UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUACÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

O Teorema de Lax Milgram e Aplicações

João Felipe Fonseca da Silva

Macapá - AP
2014

João Felipe Fonseca da Silva

O Teorema de Lax Milgram e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Matemática como requisito para obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do Prof. Msc. Kelmem da Cruz Barroso.

Macapá - AP
2014

João Felipe Fonseca da Silva

O Teorema de Lax-Milgram e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá, Campus Marco Zero, aprovado pela Comissão de professores:

Prof. Ms. Kelmem da Cruz Barroso. (Orientador)
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof. Dr. Simone de Almeida Delphim.
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof. Ms. Marcel Lucas Picanço Nascimento
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Macapá - AP
2014

A minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus pai todo poderoso.

A minha família, em particular minha Mãe (D. Graça) e a minha companheira (Edivani Cavalcante) pela compreensão e apoio.

Ao professor Kelmem pela brilhante orientação e paciência.

Aos professores do departamento, em especial aos professores da banca avaliadora e ao Prof. Gilberlândio de Jesus Dias que nos acompanhou em boa parte do curso.

A todos muito obrigado!

"O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis."

(José de Alencar)

Resumo

Neste trabalho usaremos um resultado de Análise Funcional na Teoria das Equações Diferenciais Parciais. O Teorema de Lax-Milgram para espaços de Hilbert garante a existência e a unicidade da solução dos seguintes problemas:

Dado $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \; em \, \Omega \\ u &= 0, \; em \, \partial\Omega, \end{cases}$$

tem única solução $u \in H_0^1(\Omega)$.

Dado $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f, \; em \, \Omega \\ u &= 0, \; em \, \partial\Omega, \end{cases}$$

tem única solução $u \in H_0^1(\Omega)$.

Palavras-chave: Lax-Milgram, Espaços de Hilbert, Espaços de Sobolev.

Abstract

In this work we will use a result of Functional Analysis in the Theory of Partial Differential Equations. The Lax-Milgram theorem for Hilbert spaces guarantees the existence and uniqueness of the solution of the following problems:

Given $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bounded open, the problem

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \; em \, \Omega \\ u &= 0, \; em \, \partial\Omega, \end{cases}$$

has unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

Given $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ open, the problem

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f, \; em \, \Omega \\ u &= 0, \; em \, \partial\Omega, \end{cases}$$

has unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

Keywords: Lax-Milgram, Hilbert space, Sobolev space.

Sumário

1 Introdução **1**

2 Espaços Normados e Espaços de Banach **2**

2.1 Espaços Normados e Espaços de Banach 2

2.2 Operadores lineares 10

2.3 Operadores lineares limitados 11

2.4 Funcionais Lineares 15

2.5 Espaço Normado de Operadores. Espaço Dual 17

3 Espaços com Produto Interno. Espaços de Hilbert **26**

3.1 Espaços com Produto Interno. Espaços de Hilbert 26

3.2 Representação de funcionais em Espaços de Hilbert 34

3.3 Teorema de Lax Milgram 37

4 Aplicações do Lax Milgram **41**

4.1 Definições e Notações Básicas 41

4.2 Os Problemas Lineares 44

5 Considerações Finais **48**

A Definições e Principais Resultados **49**

Referências Bibliográficas **54**

Introdução

O presente trabalho consiste em apresentar resultados centrais de Análise Funcional e aplicá-lo na Teoria das Equações Diferenciais Parciais. Deste modo, procuramos construir elementos necessários para uma boa leitura e compreensão de cada capítulo. Obviamente, não existe nada de inédito nem de inovador nos resultados enunciados.

No Capítulo 2, estudamos a teoria dos Espaços Normados e Espaços de Banach, com alguns exemplos de espaços completos e incompletos. Posteriormente, um tratamento aos Operadores Lineares e Operadores lineares limitados, por seguinte, os Funcionais lineares e Espaço Dual. E neste, demonstramos alguns dos duais mais frequentes nos livros.

No Capítulo 3, dedicamos ao Espaço de Hilbert, trazendo exemplos e demonstrações dos principais resultados deste espaço para a compreensão e desenvolvimento deste trabalho. Destes resultados, destacamos o Teorema da Representação de Riesz-Frèchet e o principal, o **Teorema de Lax Milgram**, devivo ao matemático húngaro **Peter David Lax** e ao estadunidense **Arthur Norton Milgram**. Este teorema é uma ferramenta importante na Teoria das Equações Diferenciais Parciais. Ele é uma espécie de Teorema de Riesz-Frèchet na qual as formas bilineares substituem os produtos internos.

O Capítulo 4, trata-se da aplicação do teorema, e para tal, necessitamos de algumas definições e resultados preliminares. Foram feitas duas aplicações, em que o teorema garante a existência e unicidade da solução. Em ambas, dado um funcional f no espaço de Hilbert $L^2(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, existe uma única solução no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.

Capítulo 2

Espaços Normados e Espaços de Banach

Neste capítulo, iremos estudar algumas definições e resultados essenciais de espaço de Normados e espaços de Banach para compreensão e desenvolvimento do que será feito nos capítulos posteriores.

2.1 Espaços Normados e Espaços de Banach

Definição 2.1.1. *Um espaço normado X é um espaço vetorial real. Dizemos que uma função $\|.\| : X \to \mathbb{R}$é uma norma se as seguintes propriedades ocorrem:*

N1) $\|x\| > 0$ *e* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$*,* $\forall x \in X$*;*

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \,.\, \|x\|$*,* $\forall x \in X$ *e* α $\mathbb{R}$*;*

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*,* $\qquad \forall x, y \in X$. *(Desigualdade Triangular)*

Um espaço vetorial munido de uma norma será chamado de espaço vetorial normado, ou simplesmente espaço normado. Assim como no caso do corpo dos escalares, um espaço normado é um espaço métrico (Ver Apêndice Definição A.0.1) com norma dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|\,,$$

Neste caso, dizemos que a métrica d é induzida pela norma $\|.\|$. O espaço normado assim definido é denotado por $(X, \|.\|)$ ou simplesmente por X. Portanto, toda a teoria de espaços métricos se aplica aos espaços normados. Em particular, uma sequência (x_n) em um espaço normado X converge para um vetor $x \in X$ se,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Assim, dizemos que x é o limite da sequência (x_n) e escrevemos $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ou $x_n \to x$.

Um espaço normado X é chamado espaço de Banach quando for um espaço métrico completo (Ver Apêndice: Definição A.0.2) com a norma induzida pela norma.

No que segue, iremos mostrar alguns exemplos de espaços que poderão ser ou não completos. Para diferentes espaços, tais provas podem variar em complexidade, mas eles têm aproximadamente o mesmo padrão geral.

Exemplos de Espaços Completos e Incompletos

Para mostrar que um espaço é completo, devemos considerar uma sequência arbitrária de Cauchy (x_n) em X e que converge em X. Para tal afirmação, temos os seguintes passos:

(i) Construir um elemento x (para ser usado como limite);

(ii) Provar que x está no espaço considerado;

(iii) Provar a convergência $x_n \to x$.

A definição de Sequência de Cauchy, bem como as definições espaços dos exemplos abaixo, estão no Apêndice A.

Completeza do Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$

Seja $X = \mathbb{R}^n$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, onde $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ e $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ com a norma euclidiana definida por

$$\|x - y\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \eta_i)^2\right)^{1/2}.$$

$\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach com a norma $\|x\|_1$.

Demonstração. Consideremos uma sequência arbitrária de Cauchy (x_m) em $\mathbb{R}^n$ de modo que para cada $m \in \mathbb{N}$ teremos $x_m = (\xi_1^{(m)}, ..., \xi_n^{(m)}) \in \mathbb{R}^n$. Como (x_m) é de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existe um n_0 tal que

$$\|\xi_m - \xi_r\| = \left(\sum_{j=1}^{n}(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2\right)^{1/2} < \epsilon \tag{2.1}$$

com $m, r > n_0$.

Para cada $j = 1, 2, ..., n$ temos

$$(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2 < \epsilon^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2} < \sqrt{\epsilon^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}\right| < \epsilon.$$

Isto mostra que para cada j fixo, $(1 \leq j \leq n)$, a sequência $(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Logo é convergente, pois toda sequência de Cauchy de números reais é convergente (Ver Apêndice: *Teorema A.0.1*), digamos, $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ quando $m \to \infty$. Usando esses n limites definimos $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ segue que

$$(\xi_1^{(m)}, ..., \xi_n^{(m)}) \to (\xi_1, ..., \xi_n),$$

onde claramente x por ter n coordenadas pertencerá a $\mathbb{R}^n$. De (2.1) com $r \to \infty$, temos

$$\left\|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right\| \leq \epsilon \tag{2.2}$$

com $m > n_0$.

Isso mostra que x é limite de (x_m) e assim, prova que $\mathbb{R}^n$ é completo.

Portanto, $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach.

□

Completeza do espaço l^p

O espaço l^p, com p fixo e $p \geq 1$, é completo.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência arbitrária de Cauchy no espaço l^p, onde $x_m = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$. Então para cada $\epsilon > 0$ existe um n_0 tal que para todo $m, n > n_0$,

$$\|x_m - x_n\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right|^p\right)^{1/p} < \epsilon \tag{2.3}$$

segue-se que para todo $j = 1, 2, ...,$ temos

$$\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right| < \epsilon \tag{2.4}$$

com $m, n > n_0$. De (2.4) vemos que $(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(2)}, ...)$ é um sequência de Cauchy de números reais. Logo, é convergente pela completeza da reta. Segue que para cada j, $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ quando $m \to \infty$. Usando estes limites, definimos $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ e mostraremos que $x \in l^p$ e $x_m \to x$.

De (2.3) temos para todo $m, n > n_0$

$$\sum_{j=1}^{k} \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right|^p < \epsilon^p$$

com $k = 1, 2, ...$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos para $m > n_0$

$$\sum_{j=1}^{k} \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right|^p \leq \epsilon^p$$

com $k = 1, 2, ...$

Fazendo $k \to \infty$, obtemos para $m > n_0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right|^p \leq \epsilon^p \tag{2.5}$$

Isto mostra que $x_m - x = (\xi_j^m - \xi_j) \in l^p$. Desde que $x_m \in l^p$, segue pela desigualdade de Minkowski (Ver Apêndice: *Proposição A.0.0.2*), segue-se que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_m + (x - x_m)|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_m|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x - x_m|^p\right)^{1/p}$$

onde

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_m|^p\right)^{1/p} < \infty \quad \text{e} \quad \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x - x_m|^p\right)^{1/p} < \infty$$

sendo assim,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_m + (x - x_m)|^p\right)^{1/p} < \infty$$

logo,

$$x \in l^p.$$

Como (x_m) é uma sequência arbitrária de Cauchy em l^p, isto mostra que o espaço l^p é completo.

$\square$

Completeza do espaço l^∞

O espaço l^∞ é um espaço de completo.

Demonstração. Seja (x_m) uma sequência de Cauchy qualquer no espaço l^∞ onde $x_m = (\xi_1^{(m)})$, com $i = 1, 2, ...$. De tal forma que a norma seja dada por

$$\|x - y\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j|$$

onde $x = (\xi_j)$ e $y = (\eta_j)$ pertecem a l^∞ e (x_m) é uma sequência de Cauchy, daí para todo $\epsilon > 0$ existe um n_0 tal que para todo m, n >n_0,

$$\|x_m - y_n\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} \left|\xi_j^{(m)} - \eta_j^{(n)}\right| < \epsilon.$$

Para cada j fixo, da desigualdade acima segue que

$$\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right| < \epsilon \tag{2.6}$$

com $m, n > n_0$. Assim, para cada j fixo, a sequência $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, ...)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Logo, converge pela completeza da reta. Assim, $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ quando $m \to \infty$. Usando esses limites $\xi_1, \xi_2, ...$, definimos $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ e mostraremos que $x \in l^\infty$. De (2.6), quando $n \to \infty$, temos

$$\xi_j^{(n)} \to \xi_j \quad \Rightarrow \quad \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right| < \epsilon$$

com $m > n_0$, passando o limite segue que

$$\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right| \leq \epsilon \tag{2.7}$$

com $m > n_0$.

Uma vez que $x_m \in l^\infty$, existe um número real k_m tal que $\left|\xi_j^{(m)}\right| \leq k_m$ qualquer que seja j. Daí, pela desigualdade triangular, temos

$$|\xi_j| = \left|\xi_j - \xi_j^{(m)} + \xi_j^{(m)}\right| \leq \left|\xi_j - \xi_j^{(m)}\right| + \left|\xi_j^{(m)}\right|$$

com $m > n_0$.

Sabemos que

$$\left|\xi_j - \xi_j^{(m)}\right| = \left|(-1).(\xi_j^{(m)} - \xi_j)\right| = \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right|$$

Desta forma de (2.7), temos que

$$|\xi_j| \leq \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right| + |\xi_j| \leq \epsilon + k_m$$

com $m > n_0$. Esta desigualdade vale para todo j. Assim, (ξ_j) é uma sequência limitada de números. Isto Implica que $x = (\xi_j) \in l^\infty$. Também, de (2.7) obtemos

$$\|x_m - x\| = \sup_j \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right| \leq \epsilon$$

com $m > n_0$. O que mostra que $x_m \to x$.
Portanto, l^∞ é completo.

$\square$

Completeza do espaço $C[a, b]$

O espaço $C[a, b]$ é um espaço de Banach com a norma definida por

$$\|\psi\| = \max_{t \in J} |\psi(t)|, \tag{2.8}$$

onde $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$com $t \in [a, b]$.

Demonstração. Seja (ψ_m) uma sequência arbitraria de Cauchy em $C[a, b]$. Em seguida, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um n_0, tal que para todos $m, n > n_0$, temos

$$\|\psi_m, \psi_n\| = \max_{t \in J} |\psi_m(t) - \psi_n(t)| < \epsilon \tag{2.9}$$

com $t \in [a, b]$. Daí um t fixado, $t = t_0 \in J$, temos

$$|\psi_m(t_0) - \psi_n(t_0)| < \epsilon \tag{2.10}$$

com $(m, n > n_0)$. Isto mostra que $(\psi_1(t_0), \psi_2(t_0), ...)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Daí a sequência converge, digamos $\psi_m(t_0) \to \psi(t_o)$, se $m \to \infty$. Desta forma, podemos associar a cada $t \in J$ um único número real $\psi(t)$. Isto define uma convergência pontual da função ψ em J. Vamos mostrar agora que $\psi \in C[a, b]$.

Fazendo $n \to \infty$ em (2.10), obtemos

$$\max_{t \in J} |\psi_m(t) - \psi(t)| < \epsilon, \tag{2.11}$$

com $(m > n_0)$ e $t \in J$.

$$|\psi_m(t) - \psi(t)| < \epsilon \tag{2.12}$$

com $m > n_0$

Temos pelo *teorema A.0.4 e A.0.5*(Ver Apêndice), que ψ é contínua para todo $t \in J$. De (2.12) temos que (ψ_m) converge uniformemente para $\psi(t)$. E como cada ψ_m é contínua em J e a convergência é uniforme, segue que ψ é contínua em J, ou seja, $\psi \in C[a, b]$. Também que $\psi_m \to \psi$. Com isso provamos a completeza do espaço $C[a, b]$, com a norma dada. Portanto $C[a, b]$ é um espaço de Banach.

$\square$

Exemplo de espaço incompleto

Seja o espaço X, o conjunto de todas as funções contínuas definidas em $J = [a, b]$, e com a norma

$$\|x - y\| = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt \tag{2.13}$$

Mostraremos que o $(X, \|.\|)$ não é completo.

De fato, a função x_m na figura (1) é uma sequência de Cauchy, pois $\|x_m - x_n\|$ é a área do triângulo na figura (2), e para todo $\epsilon > 0$ dado, temos

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon \quad \text{quando} \quad m, n > 1/\epsilon$$

Vamos mostrar que a sequência de Cauchy não converge. Temos

$$x_m(t) = 0 \quad \text{se} \quad t \in [0, 1/2], \qquad x_m(t) = 1 \quad \text{se} \quad t \in [a_m, 1]$$

onde $\quad a_m = 1/2 + 1/m$ para todo $x \in X$.

$$\begin{aligned}
\|x_m - x\| &= \int_0^1 |x_m(t) - x(t)|\, dt \\
&= \int_0^{1/2} |x(t)|\, dt + \int_{1/2}^{a_m} |x_m(t) - x(t)|\, dt + \int_{a_m}^1 |1 - x(t)|\, dt
\end{aligned}$$

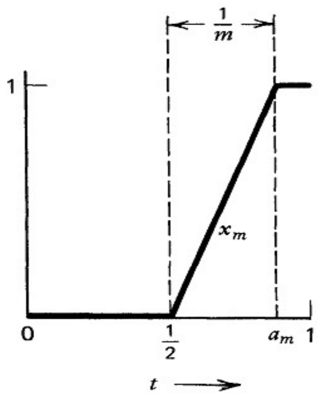

Figura 1

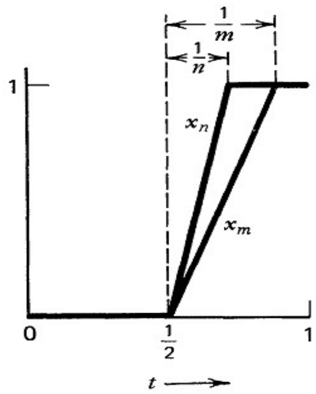

Figura 2

Como as integrais são não negativas, assim o é cada integral à direita. Consequentemente, temos que $\quad \|x_m - x\| \to 0, \quad$ quando $m \to \infty$. Sendo assim contínua em x, segue que devemos ter

$$x(t) = 0 \quad set \in (0, 1/2] ex(t) = 1 \text{se} t \in (1/2, 1].$$

Mas, vejamos pelos limites laterais que

$$\lim_{t \to 1/2^-} x(t) = 0 \text{ e } \lim_{t \to 1/2^+} x(t) = 1,$$

temos que o $\lim_{t \to 1/2} x(t)$ não existe em X. Então $x(t)$ não é contínua em $t = 1/2$. Desta forma (x_m) não converge, isto é não possui um limite em X. Isto prova que o espaço X não é completo.

Propriedades Adicionais de Espaços Métricos

Por definição, um subespaço Y de um espaço normado X é considerado como um espaço vetorial, com a norma obtida através da restrição da norma em X para o subespaço Y. Esta norma em Y é dita ser induzida pela norma em X. Se Y é fechado em X, então Y é chamado subespaço fechado em X. Se um subespaço Y de um espaço de Banach X é um subespaço de X considerado como um subespaço normado. Não necessariamente Y completo.

Teorema 2.1.1. *Um subespaço Y de um espaço de Banach X é completo se, e somente se, Y é fechado em X.*

Demonstração. Se Y é fechado então todo ponto de Y é aderente, ou seja, para qualquer $x \in X$ temos

$$V_x \bigcap Y \neq \emptyset,$$

onde V_x é uma vizinhança qualquer de x, dai x é limite de uma sequência, então temos $x = \lim x_n$, logo (x_n) é de Cauchy, pois ela converge. E com isso concluímos que toda x_n em Y converge para algum ponto x em Y, pois se isso não acontecesse estaríamos dizendo que existiria um ponto x em Y não aderente a ele. Isto é um absurdo. Reciprocamente, se Y é um subespaço de X tal que Y é Banach então temos que para qualquer sequência de Cauchy (x_n) em Y isto ocorre $x_n \to x$ com x em Y, se todos os pontos de Y são limites de alguma sequência de Cauchy, logo todos os pontos de Y são aderentes a Y. Portanto Y é fechado. $\square$

2.2 Operadores lineares

Nesta seção, estamos interessados em aplicações entre espaços métricos, em particular, espaços normados. E neste caso, uma aplicação é chamada de operador.

Definição 2.2.1. *Um operador linear entre espaços vetoriais X e Y é uma aplicação $T : D(T) \subset X \to Y$, em que seu domínio $D(T)$ é um subespaço vetorial e com a condição abaixo.*

$$T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y), \quad \forall \quad x, y \in D(T) \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}$$

Exemplos de operadores lineares

Exemplo 2.2.1. *O operador identidade $I_X : X \to X$ definido por $I_X(x) = x, \quad \forall x \in X$.*

Exemplo 2.2.2. *Diferenciação: Seja X o espaço vetorial de todos os polinômios sobre $[a, b]$. Podemos definir um operador linear T_x em X por*

$$T_x(t) = x'(t)$$

para cada $x \in X$, onde denota a diferenciação em relação a t. O operador T é aplicado de X sobre si mesmo.

Exemplo 2.2.3. *Integração: Um operador linear T de $C[a, b]$ sobre si mesmo, é definido por*

$$T(x(t)) = \int_a^t x(\tau) d\tau$$

onde $t \in [a, b]$.

Exemplo 2.2.4. *Multiplicação por t. Um operados linear de $C[a, b]$ sobre si, é definido por*

$$Tx(t) = tx(t).$$

2.3 Operadores lineares limitados

Definição 2.3.1. *Sejam E e Y espaços vetoriais normados e $T : D(T) \to Y$ um operador linear, onde $D(T) \subset X$. O operador T é dito ser limitado se existe um número real c tal que*

$$\|Tx\| \leq c\,\|x\| \quad \forall \quad x \in D(T)$$

Vamos denotar por $\|T\|$ o seguinte número real associado ao operador linear limitado T,

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \,. \tag{2.14}$$

Note que a desigualdade abaixo

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\| \quad \forall x \in D(T) \tag{2.15}$$

é válida. De fato,

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = c$$

assim,

$$\|T\| = c$$

e desta forma, temos

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$$

com isso verifica-se a desigualdade (2.15).

Vejamos agora um exemplo de operador limitado.

Exemplo 2.3.1. *Sejam* $E = C([a, b]; R)$ *com a norma dada por*

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

e

$$T : E \to \mathbb{R}; \quad \forall f \in E \quad com \quad T(f) = f(1) \tag{2.16}$$

Note que o operador T é limitado.

De fato, Se $\quad f \in E \quad$ e $\quad \|f\| = 1, \quad$ temos

$$|f(1)| \leq \max_{t \in [o,1]} |f(t)| = \|f\|.$$

Desta forma,

$$|T(f)| \leq 1 \quad f \in E \quad e \quad f \neq 0$$

com $\|f\| = 1$, onde concluímos que

$$|Tf| \leq \|f\| \quad \forall f \in E$$

isto prova a limitação do operador.

Teorema 2.3.1. ***(Dimensão Finita)*** *Seja X um espaço normado de dimensão finita, então todo operador linear é limitado.*

Demonstração. Sejam X um espaço normado tal que $dim X = n$ e $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base (Ver Apêndice: *Definição A.0.8*)para X. Considere $x \in X$, logo pode ser escrito como $x = \sum \xi_j e_j$ e um operadr linear T definido sobre X, segue que

$$\|T(x)\| = \left\|T \sum \xi_j e_j\right\| = \left\|\sum \xi_j T(e_j)\right\|$$

pela desigualdade triangular temos

$$\|T(x)\| = \left\|T \sum \xi_j e_j\right\| = \left\|\sum \xi_j T(e_j)\right\| \leq \sum |\xi_j| \|T(e_j)\|$$

ou seja,

$$\sum |\xi_j| \|T(e_j)\| = |\xi_1| \|T(e_1)\| + ... + |\xi_n| \|T(e_n)\|,$$

considerado $max \, \|T(e_j)\|$, teremos

$$\sum |\xi_j| \|T(e_j)\| \leq \max_k \|T(e_j)\| \sum |\xi_j| \tag{2.17}$$

Em $\sum |\xi_j|$, pelo *Teorema A.0.7* (Ver Apêndice)

$$\|\xi_1 e_1 + ... + \xi_n e_n\| \geq c(|\xi_1| + ... + |\xi_n|)$$

onde $c > 0$. Isto é,

$$\|x\| = \left\|\sum \xi_j T(e_j)\right\| \geq c(\sum |\xi_j|)$$

assim,

$$\sum |\xi_j| \geq \|x\| /c.$$

Além disso, de (2.17), fazendo $\gamma = 1/c$, obtemos

$$\|Tx\| \leq \gamma \|x\|$$

como $\gamma > 0$.

Portanto, T é limitado. $\square$

Operadores são aplicações, com isto, podemos aplicar a definição de continuidade. Isto é fundamental para operadores linear, continuidade e limitação que tornam-se conceitos equivalentes.

Os detalhes são os que seguem: Seja $T : D(T) \to Y$ um operador, não necessariamente linear, onde $D(T) \subset X$ e X e Y são espaços normados. Por definição, o operador T é contínuo em $x_0 \in D(T)$ se para cada $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\|Tx - Tx_0\| < \epsilon \forall x \in D(T), \text{ satisfazendo } \|x - x_0\| < \delta.$$

Dizemos que T é contínuo, se T é contínuo em todo $x \in D(T)$.

Teorema 2.3.2. *(Continuidade e limitação) Seja $T : D(T) \subset X \to Y$ um operador linear e X, Y espaços normados. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

a) T é contínuo se, e somente se, T é limitado.

b) Se T é contínuo em um ponto, então T é contínuo.

Demonstração. Se T é limitado, existe $c > 0$ tal que

$$\|T(x)\| \leq c \|x\| \quad \forall x \in D(T)$$

logo,

$$\|T(x - y)\| = \|T(x) - T(y)\| \leq c \|x - y\|$$

Isto mostra que T é lipschitziana, daí T é contínua. Vamos provar agora que se T é contínua em um ponto digamos em x_0, então T é limitada.

Seja $x_0 \in D(T)$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon \quad \forall x \in D(T), satisfazendo \, \|x - x_0\| < \delta. \tag{2.18}$$

Considerando $x_y = x_0 + \left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right) \quad \forall y \in D(T), y \neq 0$, segue-se que

$$x_y - x_0 = \delta y/2 \,\|y\| \quad \forall y \in D(T), y \neq 0$$

e aplicando o operador, e depois a norma, obtemos

$$\|T(x_y) - T(x_0)\| = \left\| \left(\frac{\delta}{2} \,\|y\|\right) T(y) \right\| < \epsilon$$

pois,

$$\|x_y - x_0\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

e portanto,

$$\|T(y)\| < \left(\frac{2\epsilon}{\delta}\right) \|y\| = M \,\|y\| \quad \forall y \in D(T),$$

onde $M = 2\epsilon/\delta > 0$,

com isso provamos a limitação de T.

Se T é contínuo em um ponto então T é limitado, como já provamos, portanto T é continuo por (2.18). Isto conclui a demonstração do teorema. □

Corolário 2.3.1. *(Continuidade e Espaço Nulo) Seja T um operador linear limitado. Então:*

a) $x_n \to x$ *implica* $Tx_n \to Tx$, *onde* $x_n, x \in D(T)$.

b) *O espaço nulo $N(T)$ é fechado.*

Demonstração. a) Como T é linear e limitado, de (2.15), temos

$$\|T(x_n) - T(x)\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\| \, \|x_n - x\|$$

passando o limite e como $x_n \to x \; x_n \to \infty, \quad \|x_n - x\| \to 0$.

Daí como,

$$\|T(x_n) - T(x)\| \leq \|T\| \, \|x_n - x\| \to 0.$$

Logo,

$$\left\|T(x_{n)} - T(x)\right\| \to 0$$

Portanto,

$$T(x_n) \to T(x).$$

b) Para cada $x \in \overline{N(T)}$ existe uma sequência x_n em $N(T)$ tal que $x_n \to x$. Assim, $Tx_n \to Tx$ por (2.3.1) acima. Também $Tx = 0$, daí $Tx_n = 0$, desde que $x \in N(T)$. Portanto, como $x \in \overline{N(T)}$, $N(T)$ é fechado.

□

2.4 Funcionais Lineares

Um funcional linear é um operador cuja imagem encontra-se na reta real R. Denotemos funcionais por letras minúsculas $f, g, h, ...$, o domínio de f por $D(f)$, a imagem por $R(f)$, e o valor de f em um $x \in D$, por $f(x)$. Funcionais são operadores, com as definições anteriores aplicadas.

Funcional Linear

Definição 2.4.1. *Um funcional linear f é um operador linear com domínio no espaço vetorial X e imagem no corpo escalar K de X, assim*

$$f : D(f) \to K.$$

Funcional Linear Limitado

Definição 2.4.2. *Um funcional linear limitado f é um operador linear limitado com imagem em um corpo escalar do espaço normado X com domínio $D(f)$. Assim, existe um número real c tal que para todo $x \in D(f)$*

$$|f(x)| \leq c\,\|x\| \tag{2.19}$$

Além disso, a norma de f é

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{2.20}$$

ou

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x=1}} |f(x)| \tag{2.21}$$

o que implica por (2.15)

$$|f(x)| \leq \|f\| \, \|x\| \tag{2.22}$$

e um caso especial do Teorema 2.3.2 é

Teorema 2.4.1. *(Continuidade e Limitação) Um funcional linear f com domínio $D(f)$ em um espaço normado é contínuo se, e somente se, f é limitado.*

As linhas da demonstração deste teorema é a mesma da demonstração do Teorema 2.3.2. Basta considerar o operador como funcional linear.

Exemplos de Funcionais Lineares

Exemplo 2.4.1. *Produto escalar: O produto escalar com um fator mantido fixo define um funcional $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, por meio de*

$$f(x) = \langle x.a \rangle = \xi_1.a_1 + \xi_2.a_2 + \xi_3.a_3$$

onde, $a = (\alpha_j) \in \mathbb{R}$ é fixado, f é linear e limitado.

$$|f(x)| = |\langle x.a \rangle| \leq \|x\| \, \|a\|$$

Observe que $|f(x)| \leq \|a\|$, se tomarmos o supremo sobre todo x de norma 1. Por outro lado, fazendo $x = a$ e usando (2.15), obtemos

$$\|f\| \geq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\| \, .$$

Assim, a norma de f é $\|f\| = \|a\|$.

Exemplo 2.4.2. *Integral Definida: Considere $f : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt$$

Consideremos f é linear. Provaremos agora que é limitado e tem norma $\|f\| = b - a$ De fato, escrevendo $J = [a, b]$ e com a norma de $C[a, b]$, obtemos

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)dt \right| \leq (b - a) \max_{t \in J} |x(t)| = (b - a) \, \|x\|.$$

Tomando o supremo de todos os x de norma 1, obtemos $\|f| \leq b-a$. Para obter $\|f| \geq b-a$, escolhemos em particular $x = x_0 = 1$, notemos que $\|x_o\| = 1$ e usando (2.15),

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = |f(x_0)| = \int_a^b dt = b-a.$$

2.5 Espaço Normado de Operadores. Espaço Dual

Definição 2.5.1. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Denotamos por $B(X,Y)$ o conjunto de todos os funcionais lineares limitados de X em Y.*

Teorema 2.5.1. *O espaço vetorial $B(X,Y)$ de todos os operadores lineares limitados de um espaço normado X em um espaço normado Y é um espaço normado com a norma definida por*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \|T(x)\|. \tag{2.23}$$

Demonstração. (Ver: [8]) $\square$

Teorema 2.5.2. *(Completeza). Se Y é um espaço de Banach, então $B(X,Y)$ e um espaço de Banach.*

Demonstração. Consideramos uma sequência de Cauchy arbitrária (T_n) em $B(X,Y)$ e mostraremos que converge para um operador $T \in B(X,Y)$. Como (T_n) é de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existe um N tal que

$$\|T_n - T_m\| < \epsilon$$

com $m, n > N$.

Para todo $x \in X$ e $m, n > N$ podemos obter de $\|T(x)\| \leq \|T\| . \|x\|$

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| < \epsilon \|x\|. \tag{2.24}$$

Agora para qualquer x fixo e dado ϵ_x podemos escolher $\epsilon = \epsilon_x$ de modo que $\epsilon_x \|x\| < \epsilon$. Então, a partir de (2.24) temos $\|T_n(x) - T_m(x)\| < \epsilon_x$ e vemos que $(T_n(x))$ é de Cauchy em Y. Uma vez que Y é completo, temos $(T_n(x)) \to y$. Observemos ainda que o limite $y \in Y$ depende da escolha de $x \in X$. Isto define um operador $T : X \to Y$, onde $y = T(x)$. O operador T é linear, de fato,

$$\lim T_n(\alpha x + \beta z) = \lim(\alpha T_n(x) + \beta T_n(z)) = \alpha \lim(T_n(x) + \beta \lim T_n(z))$$

Vamos mostrar que T é limiado e $T_n \to T$, isto é, $\|T_n - T\| \to 0$. Uma vez que (2.24) é válida para todos $m > N$ e $T_n(x)$ quando $m \to \infty$. Usando a continuidade da norma, obtemos de (2.24) para todos $n > N$ e $x \in X$

$$\|T_n(x) - T(x)\| = \left\|T_n(x) - \lim_{m\to\infty} T_m(x)\right\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \epsilon \|x\|. \qquad (2.25)$$

Isto mostra que $(T_n - T)$ com $n > N$ é um operador linear limitado. Uma vez que T_n é limitado, $T = T_n - (T_n - T)$ é limitado, isto é, $T \in B(X, Y)$. Além disso, em (2.25) tomando o supremo de todos os x de norma 1, obtemos

$$\|T_n - T\|,$$

com $n > N$. Desde que $\|T_n - T\| \to 0$. □

Este teorema tem uma importante consequência com respeito ao espaço dual X' de X, que é definido a seguir.

Definição 2.5.2. ***Espaço Dual** X': Seja X um espaço normado. Então o conjunto de todos os funcionais lineares delimitadas no X constitui um espaço normado com a norma definida por*

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \|f(x)\|. \qquad (2.26)$$

Teorema 2.5.3. *(Espaço Dual). O espaço dual X' de um espaço normado é um espaço de Banach.*

Demonstração. (Ver: [5]) □

Exemplos de Espaço Dual

Mostraremos nesta secção alguns espaços duais.

Exemplo 2.5.1. ***Espaço** $\mathbb{R}^n$*

O espaço dual de $\mathbb{R}$ é $\mathbb{R}$.

Demonstração. De fato, temos $\mathbb{R}^{n'} = \mathbb{R}^{n*}$ pelo teorema(2.3.1), e cada $f \in \mathbb{R}^n*$ tem a seguinte representação,

$$f(x) = \sum \xi_k y_k,$$

onde

$$y_k = f(e_k).$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|f(x)| \leq \sum |\xi_k y_k| \leq \left(\sum \xi_k^2\right)^{1/2} \left(\sum y_k^2\right)^{1/2} = \|x\| \left(\sum y_k^2\right)^{1/2}$$

e considerando o supremo sobre todos x de norma 1, obtemos

$$\|f\| \leq \left(\sum y_k^2\right)^{1/2}.$$

No entanto, uma vez que $x = (y_1, y_2, ..., y_n)$ a igualdade e conseguida da desigualdade de Cauchy-Schwasz, então

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}.$$

Isto prova que a norma de f é a norma Euclidiana, e $\|f\|$, onde $c = (y_k) \in \mathbb{R}^n$. Por isso a aplicação de $\mathbb{R}^{n'}$ em $\mathbb{R}^n$ definida por $f \longmapsto c = (y_k)$, $y_k = f(e_k)$, preserva a norma e, uma vez que é linear e bijetiva, é um isomofismo. □

O Espaço Dual l^1 é l^∞

Demonstração. Seja (e_k) uma base de Schawder (Ver Apênice: *Definição 5.0.9*) para ℓ^1, onde cada $x \in \ell^1$ tem uma única representação

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k, \tag{2.27}$$

consideramos qualquer $f \in \ell^{1'}$, onde $\ell^{1'}$ é a base de ℓ^1 uma vez que f é linear e limitada.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k, \text{ com } \gamma_k = f e_k, \tag{2.28}$$

onde os números $\gamma_k = f(e_k)$ são determinados exclusivamente por f. Também $\|e_k\| = 1$ e

$$|\gamma_k| = |f(e_k)| \leq ||f|| \cdot ||e_k|| = ||f|| \Rightarrow \sup_k |\gamma_k| \leq ||f|| \tag{2.29}$$

assim, $(\gamma_k) \in \ell^\infty$. Por outro lado, para cada $b = (\beta_k) \in \ell^\infty$ temos um funcional completamente linear e limitado em ℓ^1, podemos definir g em ℓ^1 da seguinte forma,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k \tag{2.30}$$

onde $x = (\xi_k) \in \ell^1$, em seguida, g é linear e a limitação segue

$$|g(x)| \leq \sum |\xi_k \beta_k| \leq \sup |\beta_j| \sum |\xi_k| = ||x|| \cdot \sup |\beta_j|. \tag{2.31}$$

Daí $g \in \ell^{1'}$. Finalmente mostramos que f é a norma no espaço ℓ^∞, de 2.28 temos,

$$|f(x)| = |\sum \xi_k \gamma_k| \leq \sup_j |\gamma_j| \cdot \sum |\xi_k| = ||x|| \cdot \sup_j |\gamma_j| \tag{2.32}$$

considerando o supremo sobre todo x de norma 1, temos

$$||f|| \leq \sup_j (\gamma_j)$$

daí de (2.29)

$$||f|| = \sup_j (\gamma_j)$$

que é a norma em ℓ^∞. Assim, esta formula pode ser escrita $||f|| = ||c||_\infty$ onde $c = (\gamma_j) \in \ell^\infty$, isso mostra que a aplicação linear bijetiva de ℓ^1 em ℓ^∞ definida por $f \mapsto c = (\gamma_j)$ é um isomorfismo. $\square$

Exemplo 2.5.2. *O dual de dual de ℓ^p é isomorfo a ℓ^q, $1 \leq p \leq \infty$, $1 < q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (p e q são expoentes conjugados).*

$$(\ell^p)' \cong \ell^q.$$

Demonstração. Dado $y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^q$ e definimos

$$\begin{aligned} \phi_y : \quad & \ell^p \to \mathbb{R} \\ & x \to \phi_y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot y_j \end{aligned}$$

onde $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^p$.

Temos que,

(i) $\phi_y(x)$ está bem definida.

Sejam $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}},\ z = (z_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ tais que $x = z$. Assim, $x_j = z_j,\ \forall\ j \in \mathbb{N}$. Logo, $x_j y_j = z_j y_j,\ \forall\ j \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\sum_{j=1}^{k} x_j y_j = \sum_{j=1}^{k} z_j y_j.$$

Portanto,

$$\lim_{k\mapsto\infty}\sum_{j=1}^{k} x_j y_j = \lim_{k\mapsto\infty}\sum_{j=1}^{k} z_j y_j,$$

isto é,

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j = \sum_{j=1}^{\infty} z_j y_j.$$

Assim,

$$\phi_y(x) = \phi_y(z).$$

(ii) ϕ_y é linear.

Sejam $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}},\ z = (z_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\phi_y(x+\lambda z) &= \sum_{j=1}^{\infty}(x_j+\lambda z_j)y_j \\
&= \lim_{k\mapsto\infty}\sum_{j=1}^{k}(x_j y_j+\lambda z_j y_j) \\
&= \lim_{k\mapsto\infty}(\sum_{j=1}^{k} x_j y_j + \lambda\sum_{j=1}^{k} z_j y_j) \\
&= \lim_{k\mapsto\infty}\sum_{j=1}^{k} x_j y_j + \lambda \lim_{k\mapsto\infty}\sum_{j=1}^{k} z_j y_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j + \lambda \sum_{j=1}^{k} z_j y_j \\
&= \phi_y(x) + \lambda\phi_y(z).
\end{aligned}$$

(iii) ϕ_y é contínua (limitada).

Seja $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^p$.

$$\begin{aligned} |\phi_y| &= |\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (2.33) \\ &= ||x||_p \, ||y||_q, \end{aligned}$$

isto é,

$$|\phi_y(x)| \leq ||x||_p \, ||y||_q \text{ (limitada)},$$

a equação (2.33) verifica-se pela desigualdade de Holder para séries. Dessa forma $\phi_y \in (\ell^p)'$. Além disso,

$$\begin{aligned} |\phi_y(x)| \leq ||x||_p \, ||y||_q &\Rightarrow \frac{|\phi_y(x)|}{||x||_p} \leq ||y||_q \\ &\Rightarrow \sup_{x\neq 0} \frac{|\phi_y(x)|}{||x||_p} \leq ||y||_q \\ &\Rightarrow ||\phi_y|| \leq ||y||_q. \qquad (2.34) \end{aligned}$$

Definamos agora

$$\begin{aligned} T: \quad & \ell^q \to (\ell^p)' \\ & y \to T_y \end{aligned}$$

em que T_y é da forma

$$\begin{aligned} T_y = \phi_y: \quad & \ell^p \to \mathbb{R} \\ & x \to T_y(x) = \phi_y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot y_j, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} x &= (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \\ (\ell^1)' &\cong \ell^\infty \neq (\ell^\infty)'. \end{aligned}$$

Mostraremos que T é um isomorfo isométrico, ou seja, T é linear, T é sobrejetiva, T é continua, T é uma isometria (preserva a norma).

(i) T é linear.

(ii) T é continua.

$$||T_y|| = ||\phi_y|| \leq ||y||_q$$

(iii) T é sobrejetora.

Seja $\varphi \in (\ell^p)'$ e $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma base de Schauder para ℓ^p. Mostraremos que dado $\varphi \in (\ell^p)'$ existe $y \in \ell^q$ tal que

$$\phi_y = \varphi \; (T_y = \varphi).$$

Seja então $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, desde que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder

$$(e_1 = (1, 0, 0, \cdots), \; \cdots, e_n = (0, \cdots, 1, 0, \cdots))$$

para ℓ^p, temos $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$. Logo,

$$\varphi(x) = \varphi(\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_j \varphi(e_j),$$

isto é,

$$\varphi(x) = \sum x_j \varphi(e_j).$$

Seja

$$y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} = (\varphi(e_j))_{j\in\mathbb{N}}$$

- $y_j = \varphi(e_j) \in \ell^q$

Temos que,

$$sign\ \theta = \begin{cases} 1, \text{ se } \theta > 0 \\ -1, \text{ se } \theta < 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

Defina

$$x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j,$$

onde

$$x_j = |y_j|^{q-1} \cdot (sign\ y_j) \tag{2.36}$$

Assim,

$$x_j = \sum_{j=1}^{n} |y_j|^{q-1} \cdot (sign\ y_j) \cdot e_j \in \ell^p. \tag{2.37}$$

Como $\varphi \in (\ell^p)'$

$$\varphi(x) \leq ||\varphi||\, ||x||_p,\ \forall\, x \in \ell^p.$$

Assim para (x_n)

$$\varphi(x_n) \leq ||\varphi||\, ||x_n||_p. \tag{2.38}$$

De (2.36)

$$\begin{aligned} x_j y_j &= |y_j|^{q-1}(sign\ y_j)y_j \\ &= \frac{|y_j|^q}{|y_j|}(sign\ y_j)y_j = |y_j|^q \end{aligned}$$

ou seja,

$$x_j y_j = |y_j|^q. \tag{2.39}$$

Note que

$$\begin{aligned} ||x_n||_p &= \left(\sum_{j=1}^{n} ||y_j|^{q-1}(sign\ y_j)e_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{(q-1)p}|e_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ ||x_n||_p &= \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\varphi(x_n) = \sum_{j=1}^{n} |y_j|^{q-1}(sign\ y_j)\varphi(e_j$$

ou seja,

$$\varphi(x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \sum_{j=1}^{n} |y_j|^q. \tag{2.40}$$

Por (2.38) e (2.40)

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{p}} = \varphi(x_n) \leq ||\varphi||\, ||x_n||_p \leq ||\varphi|| \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

ou seja,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq ||\varphi|| \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq ||\varphi||.$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \leq ||\varphi||^q, \ \forall \, n \in \mathbb{N}$$

Fazendo $n \to \infty$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \leq ||\varphi||^q$$

isso implica que $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q < \infty$ e assim $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} = (\varphi(e_j))_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ e

$$||y||_q \leq ||\varphi||. \tag{2.41}$$

Assim,

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j = \phi_y(x), \ \forall x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^p$$

Daí, $\phi_y = \varphi(T_y = \varphi)$. Portanto, T é sobrejetiva.

$$\ell^q = \{x \in \mathbb{R}^\infty; \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^q < \infty.\}$$

T é isometria.

Como T é continua

$$||T_y||_q \leq ||y||_q. \tag{2.42}$$

De (2.41)

$$||y||_q \leq ||\varphi||,$$

como

$$\varphi = T_y \text{ então } ||y||_q \leq ||T_y|| \tag{2.43}$$

De (2.42) e (2.43)

$$||T_y|| = ||y||_q.$$

Portanto T é isometria, o que implica T ser injetora. Assim,

$$(\ell_p)' \cong \ell^q.$$

$\square$

Capítulo 3

Espaços com Produto Interno. Espaços de Hilbert

3.1 Espaços com Produto Interno. Espaços de Hilbert

Definição 3.1.1. *Um espaço com produto interno (ou pré-espaço de Hilbert) é um espaço vetorial X com um produto interno definido em X. Um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno completo (completo na métrica definida pelo produto interno). Aqui um produto interno em X é uma aplicação de $X \times X$ no corpo escalar K de X, isto é, para cada par de vetores x e y associamos um escalar que é escrito como*

$$\langle x, y \rangle \tag{3.1}$$

e é chamado o produto interno de x com y tal que para todos x, y, z e escalar α teremos

IP1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

IP2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;

IP3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

IP4) $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

Um produto interno em X define uma norma em X denotada por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, y \rangle} \tag{3.2}$$

e uma métrica em X denotada por

$$d(x,\ y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} \tag{3.3}$$

Assim, espaços com produto interno são espaços normados e espaços de Hilbert são espaços de Banach.

A prova de (3.1) satisfaz os axiomas (N1) a (N4) de uma norma, e será dada no início da próxima seção. De (IP1) a (IP3) obtemos as fórmulas

a) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;

b) $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;

c) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$;

Demonstração. a) Utilizando as propriedades (IP1) e (IP2) sucessivamente obtemos

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \langle \alpha x, z \rangle + \langle \beta y, z \rangle = \langle \alpha x, z \rangle + \langle \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle .$$

□

Demonstração. b)Usando as propriedades (IP3), (IP2) e (IP3) nesta mesma ordem obtemos

$$\langle x, \alpha y \rangle = \langle \alpha y, x \rangle = \alpha \langle y, x \rangle = \alpha \langle x, y \rangle .$$

□

Demonstração. c) De modo semelhante,porém com as propriedades (IP3), (IP1), (IP2) e (IP3) obtemos

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \langle \alpha y + \beta z, x \rangle = \langle \alpha y, x \rangle + \langle \beta z, x \rangle = \alpha \langle y, x \rangle + \beta \langle z, x \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle .$$

□

Essas fórmulas são fundamentais e vamos utilizar com bastante frequência. a) mostra que o produto é linear no primeiro fator. Mostraremos agora através de um cálculos simples e direto, que a norma em um espaço com produto interno satisfaz a importante igualdade do paralelogramo

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{3.4}$$

Segue de (3.1)

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle$$

aplicando (IP1) e (IP3) no segundo membro da igualdade anterior obtemos

$$= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle + \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - \langle y, x\rangle - (\langle y, x\rangle - \langle y, y\rangle)$$

novamente de (3.1) e (IP3) vamos ter

$$= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Ortogonalidade

Definição 3.1.2. *Um elemento x de um espaço com produto interno X é dito ortogonal a um elemento $y \in X$ se*

$$\langle x, y\rangle = 0$$

Se x e y são ortogonais escreveremos $x \perp y$. Similarmente, para $A, B \subset X$ escrevemos $x \perp A$ se $x \perp a$ para todo $a \in A$ e $A \perp B$ se $a \perp b$ para todo $a \in A$ e para todo $b \in B$.

Exemplos de espaços de Hilbert

Espaço Euclidiano R^n

Demonstração. O espaço R^n é um espaço de Hilbert e escrevemos o produto interno por

$$\langle x, y\rangle = \xi_1.\eta_1 + \xi_2.\eta_2 \ldots, \xi_n.\eta_n \qquad (3.5)$$

onde $x = (\xi_j) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ e $y = (\eta_j) = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$.

De fato, a partir de (3.4)

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = ({\xi_1}^2 + \ldots + {\xi_n}^2)^{1/2}$$

e a métrica euclidiana é definida por

$$d(x,\ y) = \|x - y\| = \langle x - y, y - y\rangle^{1/2} = [(\xi_1 - \eta_1)^2 + \ldots + (\xi_n - \eta_n)]^{1/2}.$$

Satisfazendo assim a definição de espaço de Hilbert. E, a completeza de $\mathbb{R}$ foi provada anteriormente. $\square$

Espaço sequência de Hilbert ℓ^2

Demonstração. O espaço ℓ^2 é um espaço de Hilbert com o produto interno denotado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j.\eta_j \tag{3.6}$$

a convergência desta série segue a partir da desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j.\eta_j| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2}.\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2}. \tag{3.7}$$

De fato,

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j\eta_j\right| = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j\eta_j| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2}.\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2}$$

uma vez que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty$$

e

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2 < \infty$$

a saber que os mesmos pertencem a l^2 concluímos que

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j\eta_j\right| = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j\eta_j| \leq \infty$$

isto é, a série é absolutamente convergente. Portanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j\eta_j \leq \infty.$$

A norma está definida por

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = (\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2)^{1/2}$$

A completeza deste espaço se observa a partir da completeza de l^p, basta considerar o caso $p = 2$. $\square$

Exemplos de espaços que não são de Hilbert

Espaço ℓ^p com $p \neq 2$

Vejamos que o espaço l^p com $p \neq 2$ não é um espaço com produto interno, portanto não é um espaço de Hilbert. Nossa afirmação significa que a norma de ℓ^p com $p \neq 2$ não pode ser obtida a partir de um produto interno. Provamos isto mostrando que a norma não satisfaz a igualdade do paralelogramo (3.4). De fato, considerando $x = (1, 1, 0, 0, 0, \dots) \in \ell^p$ e $y = (1, -1, 0, 0, 0, \dots) \in \ell^p$ e calculando

$$\|x\| = (|1|^p + |1|^p)^{1/p} = 2^{1/p}$$

e

$$\|y\| = (|1|^p + |-1|^p)^{1/p} = 2^{1/p}$$

$$\|x + y\| = (|1 + 1|^p + |1 - 1|^p)^{1/p} = (2^p)^{1/p} = 2$$

$$\|x - y\| = (|1 - 1|^p + |1 - (-1)|^p)^{1/p} = (2^p)^{1/p} = 2,$$

observemos que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 8$$

e

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2[(2^{1/p})^2 + (2^{1/p})^2] = 2(2^{2/p} + 2^{2/p}) = 2(2.2^{2/p}) = 2(2^{(2/p)+1}) = 2^{(2/p)+2}$$

$$= 2^{(2+2p)/p}.$$

Portanto, não é satisfeita se $p \neq 2$.

ℓ^p é completo daí, com $p \neq 2$ é um espaço de Banach que não é um espaço de Hilbert. O mesmo é válido para o espaço do próximo exemplo.

Espaço $C[a, b]$

O espaço $C[a, b]$ não é um espaço com produto interno, portanto não é um espaço de Hilbert. Mostraremos que a norma definida por

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| \qquad J = [a, b]$$

não pode ser obtida a partir de um produto interno, uma vez que esta norma não satisfaz a igualdade do paralelogramo(3.4). De fato, se tomarmos $x(t) = 1$ e $y(t) = (t-a)/(b-a)$ como

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{(t-a)}{(b-a)} = \frac{(b+t-2a)}{(b-a)}$$
$$x(t) - y(t) = 1 - \frac{(t-a)}{(b-a)} = \frac{(b-t)}{(b-a)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= \max_{t\in J}\left|\frac{(b+t-2a)}{(b-a)}\right| = \max_{t\in J}\left|\frac{(2b-2a)}{(b-a)}\right| = \max_{t\in J}\left|\frac{(2(b-a))}{(b-a)}\right| \\
&= \max_{t\in J}|2| = 2 \\
\|x-y\| &= \max_{t\in J}\left|\frac{(b-t)}{(b-a)}\right| = \max_{t\in J}\left|\frac{(b-a)}{(b-a)}\right| \\
&= \max_{t\in J}|1| = 1 \\
\|x\| &= \max_{t\in J}|1| = 1 \\
\|y\| &= \max_{t\in J}\left|\frac{(t-a)}{(b-a)}\right| = \max_{t\in J}\left|\frac{(b-a)}{(b-a)}\right| = 1
\end{aligned}$$

temos

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4 + 1 = 5$$

e

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2(1+1) = 4 \neq 5.$$

Propriedades adicionais de espaços com produto interno

Antes de tudo devemos verificar que (3.1) na seção anterior define uma norma. As propriedades (N1) e (N2) seguem de (IP4). De fato,

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle \geq 0$$

e

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Além disso, (N3), é obtido através da utilização de (IP2) e (IP3). De fato,

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x\rangle = \alpha\langle x, \alpha x\rangle = \alpha\alpha\langle x, x\rangle = |\alpha|^2 . \| x\|^2$$

Finalmente, (N4) está incluído na

Lema 3.1.1. *(Desigualdade de Schwarz e Desigualdade triangular) Um produto interno e a correspondente norma satisfaz a desigualdade Schwarz, como segue item a) temos*

$$|\langle x, x\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|\,. \quad (Desigualdade\ de\ Schwarz) \tag{3.8}$$

onde o sinal de igualdade vale se, e somente se o conjunto $\{x, y\}$ *é Linearmente Dependente. item b) essa norma também satisfaz*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\,. \quad (Desigualdade\, triangular) \tag{3.9}$$

onde o sinal de igualdade vale se e somente se $y = 0$ *ou* $x = c.y$ *com* $c \geq 0$ *e* $c \in R$*.*

Demonstração.

a) Se $y = 0$, então (3.4) vale pois $\langle x, 0\rangle = 0$.Seja $y \neq 0$.Para um escalar α temos

$$0 \leq \|x - \alpha y\|^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle$$

$$= \langle x, x - \alpha y\rangle + \langle -\alpha y, x - \alpha y\rangle$$

$$= \langle x, x - \alpha y\rangle - \alpha \langle y, x - \alpha y\rangle$$

$$= \langle x - \alpha y, x\rangle - \alpha \langle x - \alpha y, y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle + \langle -\alpha y, x\rangle - \alpha(\langle x, y\rangle + \langle -\alpha y, y\rangle)$$

$$= \langle x, x\rangle - \alpha \langle y, x\rangle - \alpha \langle x, y\rangle + \alpha^2 \langle y, y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle - \alpha \langle y, x\rangle - \alpha \langle x, y\rangle + \alpha^2 \langle y, y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle - \alpha \langle y, x\rangle - \alpha[\langle y, x\rangle - \alpha \langle y, y\rangle]$$

Vemos que a ultima expressão entre colchetes é zero se escolhermos

$$\alpha = \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

A desigualdade restante é

$$0 \leq \langle x, x\rangle \ - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle x, y\rangle} \langle y, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

Aqui utilizou-se $\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle$. Multiplicando por $\|y\|^2$, e transferindo o último termo para o primeiro termo e considerando a raiz quadrada temos:

$$|\langle x, x\rangle|^2 \leq \|x\| \|y\|^2 \Rightarrow |\langle x, x\rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

A igualdade mantém nessa variação se, e somete se $y = 0$ ou $0 = \|x - \alpha y\|^2$, daí $x - \alpha y = 0 \Rightarrow x = \alpha y$ que mostra a dependência linear.

b) Temos:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x + y\rangle \langle y, x + y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \|y\|^2 .$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle y, x\rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

e pela desigualdade triangular de números temos:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 |\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

considerando a raiz quadrada em ambos os membros temos

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

□

Lema 3.1.2. *(Continuidade do produto interno) Se em um espaço com produto interno, $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então*

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle .$$

Demonstração. Subtraindo e adicionando o termo $\langle x_n, y\rangle$, obtemos

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| ,$$

prosseguindo temos pela desigualdade triangular temos que

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| .$$

Finalmente pela desigualdade de Schwarz, obtemos

$$|\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\| \to 0,$$

pois, $y_n - y \to 0$ e $x_n - x \to 0$ quando $n \to \infty$ e x_n e y_n são limitadas. Portanto,

$$\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle \to 0,$$

quando $n \to \infty$, isto é,

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle .$$

□

3.2 Representação de funcionais em Espaços de Hilbert

Teorema 3.2.1. *(Teorema da Representação de Riesz-Fréchet) Todo funcional linear limitado f definido em um espaço de Hilbert H pode ser representado da forma*

$$f(x) = \langle x,\ z\rangle \ \forall \, x \in H. \tag{3.10}$$

onde z depende de f, é unicamente determinado e

$$\|z\| = \|f\| . \tag{3.11}$$

Demonstração. Iremos dividir a demonstração em três etapas.

1ª Etapa: Representação do funcional.

Se $f = 0$, de (3.10) e (3.11) temos $z = 0$.

Se $f \neq 0$, como $N(f)$ é um subespaço vetorial fechado próprio de H, temos $N(f) \neq H$ e sendo $N(f)$ um subespaço fechado, pelo teorema da soma direta (Ver Apêndice: *Teorema A.0.8*) segue, $H = N(f) \oplus N(f)^{\perp}$ e $N(f)^{\perp} \neq \{0\}$, pois se $N(f)^{\perp} = \{0\}$ teríamos $H = N(f)$ absurdo, logo existe $z_0 \neq 0$ com $z_0 \in N(f)^{\perp}$ fixando um $x \in H$, considere,

$$v = f(x) \cdot z_0 - f(z_0) \cdot x. \tag{3.12}$$

Aplicando f obtemos,

$$\begin{aligned} f(v) &= f(f(x) \cdot z_0 - f(z_0) \cdot x) \\ &= f(f(x) \cdot z_0) - f(f(z_0) \cdot x) \end{aligned}$$

como $f(x)$ é constante pois x é fixo, temos

$$f(v) = f(x) \cdot f(z_0) - f(z_0) \cdot f(x) \tag{3.13}$$

e como v depende de z_0 e $z_0 \in N(f)^{\perp}$ temos,

$$f(v) = f(x) \cdot f(z_0) - f(z_0) \cdot f(x) = 0 \tag{3.14}$$

isto mostra que $v \in N(f)$, e temos que $v \perp z_0$, pois $v \in N(f)$ e $z_0 \perp N(f)$, devido $z_0 \in N(f)^{\perp}$, isto implica que $\langle v,\ z_0 \rangle = 0$, com isso temos,

$$\begin{aligned} 0 = \langle v,\ z_0 \rangle &= \langle f(x) z_0 - f(z_0) x, z_0 \rangle \\ &= \langle f(x) \cdot z_0,\ z_0 \rangle - \langle f(z_0) x,\ z_0 \rangle \\ &= f(x) \langle z_0,\ z_0 \rangle - f(z_0) \langle x,\ z_0 \rangle \\ &= f(x) ||z_0||^2 - f(z_0) \langle x,\ z_0 \rangle \end{aligned}$$

e como $z_0 \neq 0$ podemos concluir

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{||z_0||^2} \cdot \langle x,\ z_0 \rangle \tag{3.15}$$

e temos,

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0)}{||z_0||^2} \cdot \langle x,\ z_0 \rangle &= \frac{f(z_0)}{||z_0||^2} \cdot \langle z_0,\ x \rangle \\ &= \left\langle \frac{f(z_0)}{||z_0||^2} \cdot z_0,\ x \right\rangle \\ &= \left\langle x,\ \frac{f(z_0)}{||z_0||^2} \cdot z_0 \right\rangle \end{aligned}$$

e podemos escrever a partir de (3.10)

$$z = \frac{f(z_0)}{||z_0||^2} \cdot z_0. \tag{3.16}$$

Como $x \in H$, e é arbitrário, (3.10) está provado, isto é, temos a igualdade,

$$f(x) = \langle x,\ z\rangle\ \forall\, x \in H. \tag{3.17}$$

Observação 3.2.1. *Note que o vetor em (3.16) não depende de* x*.*

2ª Etapa: Unicidade do vetor z.

Suponhamos que existam z_1 e z_2 vetores em H, satisfazendo (I)

$(I)\ \ \langle x,\ z_1\rangle = \langle x,\ z_2\rangle\ \forall\, x \in H.$

de (I) temos,

$$\langle x,\ z_1\rangle - \langle x,\ z_2\rangle = 0\ \forall\, x \in H. \tag{3.18}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle x,\ z_1\rangle - \langle z_2,\ x\rangle &= \langle x,\ z_1\rangle + \langle -z_2,\ x\rangle \\
&= \langle z_1,\ x\rangle + \langle -z_2,\ x\rangle \\
&= \langle z_1 - z_2,\ x\rangle \\
&= \langle x,\ z_1 - z_2\rangle = 0\ \forall\, x \in H.
\end{aligned}$$

temos

$$\|z_1 - z_2\|^2 = 0.$$

Portanto,

$$z_1 = z_2,$$

isto prova a unicidade de z.

3ª Etapa: Igualdade das Normas.

Se $f = 0$ implica $z = 0$. Se $f \neq 0$ então $z \neq 0$ de 3.10 com $x = z$ e da limitação de f segue,

$$\|z\|^2 = \langle z,\ z\rangle = f(z) \leq \|f\| \cdot \|z\|\,. \tag{3.19}$$

dividindo por $\|z\| \neq 0$ segue

(II) $\|z\| \leq \|f\|$.

Vamos mostrar agora $\|f\| \leq \|z\|$, de (3.10) e da desigualdade de Schwarz, temos

$$|f(x)| = |\langle x, z\rangle| \leq \|x| \cdot \|z\|\,, \tag{3.20}$$

isto implica

(III) $\sup_{\|x\|=1} |\langle x,\ z\rangle| \leq \|z\|$,

de (II) e (III) concluímos

$$\|f\| = \|z\|\,.$$

□

Lema 3.2.1. *Se $\langle v_1,\ w\rangle = \langle v_2,\ w\rangle$ para todo w em o espaço produto X, então $v_1 = v_2$, em particular, $\langle v_1,\ w\rangle = 0$ para todo $w \in X$ implica $v_1 = 0$.*

Demonstração. Para todo w,

$$\langle v_1 - v_2,\ w\rangle = \langle v_1,\ w\rangle - \langle v_2,\ w\rangle = 0. \tag{3.21}$$

para $w = v_1 - v_2$ segue $||v_1 - v_2||^2 = 0$. Assim $v_1 - v_2 = 0$, então $v_1 = v_2$. Em particular, $\langle v_1,\ w\rangle = 0$ com $w = v_1$, daí $||v_1||^2 = 0$, então $v_1 = 0$.

□

3.3 Teorema de Lax Milgram

Definição 3.3.1. ***(Forma Bilinear)*** *Sejam E e F espaços vetoriais. Uma função $B(,) : E \times F \to \mathbb{R}$ é chamada de forma bilinear, quando*

$$B(u, v_1 + \alpha v_2) = B(u, v_1) + \alpha B(u, v_2); \forall v_1, v_2 \in F, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \mathrm{u} \in \mathrm{E}.$$

$$B(u_1 + \alpha u_2, v) = B(u_1, v) + \alpha B(u_2, v); \forall u_1, u_2 \in E, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \mathrm{v} \in \mathrm{F}.$$

Definição 3.3.2. ***(Continuidade)*** *Sejam E, F espaços normados. Uma forma bilinear $B(,):E\times E\to\mathbb{R}$ é contínua, quando existe um número real $\alpha>0$ tal que*

$$|B(u,v)|\leq\alpha\,\|u\|_E\,\|v\|_F\,;\;\forall\,u\in E,\forall\,v\in F. \tag{3.22}$$

Definição 3.3.3. ***(Coercividade)*** *Seja E um espaço normado. Uma forma bilinear $B(,):E\times E\to\mathbb{R}$ é coerciva, quando existe um número real $\beta>0$ tal que*

$$B(u,v)\geq\beta\,\|u\|^2\,. \tag{3.23}$$

Teorema 3.3.1. ***(Teorema de Lax-Milgram)*** *Sejam H um espaço de Hilbert sobre o corpo dos números reais e $B:H\times H\to\mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então dado $\varphi\in H'$ ($\varphi:H\to\mathbb{R}$, linear e contínuo) existe (e é único) $u\in H$ tal que*

$$B(u,v)=\varphi(v),\qquad\forall v\in H. \tag{3.24}$$

Demonstração. Primeiramente demonstraremos a existência, e para isto usaremos o Teorema da Riesz-Fréchet em espaços de Hilbert. Fixemos $u\in H$ e definimos a aplicação

$$H\to\mathbb{R},\mathrm{v}\longmapsto\mathrm{B(u,v)}$$

Verifica-se usando os resultados do capítulo que essa aplicação é linear e contínua. E, pelo teorema, existe um único $w\in H$ tal que

$$B(u,v)=\langle w,v\rangle\,,v\in H.$$

Isto define uma aplicação

$$A:H\to H,u\longmapsto w=A(u),$$

isto é,

$$B(u,v)=\langle A(u),v\rangle\,,v\in H.$$

Afirmamos que a aplicação A é linear, contínua e bijetora. Vejamos,

$$\langle A(u_1+u_2),v\rangle=B(u_1+u_2,v)=B(u_1,v)+B(u_2,v)$$

$$=\langle A(u_1),v\rangle+\langle A(u_2),v\rangle=\langle A(u_1)+A(u_2),v\rangle\,,v\in H.$$

Portanto, $A(u_1 + u_2) = A(u_1) + A(u_2)$.

Nas mesmas linhas, vemos que $A(ku) = kA(u)$.

Agora mostraremos a unicidade: Suponhamos que existam $u_1, u_2 \in H$, tais que

$$B(u_1, v) = F(v), B(u_2, v) = F(v), v \in H.$$

Da linearidade de B, segundo a primeira variável, temos para qualquer $v \in H$, a igualdade

$$B(u_1 - u_2) = 0.$$

Em particular, considerando $v = u_1 - u_2$, obtemos a igualdade

$$B(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

Da coercividade sobre B, temos que

$$\beta \|u_1 - u_2\|^2 = 0,$$

portanto, $u_1 = u_2$.

Observemos que

$$\|A(u)\|^2 = \langle A(u), A(u)\rangle = B(u, A(u)) < \alpha \|u\| . \|A(u)\| .$$

De onde obtemos a igualdade

$$\|A(u)\| < \alpha \|u\| .$$

Assim, temos a continuidade.

Para demonstrara injetividade de A, primeiramente observamos que

$$\|A(u)\| . \|u\| \geq |\langle A(u), u\rangle| = |B(u, u)| \geq \beta \|u\|^2 .$$

E portanto, temos a desigualdade

$$\|A(u)\| \geq \beta \|u\| . \tag{3.25}$$

Agora, se $A(u_1) = A(u_2)$, então $A(u_1 - u_2) = 0$, e assim

$$0 = \|A(u_1 - u_2)\| \geq \beta \|u_1 - u_2\| ,$$

de onde concluimos que $u_1 = u_2$.

Para provar a sobrejetividade, denotaremos por $Im(A)$ a imagem de A e queremos provar que $Im(A) = H$. Mostraremos que $Im(A)$ é fechado.
Seja $w_n \in Im(A)$ com $w_n \to w$. Existe $u_n \in H$ tal que $A(u_n) = w_n$. Da desigualdade (**??**), obtemos

$$\|u_n - u_m\| \leq \frac{1}{\beta} \|A(u_n) - A(u_m)\| = \frac{1}{\beta} \|w_n - w_m\| .$$

Como $\{w_n\}$ é de Cauchy, temos que $\{u_n\}$ é de Cauchy, e devido a completude de H, exite $u \in H$ tal que $u_n \to u$. Agora da continuidade de A sabemos que

$$w_n = A(u_n) \to A(u) = w,$$

Portanto, $w \in Im(A)$. Assim, $Im(A)$ é fechado em H.

A seguir mostraremos que $Im(A)$ e denso em H. Para isto usaremos o Teorema **??**. Agora seja $v \in H$, tal que v seja ortogonal a $Im(A)$, isto é,

$$0 = \langle A(u), v \rangle , \quad u \in H,$$

segue que,

$$\langle A(u), v \rangle = B(u, v), \quad u \in H.$$

Em particular considerando $u = v$ teremos

$$0 = B(v, v),$$

e como

$$\beta \|v\|^2 \leq B(v, v) = 0,$$

segue que $v = 0$. Assim $Im(A)$ é denso e fechado em H, logo $Im(A) = H$. Desta forma, obtemos assim sobrejetividade de A. Isto conlui a demonstração do Teorema. $\square$

Capítulo 4

Aplicações do Lax Milgram

4.1 Definições e Notações Básicas

Neste capítulo apresentaremos algumas definições, notações e resultados básicos, essenciais para a compreensão e desenvolvimento do que será feito posteriormente.

Definição 4.1.1. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado,* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *e* $u \in C^2(\Omega)$*, o operador laplaciano de* u *é uma função* $\Delta u : \Omega \to \mathbb{R}$*, definida por*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_n}, \tag{4.1}$$

onde $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definição 4.1.2. *(Suporte de uma função) Seja* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *contínua. O suporte de* u*, denotado por* $supt(u)$*, é definido como sendo o fecho do conjunto* $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$*, em* Ω*, isto é,*

$$supt(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}} \cap \Omega. \tag{4.2}$$

Uma função é dita ter suporte compacto se o suporte da u for compacto, isto é, limitado e fechado.

Denotaremos agora por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções que possui derivada de todas as ordens com suporte compacto contido $(\subset\subset)$ em Ω, isto é,

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; \mathrm{u} \in \mathrm{C}^\infty \mathrm{e\ supt(u)} \subset\subset \Omega\}. \tag{4.3}$$

A seguir um exemplo clássico de uma função em $C_0^\infty(\Omega)$ com suporte compacto.

Exemplo 4.1.1. *Seja* $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*definida por*

$$u(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & , \quad se \ |x| < 1 \\ 0 & , \quad se \ |x| \geq 1. \end{cases}$$

Graficamente,

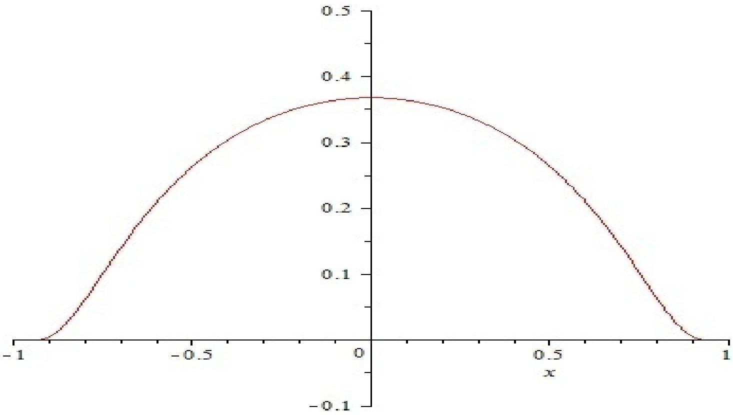

Figura 3

Observemos que o $supt(u)$ já chega sendo zero na fronteira do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$, sendo assim, temos que $supt(u) = [-1, 1]$.

Espaços de Sobolev

Definição 4.1.3. *Uma função* f *de* X *em* $\mathbb{R}$*é dita* $X - mensurvel$*, se para qualquer número real* α*, tem-se*

$$\{x \in X : f(x) > a\}$$

Definição 4.1.4.

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\text{: umensurvel, } \int_\Omega |\mathrm{u}|^{\mathrm{p}} < +\infty \right\}$$

Denotaremos por $W^{k,p}$ o subconjunto de $L^p(\Omega)$, definido da seguintes forma:

$$W^{k,p} = \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega), j = 1, ..., N \right\},$$

onde $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ denota a j-ésima derivada fraca de u, ou seja,

$$\int_\Omega u\frac{\partial u}{\partial x_j}dx = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi dx, \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

A norma de $u \in L^p(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

Em particular, para $p = 2$, temos o seguinte espaço de Sobolev

$$H^k = W^{k,2} = \left\{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), 0 \leq |\alpha| < k\right\}.$$

A norma de $u \in L^2(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_2 = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$$

Nesse sentido, denotaremos por $H_0^k(\Omega)$ o fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$, em $H^k(\Omega)$, isto é,

$$H_0^k(\Omega) \;=\; \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^k}},$$

com isso temos $W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega)$. E nosso trabalho foi desenvolvido sobre o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$.

As seguintes desigualdades são bastante importante na prova da existência da solução dos nossos problemas.

Teorema 4.1.1. *(Desigualdade de Hölder): Seja $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$

Teorema 4.1.2. *(Desigualdade de Poincaré): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ aberto limitado. Então existe uma constante positiva $C = C(\Omega, n)$ tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{1/p} dx, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p \leq +\infty.$$

$\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. A norma $\|\nabla u\|_{L^2}(\Omega)$ é equivalente à norma $\|u\|_{H_0^1}(\Omega)$.

Solução Fraca

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (1), quando:

a) $u \in H_0^1(\Omega)$;

b)

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x) v dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Por sua vez, $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema (2), quando:

c) $u \in H_0^1(\Omega)$;

d)

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv.$$

4.2 Os Problemas Lineares

Dado $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado, o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u &=& f, \ em \ \Omega \\ u &=& 0, \ em \ \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{4.4}$$

tem única solução $u \in H_0^1(\Omega)$.

No Teorema de Lax-Milgram, vamos fazer as seguintes escolhas: $H = H_0^1(\Omega)$, onde $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx \tag{4.5}$$

e a norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{4.6}$$

E assim,

$$B: \ H_0^1(\Omega) \ x \ H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$(u, \ v) \longmapsto B(u, \ v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \ dx = \langle u, v \rangle_{L^1(\Omega)}$$

e ainda,

$$\varphi: \ H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto \varphi(v) = \int_\Omega f(x) \ v \ dx$$

Agora vamos verificar se B é continua e coerciva.

- Continuidade

$$|B(u,\ v)| = \left| \int_\Omega \nabla u \nabla v\ dx \right| \leq \int_\Omega |\nabla u . \nabla v|\, dx$$

sabemos da Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\int_\Omega |\nabla u . \nabla v|\, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|\, |\nabla v|\, dx$$

e pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|\, |\nabla v|\, dx \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\ \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

isso implica que

$$|B(u,\ v)| \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}\,.$$

Mostrando assim, a continuidade de B.

- Coercividade

Notemos que

$$B(u,\ u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Portanto, a coercividade.

Agora, como φ é linear, e estudaremos a continuidade da φ. Note que

$$|\varphi(v)| = \left| \int_\Omega f.v\ dx \right| \leq \int_\Omega |f.v|\, dx$$

usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_\Omega |f.v|\, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

diante disto, pela Desigualdade de Poincaré, existe uma constante $C > 0$, teremos

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\, C\, \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Portanto, aplicando-se assim o Lax-Milgram, logo existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u, v) = \varphi(v),\ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x) v dx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, a existência e é única a solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ do problema (1).

Dado $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f, \; em\, \Omega \\ u &= 0, \; em\, \partial\Omega, \end{cases}$$

tem única solução $u \in H_0^1(\Omega)$.

Inicialmente faremos a formulação variacional do problema. E, para isto, multiplicamos a equação

$$-\Delta u + u = f,$$

por uma $v \in C_0^\infty \Omega$, e integrando em Ω, obtemos

$$\int_\Omega -\Delta uv + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv. \tag{4.7}$$

Recorrendo a *Indetidade de Green*: Sejam $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), v \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ em um domínio limitado com fronteira suave. Então:

$$\int_\Omega \Delta u.v + \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\partial \frac{\partial u}{\partial \eta}.vdS,$$

onde η é o vetor unitário exterior a $\partial\Omega$.

E, usando o fato de $v \in C_0^\infty$, temos que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}.vdS = 0,$$

diante disto, obtemos a seguinte igualdade

$$\int_\Omega -\Delta uv = \int_\Omega \nabla u \nabla v.$$

Sendo assim, em (4.7), temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

usando a linearidade da integral, segue que

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv)dx = \int_\Omega fvdx.$$

Diante disto, chamando

$$B(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv)dx = \langle u, v \rangle\,. \tag{4.8}$$

Agora, utilizaremos passos semelhantes aos feitos no problema (1). Então, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$|B(u,v)| \leq \|u\|_1 \, . \, \|v\|_1 \, .$$

Logo, verifica-se a continuidade de B.

Em (4.8), fazendo $v = u$, obtemos

$$|B(u,u)| \geq \|u\|_1^2 \, .$$

Temos assim que B é coerciva. Por outro lado, definindo $\varphi : H_0^1 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(v) = \int_\Omega f v dx.$$

Sendo assim, φ é linear e contínua, e já foram verificadas no problema (1).
Portanto, aplica-se também o Teorema de Lax-Milgram. Logo, existe e é única a solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaz o problema (2).

Considerações Finais

Este trabalho foi pautado em cima da teoria de Análise Funcional, e para seu desenvolvimento necessitamos passar por alguns estágios. Dentre esses, destacam-se: a Análise Real, Análise no $\mathbb{R}^n$, Espaços Métricos, Espaços de Sobolev, dentre outros. E, Com este estudo, observamos a importância desta área da matemática (Análise) e onde pode ser aplicada. Diante disto, como vimos, trabalhamos um resultado muito importante aplicado à outra área da matemática (Teoria das Equações Diferenciais Parciais).

O Teorema de Lax-Milgram, ferramenta principal de nosso estudo foi aplicando a dois problemas lineares, onde verificou-se que ambos se estavam nas condições do teorema utilizando ferramentas de análises funcional. Com isto, garantindo a existência e unicidade das soluções dos problemas abordados.

Sem mais delongas, tais estudos nos proporcionaram uma ampla visão das diversas áreas da matemática, em especial da Análise Matemática. Contudo, conseguimos alcançar os objetivos traçados no início de nossos estudos. Ressaltando a distância desta parte da matemática aos cursos de licenciatura. Por fim, o próximo passo é galgar outro nível de formação, dando enfoque a brilhante área estudada aqui.

Apêndice A

Definições e Principais Resultados

Definição A.0.1. *Uma métrica num conjunto X é uma função d: $ExE \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y, isto é,*

$$d(x, y) = |y - x|\,,$$

de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in X$:

d1) $d(x, x) = 0$*;*

d2) $Sex \neq y$*, então* $d(x, y) > 0$*;*

d3) $d(x, y) = d(y, x)$*;*

d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Os postulados $d1)$ *e* $d2)$ *dizem que* $d(x, y) \geq 0$ *e que* $d(x, y) = 0$ *se, e somente se,* $x = y$. *O postulado* $d3)$ *afirma que a distância* $d(x, y)$ *é uma função simétrica das variáveis* x, y. *A condição* $d4)$ *chama-se desigualdade triangular. Ela tem origem no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulos não excede a soma dos outros dois.*

Um espaço métrico é uma par (X, d)*, onde* X *é um conjunto e* d *é uma métrica em* X*, ou simplesmente denotamos por* X.

Definição A.0.2. *Diz-se que o espaço métrico X é completo quando toda sequência de Cauchy em X é convergente.*

O Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$

Definição A.0.3. *O espaço Euclidiano n-dimensional. Este espaço é obtido se considerarmos o conjunto X de todas as n-úplas de números reais, escrito*

$$x = (\xi_i), \qquad y = (\eta_i)$$

com $1 \leq i \leq n$ etc., e as normas definidas por

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{(\xi_1)^2 + ... + (\xi_n)^2}.; \tag{A.1}$$

$$\|x\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\xi_i|\}.; \tag{A.2}$$

$$\|x\|_3 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| .. \tag{A.3}$$

O Espaço ℓ^p

Definição A.0.4. *Seja $p \geq 1$ um número real fixo. Por defenição, cada elemento no espaço ℓ^p é uma sequência $x = (\xi_i) = (\xi_1, \xi_2, ...)$ de números tal que $|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + ...$ converge; assim*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty \tag{A.4}$$

e a norma definida por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{1/p}. \tag{A.5}$$

O Espaço l^∞

Definição A.0.5. *Este Espaço se considerarmos o conjunto X de todas as sequências limitadas de números reais, isto é, cada elemento de X é uma sequência real*

$$x = (\xi_i)$$

tal que para todo $i = 1, 2, ...$ temos

$$\||\xi_i| \leq c_x$$

onde c_x é um número real que pode depender de x, mas não depende de i. Com a norma definida por

$$\|x - y\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - \eta_i| . \tag{A.6}$$

Definição A.0.6. *Seja $[a, b]$ um compacto em $\mathbb{R}$, o conjunto $C[a, b]$ de todas as funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$e a norma definido por*

$$\|x - y\| = \max_{t \in J} |\xi(t) - \eta(t)| \,. \tag{A.7}$$

Definição A.0.7. *Uma sequência (x_n) num espaço métrico X chama-se uma sequência de Cauchy quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > 0$ implica $d(x, y) < \epsilon$.*

Definição A.0.8. *Uma base de um espaço vetorial X é um conjunto $b \subset X$ linearmente independente que gera X.*

Lembrando que um conjunto $B \subset X$ é linearmente independente quando nenhum vetor $x \in X$ é combinação linear de outros elementos de X.

Definição A.0.9. *Uma sequência $(x_n)_{n=1^\infty}$ no espaço de Banach X é chamada de* base de Schauder *de X se cada x tem uma representação única sob a forma*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,$$

onde $a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A unicidade da represntação permite considerar os funcionais lineares

$$x_n^* : X \to \mathbb{K}, x_n^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right) = a_n,$$

$n \in \mathbb{N}$, que são chamados de funcionais coeficientes.

A unicidade da representação também garante que os vetores de uma base de Schauder são linearmente dependentes.

Definição A.0.10. *Um espaço vetorial X é dito uma soma direta de dois subepaço Y e Z de X, escrevemos*

$$X = Y \oplus Z,$$

se cada $x \in X$ tem uma única representação

$$x = y + z,$$

Então, Z é chamado um complemento algébrico de $Y \in X$ e vice-versa, e Y, Z é chamado um par complementar de subespaço em X.

Teorema A.0.1. *A reta é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Ver: [5]. □

Teorema A.0.2. *Toda Sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Ver: [5]. □

Teorema A.0.3. *Toda Sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Ver: [5]. □

Teorema A.0.4. *Seja a um ponto de acumulação de X. Se a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \to \mathbb{R}$e, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $L_n = lim_{x\to a} f_n(x)$, então*

1. *Existe $L = lim_{n\to\infty} L_n$*

2. *Tem-se $L = lim_{n\to a} f(x)$*

Em outras palavras, vale $lim_{n\to\infty}[lim_{x\to a} f_n(x)] = lim_{x\to a}[lim_{n\to\infty} f_n(x)]$

Demonstração. Ver: [2]. □

Teorema A.0.5. *Se $f_n \to f$ uniformemente em X e todas as f_n são contínuas num ponto $a \in X$ então f é contínua no ponto a.*

Demonstração. Ver: [2]. □

Teorema A.0.6. *(Núcleo e espaço nulo). Seja $T : D(T) \to R(T)$ um operador, onde $D(T)$ é o domínio e $N(T)$ é o núcleo de T. Então:*

a) *A imagem $R(T)$ é um espaço vetorial;*

b) *Se $dimD(T) = n < \infty$, $dimR(T) \leq n$;*

c) *O espaço nulo $N(T)$ é um espaço vetorial.*

Demonstração. Ver: [5]. □

Teorema A.0.7. ***(Combinação linear)*** *Seja $x_1, ..., x_n$ um conjunto de vetores linearmente independentes em um espaço normado X (de qualquer dimensão). Então existe um número real $c > 0$ tal que para cada escalar $\alpha_1, ..., \alpha_n$ temos*

$$\|\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n|). \tag{A.8}$$

Demonstração. Ver: [9]. □

Teorema A.0.8. *(Direta Direta)Seja Y um subespaço fechado de um espaço de Hilbert. Então,*

$$H = Y \oplus Z, \tag{A.9}$$

onde $Z = Y^{\perp}$.

Demonstração. Ver: [9]. □

Teorema A.0.9. *Sejam $V_1 \subset V_2$ espaços de Hilbert. Se $v \in V_2$ é tal que $0 = \langle v, w\rangle$, $w \in V_1$, então $v = 0$, neste caso V_1 é denso em V_2.*

Demonstração. Ver: [9]. □

Proposição A.0.0.1. ***Desigualdade de Minkowski para sequências*** *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p > 1$,*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^p\right)^{1/p} \tag{A.10}$$

para quaiquer $n \in \mathbb{N}$ e escalares $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$.

Demonstração. Ver: [6]. □

Proposição A.0.0.2. *(Identidade de Green) Sejam $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), v \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ em um domínio limitado com fronteira suave. Então:*

$$\int_{\Omega} \Delta u.v + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\partial} \frac{\partial u}{\partial \eta}.v dS,$$

onde η é o vetor unitário exterior a $\partial\Omega$.

Demonstração. Ver: [7]. □

Referências Bibliográficas

1. LIMA, Elon Lages.; **Curso de Análise volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
2. LIMA, Elon Lages.; **Curso de Análise volume 2**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
3. LIMA, Elon Lages.; **Álbegra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
4. LIMA, Elon Lages.; **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
5. BOTELHO, Geraldo. Pellegrino, Daniel. Teixeira, Eduardo.; Fundamentos de Análise Funcional. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
6. CAVALCANTI, Marcelo M.. CAVALCANTI, Valéria N. Domingos. KOMORNIK, Vilmos.; **Fundamentos de Análise Funcional**. Maringá: Eduem, 2011.
7. HAIM, Brezis.; Funtional Anlaysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2011.
8. HOUNIE, Jorge.; **Teoria Elementar das Distribuições**. Rio de Janeiro: Colóqui Brasileiro de Matemática, 1979.
9. KREYSZIG, Erwin.; Introductory functional analysis with applications. United States of America: John Wiley e Sons, 1989.
10. OLIVEIRA, César R, de.; **Introdução à Análise Funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.