UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUCICLEUMA LOBATO DO AMARAL

UM ESTUDO DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE APLICADO A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

MACAPÁ - AP
2016

LUCICLEUMA LOBATO DO AMARAL

UM ESTUDO DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE APLICADO A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao colegiado de Matemática como requisito para obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do professor Ms. Marcel Lucas Picanço Nascimento.

MACAPÁ - AP

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

621.4022
A485e Amaral, Lucicleuma Lobato do.

Um estudo de transformadas de *Laplace* aplicado a equações diferenciais ordinárias / Lucicleuma Lobato do Amaral; orientador, Marcel Lucas Picanço Nascimento. -- Macapá, 2016.

81 p.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. *Laplace*, Transformadas de. 2. Equações diferenciais ordinárias. I. Nascimento, Marcel Lucas Picanço, orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

LUCICLEUMA LOBATO DO AMARAL

UM ESTUDO DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE APLICADO A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciatura Plena em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá, campus Marco Zero, aprovado pela comissão de professores:

Marcel Lucas Picanço Nascimento

Prof. Msc. Marcel Lucas P. Nascimento.
Orientador
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof. Dr. Erasmo Sanger.
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof. Dr. Guzmán Isla Chamilco.
Colegiado de Matemática, UNIFAP

MACAPÁ - AP

2016

Dedico este trabalho ao meu pai Cléo Ferreira e a minha mãe Edilene Ferreira .

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela saúde e força dadas a mim, para conclusão do meu curso.

Aos meus pais pelo apoio, incentivo e amor incondicional.

Aos meu irmãos Cleidson, Eloir e Enir pelo carinho e apoio.

Aos meus colegas de turma pelo apoio e incentivo constante.

A todos os professores que me acompanharam durante a graduação.

Aos meus gatos e cachorros por compreenderem minhas ausências e por todo carinho.

Ao meu grande parceiro de vida, Josiel, por todo apoio, amor, compreensão, paciência e incentivo, obrigada.

E em especial ao meu professor e orientador, Marcel Lucas, que com muita paciência e atenção me orientou neste trabalho.

Um matemático que não é também um poeta nunca será um matemático completo.

Weierstrass.

Conteúdo

Resumo **x**

Abstract: **xi**

Lista de Tabelas. **xii**

Lista de Ilustrações. **xiii**

Introdução **1**

1 Integrais Impróprias **3**

1.1 Integrais Impróprias 3

1.2 Função dada por uma integral imprópria 7

1.3 Convergência e divergência de integrais impróprias: Critério de comparação. 7

2 Transformada de Laplace. **15**

2.1 Transformadas de Laplace. 15

2.2 Condições suficientes para existência da Transformada de Laplace de uma função. 17

2.3 Propriedades da Transformada de Laplace 22

2.3.1 Linearidade da Transformada de Laplace. 22

2.3.2 Transformada de Laplace de Derivadas. 23

2.4 Tabela de transformadas 24

3 Transformada inversa e convolução. 35

3.1 Transformada de Laplace inversa. 35

3.1.1 Frações parciais 36

3.2 Produto Convolução. 40

3.2.1 Forma inversa do Teorema de Convolução. 43

3.3 Aplicações em Equações Diferenciais Ordinárias. 44

4 Teoremas de deslocamento e funções: periódicas, deslocamento, Heaviside e Delta de Dirac. 48

4.1 Transformada de Laplace de Funções Periódicas. 48

4.2 Primeiro Teorema de translação ou Deslocamento. 49

4.3 Função Degrau Unitário ou Função de Heaviside. 50

4.4 Segundo Teorema de Translação. 52

4.5 Função Delta de Dirac. 53

5 Modelagens de equações diferenciais e resoluções usando Transformada de Laplace. 57

5.1 Aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias: Modelos Vibratórios. . . 57

5.1.1 Movimento Harmônico Simples. 57

5.1.2 Movimento Amortecido. 59

5.2 Aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias: Modelos de Circuitos Elétricos. 61

5.2.1 Circuito RC 61

5.2.2 Circuito RL 63

5.2.3 Circuito RLC 67

5.3 Aplicaçoes de Equações Diferenciais Ordinárias: Modelos de flexões de Vigas. 69

Conclusão 75

Apêndice: Alguns tópicos de Análise Real **78**

Bibliografia **80**

Resumo

A transformada de Laplace é uma ferramenta importante de resolução de equações, em particular, as que vamos abordar neste trabalho, as equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes que envolvem condições iniciais e de contorno. O método consiste em transformar equações diferenciais em equações algébricas que, em muitos casos, são mais simples de resolver. Neste trabalho, faremos um estudo amplo de transformadas de Laplace, iniciando com conceitos de integrais impróprias, depois estudaremos definição e propriedades de Transformada de Laplace, em seguida faremos estudo de transformada inversa e produto convolução, finalizando com a formalização do método para aplicar equações diferenciais. Vamos resolver, por exemplo, o problema de valor inicial das vigas em que a equação diferencial é dada por $k\frac{d^4y}{dx^4}$ = -w(x) e as condições iniciais são $y(0) = 0, y''(0) = 0, y(l) = 0$ e $y''(l) = 0$.

Palavras-chave: Transformada de Laplace. Equações diferenciais ordinárias. Aplicações.

Abstract

The Laplace transform is an important tool of equations resolution,in particular those are presented in this work, differential linear ordinary equations with constant coefficients involving initial and boundary conditions. The methods, transform differential equations into algebraic equations, that are simple to solve in many cases. In this work, we will make an extensive study of Laplace transforms, starting with concepts of improper integrals,then study definitions and properties of Laplace transform, then we will study inverse Laplace transform and convolution product,ending we will do the formalization of the method for applying differential equations. We will solve, for example, the initial value problem for beams in which the differential equation is demonstrated by $k\frac{d^4y}{dx^4} =$ -w(x) and the initial conditions are $y(0) = 0, y''(0) = 0, y(l) = 0$ e $y''(l) = 0$.

Key-words: Laplace Transform. Differential Ordinary Equations.Aplications.

Lista de Figuras

1.1 Área do exemplo 1.1 4

1.2 Área do exemplo 1.1 5

1.3 Área do exemplo 1.2 5

1.4 Área do exemplo 1.2 6

1.5 Critério de Comparação. 9

4.1 Função de Heaviside. 51

4.2 Função de Heaviside multiplicada por y(x) 51

4.3 Área da função Delta Dirac. 54

5.1 Circuito RC. 61

5.2 Circuito RL. 64

5.3 Cicuito RLC. 67

Lista de Tabelas

2.1 Tabela das principais transformadas. 25

Introdução

A modelagem de vários problemas na física, engenharia e outras áreas, são expressadas por Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) ou Equações diferenciais parciais (EDP) juntas com suas condições de contorno.

A transformada de Laplace é uma ferramenta que pode ser utilizada para um método de resolução de Equações Diferenciais Ordinárias lineares com coeficientes constantes que envolvem condições iniciais, ou seja, equações da forma:

$$\begin{cases} a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x) \\ y(0) = y_0; y'(0) = y'_0; ...; y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Para chegarmos ao resultado de uma Equação diferencial aplicando transformada de Laplace, faremos basicamente três procedimentos:

1. Aplicamos a transformada de Laplace na equação diferencial, obtendo assim, uma equação algébrica.

2. Resolvemos a equação algébrica.

3. Aplicamos a transformada de Laplace inversa no resultado da equação algébrica e obtemos a solução do problema.

Na engenharia e na física é comum encontrarmos problemas que estão sob ação de forças descontínuas ou de impulsos. Podemos dizer, então, que uma das grandes vantagens em poder utilizar o método que possui a ferramenta transformada de Laplace é que, a transformada pode ser aplicada em equações quando o termo não homogêneo for uma função com descontinuidade finita (ou que sejam generalizações de função, como o caso Delta de Dirac) , diferente dos outros métodos clássicos como método dos coeficientes a determinar por exemplo.

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo sobre definições de transformadas de Laplace, formalizar conceitos, relacionar integrais impróprias com transformadas e estudarmos Transformada de Laplace e algumas aplicações na física ou engenharia.

No capítulo 1, apresentamos Integrais Impróprias que trata-se de um assunto base para o estudo de transformadas de Laplace. Esta parte do trabalho foi embasada em [7], porém, neste capítulo, trabalhamos um exemplo de [1].

No capítulo 2, trabalhamos a definição de transformada de Laplace, e alguns importantes teoremas e propriedades de transformadas, culminando na construção de uma tabela de transformadas de algumas funções elementares e de algumas fórmulas que geralmente são utilizadas na construção de novas transformadas. Aqui tivemos como referência [3], [5] e [10].

No capítulo 3, apresentamos a transformada inversa de Laplace; um importante produto de funções de transformadas e aplicações da transformada em Equações diferenciais. Neste capítulo, nossas referêcias são [3], [5], [8] e [10].

No capítulo 4, apresentamos a transformada de Laplace de algumas funções especiais e alguns teoremas importantes para compreensão e resolução das aplicações, suas referências são [3], [5], [10].

No capítulo 5, fizemos modelagens e resolvemos equações diferenciais utilizando transformada de Laplace. Solucionamos modelos de circuitos elétricos baseados em [9], também trabalhamos com modelos vibratórios que foram baseados em [10] e modelos de flexões de vigas que nos baseamos em [4].

Capítulo 1

Integrais Impróprias

Neste capítulo inicial trataremos de integrais impróprias, que de forma simples, são integrais em intervalos ilimitados. Este não é o único tipo, porém, nesta monografia, precisaremos apenas deste. O assunto em questão é de extrema importância para nosso principal objeto de estudo nesta monografia, Transformada de Laplace, uma vez que esta, por definição, envolve uma integral no intervalo de zero a infinito. Aqui faremos uma revisão do assunto, porém, bem esclarecedora e rica em detalhes, para que fique bem claro o conceito de convergência de integrais impróprias, que ajudará no entendimento de Transformadas de Laplace. Este capítulo foi embasado no livro [7].

1.1 Integrais Impróprias

Definição 1.1 *Seja f integrável em $[a, b]$,para todo $b > a$. Definimos*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

desde que o limite exista e seja finito. Tal limite denomina-se integral imprópria de f estendida ao intervalo $[a, +\infty)$.

Podemos perceber que resolvemos a integral imprópria calculando a função definida por integral em b e tomando o limite desse resultado. Se o limite existir, ou seja, for finito, diremos que a integral imprópria converge. Se o limite nao existir, ou seja, for infinito, diremos que a integral imprópria é divergente.

Suponhamos $f(x) \geq 0$ em $[a, \infty)$ e que f seja integrável em $[a, b]$ para todo $b > a$. Seja A o conjunto de todos (x, y) tais que $0 \leq y \leq f(x)$ e $x \geq a$. Definimos a área de A por

$$\text{área A} = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Exemplo 1.1 *A integral imprópria* $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ *é convergente ou divergente? Justifique.*

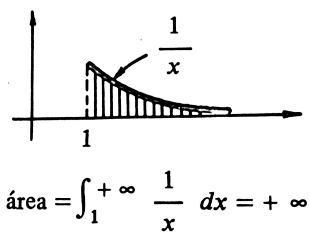

Figura 1.1: Área do exemplo 1.1

Fonte: Guidorizzi(1986).

Solução: Como $\frac{1}{x}$ é função contínua, logo integrável em $x \geq 1$, então

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x}dx.$$

Resolvendo a integral com intervalo finito:

$$\int\limits_{1}^{b} \frac{1}{x}dx = [\ln x]\Big|_{1}^{b} = \ln b - \ln 1 = \ln b.$$

Tomando o limite $b \to +\infty$ no resultado encontrado,temos

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b \to +\infty} \ln b = +\infty.$$

Logo a integral imprópria é divergente.

$\blacksquare$

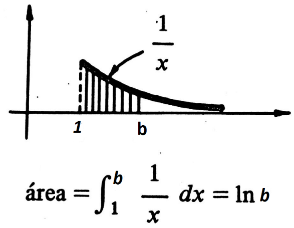

Figura 1.2: Área do exemplo 1.1

Fonte: Adaptado de Guidorizzi(1986).

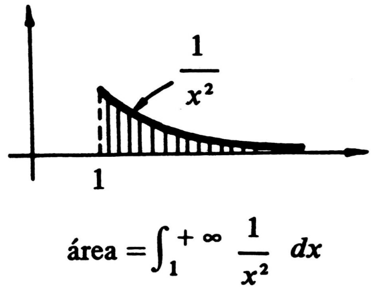

Figura 1.3: Área do exemplo 1.2

Fonte: Guidorizzi(1986).

Exemplo 1.2 *Calcule* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx.$

Solução: Como $\dfrac{1}{x^2}$ é função contínua, logo integrável em $x \geq 1$, então, pela definição 1.1 temos a seguinte igualdade:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}dx.$$

Resolvendo a integral $\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x^2}dx$, obtemos:

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^b = \frac{-1}{b} + \frac{1}{1} = \frac{-1}{b} + 1.$$

Então,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{-1}{b} + 1 \right] = 1.$$

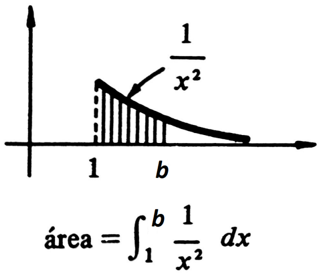

Figura 1.4: Área do exemplo 1.2

Fonte: Adaptado de Guidorizzi(1986).

O limite existe, pois seu valor é igual a um, ou seja, finito, logo a integral imprópria é convergente.

■

Para o estudo de transformada de Laplace utilizaremos constantemente da definição 1.1. Pórem, acrescentaremos aqui, suas outras duas definições, que serão úteis para compreendermos a próxima seção e entendermos a integral imprópria de modo geral. Analogamente a definição 1.1, temos:

Definição 1.2 *Seja f integrável em $[b, a]$ para todo $b < a$. Definimos*

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{a} f(x)dx.$$

E de forma geral temos:

Definição 1.3 *Seja f integrável em $[-b, b]$,para todo $b > 0$. Definimos*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx.$$

desde que ambas as integrais do 2º membro sejam convergentes.

1.2 Função dada por uma integral imprópria

Suponhamos que para todo x, $\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ seja convergente. Podemos, então, considerar a função F definida em $\mathbb{R}$, dada por

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Fixado o real a,para todo real u

$$\int\limits_{u}^{x} f(t)dt = \int\limits_{u}^{a} f(t)dt + \int\limits_{a}^{x} f(t)dt;$$

fazendo $u \to -\infty$ resulta

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int\limits_{a}^{x} f(t)dt$$

e,portanto,

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} f(t)dt + H(x),$$

onde

$$H(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)dt.$$

Temos que $H(x)$ é contínua e que H é derivável em todo x que f for contínua, e ainda que, $H'(x) = f(x)$ em todo x onde a função f for contínua. Como a função $H(x)$ é contínua e por hipótese, a integral $\int\limits_{-\infty}^{a} f(t)dt$ é convergente, resultará F contínua, e $F'(x) = f(x)$ em todo x em que f for contínua.

1.3 Convergência e divergência de integrais impróprias: Critério de comparação.

Em certas ocasiões estaremos mais interessados em saber se uma integral imprópria converge ou diverge e não necessariamente em saber o seu valor. Em alguns casos, podemos chegar a respeito sem necessariamente calcular a integral imprópria. Para tal fim, existe um importante critério chamado Critério de Comparação, que nos permite concluir a convergência ou divergência de uma integral imprópria através da comparação com outra que se sabe previamente ser convergente ou divergente.

Observamos que se f for integrável em $[a, x]$,para todo $x > a$ e se $f(x) \geq 0$ em $[a, +\infty)$, então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \geq a$$

será crescente em $[a, +\infty)$. De fato, se dois números reais, x_1 e x_2, com $a \leq x_1 \leq x_2$, então

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \geq 0.$$

Portanto, para quaisquer valores x_1,x_2 em $[0, +\infty)$

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow F(x_1) \leq F(x_2).$$

Segue que F é crescente em $[a, +\infty)$. O $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$ será finito se existir $M > 0$ tal que $\int_a^x f(t)dt \leq M$ para todo $x \geq a$; caso contrário, será infinito.

Teorema 1.1 ***Critério de Comparação.*** *Sejam f e g duas funções integráveis em $[a, b]$, para todo $b > a$, e tais que, para todo $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Então*

a) $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *convergente* $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ *convergente.*

b) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *divergente* $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ *divergente*

Demonstração:

a)Sabemos que $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b g(x)dx$ é finito, pois, por hipótese, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ é convergente. De $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para todo $x \geq a$, resulta

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

sendo $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$ crescente e limitada, resulta que $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ será finito e, portanto, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ será convergente.

b) Como b é contrapositiva de a, logo, b também é verdadeiro. ■

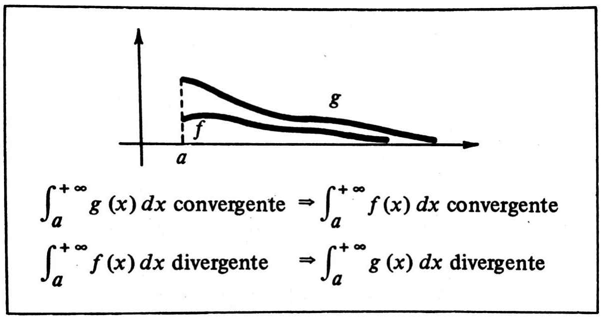

Figura 1.5: Critério de Comparação.

Guidorizzi(1986)

A figura fornece uma interpretação geométrica para o teste da comparação:

a)Se a integral imprópria $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ em $[a, +\infty)$ convergir, ou seja, se a área é finita, então a área sob o gráfico de $f(x)$ no mesmo intervalo, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, também será finita, logo convergente, pois seria incoerente ter uma área infinita dentro de uma área finita. Porém, se a integral imprópria $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ em $[a, +\infty)$ divergir, ou seja, possuir área infinita, nada poderemos afirmar sobre a integral $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Seguimos com o mesmo raciocinio para a explicação de b.

b) Se a integral imprópria $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ divergir, ou seja, sua área for infinita, então a integral $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ que tem área maior, também irá divergir. Porém, se a área menor for finita, ou seja, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ divergir, nada podemos afirmar sobre a área maior.

Exemplo 1.3 *Verifique que* $\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ *é convergente.*

Solução:

O problema está em não conseguirmos resolver a integral imprópria da função $g(x) = e^{-x^2}$ utilizando o passo a passo dos exemplos 1.2 e 1.1, ou seja, calculando a integral da função $g(x) = e^{-x^2}$ no intervalo finito para depois tomarmos o limite do resultado. Logo, vamos utilizar do critério de comparação para verificarmos se a integral imprópria converge ou diverge. Vamos proceder da seguinte forma: Chamaremos a área da integral acima de A e vamos tentar de alguma maneira comparar a área A com outra de alguma função $f(x)$ que já conhecemos a integral. É importante nos atentarmos somente para o que acontece com as funções em $x \geq 1$.

Vamos supor que A seja menor que a área da tal função $f(x)$, representada por $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$, com $e^{-x^2} \leq f(x)$ para todo $x \in [1, +\infty)$. Vamos considerar agora a região que está entre o gráfico da função f e o eixo x em $[1, +\infty)$. Percebemos que da forma que a função f foi escolhida, a região A estará dentro da região que está entre o gráfico da função $f(x)$ e o eixo x. Suponhamos que está área seja finita.
Se a área da região de $f(x)$ for finita, então, pelo Critério de comparação, a área da região de $g(x)$ também será finita. Devemos, então determinar uma função $f(x)$ tal que $e^{-x^2} \leq f(x)$. Temos, $x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x$, para todo $x \geq 1$.
Como $e > 1$, podemos concluir que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Logo, tomaremos $f(x) = e^{-x}$ como a função $f(x)$. O que precisamos fazer agora é calcular $\int_{1}^{+\infty} e^{-x}dx$, se possível. Vejamos:

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} e^{-x}dx, \qquad \text{como } e^{-x} \text{ é função contínua em } \mathbb{R},$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]\Big|_{1}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-b} + e^{-1}\right] = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{-1}{e^b} + \frac{1}{e}\right).$$

$$\therefore \int_{1}^{+\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{e}.$$

Como $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, sendo que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ converge, então pelo Critério de Comparação, podemos concluir que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ também converge.

■

Exemplo 1.4 *Verifique que a integral imprópria* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4+3}dx$ *é divergente.*

Solução: Temos que $\dfrac{x^3}{x^4+3} = \dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{1+\frac{3}{x^4}}$. Observe que, para todo $x \geq 1$,

$\dfrac{1}{1+\frac{3}{x^4}} \geq \dfrac{1}{4}$ e, portanto, $\dfrac{x^3}{x^4+3} \geq \dfrac{1}{4.\frac{1}{x}} \geq 0$.

Observamos, ainda, que $\frac{1}{x}$ é contínua em $[1, +\infty)$, logo integrável no intervalo, então pela definição 1.1 de integrais impróprias, temos:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{4x}dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{4}\int_1^{b} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^b = \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty} \ln b - \ln 1 = +\infty.$$

Logo, a integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{4x}dx$ diverge, e pelo Critério de Comparação segue que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4+3}dx$ também diverge. ■

Definição 1.4 (Convergência absoluta.) *A integral imprópria* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *é chamada de absolutamente convergente se* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *converge.*

Teorema 1.2 *Se f é integrável em $[a, b]$,para todo $b \geq a$ e* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *converge,então* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *convergirá.*

Demonstração: Para todo $x \geq a$, temos o seguinte:

$$f(x) \leq |f(x)|,$$

somando $|f(x)|$ ambos os lados da desigualdade

$$0 \leq f(x) + f|x| \leq 2|f(x)|.$$

Sendo esta última desigualdade, necessária, pois, para usar o Critério de Comparação as funções envolvidas devem ser maiores ou iguais a zero.

Por hipótese, $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ converge, então pelo critério de comparação $\int\limits_a^{+\infty} f(x) + |f(x)|dx$ também converge. Temos:

$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b [|f(x)| + f(x) - |f(x)|]\, dx = \int\limits_a^b |f(x)| + f(x)dx - \int\limits_a^b |f(x)|dx$

Como $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|+f(x)dx$ e $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ são convergentes, a diferença dessas duas integrais, será um número, portanto, a integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ também é convergente. ■

Exemplo 1.5 *Verifique se a integral imprópria* $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin^3 x dx$ *é convergente ou divergente.*

Solução: Primeiramente vamos tentar encontrar uma função que seja maior ou menor que $e^{-x}\sin^3 x$ para utilizarmos o critério de comparação. Partiremos do fato da função $\sin x$ ser limitada:

$$|\sin^3 x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sin^3 x \leq 1$$

mutiplicando todas inequações pela função e^{-x}, teremos

$$-e^{-x} \leq \sin^3 x.e^{-x} \leq e^{-x} \text{ ou } |\sin^3 x.e^{-x}| \leq e^{-x}.$$

Conseguimos encontrar uma função que é maior que o valor absoluto da função integrando. Vamos verificar se a $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge ou diverge.

$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^b e^{-x}dx$, e obtendo a função integral em b:

$\int\limits_0^b e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^b = -e^{-b} + e^0 = -e^{-b} + 1.$

Tomando limite no valor obtido, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} -e^{-b} + 1 = 1.$

Como $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ é convergente, então pelo critério de comparação, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin^3 x.e^{-x}|dx$ também será convergente e pelo teorema 1.2 de convergência absoluta, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin^3 xdx$ também converge. ■

Exemplo 1.6 *A integral abaixo é convergente ou divergente?*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

Solução:

Vamos resolver usando o método integral por partes, cuja fórmula é $\int udv = uv - \int vdu$. Chamaremos $u = \dfrac{1}{x} \Rightarrow du = -\dfrac{1}{x^2}dx$ e $dv = \sin xdx \Rightarrow v = -\cos x$. Escrevendo a integral na forma $\displaystyle\int udv$, temos:

$$\int_1^b \frac{1}{x}\sin xdx = \left[\frac{1}{x}(-\cos x)\right]_1^b - \int_1^b -\frac{1}{x^2}(-\cos x)dx = \frac{-\cos t}{b} + \cos 1 - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Para todo $x \geq 1$, $0 \leq \left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$. Temos que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ é convergente, pois,

$\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^b = \frac{-1}{b} + 1$, logo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{b} + 1 = 1$, então, pelo critério de comparação $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$, também será, e, portanto, pelo teorema 1.2 a integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ é convergente. Agora vamos verificar se o limite de $\dfrac{\cos b}{b}$ existe.

Temos que $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \frac{\cos b}{b} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{b}.\cos b = 0$, pois, $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{b}$ é 0 e $\cos x$ é função limitada, portanto, pelo teorema do anulamento, o limite do produto dessas funções com $b \to +\infty$ é igual a zero, resultando

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = cos1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$, ou seja, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ é convergente.

■

Exemplo 1.7 *A integral abaixo é convergente ou divergente?*

$$\int_{1}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx.$$

Não faremos o cálculo deste exemplo, pois o que nos interessa aqui, é somente saber se a integral converge ou diverge. Porém, resolvendo o problema, chegaremos a conclusão de que a integral $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ é divergente. Com o resultado, podemos perceber que o fato da integral $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ convergir, não implica $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ convergir, ou seja, a recíproca do teorema 1.2 não é verdadeira. ■

Capítulo 2

Transformada de Laplace.

2.1 Transformadas de Laplace.

A transformada de Laplace é um operador importante de resolução de problemas com valores iniciais . O método consiste em resolver estes tipos de problemas, exibindo-os em termos de funções elementerares, ou seja, sem precisar fazer cálculos de derivadas e integrais para chegar-se na solução geral.
Neste capítulo apresentaremos os conceitos de Transformada de Laplace e suas propriedades.
Definição Básica: Uma tranformada integral é da forma

$$\int_a^b K(s,x)f(x)dx$$

onde, $K(s,x)$ é uma função chamada de núcleo da transformada. Os limites de integração e o núcleo da transformada são dados. A transformada de Laplace de uma função $f(x)$, denotada por $\pounds\{f(x)\}$, trata de uma integral com $f(x)$ definida em $x > 0$ e com o núcleo $k(s,x) = e^{-sx}$. Isto é,

$$\pounds\{f(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx}f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-sx}f(x)dx.$$

Quando o limite existir para apenas alguns valores da variável s, diremos que a integral imprópria converge, e quando não existir, diremos que a integral imprópria diverge.

Algumas vezes, para agilizar a notação, denotaremos por letra minúscula a função a ser transformada e a letra maiúscula correspondente para denotar sua transformada de Laplace; por exemplo,
$\pounds\{f(x)\} = F(s)$, $\pounds\{g(x)\} = G(s)$, $\pounds\{y(x)\} = Y(s)$.

Definição 2.1 (Transformada de Laplace) *Dada uma função $f(x)$ definida no intervalo $[0, +\infty)$, definimos a sua Transformada de Laplace, $F(s)$, por:*

$$F(s) = \pounds\{f(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx, \tag{2.1}$$

supondo que a integral convirja pelo menos para algum valor de s.

Quando convergir a integral imprópria,o resultado será uma função de s. Vamos obter algumas Transformadas básicas.

Exemplo 2.1 *Calcule $\pounds\{1\}$.*

Solução: $\pounds\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx}(1)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-sx}dx$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{-e^{-sx}}{s}\right|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{-e^{-sb}+1}{s} = \frac{1}{s}, \qquad \text{quando } s > 0.$$

Em outras palavras, a transformada de Laplace de $f(x) = 1$ irá existir quando o expoente $-sb$ for negativo, pois, quando $b \to +\infty$ teremos $e^{-sb} \to 0$ e restará apenas $\frac{1}{s}$. Quando $s < 0$ o expoente $-sb$ será positivo e $e^{-sb} \to +\infty$ quando $b \to +\infty$, logo a transformada não irá exitir.

■

Exemplo 2.2 *Calcule $\pounds\{x\}$.*

Solução: Pela definição 2.1 temos:

$$\pounds\{x\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx}xdx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-sx}xdx.$$

Vamos resolver integrando por partes. Chamaremos $u = x \Rightarrow du = dx$ e $dv = e^{-sx} \Rightarrow$

$v = \dfrac{-e^{-sx}}{s}$. Colocando na forma $\int udv$, temos

$\int_0^b e^{-sx} x dx = -x \dfrac{e^{-sx}}{s}\Big|_0^b + \dfrac{1}{s}\int_0^b e^{-sx} dx,$ então,

$\int_0^{+\infty} e^{-sx} x dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-b\dfrac{e^{-sb}}{s}\right) + \dfrac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-sx} dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-b\dfrac{e^{-sb}}{s}\right) + \dfrac{1}{s}\pounds\{1\}.$

O limite dos produtos de funções é igual a zero, pois $\lim_{b \to +\infty} e^{-sx} = 0$ e b é uma função limitada, veremos o motivo na proxima seção, então pelo teorema do confronto $\lim_{b \to +\infty} -b\dfrac{e^{-sb}}{s} = 0$. Daí, usando o exemplo 2.1:

$\int_0^{+\infty} e^{-sx} x dx = \dfrac{1}{s}.\dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{s^2}.$

Portanto, $\pounds\{x\} = \dfrac{1}{s^2}$. ■

2.2 Condições suficientes para existência da Transformada de Laplace de uma função.

Nem sempre a integral irá convergir, logo, nem sempre existirá a Transformada de Laplace de uma função. Demonstraremos que as seguintes condições garantem a existência da transformada de Laplace:

- $f(x)$ é contínua por partes em qualquer intervalo limitado de $[0, +\infty)$ e
- é de ordem exponencial para $x > T$.

Definição 2.2 (Função contínua por partes.) *Uma função é contínua por partes ou seccionalmente contínua sobre um intervalo $[a, b]$ se pudermos dividir $[a, b]$ num número finito de subintervalos em que $f(x)$ é contínua no interior de cada um desses subintervalos, e a função $f(x)$ tende a um limite finito quando x tende para as extremidades desses subintervalos. Pôr isto, observe que $f(x)$ ser contínua, implica que é seccionalmente contínua.*

Definição 2.3 (Ordem Exponencial) *Dizemos que uma função é de ordem exponencial k sobre $[0, +\infty)$, se existem números $M, T > 0$ e $k \in \mathbb{R}$ tais que*

$$|f(x)| \leq Me^{kx} \tag{2.2}$$

para todo $x > T$.

Às classes de funções que atendem as definições 2.2 e 2.3, denotaremos de funções admissíveis.

Teorema 2.1 (Condições Suficientes de Existência) *Seja $f(x)$ uma função seccionalmente contínua em $[0, +\infty)$ e de ordem exponencial k, então, a transformada de Laplace existe para todo $s > k$.*

Demonstração: Como a função $f(x)$ é contínua em intervalos , $e^{-sx}f(x)$ será integrável em qualquer intervalo finito sobre o eixo x e da definição 2.1, temos

$$|\pounds\{f(x)\}| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-sx}f(x)|dx \leq M \int_0^{+\infty} e^{-sx}e^{kx}dx = M \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)x}dx = -M \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{e^{-(s-k)x}}{s-k}\right|_0^b =$$

$$-M \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{e^{-(s-k)b}}{s-k} - \frac{e^{-(s-k)0}}{s-k} \right) = M \left(\frac{1}{s-k} \right)$$ para $s > k$. Logo, por $M \int_0^{+\infty} e^{-sx}e^{kx}dx$ ser convergente, temos pelo teorema 1.1 de Critério de Comparação que $\int_0^{+\infty} |e^{-sx}f(x)|dx$ também é convergente, e ainda pelo teorema 1.2, $\int_0^{+\infty} e^{-sx}f(x)dx$ convergente absolutamente.

Portanto, para funções admissíveis a integral imprópria converge absolutamente e tem a estimativa

$$|F(s)| \leq \frac{M}{s-k}. \tag{2.3}$$

■

Corolário 2.1 *Se $f(x)$ é uma função admissível, sua integral*

$$g(x) = \int_0^x f(\tau)d\tau \tag{2.4}$$

também é admissível com a mesma ordem exponencial k. Logo a transformada de Laplace de $g(x)$ existe também para $s > k$.

Demonstração: De (2.4) temos,

$$|g(x)| = \left|\int_0^x f(\tau)d\tau\right| \Rightarrow |g(x)| \leq \int_0^x |f(\tau)|d\tau$$

Como f é de ordem exponencial, isto é, $|f(\tau)| \leq Me^{k\tau} \Rightarrow \int_0^x |f(\tau)|d\tau \leq M \int_0^x e^{k\tau}d\tau$, isto é, $|g(x)| \leq \int_0^x |f(\tau)|d\tau \leq M \int_0^x e^{k\tau}d\tau \leq M \frac{e^{k\tau}}{k}\Big|_0^x \leq M\left(\frac{e^{kx}}{k} - \frac{e^0}{k}\right) = \frac{M}{k}\left(e^{k\tau} - 1\right)$

Portanto,

$$|g(x)| \leq \frac{M}{k}e^{k\tau} \leq ce^{k\tau},$$

fazendo $\frac{M}{k} = c$. ■

Vamos fechar esta seção mostrando um importante teorema, que garante que se duas funçoes têm a mesma transformada de Laplace, então estas funções são iguais quase sempre, ou seja, irão diferir apenas nos pontos de descontinuidade.

Teorema 2.2 *Se $f(x)$ e $g(x)$ forem funções admissíveis em $[0, +\infty)$ tais que $\pounds\{f(x)\} = \pounds\{g(x)\}$ para $s > s_0$, então $f(x) = g(x)$, exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade.*

Demonstração: Definindo $h(x) = f(x) - g(x)$, temos que a transformada de Laplace de $h(x)$ é igual a diferença das transformadas de $f(x)$ e $g(x)$, que são iguais por hipótese, então, utilizaremos a seguir uma propriedade chamada de linearidade que veremos na próxima seção, $\pounds\{h(x)\} = \pounds\{f(x)\} - \pounds\{g(x)\} = 0$, para $s > s_0$. Supondo $h(x)$ contínua, segue-se que

$$H(s_0 + n) = \int_0^{+\infty} e^{-(s_0+n)x}h(x)dx, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, ...$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-nx}e^{-s_0x}h(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-nx}v'(x)dx,$$

onde $v(x) = \int_0^x e^{-s_0\tau}h(\tau)d\tau$. Integrando por partes a integral acima, chamando de $u = e^{-nx} \Rightarrow du = -ne^{-nx}dx$ e $dv = v'(x)dx \Rightarrow v = v(x)$,obtemos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx}v'(x)dx = \lim_{b\to+\infty} e^{-nx}v(x)\Big|_0^b + n\int_0^{+\infty} e^{-nx}v(x)dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(e^{-nb}v(b) - e^{-n.0}v(0)\right) + n\int_0^{+\infty} e^{-nx}v(x)dx = 0.$$

Pelo o fato de $\lim_{b\to+\infty} e^{-nb} = 0$, $n > 0$, e v ser uma função admssível, implicando $\lim_{b\to+\infty} \left(e^{-nb}v(b)\right) = 0$, e ainda $v(0) = 0$, temos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx}v(x)dx = 0 \qquad n = 1, 2, ... \tag{2.5}$$

É importante observamos que nos pontos onde $h(x)$ é contínua, $v(x)$ é derivável e $v'(x) = e^{-s_0x}h(x)$. Logo se provarmos que $v(x) = 0$, teremos consequentemente $v'(x) = 0 = e^{-s_0x}h(x)$ e seguirá que $h(x) = 0$. Em (2.5) faremos mudança de variável, chamando $x = -\ln t \Rightarrow dx = -\frac{1}{t}dt$ e $v(x) = u(t) \Rightarrow v(-\ln t) = u(t)$ e então teremos, quando $x = 0 \Rightarrow -\ln t = 0$, logo $t = 1$ e quando $x \to +\infty \Rightarrow -\ln t \to +\infty$ então $t = 0$ e a integral fica da forma $-\int_1^0 t^{(n-1)}u(t)\frac{1}{t}dt$ e usando propriedade de integral invertemos os limites de integração.

$$\int_0^1 t^{(n-1)}u(t)dt = 0. \qquad n = 1, 2, 3, .. \tag{2.6}$$

Com $n = 1$ temos, $\int_0^1 u(t)dt = 0$

Com $n = 2$ temos, $\int_0^1 tu(t)dt = 0$

$\vdots$

Observamos que a forma geral de um polinômio é

$p(t) = a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1t + a_0 \Rightarrow u(t)p(t) = u(t)[a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1t + a_0]$, logo

$$\int_0^1 p(t)u(t)dt = \int_0^1 a_nt^nu(t)dt + \int_0^1 a_{n-1}t^{n-1}u(t)dt + ... + \int_0^1 a_1tu(t)dt + \int_0^1 a_0u(t)dt$$

Por (2.6),
$$= \underbrace{a_n\int_0^1 t^nu(t)dt}_{0} + \underbrace{a_{n-1}\int_0^1 t^{n-1}u(t)dt}_{0} + ... + \underbrace{a_1\int_0^1 tu(t)dt}_{0} + \underbrace{\int_0^1 a_0u(t)dt}_{0}$$

Temos então que

$$\int_0^1 t^{(n-1)}u(t)dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 p(t)u(t)dt = 0 \tag{2.7}$$

para qualquer polinômio p(t). Agora, utilizando o Teorema de aproximação de Weierstrass (para enunciado, vide .1 do apêndice) que diz que qualquer função contínua $u(t)$ num intervalo fechado, digamos $[0,1]$, pode ser aproximada uniformemente por um polinômio $p(t)$ tal que

$$|u(t) - p(t)| < \varepsilon$$

para todo $t \in [0,1]$.

Logo,

$$\int_0^1 |u(t)-p(t)|^2 dt = \int_0^1 (u(t)-p(t))^2 dt = \int_0^1 (u(t))^2 dt - 2\int_0^1 u(t)p(t)dt + \int_0^1 (p(t))^2 dt < \varepsilon.$$

Utilizando (2.7) na segunda integral do segundo membro, obtemos

$$\int_0^1 |u(t)-p(t)|^2 dt = \int_0^1 (u(t))^2 dt + \int_0^1 (p(t))^2 dt > \int_0^1 (u(t))^2 dt$$

para todo $\varepsilon > 0$. Como $|u(t)-p(t)| < \varepsilon \Rightarrow |u(t)-p(t)|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \int_0^1 |u(t)-p(t)|^2 dt < \int_0^1 \varepsilon^2 dt$, onde $\int_0^1 \varepsilon^2 dt = \varepsilon^2 t\Big|_0^1 = \varepsilon^2$ o que implica $\varepsilon^2 > \int_0^1 |u(t)-p(t)|^2 dt > \int_0^1 (u(t))^2 dt$, logo, obtemos

$$\int_0^1 (u(t))^2 dt < \varepsilon^2$$

para todo $\varepsilon > 0$, o que implica

$$\int_0^1 (u(t))^2 dt = 0$$

e então, chegamos a conclusão por

$$\int_0^1 (u(t))^2 dt = 0$$

consequentemente o integrando só pode ser $u(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$. Como $u(t) = 0 = v(x)$, então $v(x) = 0 \Rightarrow v'(x) = 0$ e $v'(x) = 0 = e^{-s_0 x}h(x)$, como $e^{-s_0 x} \neq 0$, concluimos que $h(x) = 0$.

$\blacksquare$

2.3 Propriedades da Transformada de Laplace

2.3.1 Linearidade da Transformada de Laplace.

A linearidade é uma propriedade muito importante de transformadas, pois é indispensável para resoluções de equações através de transformadas. Se não fosse a propriedade de linearidade, quase nem daria para resolvermos equações e seria possível somente para alguns casos.

Teorema 2.3 (Linearidade) *Sejam f e g duas funções que possuem transformadas de Laplace, então:*

$$\pounds\{af(x) + bg(x)\} = a\pounds\{f(x)\} + b\pounds\{g(x)\} \tag{2.8}$$

com a, b constantes.

Demonstração: Segue direto da definição de Transformada de Laplace e da propriedade de integral que:

$$\begin{aligned}
\pounds\{af(x) + bg(x)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-sx}[af(x) + bg(x)]dx \\
&= a\int_0^{+\infty} e^{-st}f(x)dx + b\int_0^{+\infty} e^{-sx}g(x)dx \\
&= a\pounds\{f(x)\} + b\pounds\{g(x)\}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exemplo 2.3 *Calcule a Transformada de Laplace de $f(x) = a + bx$ com a, b constantes.*

Solução: Pela definição 2.1, temos

$\pounds\{f(x)\} = \pounds\{a + bx\}$ e por teorema 2.1

$= a\pounds\{1\} + b\pounds\{x\}$

Como já calculamos nos exemplos 2.1 e 2.2 as transformadas $\pounds\{1\}$ e $\pounds\{x\}$,temos

$= a.\dfrac{1}{s} + b\dfrac{1}{s^2}$.

$\blacksquare$

2.3.2 Transformada de Laplace de Derivadas.

Para resolvermos problemas de valores iniciais usando Transformadas de Laplace, além da linearidade, precisamos saber calcular transformadas de derivadas. Deduziremos a fórmula geral partindo da transformada da deriva primeira de $f(x)$. Já sabemos pelo corolário 2.1 que se $f(x)$ é admissível, então, $f'(x)$ também é admissível $f(x)$. Segue direto da definição de tansformada de Laplace 2.1:

$$\pounds\{f'(x)\} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} f'(x)dx,$$

integrando por partes, chamaremos $u = e^{-sx} \Rightarrow du = -se^{-sx}dx$; $dv = f'(x)dx \Rightarrow v = f(x)$, e colocando a integral na forma $\int_0^{+\infty} udv$, temos:

$$\pounds\{f'(x)\} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} f'(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-sx} f'(x)dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(e^{-sx} f(x)\Big|_0^b + \int\limits_0^b f(x)se^{-sx}dx \right)$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(e^{-sb}.f(b) - e^0 f(0) + s\int\limits_0^b f(x)e^{-sx}dx \right).$$

Como $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-sb} = 0$ e $|f(b)| \leq Me^{kx}$ com $M, k > 0$, então $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-sb} f(b) = 0$.
Logo,

$$\pounds\{f'(x)\} = s\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx - f(0). \tag{2.9}$$

Supomos que $f(x)$ seja diferenciável duas vezes e temos mais uma vez pelo corolário 2.1 que $f''(x)$ é admissível, pois esta é a derivada de $f'(x)$ que é função admissível. Para obter a transformada da derivada segunda,vamos aplicar a regra da derivada primeira.
Chamando $f'(x) = g(x) \Rightarrow f''(x) = g'(x)$, temos
$\pounds\{f''(x)\} = \pounds\{g'(x)\}$, como $g'(x)$ é função admissível,
$\pounds\{g'(x)\} = s\left[\pounds\{g(x)\} - g(0)\right].$
Voltando à função original $f(x)$
$\pounds\{f''(x)\} = s\left[\pounds\{f'(x)\} - f'(0)\right] = s\left[s\pounds\{f(x)\} - f(0)\right] - f'(0)$

Portanto,

$$\pounds\{f''(x)\} = s^2\pounds\{f(x)\} - sf(0) - f'(0) \tag{2.10}$$

Analogamente

$$\pounds\{f(x)'''\} = s^3\pounds\{f(x)\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0), \tag{2.11}$$

e por indução chega-se a fórmula geral

$$\pounds\{f^{(n)}(x)\} = s^n\pounds\{f(x)\} - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0) \tag{2.12}$$

Teorema 2.4 (Transformada de Derivadas.) *Se $f', f'', f''', ..., f^{(n-1)}$ forem contínuas em $[0, +\infty)$ e de ordem exponencial, e se $f^{(n)}$ for contínua por partes em $[0, +\infty)$, então*

$$\pounds\{f^{(n)}(x)\} = s^n\pounds\{f(x)\} - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0).$$

2.4 Tabela de transformadas

A tabela a seguir será constitúida de Transformadas de Laplace de algumas funções selecionadas. As demonstrações das transformadas das funções da tabela, seguem essencialmente da definição 2.1 .

Função	Transformadas
(a) k	$\frac{k}{s}$
(b) x	$\frac{1}{s^2}$
(c) x^n	$\frac{n!}{s^n+1}$
(d) e^{kx}	$\frac{1}{s-k}, s>k$
(e) $e^{kx}\text{sen}\, wx$	$\frac{w}{(s-k)^2+w^2}, s>k$
(f) $e^{kx}\cos wx$	$\frac{s-k}{(s-k)^2+w^2}, s>k$
(g) $e^{kx}\text{sen}\, hwx$	$\frac{w}{(s-k)^2-w^2}, s>k$
(h) $e^{kx}\cos hwx$	$\frac{s-k}{(s-k)^2-w^2}, s>k$
(i) $e^{kx}\left[A\cos wx + \frac{Ak+B}{w}\text{sen}\, wx\right]$	$\frac{As+B}{(s-k)^2+w^2}, s>k$
(j) $e^{kx}\left[A\cosh wx + \frac{Ak+B}{w}\sinh wx\right]$	$\frac{As+B}{(s-k)^2-w^2}, s>k$
(k) $x^n e^{kx}$	$\frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$, $s>k$
(l) $\frac{x^{n-1}e^{kx}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-k)^n}$, $n\geq 1, s>k$
(m) $f'(x)$	$s\pounds\{f(x)\}-f(0)$
(n) $f''(x)$	$s^2\pounds\{f(x)\}-sf(0)-f'(0)$
(o) $e^{kx}f(x)$	$F(s-k)$
(p) $f(kx)$	$\frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right)$
(q) $\int_a^\tau f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)-\frac{1}{s}\int_0^a f(\tau)d\tau$
(r) $x^n f(x)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}(F(s))$

Tabela 2.1: Tabela das principais transformadas.

(a) $\pounds\{k\} = \frac{k}{s}.$

Demonstração: $\pounds\{k\} = \int_0^{+\infty} ke^{-sx}dx$, pela propriedade de linearidade

$$= k\int_0^{+\infty} e^{-sx}dx = \lim_{b\to+\infty} k\int_0^b ke^{-sx}dx = \lim_{b\to+\infty} k\frac{e^{-sx}}{-s}\bigg|_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} k\left(\frac{e^{-s.b}}{-s}-\frac{e^{-s.0}}{-s}\right) = \frac{k}{s}, \quad s>0. \qquad \blacksquare$$

(b) $\pounds\{x\} = \frac{1}{s^2}$.

Demonstração: $\pounds\{x\} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}xdx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} e^{-sx}xdx$

Resolvendo $\int\limits_0^{b} e^{-sx}xdx$ por integração por partes, chamaremos $u = x \Rightarrow du = dx$ e $dv = e^{-sx}dx \Rightarrow v = \dfrac{e^{-sx}}{-s}$, daí

$x.\dfrac{e^{-sx}}{-s}\Big|_0^b - \int\limits_0^b \dfrac{e^{-sx}}{-s}dx = \left(b.\dfrac{e^{-sb}}{-s}\right) - 0.\left(\dfrac{e^{-s.0}}{-s}\right) + \dfrac{1}{s}.\left(\dfrac{e^{-sx}}{-s}\Big|_0^b\right) =$

Tomando o limite

$= \lim\limits_{b\to+\infty}\left(b.\dfrac{e^{-sb}}{-s}\right) + \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\dfrac{1}{s}.\dfrac{e^{-sb}}{-s} - \dfrac{1}{s}.\dfrac{e^{-s.0}}{-s}\right)$

Como b é função de ordem exponencial e $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-sb} = 0$ então, $\lim\limits_{b\to+\infty} b\dfrac{e^{-sb}}{-s} = 0$, logo

$\pounds\{x\} = \dfrac{1}{s^2}, s > k.$ ■

(c) $\pounds\{x^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$.

Demonstração: $\pounds\{x^n\} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}x^ndx = -\dfrac{1}{s}e^{-st}t^n\Big|_0^{+\infty} + \dfrac{n}{s}\int\limits_0^{+\infty} e^{-st}t^{n-1}dt =$

$$= \frac{n}{s}\int\limits_0^{+\infty} e^{-st}t^{n-1}dt$$

ou seja, pela definição 1.1

$\pounds\{x^n\} = \dfrac{n}{s}\pounds\{x^{n-1}\}, \qquad n = 1, 2, 3...$

Temos , $\pounds\{1\} = 1/s$, assim, por interação, temos:

$\pounds\{x\} = \dfrac{1}{s}\pounds\{1\} = \dfrac{2}{s^2}$

$\pounds\{x^2\} = \dfrac{2}{s}\pounds\{t\} = \dfrac{2}{s}\left(\dfrac{1}{s^2}\right) = \dfrac{2!}{s^3}$

$\pounds\{x^3\} = \dfrac{3}{s}\pounds\{t^2\} = \dfrac{3}{s}\left(\dfrac{1}{s^3}\right) = \dfrac{3!}{s^4}$

Podemos concluir ,a partir desses resultados a fórmula geral:

$$\pounds\{x^n\} = \frac{n}{s}\pounds\{x^{n-1}\} = \frac{n}{s}\left[\frac{(n-1)!}{s^n}\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

■

(d) $\pounds\{e^{kx}\} = \dfrac{1}{s-k}$.

Demonstração: $\pounds\{e^{kx}\} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}.e^{kx}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} e^{(-s-k)x}dx$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{e^{-}(s-k)x_0 - 1}{-(s-k)} = \frac{1}{s-k}, \text{ se } s > k. \qquad \blacksquare$$

(e) $\pounds\{e^{kx}\sin wx\} = \dfrac{w}{(s-k)^2+w^2}, \qquad s > k.$

Demonstração: $\pounds\{e^{kx}\sin wx\} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}e^{kx}\sin wxdx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} e^{-(s-k)x}\sin wxdx$

Vamos resolver a integral

$$\int_0^b e^{-(s-k)x}\sin wxdx \tag{2.13}$$

utilizando o método integral por partes. Chamaremos $u = \sin wx \Rightarrow du = w\cos wxdx$ e $dv = e^{-(s-k)x} \Rightarrow v = -\frac{e^{-(s-k)x}}{s-k}$. Escrevendo (2.13) na forma $\int udv$, temos

$$\int_0^b e^{-(s-k)x}\sin wxdx = -\text{sen}\, wx\frac{e^{-(s-k)x}}{(s-k)}\Bigg|_0^b + \int_0^b \frac{e^{-(s-k)x}}{(s-k)}w\cos wxdx=$$

$$= -\text{sen}\, wx\frac{e^{-(s-k)x}}{(s-k)}\Bigg|_0^b + \frac{w}{s-k}\int_0^b e^{-(s-k)x}\cos wxdx \tag{2.14}$$

Aplicaremos mais uma vez o método de integral por partes, porém na integral

$$\int_0^b e^{-(s-k)x}\cos wxdx. \tag{2.15}$$

Chamaremos de $u = \cos wx \Rightarrow du = -w\sin wxdx$ e $dv = e^{-(s-k)x}dx \Rightarrow v = -\dfrac{e^{-(s-k)x}}{s-k}$ então,

$\int\limits_0^b e^{-(s-k)x}\cos wxdx = -\cos wx\dfrac{e^{-(s-k)x}}{s-k}\Bigg|_0^b - \int\limits_0^b \dfrac{e^{-(s-k)}x}{s-k}w\sin wxdx$. Substituindo os valores encontrados (2.14) e (2.15) em (2.13), fica:

$$\int_0^b e^{-(s-k)x}\sin wxdx =$$

$$= -\sin wx\frac{e^{-(s-k)x}}{-(s-k)}\Bigg|_0^b + \frac{w}{s-k}\left(-\cos wx\frac{e^{-(s-k)x}}{s-k}\Bigg|_0^b - \int_0^b \frac{e^{-(s-k)}x}{s-k}w\sin wxdx\right)$$

$$= -\sin wx\frac{e^{-(s-k)x}}{-(s-k)}\Bigg|_0^b - \frac{w}{(s-k)^2}\cos wxe^{-(s-k)x}\Bigg|_0^b - \frac{w^2}{(s-k)^2}\int_0^b e^{-(s-k)x}\sin wxdx.$$

Vamos fazer as contas para explicitarmos a integral (2.13) no primeiro membro da igualdade acima:

$$\int_0^b e^{-(s-k)x}\sin wx dx\left(1+\frac{w^2}{(s-k)^2}\right) = -\sin wx\frac{e^{-(s-k)x}}{(s-k)}\Bigg|_0^b - \frac{w}{(s-k)^2}\cos wx e^{-(s-k)x}\Bigg|_0^b$$

$$= \frac{(s-k)^2}{(s-k)^2+w^2}\left(-\text{sen}\, wb\frac{e^{-(s-k)b}}{(s-k)} + \sin 0\frac{e^0}{(s-k)} - \frac{w}{(s-k)^2}\cos wb e^{-(s-k)b} + \frac{w}{(s-k)^2}\cos 0 e^0\right)$$

Chamaremos $\frac{(s-k)^2}{(s-k)^2+w^2}$ de C para facilitar as contas e tomaremos limite na igualdade acima, ficando:

$$\int_0^{+\infty} e^{-(s-k)x}\sin wx dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} C\left(-\sin wb\frac{e^{-(s-k)b}}{(s-k)} + \sin 0\frac{e^0}{(s-k)} - \frac{w}{(s-k)^2}\cos wb e^{-(s-k)b} + \frac{w}{(s-k)^2}\cos 0 e^0\right)$$

Como seno e cosseno são funções limitadas e $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-(s-k)b} = 0$, pois $s > k$,

$$\lim_{b\to+\infty} -\sin wb\frac{e^{-(s-k)b}}{(s-k)} = 0 \text{ e } \lim_{b\to+\infty}\frac{w}{(s-k)^2}\cos wb e^{-(s-k)b} = 0$$

Então,

$$\int_0^{+\infty} e^{-(s-k)x}\sin wx dx = C\frac{w}{(s-k)^2} = \frac{(s-k)^2}{(s-k)^2+w^2}\frac{w}{(s-k)^2}$$

Portanto,

$$\pounds\{e^{kx}\sin wx\} = \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)x}\sin wx dx = \frac{w}{(s-k)^2+w^2}, s > k. \qquad \blacksquare$$

(f) $\pounds\{e^{kx}\cos wx\} = \frac{s-k}{(s-k)^2+w^2}$.

Demonstração: Algumas integrais que aparecerão nesta demonstração foram feitas na demonstração (e), logo vamos ser mais diretos colocando apenas os resultados das mesmas quando surgirem.

$$\pounds\{e^{kx}\cos wx\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx}e^{kx}\cos wx dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-(s-k)x}\cos wx dx$$

Temos

$$\int_0^b e^{-(s-k)x}\cos wx dx = -\cos wx\frac{e^{-(s-k)x}}{s-k}\Bigg|_0^b - \frac{w}{(s-k)}\int_0^b e^{-(s-k)x}\text{sen}\, wx dx =$$

$$= -\cos wx\frac{e^{-(s-k)x}}{s-k}\Bigg|_0^b - \frac{w}{(s-k)}\left(\frac{(s-k)^2}{(s-k)^2+w^2}.\frac{w}{(s-k)^2}\right) =$$

$$= -\cos b.\frac{e^{(s-k)b}}{(s-k)} + \cos 0\frac{e^0}{(s-k)} - \frac{w^2}{(s-k)[(s-k)^2+w^2]} =$$

$$= \frac{1}{(s-k)} - \frac{w^2}{(s-k)[(s-k)^2+w^2]} =$$
$$= \frac{(s-k)[(s-k)^2+w^2] - w^2(s-k)}{(s-k)^2[(s-k)^2+w^2]} =$$
$$= \frac{(s-k)^3 + (s-k)w^2 - w^2(s-k)}{(s-k)^4 + (s-k)^2 w^2} =$$
$$= \frac{(s-k)^2}{(s-k)^2}\frac{s-k}{(s-k)^2+w^2} =$$
$$= \frac{s-k}{(s-k)^2+w^2}, s > k$$

Portanto,

$$\pounds\{e^{kx}\cos wx\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx}e^{kx}\cos wx dx = \frac{s-k}{(s-k)^2+w^2}, s > k.$$

■

(g) $\pounds\{e^{kx}\sinh wx\} = \frac{w}{(s-k)^2-w^2}, \qquad s > k.$

Demonstração: A função seno hiperbólico é definida por: $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Utilizaremos (d) da tabela 2.1 $\pounds\{e^{kx}\} = \frac{1}{s-k}$ para realizarmos a demonstração.

$\pounds\{e^{kx}\sinh wx\} = \pounds\left\{e^{kx}\left(\dfrac{e^{wx}-e^{-wx}}{2}\right)\right\} = \pounds\left\{\dfrac{e^{(k+w)x}-e^{(k-w)x}}{2}\right\}$, usando (2.8)

$$= \frac{1}{2}\left(\pounds\{e^{(k+w)x}\} - \pounds\{e^{(k-w)x}\}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-(k+w)} - \frac{1}{s-(k-w)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{s-k+w-(s-k-w)}{(s-(k+w))(s-(k-w))}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2w}{(s-k-w)(s-k+w)}\right)$$
$$= \frac{w}{s^2-2ks-w^2+k^2} = \frac{w}{(s-k)^2-w^2}$$

portanto,

$$\pounds\{e^{kx}\sinh wx\} = \frac{w}{(s-k)^2-w^2}, \qquad \text{para todo } s > k.$$

■

(h) $\pounds\{e^{kx}\cosh wx\} = \dfrac{s-k}{(s-k)^2-w^2}, \qquad s > k.$

Demonstração:

A função cosseno hiperbólico é definida por : $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-t}}{2}$.
Utilizaremos (d), $\pounds\{e^{kx}\} = \frac{1}{s-k}$, para realizarmos a demonstração.

$$\pounds\{e^{kx}\cosh wx\} = \pounds\left\{e^{kx}\left(\frac{e^{wx}+e^{-wx}}{2}\right)\right\} = \pounds\left\{\frac{e^{(k+w)x}+e^{(k-w)x}}{2}\right\} =$$

Usando (2.8)

$£\left\{e^{kx}\left(\dfrac{e^{wx}+e^{-wx}}{2}\right)\right\} = \dfrac{1}{2}\left(£\{e^{(k+w)x}\}+£\{e^{(k-w)x}\}\right) =$
$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-(k+w)}+\dfrac{1}{s-(k-w)}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{s-k+w+(s-k-w)}{(s-(k+w))(s-(k-w))}\right) =$
$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2s-2k}{(s-k-w)(s-k+w)}\right) = \dfrac{s-k}{s^2-2ks-w^2+k^2} = \dfrac{s-k}{(s-k)^2-w^2}$
portanto,
$£\{e^{kx}\cosh wx\} = \dfrac{s-k}{(s-k)^2-w^2}, \qquad$ para todo $s > k$

■

(i) $£\{e^{kx}\left[A\cos wx + \frac{Ak+B}{w}\sin wx\right]\} = \frac{As+B}{(s-k)^2+w^2}, \qquad s > k.$

Demonstração: Usaremos nesta demonstração propriedade de linearidade e as transformadas das funções (e),(f) da tabela.
$£\{e^{kx}\left[A\cos wx + \dfrac{Ak+B}{w}\sin wx\right]\} = A£\{e^{x}\cos wx\} + \dfrac{Ak+B}{w}£\{e^{kx}\sin wx\}=$
$= A\left(\dfrac{s-k}{(s-k)^2+w^2}\right) + \dfrac{As+B}{w}\left(\dfrac{w}{(s-k)^2+w^2}\right) =$
$= \dfrac{As-Ak+Ak+B}{(s-k)^2+w^2} = \dfrac{As+B}{(s-k)^2+w^2}, s > k.$ ■

(j) $£\left\{e^{kx}\left[A\cosh wx + \dfrac{Ak+B}{w}\text{sen}\, hwx\right]\right\} = \dfrac{As+B}{(s-k)^2-w^2} \qquad s > k.$
Demonstração: Usaremos nesta demonstração propriedade de linearidade e as transformadas das funções (g),(h) da tabela.
$£\{e^{kx}\left[A\cosh wx + \dfrac{Ak+B}{w}\text{sen}\, hwx\}\right] = A£\{e^{kx}\cosh wx\} + \dfrac{Ak+B}{w}£\{e^{kx}\sinh wx\} =$
$= A\left(\dfrac{s-k}{(s-k)^2-w^2}\right) + \dfrac{Ak+B}{w}\left(\dfrac{w}{(s-k)^2-w^2}\right) =$
$= \dfrac{As-Ak+Ak+B}{(s-k)^2-w^2} = \dfrac{As+B}{(s-k)^2-w^2}, s > k.$

■

(k) $£\{x^n e^{kx}\} = \frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$

Demonstração: Como $f(x) = x^n e^{kx}$, então usando regra do produto para derivadas e propriedade de linearidade, obtemos $£\{(x^n e^{kx})'\} = £\{nx^{n-1}e^{kx} + kx^n e^{kx}\} = n£\{x^{n-1}e^{kx}\} + k£\{x^n e^{kx}\}$. Porém, pelo teorema de transformada de Laplace de derivadas, 2.4, temos $£\{x^n e^{kx}\} = s£\{x^n e^{kx}\}$. Logo,
$n£\{x^{n-1}e^{kx}\} + k£\{x^n e^{kx}\} = s£\{x^n e^{kx}\}$, portanto chegamos a seguinte fórmula:

$$\pounds\{x^n e^{kx}\} = \frac{n}{s-k}\pounds\{x^{n-1}e^{kx}\} \tag{2.16}$$

Aplicando a fórmula (2.16) sucessivamente, obtemos

$$\pounds\{x^n e^{kx}\} = \frac{n!}{(s-k)^{n+1}}, \quad s > k. \tag{2.17}$$

■

(l) $\pounds\left\{\dfrac{x^{n-1e^{kx}}}{(n-1)!}\right\} = \dfrac{1}{(s-k)^n}.$

Demonstração: Temos $f(x) = \frac{x^{n-1e^{kx}}}{(n-1)!}$, então usando regra do produto para derivadas e propriedade de linearidade, obtemos

$\frac{1}{(n-1)!}\pounds\{(x^{n-1}e^{kx})'\} = \frac{1}{(n-1)!}\pounds\{(n-1)x^{n-2}e^{kx}\} + k\pounds\left\{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{kx}\right\}.$

Temos ainda, pelo teorema 2.4

$\pounds\left\{(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{kx})'\right\} = s\pounds\left\{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{kx}\right\}$. Logo,

$\frac{1}{(n-1)!}\pounds\{n-1x^{n-2}e^{kx}\} + k\pounds\left\{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{kx}\right\} = s\pounds\left\{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{kx}\right\}.$

Explicitando $\pounds\left\{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{kx}\right\}$ na equação acima, obtemos

$$\pounds\left\{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{kx}\right\} = \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{s-k}\pounds\{(n-1)x^{n-2}e^{kx}\} \tag{2.18}$$

Aplicando (2.17), temos $\pounds\{(n-1)x^{n-2}e^{kx}\} = (n-1)\left(\frac{(n-2)!}{(s-k)^{n-1}}\right)$, e então,

$\pounds\left\{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{kx}\right\} = \frac{1}{(n-1)(n-2)!}\frac{n-1}{s-k}\left(\frac{(n-2)!}{(s-k)^{n-1}}\right) = \frac{1}{s-k}\frac{s-k}{(s-k)^n}.$

Logo, chegamos a resposta

$$\pounds\left\{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{kx}\right\} = \frac{1}{(s-k)^n}. \tag{2.19}$$

■

(m) $\pounds\{f'(x)\} = sF(s) - f(0).$

Demonstração: Segue direto da definição de transformada de Laplace que $\pounds\{f'(x)\} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx}f'(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-sx}f'(x)dx =.$

Vamos resolver por integração por partes. Chamaremos $u = e^{-sx} \Rightarrow du = -se^{-sx}dx$; $dv = f'(x)dx \Rightarrow v = f(x)$.

Colocando a integral na forma $\int_0^{+\infty} udv$, então,

$$\pounds\{f'(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx}f'(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-sx}f'(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\left(e^{-sx}f(x)\Big|_0^b + \int_0^b f(x)se^{-sx}dx\right)$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(e^{-sb}.f(b) - e^{0}f(0) + s\int_{0}^{b} f(x)e^{-sx}dx\right).$$

Como $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-sb} = 0$ e $|f(b)| \leq Me^{kx}$ com $M, k > 0$, então $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-sb}f(b) = 0$

Logo,

$$\pounds\{f'(x)\} = s\int_{0}^{+\infty} e^{-sx}f(x)dx - f(0).$$

■

(n) $\pounds\{f''(x)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$

Demonstração:

Utilizaremos a transformada (m) da tabela.

Chamando $f'(x) = g(x) \Rightarrow f''(x) = g'(x)$, temos

$\pounds\{f''(x)\} = \pounds\{g'(x)\}$, como g'(x) é função admissível,

$\pounds\{g'(x)\} = s\left[\pounds\{g(x)\} - g(0)\right]$

Voltando à função original $f(x)$

$\pounds\{f''(x)\} = s\left[\pounds\{f'(x)\} - f'(0)\right] = s\left[s\pounds\{f(x)\} - f(0)\right] - f'(0)$

$\pounds\{f''(x)\} = s^2\pounds\{f(x)\} - sf(0) - f'(0).$

■

(o) $\pounds\{e^{kx}f(x)\} = F(s-k).$

Demonstração:

$$\pounds\{e^{kx}f(x)\} = \int_{0}^{+\infty} e^{-sx}e^{kx}f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-(s-k)x}f(x)dx = F(s-k).$$ ■

(p) $\pounds\{f(kx)\} = \frac{1}{s}F\left(\frac{s}{k}\right).$

Demonstração: $\pounds\{f(kx)\} = \int_{0}^{+\infty} e^{-sx}f(kx)dx$. Assumindo $\lambda = kx \Rightarrow x = \dfrac{\lambda}{k}$ e $dx = \dfrac{d\lambda}{k}$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-s\left(\frac{\lambda}{k}\right)}f(\lambda)\frac{d\lambda}{k}, \qquad \text{pela propriedade da linearidade}$$

$$= \frac{1}{k}\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda\left(\frac{s}{k}\right)}f(\lambda)d\lambda = \frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right).$$

■

(q) $\pounds\left\{\int\limits_a^x f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s) - \frac{1}{s}\int\limits_0^a f(\tau)d\tau.$

Demonstração: Pela definição 2.1, segue $\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_a^x f(\tau)d\tau e^{-sx}dx$. Chamaremos $\int\limits_a^x f(\tau)d\tau e^{-sx}dx$ de $g(x)$, então teremos $\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_a^x f(\tau)d\tau e^{-sx}dx = \int\limits_0^x g(x)e^{-sx}dx$. Resolveremos a integral $\int\limits_0^{+\infty} g(x)e^{-sx}dx$ utilizando integração por partes. Chamaremos $u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)dx$ e $dv = e^{-sx}dx \Rightarrow v = -\frac{e^{-sx}}{s}$. Colocando a integral na forma $\int udv$, teremos:

$$\int\limits_0^{+\infty} g(x)e^{-sx}dx = -g(x)\frac{e^{-sx}}{s}\bigg|_0^b + \int\limits_0^b \frac{e^-sx}{s}g'(x)dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -g(b)\frac{e^{-sb}}{s} + g(0)\frac{e^0}{s} + \frac{1}{s}\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}g'(x)dx.$$

Como $g(b)$ é função admíssivel e $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{e^{-sb}}{s} = 0$, então, o limite do produto dessas funções é igual a zero, $\lim\limits_{b\to+\infty} g(b)\frac{e^{-sb}}{s} = 0$, ficando a integra na forma $\int\limits_0^{+\infty} g(x)e^{-sx}dx = \frac{1}{s}g(0) + \frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}\int\limits_a^0 f(\tau)d\tau + \frac{1}{s}F(s)$, e utilizando propriedade de integrais, chegamos ao resultado:

$$\pounds\left\{\int\limits_a^x f(\tau)d\tau\right\} = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_a^x f(\tau)d\tau e^{-sx}dx = \frac{1}{s}F(s) - \frac{1}{s}\int\limits_0^a f(\tau)d\tau.$$

■

(r) $\pounds\{\ x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(F(s)).$

Temos,

$$F(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx}f(x)dx \tag{2.20}$$

derivando a equação (2.20) e utilizando regra de Leibiniz, obteremos:

$$\frac{dF(s)}{ds} = F'(s) = \frac{d}{ds}\int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}[f(x)e^{-sx}]dx = -\int\limits_0^{+\infty} f(x).xe^{-sx}dx =$$

$= -\int\limits_0^{+\infty}[xf(x)]e^{-sx}dx = -\pounds\{xf(x)\}$, portanto $\pounds\{xf(x)\} = -F(s)$. O que fizemos foi demonstrar (r) para $n = 1$. Provaremos integralmente por indução matemática.

Faremos como anteriormente para mostrarmos que para n, é verdade.

Suponhamos que (r) é verdadeiro para $n = p$.

$$\int_0^{+\infty} [x^p f(x)]e^{-sx}dx = (-1)^p \frac{d^p}{ds^p}F(s)$$

$$\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} [x^p f(x)]e^{-sx}dx = \frac{d}{ds}\left[(-1)^p \frac{d^p F(s)}{ds^p}\right]$$

$$\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} [x^p f(x)]e^{-sx}dx = (-1)^p \frac{d^{p+1}}{ds^{p+1}}F(s)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}[x^p f(x)e^{-sx}]dx = (-1)^p \frac{d^{p+1}}{ds^{p+1}}F(s)$$

$$-\int_0^{+\infty} f(x)x^p x e^{sx}dx = (-1)^p \frac{d^{p+1}}{ds^{p+1}}F(s)$$

$$-\int_0^{+\infty} [f(x)x^{p+1}]e^{-sx}dx = (-1)^p \frac{d^{p+1}}{ds^{p+1}}F(s)$$

$$\int_0^{+\infty} [f(x)x^{p+1}]e^{-sx}dx = (-1)(-1)^p \frac{d^{p+1}}{ds^{p+1}}F(s)$$

$$\int_0^{+\infty} [f(x)x^{p+1}]e^{-sx}dx = (-1)^p + 1 \frac{d^{p+1}}{ds^{p+1}}F(s)$$

Portanto, mostramos que a fórmula da transformada de (r) também vale para $n = p + 1$.

Podemos concluir que

$$\pounds\{\ x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(F(s))$$

é verdade. ■

Capítulo 3

Transformada inversa e convolução.

3.1 Transformada de Laplace inversa.

Nossos estudos até o capítulo anterior foram para calcularmos a transformada de Laplace de uma determinada função $f(x)$, ou seja, estavamos transformando uma função definida em x, $f(x)$, em uma definida em s, $F(s)$. Agora faremos o inverso, a partir de uma transformada já conhecida $F(s)$, encontraremos a função $f(x)$. Isso siginifica que $f(x)$ é a transformada de Laplace inversa de $F(s)$ e é denotada por:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x). \tag{3.1}$$

Por exemplo, calculamos anteriormente a transformada de Laplace da função linear $\mathcal{L}\{x\} = \dfrac{1}{s^2}$, se $s > 0$, logo, pela transforma inversa de Laplace temos $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\} = x$. Vamos usar a tabela para encontrarmos a transformada de laplace inversa e explicaremos o processo através de exemplos. No teorema 2.2 vimos que quando duas funções admissíveis $f(x)$ e $g(x)$ possuem transformadas de Laplace iguais, $\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{g(x)\}$, essas funções $f(x)$, $g(x)$ são iguais, exceto nos pontos de descontinuidade, então, podemos concluir que a transformada inversa de uma função $F(s)$ pode não ser única.

O teorema a seguir mostra que a transformada de Laplace inversa também é um operador linear.

Teorema 3.1 *Se $F(s) = \pounds\{f(x)\}$ e $G(s) = \pounds\{g(x)\}$, então*

$$\pounds^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = af(x) + bg(x).$$

sendo a e b constantes.

Demonstração: Segue direto das definições de Transformadas de Laplace que

$$\begin{aligned}\pounds^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} &= \pounds^{-1}\left\{\int_0^{+\infty} e^{-sx}(af(x))dx + \int_0^{+\infty} e^{-sx}(bg(x))dx\right\} \\ &= \pounds^{-1}\{\pounds\{af(x)\} + \pounds\{bg(x)\}\} = af(x) + bg(x).\end{aligned}$$ ■

Exemplo 3.1 *Calcule* $\pounds^{-1}\left\{\frac{3}{s} - \frac{5}{s^2}\right\}$.

Solução: $\pounds^{-1}\left\{\frac{3}{s} - \frac{5}{s^2}\right\} = 3\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 5\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = 5.1 - 3.x = 5 - 3x.$ ■

Exemplo 3.2 *Calcule* $\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+49}\right\}$.

Solução: Utilizaremos da parte (e) da tabela 2.1, com $k = 0$, e linearidade para resolvermos. Verificamos que $w^2 = 49 = 7^2$, multiplicando e dividindo por 7, temos
$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+49}\right\} = \frac{1}{7}\pounds^{-1}\left\{\frac{7}{s^2+49}\right\} = \frac{1}{7}\sin 7x.$ ■

3.1.1 Frações parciais

Quando a função que queremos calcular a transformada de laplace inversa estiver da forma

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)},$$

onde $P(s)$ e $Q(s)$ são polinômios com coeficentes reais e o grau de $P(s)$ é menor que o grau de $Q(s)$, usaremos frações parciais para colocarmos $F(s)$ em termos de funções simples nas quais as transformadas encontram-se na tabela.

Revisaremos três tipos básicos de frações parciais, com exemplos.

1º caso: Fatores lineares distintos no denominador.

Devemos realizar a decomposição da seguinte forma:

$$\frac{m(s)}{(s+a_1)(s+a_2)...(s+a_n)} = \frac{A}{s+a_1} + \frac{B}{s+a_2} + ... + \frac{N}{s+a_n} \tag{3.2}$$

para $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq ... \neq a_n$.

Exemplo 3.3 *Calcule a transformada de Laplace inversa de*

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}.$$

Solução: Como o denominador possui somente fatores lineares, pelo 1º caso temos

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4}. \tag{3.3}$$

Multiplicando todos os membros da igualdade pelo produto $(s-1)(s+2)(s+4)$, fica:

$$1 = A(s+2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s+2).$$

Construindo o sistema e resolvendo, podemos calcular os valores das constantes A, B e C, porém, vamos achar os valores das incógnitas substituindo o s da equação acima pelas raízes do denominador $(s-1)(s+2)(s+4)$.

Com $s = 1$

$$1 = A(3)(5) + B(0)(5) + C(0)(2) \Rightarrow A = \frac{1}{15}.$$

Com $s = -2$

$$1 = A.(0)(2) + B(-3)(2) + C(-3)(0) \Rightarrow B = \frac{-1}{6}.$$

Com $s = -4$

$$1 = A(-2)(0) + B(-5)(0) + C(-5)(-2) \Rightarrow C = \frac{1}{10}.$$

Substituindo A, B e C em (3.3), temos

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{\frac{1}{15}}{s-1} - \frac{\frac{1}{6}}{s+2} + \frac{\frac{1}{10}}{s+4}$$

Então podemos escrever $\pounds^{-1}\{F(s)\}$, como

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{15}}{s-1} - \frac{\frac{1}{6}}{s+2} + \frac{\frac{1}{10}}{s+4}\right\}.$$

e utilizando propriedade de linearidade, obtemos

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\} = \frac{1}{15}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{6}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{1}{10}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

e pela parte (d) da tabela de transformadas 2.1

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\} = \frac{1}{15}e^{x} - \frac{1}{6}e^{-2x} + \frac{1}{10}e^{-4x}.$$

$\blacksquare$

2º caso: Fatores lineares repetidos no denominador.

Neste caso, a cada fator linear da forma $s + a_1$ que aparecer n vezes no denominador, teremos uma soma de n frações parciais da forma:

$$\frac{m(s)}{(s+a_1)(s+a_1)...(s+a_1)} = \frac{A_1}{s+a_1} + \frac{A_2}{(s+a_1)^2} + ... + \frac{A_n}{(s+a_1)^n}.$$

Exemplo 3.4 *Calcule a Transformada de Laplace inversa de*

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}.$$

Pelo 2º caso de frações parciais, temos,

$$\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)} = \frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}. \tag{3.4}$$

Multiplicando todos os membros da igualdade pelo produto $s(s+2)^2$ fica,

$$\begin{aligned} s+1 &= A(s+2)^2 + Bs(s+2) + Cs \\ &= A(s^2+4s+4) + B(s^2+2s) + Cs = \\ &= s^2(A+B) + s(4A+2B+C) + 4A. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes das potências de s em ambos os lados da igualdade, temos o sistema:

$$\begin{cases} (A+B) = 0 \\ (4A+2B+C) = 1 \\ 4A = 1 \end{cases}$$

Encontrando as constantes A, B e C:

$4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$.

$A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow B = \frac{-1}{4}$.

$4A + 2B + C = 1 \Rightarrow 4\frac{1}{4} + 2(\frac{-1}{4}) + C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$.

Sustituindo A, B e C em (3.4) obtemos,

$$\frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{s} + \frac{\frac{1}{4}}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2}.$$

Então podemos escrever $\pounds^{-1}\{F(s)\}$, como

$\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{s} + \frac{\frac{1}{4}}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2}\right\}.$

e utilizando propriedade de linearidade, fica

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{s}\right\} + \pounds^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{s+2}\right\} + \pounds^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2}\right\}$$

Logo por (a), (d) e (k) da tabela 2.1 o resultado é

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2x} + xe^{-2x}. \qquad \blacksquare$$

3º caso: Fatores lineares repetidos e um fator quadrático.

Neste último caso, temos, a cada fator linear da forma $s + a_1$ que aparecer k vezes no denominador, uma soma de k frações parciais decompostas iguais ao caso 2, e ao fator quadrático irredutível que também aparece no denominador, temos uma fração parcial correspondente, da forma $\frac{Cs+D}{s^2+a^2}$. Logo, no caso 3, devemos realizar a decomposição da seguinte forma:

$$\frac{m(s)}{(s+a_1)^k(s^2+a_2)} = \frac{A}{s+a_1} + \frac{B}{(s+a_1)^2} + ... + \frac{K}{(s+a_1)^k} + \frac{Cs+D}{s^2+a_2} \tag{3.5}$$

Exemplo 3.5 *Calcule a transformada de Laplace inversa de*

$$F(s) = \frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}.$$

Solução: Pelo 3º caso temos,

$$\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4}. \tag{3.6}$$

Multiplicando todos os membros da igualdade pelo produto $s^3(s^2+4)$, temos

$$\begin{aligned} 3s-2 &= As^2(s^2+4) + Bs(s^2+4) + C(s^2+4) + (Ds+E)s^3 = \\ &= A(s^4+4s^2) + B(s^3+4s) + C(s^2+4) + Ds^4 + Es^3 = \\ &= s^4(A+D) + s^3(B+E) + s^2(C+4A) + s(4B) + 4C. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes das potências de s em ambos os lados da igualdade, temos o sistema:

$$\begin{cases} (A+D) = 0 \\ (B+E) = 0 \\ 4A + C = 0 \\ 4B = 3 \\ 4C = -2 \end{cases}$$

Encontrando as constrantes A, B, C, D e E :

$4C = -2 \Rightarrow C = \frac{-1}{2}$.

$4B = 3 \Rightarrow B = \frac{3}{4}$.

$4A + C = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{8}$.

$B + E = 0 \Rightarrow E = \frac{-3}{4}$.

$A + D = 0 \Rightarrow D = \frac{-1}{8}$.

Substituindo A, B, C, D e E em (3.6), obtemos

$$\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)} = \frac{\frac{1}{8}}{s} + \frac{\frac{3}{4}}{s^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{s^3} + \frac{-\frac{1}{8}s - \frac{3}{4}}{s^2+4}.$$

Então podemos escrever $\pounds^{-1}\{F(s)\}$ como:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^3(s^2+4)}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{8}}{s} + \frac{\frac{3}{4}}{s^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{s^3} + \frac{-\frac{1}{8}s - \frac{3}{4}}{s^2+4}\right\}$$

e utilizando propriedadede linearidade, fica:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^3(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{8}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} - \frac{1}{8}\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{3}{8}\pounds^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}.$$

Logo, por (a); (b);(k); (f) com $k = 0, w^2 = 4$, e (e) da tabela 2.1, o resultado é:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^3(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{8} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{3}{8}\sin 2x.$$

■

3.2 Produto Convolução.

Definição 3.1 *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas por partes em $[0, +\infty)$, então o produto convolução de $f(x)$ e $g(x)$, denotado por $f * g$, é dada pela integral*

$$f * g = \int_0^x f(\beta)g(x-\beta)d\beta.$$

Exemplo 3.6 *Calcule o produto convolução de $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sin x$.*

Solução: Segue direto da definição de produto convolução 3.1 que:

$e^x * \sin x = \int_0^x e^\beta \sin(x-\beta)d\beta$. Vamos calcular a integral por integração por partes. Chamaremos $u = e^\beta \Rightarrow d\beta = -du$ e $dv = \int_0^x \sin(x-\beta)d\beta \Rightarrow v = \cos(x-\beta)$. Escrevendo a integral na forma $\int udv$:

$$\int_0^x e^\beta \sin(x-\beta)d\beta = e^\beta \cos(x-\beta)\Big|_0^x - \int_0^x \cos(x-\beta)e^\beta d\beta. \tag{3.7}$$

Aplicaremos mais uma vez integração por partes, porém, agora em $\int_0^x \cos(x-\beta)e^\beta d\beta$. Novamente, chamaremos $u = e^\beta \Rightarrow du = e^\beta d\beta$, porém, temos agora $dv = \cos(x-\beta) \Rightarrow v = \sin x - \beta$. Logo a equação fica na forma:

$$\int_0^x \cos(x-\beta)e^\beta d\beta = -e^\beta \sin(x-\beta) + \int_0^x \sin(x-\beta)e^\beta d\beta. \tag{3.8}$$

Substituindo (3.8) em (3.7), obtemos:
$\int_0^x e^\beta \sin(x-\beta)d\beta = e^\beta \cos(x-\beta)\Big|_0^x + e^\beta \sin(x-\beta) - \int_0^x \sin(x-\beta)e^\beta d\beta$. Explicitando $\int_0^x e^\beta \sin(x-\beta)d\beta$ na equação:
$\int_0^x e^\beta \sin(x-\beta)d\beta = \frac{1}{2}\big(e^x \cos(0) - e^0 \cos(0) + e^x \sin(0) - e^0 \sin(x)\big)$, logo
$\int_0^x e^\beta \sin(x-\beta)d\beta = \frac{1}{2}\left(e^x - \cos x - \sin x\right).$

Portanto, $e^x * \sin x = \int_0^x e^\beta \sin(x-\beta)d\beta = \frac{1}{2}\left(e^x - \cos x - \sin x\right).$ ■

Propriedade O produto convolução de duas funções é comutativo,isto é

$$f * g = \int_0^x f(\beta)g(x-\beta)d\beta = \int_0^x f(x-\beta)g(\beta)d\beta = g * f.$$

Demonstração: $f * g = \int_0^x f(\beta)g(x-\beta)$.

Fazendo mudança de variável, chamaremos $x - \beta = u \Rightarrow \beta = x - u$ e $du = -d\beta$ além disso $\beta = 0 \Rightarrow u = x$ e $\beta = x \Rightarrow u = 0$

$$f * g = -\int_x^0 f(x-u)g(u)du = \int_0^x f(x-u)g(u)du$$

Como temos um produto de funções usuais, temos o resultado

$$f * g = \int_0^x f(x-u)g(u)du = g * f.$$

■

Teorema 3.2 (Teorema de Convolução.) *Sejam* $f(x)$ *e* $g(x)$ *funções contínuas por partes em* $[0, +\infty)$ *e de ordem exponencial; então,*

$$\pounds\{f * g\} = H(s) = F(s)G(s) = \pounds\{h(x)\},$$

onde

$$h(x) = \int_0^x f(x-\beta)g(\beta)d\beta = \int_0^x f(\beta)g(x-\beta)d\beta.$$

Demonstração: Seja $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau = \pounds\{f(x)\}$ e $G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s\beta} g(\beta)d\beta = \pounds\{g(x)\}$. Então

$$F(s)G(s) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-s\beta} g(\beta)d\beta\right) =$$

e como o integrando de $F(s)$ não depende da variável de integração de $G(s)$, podemos escrever $F(s)G(s)$ como integral iterada,

$$= \int_0^{+\infty} e^{-s\beta} g(\beta)\left[\int_0^{+\infty} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau\right] d\beta =$$

$$= \int_0^{+\infty} g(\beta)\left[\int_0^{+\infty} e^{-s(\tau+\beta)} f(\tau)d\tau\right] d\beta. \tag{3.9}$$

Fazendo $\tau = x - \beta$, para β fixo, $dx = d\tau$. Além disso, $\tau = 0 \Rightarrow x = \beta$ e $\tau \to +\infty \Rightarrow x \to +\infty$; temos que

$$= \int_0^{+\infty} g(\beta)\left[\int_\beta^{+\infty} e^{-sx} f(x-\beta)dx\right] d\beta. \tag{3.10}$$

Supondo que podemos inverter o limite de integração, obtemos

$$F(s)G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\left[\int_0^x f(x-\beta)g(\beta)d\beta\right] dx = \int_0^{+\infty} e^{-sx}h(x)dx = \pounds\{h(x)\}.$$ ■

3.2.1 Forma inversa do Teorema de Convolução.

Pelo teorema 3.2 temos:

$$£^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g, \tag{3.11}$$

Com $F(s) = £\{f(x)\}$ e $G(s) = £\{g(x)\}$.

Exemplo 3.7 *Calcule* $£^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}.\frac{1}{s^2+1}\right\}$.

Talvez, antes de termos feito o estudo de convolução, poderiamos até pensar em resolver o exemplo da seguinte forma: imaginando que a transformada de Laplace inversa do produto de duas funções fosse igual ao produto das transformadas inversas de Laplade destas duas funções, ou seja,

$$£^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}.\frac{1}{s^2+1}\right\} = £^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}£^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \cos x.\sin x, \tag{3.12}$$

porém isto não é verdade e é fácil de verificarmos. Pela parte (e) da tabela e utilizando propriedades trigonométricas, temos:

$$£\{\cos x.\sin x\} = \frac{2}{2}.£\{\cos x.\sin x\} = \frac{1}{2}.£\{2\cos x.\sin x\} =$$
$$= \frac{1}{2}.£\{\sin 2x\} = \frac{1}{2}.\frac{2}{s^2+4.} \neq \frac{s}{s^2+1}.\frac{1}{s^2+1}.$$

Logo, a propriedade não vale para a transformada como também não vale para a transformada inversa. Portanto, precisamos calcular utilizando produto convolução.

Pela equação (3.11) de transformada inversa de produto convolução, temos:

$$£^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}.\frac{1}{s^2+1}\right\} = \cos x * \sin x.$$

Escolheremos $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sin x$ e resolveremos utilizando proprieddes trigonométricas.

$\cos x * \sin x = \int\limits_0^x \cos\tau.\sin(x-\tau)d\tau$, onde x é tratada como constante dentro da integral.

$$= \int\limits_0^x \cos\tau[\sin x\cos\tau - \cos x\sin\tau]d\tau =$$

$$= \int\limits_0^x \sin x\cos^2\tau d\tau - \int\limits_0^x \cos x\cos\tau\sin\tau d\tau =$$

$$= \sin x \int_0^x \frac{1+\cos 2\tau}{2} d\tau - \cos x \int_0^x \cos\tau \sin\tau d\tau =$$
$$= \sin x. \left[\frac{1}{2}\tau + \frac{\sin 2\tau}{4}\right]\Bigg|_0^x - \cos x \left[\frac{\sin^2\tau}{2}\right]\Bigg|_0^x =$$
$$= \sin x \left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} - \frac{1}{2}.0 - \frac{\sin 2.0}{4}\right] - \cos x \left[\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{\sin^2 0}{2}\right] =$$
$$= \sin x \left[\frac{1}{2}x + 2\frac{\sin x \cos x}{4}\right] - \frac{\cos x \sin^2 x}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}x \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x \cos x - \frac{1}{2}\cos x \sin^2 x = \frac{1}{2}x \sin x.$$

Logo,

$$£^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}.\frac{1}{s^2+1}\right\} = \cos x * \sin x = \frac{1}{2}x \sin x.$$

■

3.3 Aplicações em Equações Diferenciais Ordinárias.

Como já foi dito anteriormente, o método de Transformada de Laplace é muito útil para resolver equações diferenciais ordinárias, pois, consiste em transformar estes tipos de equações em algébricas, tornando assim, mais fácil a resolução. Vamos mostrar aqui como funciona o processo. Considere o Problema de Valor inicial

$$\begin{cases} a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x) \\ y(0) = y_0; y'(0) = y_0'; ...; y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{3.13}$$

onde $a_i, i = 0, 1, 2, 3, ..., n$ e $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ são constantes. Aplicando a transformada de Laplace em toda a equação do problema acima, temos

$$£\left\{a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y\right\} = £\{g(x)\}$$

e usando propriedade de linearidade a equação fica

$$a_n £\left\{\frac{d^n y}{dx^n}\right\} + a_{n-1}£\left\{\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\right\} + ... + a_0 £\{y\} = £\{g(x)\}.$$

Utilizando o teorema 2.4 para calcularmos as transformadas de Laplace das derivadas temos

$$a_n[s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - ... - y^{(n-1)}(0)] + a_{n-1}[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - ... - y^{(n-2)}(0)] + ... + a_0 Y(s) = G(s)$$

Agora fatoramos $Y(s)$ para depois explicitá-lo.

$$Y(s)[a_n s^n + a_{n-1} s^{s-1} + ... + a_0] = a_n[s^{n-1}y_0 + ... + y^{(n-1)}(0)] + a_{n-1}[s^{n-2}y_0 + ... + y_0^{(n-2)}] + ... + G(s).$$

Quando conseguirmos explicitar $Y(s)$ basta calcularmos sua transformada inversa para encontrarmos a solução da equação diferencial,pois

$$\pounds^{-1}\{Y(s)\} = y(x).$$

Exemplo 3.8 *Resolva*

$$y' - 3y = e^{2x}, \qquad y(0) = 1.$$

Solução: Aplicando a transformada de Laplace na equação inteira e usando propriedade de linearidade, temos

$$\pounds\{y'\} - 3\pounds\{y\} = \pounds\{e^{2x}\}. \tag{3.14}$$

Pelas transformadas (m) e (d) da tabela de transformadas de funções 2.1, temos respectivamente as seguintes transformadas :

$$\pounds\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

e

$$\pounds\{e^{2x}\} = \frac{1}{s-2}.$$

Substituindo estes valores em (3.14),

$$sY(s) - 1 - 3Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

Explicitando $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}.$$

Agora vamos calcular a inversa de $Y(s)$ utilizando o 1º caso de frações parciais:

$$\frac{s-1}{(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3}. \tag{3.15}$$

Muliplicando todos os membros da igualdade pelo produto $(s-2)(s-3)$ implica

$$s - 1 = A(s-3) + B(s-2).$$

Fazendo $s = 2$ e $s = 3$,obtemos $A = -1$ e $B = 2$. Substituindo os valores encontrados, em (3.15)

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)} = \frac{-1}{s-2} + \frac{2}{s-3}.$$

Consequentemente,

$$\pounds^{-1}\{Y(s)\} = y(x) = -\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

e pela parte (d) da tabela

$$y(x) = -e^{2x} + 2e^{3x}.$$

■

Exemplo 3.9 *Considere o problema de valor inicial*

$$y'' + y = x, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

Solução: Aplicando a transformada de Laplace em toda equação,

$$\pounds\{y'' + y\} = \pounds\{x\}$$

e utilizando propriedade de linearidade, temos

$$\pounds\{y''\} + \pounds\{y\} = \pounds\{x\}$$

Utilizando as partes (b) e (m) da tabela 2.1 de transformadas de funções obtemos, $\pounds\{y''(x)\} = s^2Y(s) - s.1 + 2$ e $\pounds\{x\} = \frac{1}{s^2}$ e então chegamos ao resultado

$$s^2.Y(s) - s.1 + 2Y(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Explicitaremos $Y(s)$ e utilizaremos o 3º caso de frações parciais para calcularmos sua transformada inversa, pois $\pounds^{-1}\{Y(s)\} = y(x)$. Temos,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}\left[\frac{1}{s^2} + s - 2\right] = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1},$$

então

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \tag{3.16}$$

Multiplicando todos os membros da igualdade pelo produto $(s^2+1)s^2$, temos

$$1 + s^2(s-2) = As(s^2+1) + B(s^2+1) + s^2(Cs+D) =$$

$$1 + s^3 - 2s^2 = As^3 + As + Bs^2 + B + Cs^3 + Ds^2$$

$$1 + s^3 - 2s^2 = s^3(A + C) + s^2(B + D) + s(A) + B.$$

Comparando os coeficientes das potências de s em ambos os lados da igualdade, temos o sistema:

$$\begin{cases} (A + C) = 1 \\ (B + D) = -2 \\ B = 1 \\ A = 0. \end{cases}$$

Encontrando as constantes A, B, C e D:

$A = 0 \Rightarrow C = 1$

$B = 1 \Rightarrow D = -3$

Substituindo estas constantes na equação (3.16) , obtemos

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1} = \frac{0}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s-3}{s^2+1},$$

e escrevendo a última fração do segundo termo como soma de frações

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}.$$

Temos

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - 3\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\},$$

logo, usando as partes (b), (f) e (e) da tabela, temos:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1}\right\} = x + \cos x - 3\sin x$$

Portanto a solução do problema é $y(x) = x + \cos x - 3\sin x$.

■

Capítulo 4

Teoremas de deslocamento e funções: periódicas, deslocamento, Heavisede e Delta de Dirac.

Neste capítulo, vamos desenvolver alguns teoremas importantes relacionados a funções particulares e que serão úteis na resolução de problemas de Transformadas de Laplace.

4.1 Transformada de Laplace de Funções Periódicas.

Nesta seção estudaremos um tipo de função que geralmente aparece como força externa em modelagens de sistemas elétricos e mecânicos.

Definição 4.1 (Função periódica.) *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período $T > 0$ se $f(x+T) = f(x)$ para todo x.*

Teorema 4.1 (Transformada de função periódica.) *Seja $f(x)$ seccionalmente contínua em $[0, +\infty)$ e de ordem exponencial . Se $f(x)$ for periódica de período T, então*

$$\pounds\{f(x)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-sx} f(x)dx. \tag{4.1}$$

Demonstração: Decompondo a transformada de Laplace de $f(x)$ em duas integrais, fica:

$$£\{f(x)\} = \int_0^T e^{-sx} f(x)dx + \int_T^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx. \tag{4.2}$$

Fazendo $x = u + T$ na última integral de (4.2), teremos $dx = du$ e os limites de integração serão $u_1 = 0$ quando $x_1 = T$ e $u_2 \to +\infty$ quando $x \to +\infty$, obtemos
$\int_T^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-s(u+T)} f(u+T)du = e^{-sT} \int_0^{+\infty} e^{-su} f(u)du = e^{-sT} £\{f(x)\}.$
Ficando (4.2) da forma:
$£\{f(x)\} = \int_0^T e^{-sx} f(x)dx + e^{-sT} £\{f(x)\}.$
Deixando $£\{f(x)\}$ no primeiro membro da equação, obtemos o resultado:

$$£\{f(x)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-sx} f(x)dx.$$

■

Exemplo 4.1 *Calcule a transformada de Laplace da função periódica definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

e $f(x+2) = f(x)$, *para* $x \notin [0, 2]$

Solução: Vamos usar (4.1) para resolver o problema. Como $T = 2$, temos
$£\{f(x)\} = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^2 e^{sx} dx = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\int_0^1 e^{-sx}.1dx + \int_1^2 e^{-sx}.0dx \right] =$
$= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[-\frac{e^{-sx}}{s} \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\frac{-e^{-s}}{s} + \frac{e^0}{s} \right] = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})}, \quad s > 0.$ ■

4.2 Primeiro Teorema de translação ou Deslocamento.

Teorema 4.2 (Primeiro teorema de translação ou deslocamento.) *Se a é um número real, então*

$$£\{e^{ax} f(x)\} = F(s - a),$$

em que $F(s) = £\{f(x)\}$.

Demonstração: Pela definição 2.1, de transformadas de Laplace

$$\pounds\{e^{ax}f(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx}e^{ax}f(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)x}f(x)dx.$$

Substituindo $s - a = \lambda$, teremos

$$\pounds\{e^{ax}f(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}f(x)dx = F(\lambda) = F(s-a). \qquad \blacksquare$$

O teorema afirma que ao multiplicarmos uma função $f(x)$ por uma função exponencial, a transformada de Laplace $F(s)$ é deslocada a unidades.

Exemplo 4.2 *Calcule*

$$\pounds\{e^{5x}x^3\}.$$

Solução: Temos, neste exemplo, $a = 5$ e $f(x) = x^3$, então, pelo teor 4.2

$\pounds\{e^{5x}x^3\} = F(s-5)$.

Primeiramente vamos calcular a transformada de Laplace de $f(x) = x^3$, e pra isso vamos ter auxílio da transformada (c) da 2.1 e em seguida, vamos trocar s em $F(s)$ por $s - 5$.

$\pounds\{x^3\} = \dfrac{3!}{s^4} = \dfrac{6}{s^4}$, logo, $F(s-5) = \dfrac{6}{(s-5)^4}$.

Portanto, $\pounds\{e^{5x}x^3\} = \dfrac{6}{(s-5)^4}$. $\blacksquare$

4.3 Função Degrau Unitário ou Função de Heaviside.

A função de Heaviside, também chamada de função degrau unitário, é uma função descontínua com aplicações na engenharia . Por exemplo, na eletrecidade usa-se a função para representar chaves que ligam e desligam. Como estamos fazendo o estudo desta função para complementarmos em nosso estudo de transformadas de Laplace, é conveniente definirmos a função $H(x-a)$ somente para $x \geq 0$.

Definição 4.2 (Função de Heaviside.) *A função $H(x-a)$ é definida e denotada por*

$$H(x-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$$

Exemplo 4.3 *Esboce o gráfico de $H(x)$.*

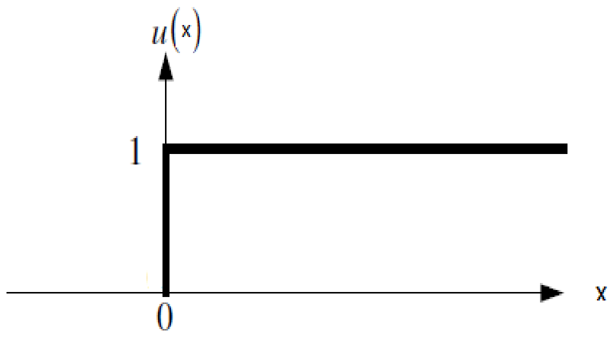

Figura 4.1: Função de Heaviside.

Fonte: [9]

Solução: $H(x) = H(x-0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$

Quando a função de Heaviside é multiplicada por uma função $y(x)$ definida em $x \geq 0$, a função de Heaviside cancela uma porção do gráfico. Por exemplo,

$$f(x) = \sin x H(x - 2\pi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 2\pi \\ \sin x, & x \geq 2\pi. \end{cases}$$

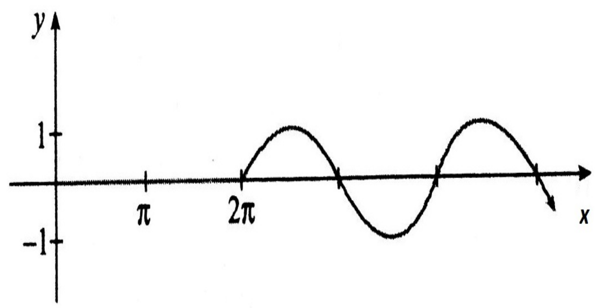

Figura 4.2: Função de Heaviside multiplicada por y(x)

Fonte: Zill(2001)

Mostraremos a seguir que, mesmo a função de Heaviside sendo descontínua, ela possui transformada de Laplace.

Teorema 4.3 *Se $a > 0$, então*

$$\pounds\{H(x-a)\} = \frac{e^{-sa}}{s}.$$

Demonstração: Para a função de Heaviside, com $s > 0$, decorre da definição 2.1:

$$\pounds\{H(x-a)\} = \int_0^{+\infty} H(x-a)e^{-sx}dx = \int_0^{a} e^{-sx}.0dx + \int_a^{+\infty} e^{-sx}.1dx =$$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b e^{-sx}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-e^{-sx}}{s}\right)\Bigg|_a^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-e^{-sb}}{s}+\frac{e^{-sa}}{s}\right) = \frac{e^{-sa}}{s}.$$

■

Do teorema 4.3, concluimos que a forma inversa é

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-sa}}{s}\right\} = H(x-a)$$

em que $s > a$.

4.4 Segundo Teorema de Translação.

Teorema 4.4 *Se $a > 0$, então*

$$\pounds\{f(x-a)H(x-a)\} = e^{-as}F(s).$$

Demonstração: Segue direto da definição 2.1 que

$$\pounds\{f(x-a)H(x-a)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx}f(x-a)H(x-a)dx =$$

$$= \int_0^{a} e^{-sx}f(x-a)H(x-a)dx + \int_a^{+\infty} e^{-sx}f(x-a)H(x-a)dx =$$

$$= \int_0^{a} e^{-sx}f(x-a).0dx + \int_a^{+\infty} e^{-sx}f(x-a)1dx.$$

Fazendo $p = x - a \Rightarrow dp = dx$, então

$$\pounds\{f(x-a)H(x-a)\} = \int_0^{+\infty} e^{-s(p+a)}f(p)dp = e^{-as}\int_0^{+\infty} e^{-sp}f(p)dp =$$

$$e^{-as}\pounds\{f(x)\} = e^{-as}F(s).$$

■

Exemplo 4.4 *Calcule $\pounds\{(x-1)H(x-1)\}$.*

Solução: Como $a = 1$, pelo teorema 4.4, segue que

$$\pounds\{(x-1)H(x-1)\} = e^{-s}\pounds\{x\} = e^{-s}\frac{1}{s^2}.$$

■

A forma inversa do Teorema 4.4 é

$$\pounds^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(x-a)H(x-a),$$

para $s > 0$.

4.5 Função Delta de Dirac.

Muitas aplicações na física e engenharia envolvem forças impulsivas, ou seja, forças que possuem grandes amplitudes e que agem por um período de tempo curto. Exemplo, uma bola de futebol quando é chutada, recebe uma grande força e isso acontece em um período muito curto de tempo . Problemas com estas características geralmente podem ser representados por equações do tipo $y'' + ay' + by = f(x)$, onde o termo forçante $f(x)$ é grande num determinado intervalo de tempo muito pequeno $x_0 - \chi < x < x_0 + \chi$ e é zero nos outros pontos.

A integral de $f(x)$,

$$I(\chi) = \int_{x_0-\chi}^{x_0+\chi} f(x)dx = \tag{4.3}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx \tag{4.4}$$

é a medida da intensidade da força que, como foi colocado em (4.4), pode ser escrita no intervalo $(-\infty, +\infty)$, pois não irá alterar (4.3), ja que $f(x)$ é nula fora do intervalo $[x_0 - \chi, x_0 + \chi]$.

Vamos analisar um caso em particular de uma força $f(x)$ onde $x_0 = 0$.

$$f_\chi(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\chi, \\ \frac{1}{2\chi}, & -\chi < x < \chi, \\ 0, & x \geq \chi \end{cases} \tag{4.5}$$

e χ é um número pequeno e positivo. Segue das equações (4.3) e (4.4) que,

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\chi}^{\chi} f(x)dx = \int_{-\chi}^{\chi} \frac{1}{2\chi}dx = \frac{1}{2\chi}.x\Big|_{-\chi}^{+\chi} =$$

$= \frac{1}{2\chi}\left[(+\chi) - (-\chi)\right] = \frac{1}{2\chi}\left[+\chi + \chi\right] = \frac{1}{2\chi}.2\chi = 1.$ para todo $\chi \neq 0.$

Vamos verificar como $f_\chi(x)$ se comporta em intervalos cada vez menores fazendo $\chi \to 0$.

$$\lim_{\chi \to 0} f_\chi(x) = \lim_{\chi \to 0} \frac{1}{2\chi} = +\infty, \tag{4.6}$$

e temos ainda,

$$\lim_{\chi \to 0} I(x) = 1, \tag{4.7}$$

Usaremos (4.6) e (4.7) para definirmos a função Delta de Dirac.

Definição 4.3 *A função Delta de Dirac designada por $\delta(x)$ é definida como tendo as propriedades*

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0; \qquad \delta(0) = +\infty \tag{4.8}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1 \tag{4.9}$$

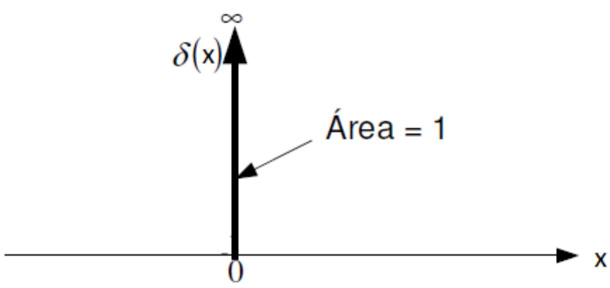

Figura 4.3: Área da função Delta Dirac.

Fonte: [9].

Observação: Notemos que expressão δ não deve ser entendida como uma função, pois, no ponto $x = 0$ a função tem valor infinito. Trata-se de um objeto matemático que tem importância em aplicações. Porém, mesmo é conhecida como "função" Delta de Dirac. Como estavamos tratando de $\delta(x)$ no ponto $x_0 = 0$, vamos generalizar para qualquer ponto $x = x_0$, ficando

$$\delta(x - x_0) = 0, \quad x \neq x_0 \quad com \quad \delta(x - x_0) = +\infty, \quad x = x_0, \tag{4.10}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)dx = 1. \tag{4.11}$$

Apesar da função Delta de Dirac não ser função admissível, ela possui transformada de Laplace.

Teorema 4.5 (Transformada da função Delta de Dirac) *Para* $x_0 > 0$,

$$\pounds\{\delta(x - x_0)\} = e^{-sx_0}. \tag{4.12}$$

Demonstração: Para obtermos a transformada, precisamos supor

$$\pounds\{\delta(x - x_0) = \lim_{\chi \to 0} \pounds\{\delta_\chi(x - x_0)\}. \tag{4.13}$$

Temos que a função é diferente de zero apenas no intervalo $[x_0 - \chi, x_0 + \chi]$ e ainda, quando $\chi < x_0$ temos $x_0 - \chi > 0$, logo

$\pounds\{\delta_\chi(x - x_0)\} = \int_{0}^{+\infty} e^{-sx}\delta_\chi(x - x_0)dx = \int_{x_0-\chi}^{x_0+\chi} e^{-sx}\delta_\chi(x - x_0)dx =$

Substituindo $\delta_\chi(x - x_0)$ na transformada acima , temos

$$= \int_{x_0-\chi}^{x_0+\chi} e^{-sx}\frac{1}{2\chi}dx = \frac{1}{2\chi}\int_{x_0-\chi}^{x_0+\chi} e^{-sx}dx = \frac{1}{2\chi}\frac{e^{-sx}}{-s}\bigg|_{x_0-\chi}^{x_0+\chi} =$$

$$= \frac{-1}{2\chi s}\left(e^{-s(x_0+\chi)} - e^{-s(x_0-\chi)}\right) = \frac{1}{2\chi s}e^{-sx_0}(e^{s\chi} - e^{-s\chi}) =$$

$$= \frac{\sinh(s\chi)}{s\chi}e^{-sx_0}.$$

Quando tomamos o limite, com $\chi \to 0$, do resultado acima, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, porém, podemos calcular o limite usando regra de L'Hospital e em seguida utilizar regra da cadeia para derivação:

$\lim_{\chi\to 0}\frac{\sinh s\chi}{s\chi} = \lim_{\chi\to 0}\frac{\sinh' s\chi}{(s\chi)'} = \lim_{\chi\to 0}\frac{s\cosh s\chi}{s} = 1$

Então, de (4.13) temos

$$\pounds\{\delta(x - x_0)\} = e^{-sx_0}.$$

■

Podemos concluir que mesmo a função Delta de Dirac não se encaixando no teorema 2.1, que garante a existência da transformada de Laplace de uma função, ou seja, mesmo não sendo função admissível, verificou-se que sua transformada de Laplace existe. Com isso, temos no teorema 2.1 apenas condição suficiente para transformada, mas não necessária.

Exemplo 4.5 *Vamos resolver o problema de Valor inicial*

$$y'' + y = 4\delta(x - 2\pi), \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

que trata de um modelo descrevendo o movimento de uma massa em uma mola que se move em um meio com amortecimento desprezível. Esta massa no instante $x = 2\pi$ recebe um sopro forte . As condições iniciais nos dizem que a massa parte do repouso 1 unidade abaixo do equilíbrio.

Solução: Aplicando a transformada de Laplace em toda equação e utilizando propriedade de linearidade, fica

$$\pounds\{y'' + y\} = \pounds\{4\delta(x - 2\pi)\} \Longrightarrow \pounds\{y''\} + \pounds\{y\} = 4\pounds\{\delta(x - 2\pi)\}$$

Usando transformada da derivada à segunda e do delta de Dirac (4.12), temos
$\pounds\{y''\} = s^2Y(s) - s.1$ e $\pounds\{4\delta(x - 2\pi)\} = 4e^{-2\pi s}$.
Logo, a transformada de Laplace da equação diferencial é

$$s^2Y(s) - s + Y(s) = 4e^{-2\pi s}.$$

Explicitando $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{4e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}$$

Agora, vamos calcular a transformada inversa de $Y(s)$ para obtermos a solução da equação diferencial, pois $\pounds^{-1}\{Y(s)\} = y(x)$.
Então, pela parte (f) da tabela e pelo segundo teorema de translação 4.4, temos respectivamente
$\pounds^{-1}\left\{\frac{s^2}{s+1}\right\} = \cos x$ e $\pounds^{-1}\left\{e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1}\right\} = sen(x - 2\pi)H(x - 2\pi)$, logo

$$y(x) = \cos x + sen(x - 2\pi)H(x - 2\pi).$$

■

Capítulo 5

Modelagens de equações diferenciais e resoluções usando Transformada de Laplace.

Neste capítulo trabalharemos com modelagens de equações diferenciais e resoluções usando a Transformada de Laplace.

5.1 Aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias: Modelos Vibrátórios.

5.1.1 Movimento Harmônico Simples.

Dada uma mola flexível suspensa por um suporte, suponhamos que exista uma massa m que está atada a esta mola. Segundo a lei de Hoke, a mola possui uma força de restauração F_R que é oposta a sua direção de distensão, denotada por s. A força de restauração tem a fórmula $F = ks$, onde k é uma constante de proporcionalidade. Após a massa m ser atada na mola, ela provocará uma distenção s na mesma que irá estagnar somente quando atingir sua posição de equilíbrio, que é quando a força peso F_P, é igual a força restauradora ks, ou seja, $mg = ks \Rightarrow mg - ks = 0$. Se deslocarmos a massa x unidades de sua posição de equilíbrio e soltarmos, a força resultante F é $F = m.a$, onde a aceleração é a segunda derivada de y. Suponhamos que o sistema não esteja sobre efeito de forças retardadoras e que a massa possua movimento livre, ou seja, oscile sem influências de outras forças externas, então poderemos igualar F à força resultante do peso F_P e da força restauradora F_R.

$$m.\frac{d^2y}{dx^2} = -k(s+y) + mg = -ks - ky + mg,$$

como $mg - ks = 0$, temos o resultado

$$m\frac{d^2y}{dx^2} = -ky. \tag{5.1}$$

O sinal de subtração em (5.1) trata de um referencial de F_R, indicando que a força restauradora está oposta a direção do movimento. Trataremos aqui, como positivas, as medidas de deslocamentos localizadas abaixo da posição de equilíbrio e as localizadas acima trataremos como negativas.

Dividindo a equação (5.1) pela massa, chegaremos a uma equação diferencial de segunda ordem.

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{k}{m}y(x) = 0 \tag{5.2}$$

ou

$$\frac{d^2y(x)}{d^2x} + \omega^2 y(x) = 0 \tag{5.3}$$

onde, $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Esta última equação descreve um **movimento harmônico simples** e associa duas condições iniciais.

$$y(0) = \lambda, \qquad y'(0) = \beta. \tag{5.4}$$

no qual, $x(0) = \lambda$ representa o deslocamento inicial e $x'(0) = \beta$ representa a velocidade inicial.

O período de vibrações é dado por $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e a frequência é $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. A solução particular chamaremos de equação de movimento.

Problema 1 Vamos resolver e fazer a interpretação do problema de valor inicial

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 16y(x) = 0, \qquad y(0) = 10, \quad y'(0) = 0.$$

Solução

Temos uma equação diferencial descrevendo um movimento harmônico simples. A equação diferencial junto com as condições iniciais , nos dizem que uma massa atada a uma mola é puxada 10 unidades abaixo da posição de equilíbrio, segurando a massa até $x = 0$ e depois solta a partir do repouso. Aplicando transformada de Laplace:

$$\pounds\{y'' + 16y\} = \pounds\{0\}.$$

Utilizando propriedade de linearidade e a tabela de Transformadas de funções, temos

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 16Y(s) = 0$$

$$s^2Y(s) - 10s + 16Y(s) = 0$$

Explicitando $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{10s}{s^2 + 16} = 10\frac{s}{s^2 + 16}$$

Utilizaremos a parte (f) da tabela para calcularmos a transforma inversa de $Y(s)$, onde $k = 0$ e $\omega = 4$,

$$\pounds^{-1}\{Y(s)\} = y(x) = 10\cos 4x. \tag{5.5}$$

■

5.1.2 Movimento Amortecido.

Ao contrário do movimento harmônico simples, um movimento amortecido sofre com forças retardadoras agindo sobre a massa.

Equação diferencial de Movimento com Amortecimento:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dy(x)}{dx} + \frac{k}{m}y(x) \tag{5.6}$$

onde, β é uma constante de atrito.

Redefinindo: $2\lambda = \frac{\beta}{m}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$

A equação (5.6) fica da forma:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 2\lambda\frac{dy(x)}{dx} + \omega^2y(x) = 0. \tag{5.7}$$

Faremos um estudo da equação característica de (5.7).

Equação característica: $m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$

Resolvendo a equação de segundo grau, temos as raízes $m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$, $m_2 =$

$-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$.

Existem três casos para o sistema, dependendo da sinal de $\lambda^2 - \omega^2$, porém, trataremos apenas do caso em que $\lambda^2 - \omega^2 > 0$.

Com $\lambda^2 - \omega^2 > 0$, implica $\lambda > k$, ou seja, a constante de atrito λ é grande quando comparamos com a constante de elasticidade k.

Problema 2: Vamos resolver e fazer a interpretação do problema de valor inicial.

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 5\frac{dy(x)}{dx} + 4y(x) = 0, \tag{5.8}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \tag{5.9}$$

O problema de valor inicial trata de uma massa em mola com movimento superamortecido. Como $y(0) = 1 > 0$, sabemos que o deslocamento da massa parte da posição 1 localizada abaixo da posição de equilíbrio com uma velocidade inicial de $1m/s$ para baixo, pois $y'(0) = 1 > 0$.

Aplicaremos a transformada de Laplace na equação (5.8):

$$\pounds\left\{\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 5\frac{dy(x)}{dx} + 4y(x)\right\} = \pounds\{0\}$$

e utilizaremos propriedade de linearidade e auxílio da tabela de transformadas para resolvermos.

$$s^2Y(s) - sx(0) - x'(0) + 5(sY(s) - x(0)) + 4y(s) = 0$$

Explicitando $Y(s)$ e utilizando o caso 1 de frações parciais :

$$Y(s) = \frac{s+6}{s^2+5s+4} = \frac{s+6}{(s+1)(s+4)} =$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+4}, \tag{5.10}$$

onde, A e B são constantes.

Multiplicando os numeradores em ambos os lados,

$$A(s+4) + B(s+1) = s+6$$

$$As + 4A + Bs + B = s + 6$$

Comparando os coeficientes das potências de s em ambos os lados da igualdade, temos o sistema:

$$\begin{cases} A + B = 1 & (a) \\ 4A + B = 6 & (b) \end{cases}$$

Da equação (a), temos $A = 1 - B$, substituindo este valor na equação (b), fica $4(1-B)+B = 6 \Rightarrow B = \frac{-2}{3}$ e $A = \frac{5}{3}$.
Substituindo os valores de A e B na em (5.38)

$$Y(s) = \frac{\frac{5}{3}}{s+1} + \frac{\frac{-2}{3}}{s+4}$$

Logo,

$$\pounds^{-1}\{Y(s)\} = y(x) = \pounds^{-1}\left\{\frac{\frac{5}{3}}{s+1} + \frac{\frac{-2}{3}}{s+4}\right\}$$

Pela parte (d) da tabela de transformadas,

$$y(x) = \frac{5}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{-4x}. \tag{5.11}$$

■

5.2 Aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias: Modelos de Circuitos Elétricos.

5.2.1 Circuito RC

Problema 3 (Circuito RC): Supondo que o capacitor esteja descarregado, determine a corrente no circuito elétrico, após o fechamento da chave.

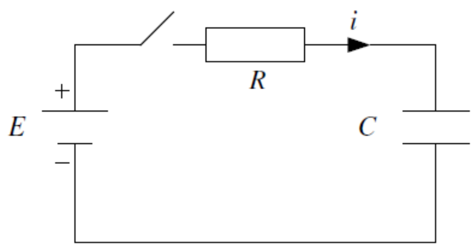

Figura 5.1: Circuito RC.

Fonte: [9].

Solução: Após o fechamento da chave temos um circuito fechado. Para resolvermos, vamos utilizar Lei das malhas de Kirchoff, que diz que a soma das diferenças de potencial para qualquer circuito fechado é nula,ou seja, a soma das tensões positivas é igual a soma das tensões negativas. Representamos como:

$$-v_G + v_R + v_C = 0, \tag{5.12}$$

Onde,

Tensão do Gerador (v_G) = E (constante);

Tensão do Capacitor(v_C) $= \dfrac{1}{C}\int\limits_0^x i(x)dx$;

Tensão do Resistor(v_R) $= R.i(x)$.

Substituindo as tensões v_C e v_R em (5.12), obtemos uma equação diferencial, que resolveremos usando Transformadas de Laplace.

$$-E + R.i(x) + \frac{1}{C}\int\limits_0^x i(x)dx = 0. \tag{5.13}$$

Aplicando a Transformada de Laplace em toda equação (5.13) teremos:

$$\pounds\{-E + R.i(x) + \frac{1}{c}\int\limits_0^x i(x)dx\} = \pounds\{0\}. \tag{5.14}$$

E então, pela parte (a) da tabela 2.1, $\pounds\{E\} = \dfrac{E}{s}$; $\pounds\{Ri(x)\} = RI(s)$, com R constante e pela parte (q) da tabela 2.1, com $a = 0$, $\pounds\left\{\frac{1}{C}\int\limits_0^x i(x)dx\right\} = \frac{1}{C}\left[\frac{1}{s}I(s) - \frac{1}{s}\int\limits_0^0 i(x)dx\right] = \frac{1}{Cs}I(s)$.

Substituindo em (5.14) os valores das transformadas encontradas, temos

$$-\frac{E}{s} + RI(s) + \frac{1}{C}\frac{I(s)}{s} = 0. \tag{5.15}$$

Como queremos calcular o valor da corrente $i(x)$, vamos explicitar $I(s)$ na equação (5.15) e encontrar $i(x)$ pela Transformada de laplace inversa de $I(s)$.

$I(s)\left(R + \dfrac{1}{Cs}\right) = \dfrac{E}{s}$

$I(s) = \dfrac{E}{s\left(R + \frac{1}{Cs}\right)} = \dfrac{E}{sR + \frac{1}{C}} = \dfrac{\frac{E}{R}}{s + \frac{1}{RC}}$

$I(s) = \dfrac{E}{R}\dfrac{1}{s+\frac{1}{RC}}$.
A seguir iremos calcular a Transformada inversa de $I(s)$:

$$\pounds^{-1}\{I(s)\} = \frac{E}{R}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right\}.$$

Temos por (d) da tabela de transformada que $\pounds\{e^{kx}\} = \frac{1}{s-k} \Rightarrow \pounds^{-1}\{\frac{1}{s-k}\} = e^{kx}, s > k$ e por comparação, concluímos que

$$\pounds^{-1}\{I(s)\} = \frac{E}{R}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right\} = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}x}.$$

Portanto, a corrente $i(x)$ é:

$$i(x) = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}x}.$$

■

5.2.2 Circuito RL

Problema 4 (Circuito RL): Determinar a corrente $i(x)$ e a tensão $v(x)$ no circuito RL logo após o fechamento da chave.

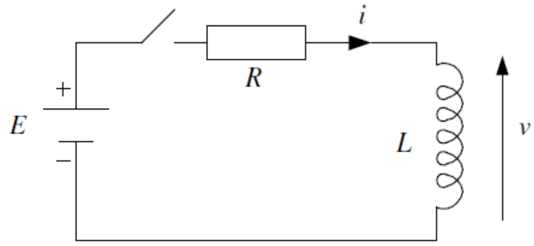

Figura 5.2: Circuito RL.

Fonte: [9].

Solução:

a) Determinação da corrente $i(x)$.

Após o fechamento da chave temos um circuito fechado. Novamente, usaremos a Lei de Kirchoff. Representamos como:

$$-v_G + v_R + v_L = 0, \tag{5.16}$$

onde,

Tensão no Gerador (v_G) = E (constante);

Tensão no Resistor (v_R) = Ri(x);

Tensão no indutor $(v_L) = L\frac{di(x)}{dx}$

Substituindo as tensões em (5.16), obteremos a equação diferencial, que resolveremos usando Transformada de Laplace.

$$-E + Ri(x) + L\frac{di(x)}{dx} = 0. \tag{5.17}$$

Aplicando Transformada de Laplace em toda equação (5.17),

$$\pounds\{-E + Ri(x) + L\frac{di(x)}{dx}\} = \pounds\{0\}. \tag{5.18}$$

Pelas partes (a) e (m) da tabela de transformadas e pela propriedade de linearidade, temos respectivamente:

$\pounds\{-E\} = \frac{E}{s}$; $L\pounds\{\frac{di(x)}{dx}\} = L(s.I(s) - i(0)) = LsI(s)$ e temos ainda que $\pounds\{Ri(x)\} = R.I(s)$. Lembrando que a corrente no indutor no instante inicial é zero, $i(0) = 0$. Ficando

$$\frac{-E}{s} + RI(s) + LsI(s) = 0. \tag{5.19}$$

Como queremos calcular o valor da corrente $i(x)$, vamos explicitar $I(s)$ na equação e encontrar $i(x)$ pela Transformada de Laplace inversa de $I(s)$.

$$I(s)(R + Ls) = \frac{E}{s}.$$

Portanto,

$$I(s) = \frac{E}{s(R + Ls)} = \frac{\frac{E}{L}}{s\left(\frac{R}{L} + s\right)}.$$

$$I(s) = \frac{E}{L}\frac{1}{s\left(\frac{R}{L} + s\right)}. \tag{5.20}$$

A seguir iremos calcular a transforma inversa de $I(s)$:

$$\pounds\{I(s)\}^{-1} = \frac{E}{L}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s(\frac{R}{L} + s)}\right\}.$$

Para determinarmos a transformada inversa de $\dfrac{1}{s(s + \frac{R}{L})}$, vamos utilizar o 1º caso de frações parciais.

Com A e B constantes e fazendo $\lambda = \frac{R}{L}$, temos:

$$\frac{1}{s(s + \lambda)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \lambda}. \tag{5.21}$$

Multiplicando os dois lados da equação pelo produto $s(s + \lambda)$, fica

$$1 = s(A + B) + A\lambda.$$

Comparando os coeficientes das potências de s em ambos os lados da igualdade, temos o sistema:

$$\begin{cases} (A + B) = 0 \\ A\lambda = 1 \end{cases}$$

Encontrando as constantes A e B:

$A\lambda = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\lambda}$.

$(A + B) = 0 \Rightarrow B = -A = -\frac{1}{\lambda}$.

Substituindo A e B em (5.21)

$$\frac{1}{s(s + \lambda)} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{s} - \frac{\frac{1}{\lambda}}{\lambda + s} = \frac{1}{\lambda}.\frac{1}{s} - \frac{1}{\lambda}.\frac{1}{s + \lambda}.$$

Logo,
$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+\lambda)}\right\}=\frac{1}{\lambda}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\frac{1}{\lambda}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+\lambda}\right\}.$$
Utilizando as partes (a) e (d) da tabela, temos
$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+\lambda)}\right\}=\frac{1}{\lambda}.1-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}=\frac{1-e^{-\lambda x}}{\lambda}.$$
Retornando com $\frac{R}{L}$ no lugar de λ,
$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+\frac{R}{L})}\right\}=\frac{1-e^{-\frac{R}{L}x}}{\frac{R}{L}}.$$
Portanto a inversa de $I(s)$ é,
$$\pounds\{I(s)\}^{-1}=\frac{E}{L}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s(\frac{R}{L}+s)}\right\}=\frac{E}{L}\frac{(1-e^{-\frac{R}{L}x})}{\frac{R}{L}}=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}x}).$$
Logo,
$$i(x)=\frac{E}{R}.(1-e^{-\frac{R}{L}x}).$$

■

b) Determinação da Tensão do indutor ($v_L(x)$):

Vimos que a tensão do indutor é dado por:
$$v_L=L\frac{di}{dx}. \tag{5.22}$$
Aplicando Transfomada de Laplace na tensão
$$\pounds\{v_L\}=L\pounds\left\{\frac{di}{dx}\right\}.$$
Como a corrente inicial é nula, temos,
$$V(s)=\pounds\{v_L\}=LsI(s).$$
Substituindo o valor de $I(s)$ de (5.20), tem-se:
$$V(s)=Ls\frac{E}{L}\frac{1}{s\left(\frac{R}{L}+s\right)}$$
$$V(s)=E.\frac{1}{\left(\frac{R}{L}+s\right)}.$$
Calculando a transformada inversa de $V(s)$, temos
$$\pounds^{-1}\{V(s)\}=E\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{\left(\frac{R}{L}+s\right)}\right\}=Ee^{-\frac{R}{L}x}.$$
Portanto,
$$v(x)=Ee^{-\frac{R}{L}x}.$$

■

5.2.3 Circuito RLC

Problema 5 (Circuito RLC): Determine a corrente $i(x)$, no circuito abaixo, logo após o fechamento da chave. Suponha que, tanto a corrente inicial da bobina quanto a tensão do capacitor são nulas.

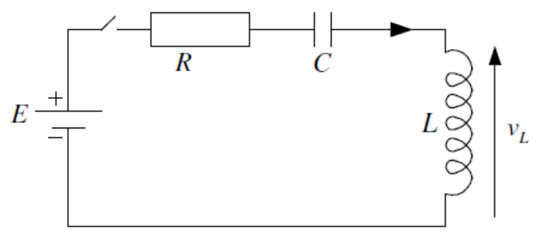

Figura 5.3: Cicuito RLC.

Fonte: [9].

Solução: Mais uma vez, utilizaremos Lei de Kirchoff para resolver o problema.

$$-E + v_R + v_C + v_L = 0. \tag{5.23}$$

Substituindo as tensões em (5.23), obteremos a seguinte equação diferencial:

$$-E + Ri(x) + \frac{1}{C}\int_0^x i(x)dx + L\frac{di}{dx} = 0. \tag{5.24}$$

Aplicando a transformada de Laplace em toda equação (5.24),

$$\pounds\left\{-E + Ri(x) + \frac{1}{C}\int_0^x i(x)dx + L\frac{di}{dx}\right\} = \pounds\{0\}.$$

Como as Transformadas de Laplace de cada termo da equação (5.24) já foram calculadas nos problemas anteriores, vamos apenas colocar os valores.
Transformada de Laplace:

$$\frac{-E}{s} + RI(s) + LI(s) + \frac{I(s)}{Cs} = 0.$$

Explicitando $I(s)$:

$$I(s) = \frac{E}{L}.\frac{1}{\frac{Rs}{L} + \frac{1}{CL} + s^2} \tag{5.25}$$

Precisamos agora calcular a transforma inversa de $I(s)$. Como a transformada da expressão $\dfrac{1}{\frac{Rs}{L}+\frac{1}{CL}+s^2}$, não é dada na tabela, vamos mudar sua forma para que se encaixe. Faremos $\frac{R}{L}=2\alpha$ e $\frac{1}{LC}=\omega^2$, resultando

$$\frac{1}{\frac{Rs}{L}+\frac{1}{CL}+s^2}=\frac{1}{s^2+2\alpha s+\omega^2}$$

Somanda e subtraindo, ao denominador o termo α^2, temos

$$\frac{1}{s^2+2\alpha s+\omega^2}=\frac{1}{s^2+2\alpha s+\alpha^2+\omega^2-\alpha^2}=\frac{1}{(s+\alpha)^2+(w^2-\alpha^2)}.$$

Caso 1: Se $(w^2-\alpha^2)\geq 0$, vale a igualdade

$$\frac{1}{(s+\alpha)^2+(w^2-\alpha^2)}=\frac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2},$$

com $\beta^2=(w^2-\alpha^2)$ Caso 2: Se $(w^2-\alpha^2)\leq 0$, vale a igualdade

$$\frac{1}{(s+\alpha)^2+(w^2-\alpha^2)}=\frac{1}{(s+\alpha)^2-\beta^2},$$

com $-\beta^2=(w^2-\alpha^2)$. Vamos resolver para cada caso.

Solução para o caso 1.

Utilizando a parte (e) da tabela,

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\right\}=\frac{1}{\beta}e^{-\alpha x}\sin\beta x.$$

Então, neste caso temos a seguinte corrente ,$i(x)=\dfrac{E}{L}\dfrac{1}{\beta}e^{-\alpha x}\sin\beta x$. Substituindo os valores $\alpha=\frac{R}{2L}$ e $\beta=\sqrt{\omega^2-\alpha^2}=\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}}$, chegamos ao valor final

$$i(x)=\frac{E}{\sqrt{\frac{L}{C}-\frac{R^2}{4}}}e^{-\frac{-R}{2L}x}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\right)x.$$

Solução para o caso 2.

Utilizando a parte (g) da tabela,

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\alpha)^2-\beta^2}\right\}=\frac{1}{\beta}\pounds^{-1}\left\{\frac{\beta}{(s+\alpha)^2-\beta^2}\right\}=\frac{1}{\beta}e^{-\alpha x}\sinh\beta x.$$

Então, no caso 2 temos a seguinte corrente:

$$i(x)=\frac{E}{L}\frac{1}{\beta}e^{-\alpha x}\sinh\beta x.$$

Substituindo $\alpha = \frac{R}{sL}$ e $\beta = \sqrt{-\omega^2 + \alpha^2} = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$, chegamos ao valor final

$$i(x) = \frac{E}{\sqrt{\frac{R^2}{4} - \frac{L}{C}}} e^{-\frac{R}{2L}x} \sinh\left(\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right) x.$$

■

5.3 Aplicaçoes de Equações Diferenciais Ordinárias: Modelos de flexões de Vigas.

Neste quarto problema, trabalharemos com uma aplicação na engenharia, e para resolvermos, utilizaremos algumas das propriedades que foram estudadas até aqui.

Problema 6 (Aplicação em vigas): A equação que rege a flexão de vigas é da forma

$$k\frac{d^4y}{dx^4} = -w(x). \tag{5.26}$$

onde k é uma constante chamada de rigidez à flexão e $w(x)$ é a força(carga) transversal por unidade de comprimento ao longo da viga. O esboço é indicado pela figura acima. Vamos utilizar Transformada de Laplace (em x) para resolver este problema e discutir o caso de uma carga de ponto.

Solução:

Verificamos que apenas a quarta derivada de $y(x)$ está presente, portanto, o mais óbvio, é pensar em resolver o problema utilizando a integração direta, ou seja, integrando quatro vezes a equação (5.26). Entretanto, não é adequado irmos por este caminho, principalmente, pela forma de $w(x)$ que este método leva.

Para usar transformada de Laplace,o domínio será estendido para que $x \in [0, +\infty)$ e utilizaremos a função de Heaviside. Para seguirmos um passo a passo, vamos considerar o problema balanço, onde a viga está presa em apenas uma das extremidades.

Tomaremos a Transformada de Laplace de maneira usual para eliminarmos as derivadas.

Definição da Transformada de Laplace em x :

$$\pounds\{y(x)\} = Y(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}y(x)dx,$$

lembrando, que estendemos o domínio para $+\infty$.

Aplicando a Transformada de Laplace em (5.26):

$$\pounds\left\{k\frac{d^4y}{dx^4}\right\} = -\pounds\{w(x).\}$$

Utilizando o teorema 2.4 referente a transformada de n-ésima derivada e propriedade de linearidade, obtemos

$$k[s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)] = -\pounds\{w(x)\}.$$

A seguir, explicitaremos $Y(s)$ para calcularmos $y(x)$, pois $\pounds^{-1}\{Ys)\} = y(x)$, onde $y(x)$ é deflexão da viga e solução da equação diferencial.

$$\pounds\{y(x)\} = Y(s) = -\frac{W(s)}{ks^4} + \frac{y(0)}{4} + \frac{y'(0)}{s^2} + \frac{y''(0)}{s^3} + \frac{y'''(0)}{s^4}. \tag{5.27}$$

Agora, calculando $\pounds^{-1}\{Ys)\} = y(x)$, obtemos a solução do problema.

$$\pounds^{-1}\{Ys)\} = y(x) = \pounds^{-1}\left\{-\frac{w(s)}{ks^4} + \frac{y(0)}{s} + \frac{y'(0)}{s^2} + \frac{y''(0)}{s^3} + \frac{y'''(0)}{s^4}\right\} \tag{5.28}$$

É neste momento que é necessário fazer uma análise da situação. A viga pode ser longa, mas não é infinita. Logo, está correto o que fizemos, estendendo o domínio para utilizarmos Transformada de Laplace?

O que precisamos fazer são algumas arrumações usando Função de Heaviside.

Definição de Função de Heaviside:

$$H(x-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$$

Como foi visto, ao multiplicarmos a função de Heaviside por uma outra função $y(x)$, com $x \geq 0$, a função de Heaviside anula uma porção do gráfico da função. Logo,

$$y(x)H(x-l) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < l \\ y(x), & x \geq l. \end{cases}$$

Então, se substituirmos $y(x)$ por $y(x) - y(x)H(x-l)$, esta última função irá satisfazer as condições necessárias para a existência da Transformada de Laplace.

Por consequência, vamos fazer a interpretação da Transformada de Laplace de $y(x)$ como

$y(x)-y(x)H(x-l)=y(x)[1-H(x-l)]$ e logo após, calcular sua Transformada de Laplace inversa:

$$\pounds\{y(x)\}=\pounds\{y(x)[1-H(x-l)]\}=\int_0^{+\infty} y(x)[1-H(x-l)]e^{-sx}dx. \tag{5.29}$$

Logo, por (5.28), temos

$$\pounds\{y(x)[1-H(x-l)]\}=-\frac{W(s)}{ks^4}+\frac{y(0)}{s}+\frac{y'(0)}{s^2}+\frac{y''(0)}{s^3}+\frac{y'''(0)}{s^4}. \tag{5.30}$$

Consequentemente,

$$y(x)[1-H(x-l)]=\pounds^{-1}\left\{-\frac{W(s)}{ks^4}+\frac{y(0)}{s}+\frac{y'(0)}{s^2}+\frac{y''(0)}{s^3}+\frac{y'''(0)}{s^4}\right\}. \tag{5.31}$$

Podemos encontrar a inversa do produto das duas transformadas, $\frac{W(s)}{ks^4}$, utilizando o teorema de produto convolução. Pela parte (l) da tabela, verificamos $\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}=\frac{x^3}{6}$ e ainda, sabemos que, $\pounds^{-1}\{W(s)\}=w(x)$. Aplicando produto convolução:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}W(s)\right\}=\frac{x^3}{6}*w(x)=\frac{1}{6}\int_0^x w(\xi)(x-\xi)^3d\xi,$$

e ainda, utilizando as partes (a),(b) e (c) da tabela 2.1, encontraremos as transformadas inversas das demais. Vejamos:

$$\begin{aligned}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}&=1,\\ \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}&=x\\ \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}&=\frac{1}{2!}\frac{2!}{s^{2+1}}=\frac{1}{2}.x^2,\\ \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}&=\frac{1}{3!}\frac{3!}{s^{3+1}}=\frac{1}{6}x^3,\end{aligned}$$

onde, $y(0),y'(0),y''(0)$ e $y'''(0)$ são constantes.

Temos a solução do problema:

$$y(x)[1-H(x-1)]=-\frac{1}{6k}\int_0^x w(\xi)(x-\xi)^3d\xi+y(0)+xy'(0)+\frac{1}{2}x^2y''(0)+\frac{1}{6}x^3y'''(0). \tag{5.32}$$

Vamos considerar as seguintes condições de contorno:

$y(0) = 0, y(l) = 0$ (Nenhum deslocamento nas extremidades.)

$y''(0) = 0, y''(l) = 0$ (Nenhuma força nas extremidades.)

Isto permite que as quatro constantes $y(0), y'(0), y''(0)$ e $y'''(0)$ sejam encontradas. Assim,

$$y(x)[1 - H(x-1)] = -\frac{1}{6k}\int_0^x w(\xi)(x-\xi)^3 d\xi + xy'(0) + \frac{1}{6}x^3 y'''(0). \tag{5.33}$$

As aplicações das condições de contorno, $y(l) = 0$ e $y''(l) = 0$, são mais complicadas. Uma opção seria derivar a expressão (5.33) em relação a x, duas vezes, mas não sabemos que valor teremos ao derivarmos o produto $y(x)[1 - H(x-1)]$. Vamos fazer o seguinte: Colocar $u(x) = y''(x)$ e a equação original (5.26) se tornará

$$k\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -w(x).$$

Vamos obter a solução usando Transformada de Laplace.

$$\pounds\left\{\frac{d^2u}{dx^2}\right\} = -\pounds\{w(x)\}$$

$$ks^2U(s) - ksu(0) - u'(0) = -W(s),$$

onde $U(s) = \pounds\{u(x)\}$ e $W(s) = \pounds\{w(x)\}$.

Explicitando $U(s)$, temos

$$U(s) = \frac{ksu(0) + ku'(0) - W(s)}{ks^2} = \frac{u(0)}{s} + \frac{u'(0)}{s^2} - \frac{W(s)}{ks^2}.$$

Calculando $\pounds^{-1}\{U(s)\} = u(x):$

$u(x) = \pounds^{-1}\left\{\frac{u(0)}{s}\right\} + \pounds^{-1}\left\{\frac{u'(0)}{s^2}\right\} - \pounds^{-1}\left\{\frac{W(s)}{ks^2}\right\}$, logo

$$u(x) = u(0) + u'(0)x - \frac{1}{k}\int_0^x w(\xi)(x-\xi)d\xi. \tag{5.34}$$

Usaremos o mesmo raciocínio do início, onde utilizamos função de Heaviside para arrumarmos a função $y(x)$ de modo que pudessemos aplicar Transformada de Laplace, e obtivemos o resultado $y(x) = y(x)[1 - H(x-l)]$. Com a função $u(x)$, utilizando o mesmo processo, resulta $u(x) = u(x)[1 - H(x-l)]$. Então, a equação (5.34) fica na forma

$$u(x)[1 - H(x-l)] = u(0) + u'(0)x - \frac{1}{k}\int_0^x w(\xi)(x-\xi)d\xi. \tag{5.35}$$

Substituindo $u(x)$ por $y''(x)$ e trocando $u(0)$,$u'(0)$ por $y''(0)$ e $y'''(0)$ respectivamente, temos

$$y''(x)[1 - H(x - l)] = -\frac{1}{k}\int_0^x w(\xi)(x - \xi)d\xi + y''(0) + xy'''(0). \tag{5.36}$$

Portanto, o valor obtido em (5.36) é o mesmo da segunda derivada de $y(x)$, isto é, o resultado de (5.36) é o mesmo que poderiamos ter obtido derivando duas vezes $y(x)$ e ignorando $[1 - H(x - l)]$.

Quando aplicarmos as condições de contorno $y(l) = 0$ e $y''(l) = 0$ em (5.36), teremos os resultados de $y'(0)$ e $y'''(0)$ que estão faltando para completarmos nossa solução. Vejamos:

Com $x = l$,

$$y''(l)[1 - H(l - l)] = -\frac{1}{k}\int_0^l w(\xi)(l - \xi)d\xi + y''(0) + ly'''(0).$$

Utilizando as condições de contorno $y''(0) = 0$ e $y''(l) = 0$, segue

$$y'''(0) = \frac{1}{kl}\int_0^l w(\xi)(l - \xi)d\xi. \tag{5.37}$$

Com (5.33), calcularemos $y'(0)$.

Com $x = l$,

$$y(l)[1 - H(l - l)] = -\frac{1}{6k}\int_0^l (l - \xi)^3 w(\xi)d\xi + ly'(0) + \frac{1}{6}l^3 y'''(0).$$

Utilizando as condição de contorno $y(l) = 0$ e explicitando $y'(0)$,

$$y'(0) = \frac{1}{6kl}\int_0^l (l - \xi)^3 w(\xi)d\xi - \frac{l^3}{6l}y'''(0).$$

Substituindo $y'''(0)$:

$$y'(0) = \frac{1}{6kl}\int_0^l (l - \xi)^3 w(\xi)d\xi - \frac{l}{6k}\int_0^l w(\xi)(l - \xi)d\xi. \tag{5.38}$$

Agora, temos a solução geral para o problema:

$$y(x)[1 - H(x - l)] = -\frac{1}{6k}\int_0^x (x - \xi)^3 w(\xi)d\xi + \frac{1}{6kl}\int_0^l x(l - \xi)(\xi^2 - 2l\xi + x^2)w(\xi)d\xi. \tag{5.39}$$

Agora podemos calcular o deslocamento causado com qualquer valor de carga.

Vamos considerar valores de cargas realistas, onde a carga está situada em $x = \frac{l}{3}$(em um terço do comprimento da viga) e não existe nenhuma rotação em torno da extremidade em $x = l$. A expressão para $w(x)$ é: $w(x) = \frac{\omega}{l}H(x) + p\delta(x - \frac{1}{3}l) - (\frac{1}{2}\omega + \frac{2}{3}p)\delta(x)$. Percebemos a função delta de Dirac na equação. Se a carga em um ponto tem magnitude P, temos a seguinte expressão para $w(x)$:

$$w(x) = \frac{\omega}{l}H(x) + P\delta\left(x - \frac{1}{3}l\right) - \left(\frac{1}{2}\omega + \frac{2}{3}P\right)\delta(x). \tag{5.40}$$

Para resolvermos o problema, vamos voltar para a equação diferencial de quarta ordem (5.26) e aplicar a transformada de Laplace em ambos os lados da equação. Como já calculamos a transformada de Laplace do primeiro membro da equação, vamos calcular apenas de $w(x)$ e para isso, utilizaremos propriedade de linearidade, a parte (a) da tabela de transformadas, o teorema 4.12 que trata da transformada de Laplace da função Delta de Dirac, e o fato de $H(x) = H(x - 0) = 1$.

$$W(s) = \pounds\{w(x)\} = \pounds\left\{\frac{\omega}{l}H(x)\right\} + P\pounds\left\{\delta\left(x - \frac{1}{3}l\right)\right\} - \left(\frac{1}{2}\omega + \frac{2}{3}P\right)\pounds\{\delta(x - 0)\}$$

$$\pounds\{w(x)\} = \frac{\omega}{ls} + Pe^{-\frac{1}{3}sl} - \left(\frac{1}{2}\omega + \frac{2}{3}P\right). \tag{5.41}$$

As condições de contorno são :

$y(0) = 0; \quad y(l) = 0$ (nenhum deslocamneto nas extremidades.)

$y''(0) = 0; \quad y''(l) = 0$ (nenhuma força nas extremidades.)

Substituindo $W(s)$ na equação (5.16) com $Y(s)$ já explicitado, temos:

$$Y(s) = -\frac{1}{ks^4}\left[\frac{\omega}{ls} + Pe^{-\frac{1}{3}sl} - \left(\frac{1}{2}\omega + \frac{2}{3}P\right)\right] + \frac{y(0)}{4} + \frac{y'(0)}{s^2} + \frac{y''(0)}{s^3} + \frac{y'''(0)}{s^4}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{k}\left[\frac{\omega}{ls^5} + P\frac{e^{-\frac{1}{3}sl}}{s^4} - \frac{1}{s^4}\left(\frac{1}{2}\omega + \frac{2}{3}P\right)\right] + y'(0)\frac{1}{s^2} + y'''(0)\frac{1}{s^4}. \tag{5.42}$$

Calcularemos agora a Transformada inversa de $Y(s)$ utilizando as partes (a) e (l) da tabela de transformada de Laplace de funções e a forma inversa do teorema de translação (4.4), onde, sabemos que $\pounds^{-1}\{Y(s)\} = y(x) = y(x)[1 - H(x - l)]$.

$$y(x)[1 - H(x-l)] = -\frac{1}{k}\left[\frac{\omega}{24l}x^4 + \frac{1}{6}P\left(x - \frac{1}{3}l\right)^3 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\omega + \frac{2}{3}P\right)x^3\right] + y'(0)x + \frac{1}{6}y'''(0)x^3. \tag{5.43}$$

Vimos anteriormente que poderemos diferenciar duas vezes a equação acima (5.43), ignorando $[1 - H(x-l)]$, então:

$$y''(x)[1 - H(x-l)] = -\frac{1}{k}\left[\frac{1}{2l}\omega x^2 + P\left(x - \frac{1}{3}l\right) - \left(\frac{1}{2}\omega + \frac{2}{3}P\right)x\right] + y'''(0)x. \quad (5.44)$$

com $0 \leq x \leq l$. Fazendo $x = l$ e utilizando a condição de contorno $y''(l) = 0$ na equação (5.44), teremos o valor de $y'''(0)$.

$$y''(l) = -\frac{1}{k}\left[\frac{1}{2l}\omega l^2 + P\left(l - \frac{1}{3}l\right) - \left(\frac{1}{2}\omega + \frac{2}{3}P\right)l\right] + y'''(0)l$$

$$\frac{1}{kl}\left[\frac{1}{2l}\omega l^2 + P\left(\frac{2l}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\omega + \frac{2}{3}P\right)l\right] = y'''(0)$$

$$\frac{\omega}{2k} + \frac{P2}{3k} - \frac{\omega}{2k} - \frac{2P}{3k} = y'''(0).$$

Portanto, $y'''(0) = 0$.

Utiizaremos a equação (5.43) para encontrarmos o valor de $y'(0)$, faremos $x = l$ e usaremos a condição de controno $y(l) = 0$ e o $y'''(0) = 0$.

$$y(l) = -\frac{1}{k}\left[\frac{wl^4}{24l} + \frac{1}{6}P\left(\frac{2l}{3}\right)^3 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\omega + \frac{2}{3}P\right)l^3\right] + y'(0)l + \frac{1}{6}y'''(0)l^3.$$

$$\frac{1}{kl}\left[\frac{wl^3}{24} + \frac{8Pl^3}{162} - \frac{\omega l^3}{12} - \frac{2Pl^3}{18}\right] = y'(0)$$

$$\frac{\omega l^2}{24k} + \frac{8Pl^2}{162k} - \frac{\omega l^2}{12k} - \frac{2Pl^2}{18k} = \frac{\omega l^2}{24k} - \frac{2\omega l^2}{24k} + \frac{8Pl^2}{162k} - \frac{18Pl^2}{162k} = -\frac{\omega l^2}{24k} - \frac{10Pl^2}{126k} = y'(0)$$

Portanto,

$$y'(0) = \frac{-l^2}{k}\left(\frac{\omega}{24k} - \frac{5P}{81}\right). \quad (5.45)$$

Logo, a solução para o problema é

$$y(x) = -\frac{1}{k}\left[\frac{\omega}{24l}x^4 + \frac{1}{6}P\left(x - \frac{1}{3}l\right)^3 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\omega + \frac{2}{3}P\right)x^3\right] - \frac{l^2}{k}\left(\frac{1}{24}\omega + \frac{5}{81}P\right)x.$$

$\blacksquare$

Conclusão

Neste trabalho de conclusão de curso, fizemos um estudo do assunto de Transformada de Laplace aplicada a equações diferencias ordinárias. Para entendermos as aplicações trabalhadas fizemos um extenso estudo do assunto. Porém, apesar de toda a extensão do estudo desenvolvido do tema, deixamos de algumas informações, por fugirem do intuito do trabalho, como por exemplo, a integral da Transformada inversa de Laplace, que pode ser definida para funções de valores complexos e aqui, nos limitamos a funções de valores reais; a integral de Four-Mellin, que é a transformada de inversa de Laplace, é dada na sua forma mais geral, pela fórmula :$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}_s^{-1}\{F(s)\} = \dfrac{1}{2\pi i} \lim\limits_{T\to+\infty} \displaystyle\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{sx}F(s)ds.$

Com o intuito de tornar o trabalho mais direcionado a alunos de graduação, escrevemos de forma mais explicativa e por isso trabalhamos nas demonstrações dos teoremas e corolários; fizemos uma tabela de transformadas de Laplace bastante completa, com as demonstrações de todas as funções contidas na tabela; apresentamos as resoluções dos exemplos postados, detalhadamente, e também inserimos figuras, quando possível, para complementar a informação.

Além desses pontos colocados, comparando o método que utiliza a ferramenta transformada de Laplace com os outros usuais, mostramos que este resolve situações interessantes de problemas envolvendo equações diferenciais lineares com condições iniciais, pois a transformada se estende a funções contínuas por partes, como por exemplo, função de Heaviside, e para generalização de função, como função Delta de Dirac.

É importante citarmos também que a transformada de Laplace também pode ser trabalhada com equações diferenciais parciais e ainda que está não é o único tipo de transformada, existem outras, como por exemplo, transformada de Fourier e transformada em Z, que também são métodos importantes na resolução de equações diferenciais. Essas transformadas futuramente podem servir como um complemento deste trabalho.

Apêndice
Alguns tópicos de Análise Real

Neste apêndice, vamos citar alguns teoremas que utilizamos no decorrer do trabalho.
O teorema a seguir de Weierstrass garante que dada uma função f contínua, existe uma função polinomial que está tão próxima desta função contínua quanto se queira.

Teorema .1 (Teorema de aproximação de Weierstrass) *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então para todo* $\varepsilon > 0$ *existe um polinômio* $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$ *para todo* $x \in [a, b.]$

Citaremos a seguir o teorema do Confronto, pois será utilizado no próximo teorema.

Teorema .2 (Teorema do confronto.) *Sejam* f, g *e* h *três funções contínuas e suponhamos que exista* $r > 0$ *tal que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

para $0 < |x - p| < r$. *Nestas condições, se*

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x)$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$

Utilizamos este teorema a seguir para mostrar que o limite do produto de duas funções f e g é igual a zero quando $g(x)$ é uma função limitada e $\lim_{x \to p} f(x) = 0$.

Teorema .3 *Se f e g são duas funções com mesmo domínio A tais que $\lim\limits_{x\to p} = 0$ e $|g(x)| \leq M$ para todo x em A, onde $M > 0$ é um número real fixo, então $\lim\limits_{x\to p} f(x)g(x) = 0$.*

Demonstração: Temos

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq M|f(x)|$$

para todo x em A. Então, para todo x em A, onde

$$-M|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq M|f(x)|.$$

De $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0$ segue que $\lim x \to pM|f(x)| = 0$ e $\lim\limits_{x\to p} -M|f(x)| = 0$.
Pelo teorema do confronto .2

$$\lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0.$$

■

Teorema .4 (1ª Regra de L'Hospital.) *Sejam f e g deriváveis em $]p - r, p[$ e em $]p, p+r[$, $(r > 0)$, com $g'(x) \neq 0$ para $0 < |x - p| < r$. Nestas condições, se $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to p} g(x) = 0$ e se $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (finito ou infinito), então $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e*

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

A regra de L'Hospitalcontinua valendo se substituirmos $x \to p$ por $x \to +\infty$.

Bibliografia

[1] AQUINO, L. C. M.;***Integral Imprópria - Teste de comparação***. Disponível em:¡https://www.youtube.com/watch?v=MkJBfV0YHDI¿.

[2] BOTELHO, G.; PELLEGRINO. D.; TEIXEIRA, E.;***Fundamentos de Análise Funcional, Vol.1***, 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[3] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; ***Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno,*** , 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[4] DYKE, P. P. G.;***An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series***.pp 68-73.

[5] FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F.; ***Equações Diferenciais Aplicadas***, 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[6] GUIDORIZZI, H. L.;***Um curso de cálculo, Vol.1***, 1. ed. São Paulo: EDITORA S. A., 1986.

[7] GUIDORIZZI, H. L.;***Um curso de cálculo, Vol.2***, 5. ed. São Paulo: LTC EDITORA, 2004.

[8] REZENDE, K. A.;***Cálculo III - Derivada e Integral da transformada; Integral de Convolução - parte 1***. Disponível em:¡https://www.youtube.com/watch?v=t7jE0YIyVFs¿.

[9] TENSÕES e correntes transitórias e transformadas de Laplace.; ***Tensões e correntes transitórias e transformadas de Laplace***. Disponível em: ¡http://www3.fsa.br/localuser/Eletronica/mario.garcia/Circuitos

[10] ZILL, Dennis G.; ***Equações Diferenciais, Vol. 1***, 3. ed. São Paulo: PEARSON, 2001.