \leq q \leq +\infty$. Então, para qualquer $j \geq 0$ as imersões são contínuas:*

i) *Se* $m < \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega)$, $p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^*$;

ii) *Se* $m = \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega)$, $p \leq q \leq +\infty$.

Teorema 4.1.11. ***(Teorema da Representação de Riesz-Fréchet)****: Seja H um espaço de Hilbert, então dado $\varphi \in H'$, existe uma única $f \in H$, tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \;\; \forall \;\; v \in H.$$

E mais ainda, verifica-se que

$$\|f\|_H = \|\varphi\|_{H'}.$$

Teorema 4.1.12. ***(Imersão Compacta de Rellich-Kondrachov)****: Sejam Ω um domínio limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$, $j \geq 0$, $m \geq 1$ e $1 \leq p \leq +\infty$. Então as imersões abaixo são compactas:*

i) *Se* $m < \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega)$, $1 \leq q < \frac{Np}{N-mp} = p^*$;

ii) *Se* $m = \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega)$, $1 \leq q < +\infty$.

Teorema 4.1.13. *(**Critério de Compacidade**): Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é compacto se, e somente se, toda sequência limitada $(x_n) \subset X$ tem a propriedade que a sequência $(T(x_n)) \subset Y$ possui uma subsequência convergente.*

Teorema 4.1.14. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear compacto. Se $(x_n) \subset X$ verifica*

$$x_n \rightharpoonup x \ \ em \ \ X,$$

então,

$$T(x_n) \longrightarrow T(x) \ \ em \ \ Y.$$

Lema 4.1.1. *A função f da demonstração do Teorema de Deformação 2.2.1, é localmente Lipschitziana.*

Demonstração. Veja,

$$f(u) - f(v) = \frac{\rho(v)}{\|V(v)\|}V(v) - \frac{\rho(u)}{\|V(u)\|}V(u)$$

daí

$$f(u) - f(v) = \frac{\rho(v)\, \|V(u)\|\, V(v) - \rho(u)\, \|V(v)\|\, V(u)}{\|V(u)\|\, \|V(v)\|}$$

com isso, somando e subtraindo no numerador da fração acima, $\rho(u)\, \|V(u)\|\, V(v)$ e $\rho(u)\, \|V(v)\|\, V(v)$, obtemos

$$f(u) - f(v) = \frac{1}{\alpha}(\|V(u)\|\, V(v)\, (\rho(v) - \rho(u)) + \rho(u)\, \|V(v)\|\, (V(v) - V(u)) +$$

$$\rho(u)V(v)\, (\|V(u)\| - (V(u)\|)).$$

onde

$$\alpha = \|V(u)\|\, \|V(v)\|\, .$$

Logo,

$$\|f(u) - f(v)\| \leq |\rho(v) - \rho(u)| + \frac{\rho(u)}{\|V(u)\|} \|V(v) - V(u)\|$$

$$+\frac{\rho(u)}{\|V(u)\|} \|V(u) - V(v)\| .$$

Sendo ρ e V localmente Lipschitzianas, existem $K_1, K_2 > 0$ e z arbitrário tal que $u, v \in U_z$ satisfazendo

$$\|f(u) - f(v)\| \leq K_1 \|v - u\| + \frac{\rho(u)}{\|V(u)\|} K_2 \|v - u\|$$

$$+\frac{\rho(u)}{\|V(u)\|} K_2 \|v - u\|$$

logo,

$$\|f(u) - f(v)\| \leq \left(K_1 + \frac{\rho(u)}{\|V(u)\|} K_2 \right) \|v - u\| .$$

Usando a continuidade da função ρ e V, podemos concluir que f é localmente Lipschitziana.

$\square$

Lema 4.1.2. *Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory, e (u_n), uma sequência de elementos de M, e N_f operador de Nemytskii definido por f. Então,*

$$N_f u_n \longrightarrow N_f u \ \textit{em} \ \textit{q.t.p}$$

se

$$u_n \longrightarrow u \ \textit{em} \ \textit{q.t.p.}$$

Onde M, é o conjunto das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis.

Considerações Finais

Em suma, durante todo o trabalho tivemos como objetivo principal, em provar a existência de solução fraca para o problema (3.1), para isso, usamos algumas ferramentas poderosas, dentre as principais, temos, o método variacional, juntamente com o Teorema do Passo da Montanha. Futuramente pretendo continuar usando o método minimax, para resolver outros problemas.

Referências Bibliográficas

[1] COSTA, David Goldstein, Tópicos em Análise não-linear e Aplicações às Equações Diferenciais. CNPq-IMPA, 1986.

[2] Poul.H.Rabinowitz, Minimax Methods in Critical Point Theory With Applications to Differential Equations, University of Miami, 1984.

[3] M. Willem.; Minimax Theorems,Boston: Birkhauser, 1996.

[4] Haim.Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, University Rutgers, 2010.

[5] Lima, Elon Lages.; Espaços Métricos, Projeto Euclides: CNPQ-IMPA, 1977.