UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

COLEGIADO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RAFAELA GOVEIA BRITO

TEOREMAS CLÁSSICOS DE ANÁLISE APLICADOS AO ESPAÇO $C(K;\mathbb{R}^m)$

MACAPÁ - AP

2016

RAFAELA GOVEIA BRITO

TEOREMAS CLÁSSICOS DE ANÁLISE APLICADOS AO ESPAÇO $C(K;\mathbb{R}^m)$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao colegiado de Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do professor Ms. Marcel Lucas Picanço Nascimento.

MACAPÁ - AP

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

621.4022
B862t Brito, Rafaela Goveia.

Teoremas clássicos de análise aplicados ao espaço *C* (K; R^m) / Rafaela Goveia Brito; orientador, Marcel Lucas Picanço Nascimento. -- Macapá, 2016.

79 p.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Funções contínuas. 2. Teorema do ponto fixo de *Banach*. I. Nascimento, Marcel Lucas Picanço, orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

RAFAELA GOVEIA BRITO

TEOREMAS CLÁSSICOS DE ANÁLISE APLICADOS AO ESPAÇO $C(K;\mathbb{R}^m)$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá, campus Marco Zero, aprovado pela comissão de professores:

Marcel Lucas Picanço Nascimento

Prof. Ms. Marcel Lucas Picanço Nascimento

Orientador

Colegiado de Matemática, UNIFAP

Almeida Leal

Prof^a. Dr^a. Simone de Almeida Delphim Leal

Colegiado de Matemática, UNIFAP

Elifaleth Rego Sabino

Prof^a. Ms. Elifaleth Rego Sabino

Colegiado de Matemática, UNIFAP

DATA DA AVALIAÇÃO: 30 / 05 / 2016

Aos meus pais, pelo amor e incentivo de cada dia.

Agradecimentos

A Deus, por me dar força, saúde e determinação todos os dias para seguir os estudos e não desistir diante as dificuldades que apareceram pelo caminho.

Aos meus pais, Mauricio Brito e Conceição Gôveia, por todo amor, carinho, incentivo e apoio que sempre me deram em minhas escolhas.

Aos meus irmãos, Diogo e Antonio Marcos, pelo carinho e por me apoiarem apesar de nossas diferenças.

Ao meu querido, Eduardo Rosario, por sua amizade, seu carinho e sua enorme paciência que sempre teve para comigo.

Ao meu orientador, Prof. Ms. Marcel Nascimento, por sua grande participação em meus estudos, pela sua paciência, pela sua excelente orientação e por todos os seus ensinamentos.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para que esse trabalho pudesse ser realizado e concluído.

"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real."

Nikolai Lobachevsky

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}$ conjunto dos números reais;

$\mathbb{Q}$ conjunto dos números racionais;

$\mathbb{N}$ conjunto dos números naturais;

$\mathbb{R}^n$ espaço euclidiano n-dimensional;

$C(K;\mathbb{R}^m)$ espaço das funções contínuas definidas em K compacto;

$\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^m)$ espaço das funções definidas em A subconjunto de $\mathbb{R}^n$;

$[A]$ conjunto *spam* de A.

Conteúdo

Resumo

Neste trabalho faremos um estudo sobre o espaço das funções contínuas definidas em um conjunto compacto: $C(K;\mathbb{R}^m)$. Pelo fato deste ser um espaço vetorial de dimensão infinita, veremos que este perde, ou enfraquece, algumas propriedades em espaços de dimensão finita, porém preserva outras. Isto é evidenciado em alguns teoremas clássicos da Análise, a saber: o teorema de Picard, que com a ajuda do teorema do Ponto fixo de Banach, garante a existência e unicidade de soluções de problemas de valor inicial em $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ da forma

$$\begin{cases} \gamma'(t) & = f(t,\gamma(t)),\ \forall t \in (0,T) \\ \gamma(0) & = x_0 \end{cases};$$

o teorema de Arzelà-Ascoli, por meio deste caracterizamos os conjuntos compactos de $C(K;\mathbb{R}^m)$ e o teorema de aproximação de Weierstrass que utilizamos para provarmos a separabilidade de $C([a,b];\mathbb{R})$.

Palavras-chave: Espaço das funções contínuas, Teorema do Ponto Fixo de Banach, Teorema de Arzelà-Ascoli, Teorema de Aproximação de Weierstrass.

Abstract

In this work we will do a study on the space of continuous functions defined on a compact set: $C(K;\mathbb{R}^m)$. Because this is a vector space of infinite dimension, we see that it loses or weakens, some properties in spaces of finite dimension, but preserves other. This is evidenced in some classical theorems of analysis, namely: Picard theorem, which with the help of Banach Fixed Point Theorem in its statement, guarantee the existence and uniqueness of initial value problems in $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ to the shape

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma'(t) & = f(t,\gamma(t)),\ \forall t \in (0,T) \\ \gamma(0) & = x_0 \end{array} \right. ;$$

the Arzelà-Ascoli theorem, through this feature comct sets $C(K;\mathbb{R}^m)$ and Weierstrass approximation theorem we use to prove the separability $C([a,b];\mathbb{R})$.

Key-words: Infinite dimensional space, Fixed Point Theorem of Banach, Theorem Arzelà-Ascoli, Weierstrass approximation Theorem.

Introdução

Quando estudamos em Álgebra Linear os espaços vetoriais, nosso estudo é dedicado aos espaços de dimensão finita; sobre os espaços de dimensão infinita vemos apenas alguns exemplos, mas seu estudo não é aprofundado. Vemos que, em um espaço vetorial de dimensão finita, os vetores são representáveis por uma combinação linear finita, dessa forma muito do que se faz em Matemática como por exemplo, classificar, caracterizar, provar a existência de algo, pode ficar mais agradável de se trabalhar, visto que lidar com algo finito, a príncipio, é lidar com algo, digamos, "controlável". Mas, quando estamos trabalhando em um espaço de dimensão infinita será que isso ocorre da mesma forma? Podemos caracterizar, por exemplo, conjuntos compactos de um espaço de dimensão infinita da mesma forma que caracterizamos conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$? O que isto implica em resolver o problema

$$\begin{cases} y'(t) & = f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

ou na propriedade de separabilidade?

Neste trabalho, procuramos trabalhar estas questões e alguns desdobramentos delas. Estudaremos um espaço de dimensão infinita particular, o espaço $C(K; \mathbb{R}^m)$ das funções contínuas definidas em K (compacto) com valores em $\mathbb{R}^m$. E aplicaremos alguns teoremas clássicos da Análise neste espaço.

No capítulo 1, apresentamos alguns conceitos fundamentais de Análise no $\mathbb{R}^n$, como definições e teoremas, que nos serão importantes para o desenvolvimento posterior do trabalho. As referências são [3] e [6].

No capítulo 2, faremos um breve estudo sobre sequências de funções e em seguida definimos o espaço $C(K; \mathbb{R}^m)$ das funções contínuas definidas em um compacto; mostraremos que este é um espaço de dimensão infinita, mas por ser um espaço de Banach garantirá a aplicação de alguns resultados da Análise do $\mathbb{R}^n$ neste espaço também. Aqui usaremos [3].

No capítulo 3, iniciamos o estudo dos teoremas que serão aplicados em $C(K;\mathbb{R}^m)$, começaremos trabalhando o teorema de Picard, que é um teorema importante sobre existência e unicidade de soluções de equações diferenciais, também faremos a aplicação do teorema de Picard no estudo sobre Fluxos, e veremos a relação que este tem com o teorema. Nossa referência neste capítulo será [3].

O capítulo 4 é dedicado a caracterização dos conjuntos compactos de $C(K;\mathbb{R}^m)$, tal caracterização é dada através do Teorema de Arzelà-Ascoli, e utilizaremos este para uma importante aplicação: o teorema de existência de Cauchy-Peano. Nos basearemos em [3] e [4].

Finalizando nosso trabalho, no capítulo 5, estudamos o Teorema da Aproximação de Weierstrass, um teorema clássico da Análise, que nos ajuda a demonstrar uma propriedade importante do espaço $C([a,b],\mathbb{R})$: a separabilidade, ou seja, que $C([a,b];\mathbb{R})$ possui um conjunto enumerável e denso, e trabalharemos Momento de uma função como aplicação do teorema de Weierstrass. Neste capítulo nossas principais referências serão [1], [3] e [8].

Capítulo 1

Um estudo preliminar de Análise

Apresentaremos neste capítulo algumas definições, teoremas e resultados de Análise no $\mathbb{R}^n$, que serão importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Espaços Normados

Definição 1.1 *Dizemos que um espaço vetorial X, é um espaço normado se podemos definir uma função $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, a qual denominamos **norma**, que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $||x|| \geq 0, \quad \forall x \in X$;

(ii) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(iii) $||\lambda x|| = |\lambda|||x||, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad e \quad \forall x \in X$;

(iv) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \quad \forall x, y \in X, \quad (\text{DesigualdadeTriangular})$.

Definição 1.2 *Dizemos que duas normas, $\|\cdot\|_*, \|\cdot\|_{**}$, definidas em um espaço vetorial X, são equivalentes se existem constantes $a, b > 0$ tais que*

$$a\|x\|_* \leq \|x\|_{**} \leq b\|x\|_*, \text{ para todo } x \in X.$$

O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é o produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R}$, isto é,

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}}.$$

Dessa forma, os pontos de $\mathbb{R}^n$ são todas as n-listas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ cujas as coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ são números reais. Temos que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial de dimensão n, munido das operações soma e produto por escalar definidas do seguinte modo: para $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Em $\mathbb{R}^n$ podemos definir diversas normas, como as que veremos a seguir. Logo $\mathbb{R}^n$ também é um espaço normado.

$$\begin{array}{rcl} ||x||_s &=& |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \qquad \text{(Norma da Soma)}, \\ ||x||_2 &=& \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2} \qquad \text{(Norma Euclidiana)}, \\ ||x||_\infty &=& \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \qquad \text{(Norma do Maximo)}. \end{array}$$

Mostraremos mais a frente que as normas acima são equivalentes.

1.2 Conjuntos: Abertos, Fechados e Compactos

Consideremos V um espaço vetorial munido de uma norma $\| \cdot \|$, definimos a bola aberta, de centro num ponto $x_0 \in V$ e raio $r > 0$, como o conjunto dos pontos $x \in V$ cuja distância ao ponto x_0 é menor do que r, isto é:

$$B_r(x_0) = \{x \in V; ||x - x_0|| < r\}.$$

A partir do conceito de bola aberta podemos introduzir diversas definições, como as que vemos a seguir.

Definição 1.3 *Seja A um subconjunto de V e $x_0 \in A$.*

- *Dizemos que x_0 é* ***ponto interior*** *de A quando é centro de alguma bola aberta contida em A, isto é, quando existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset A$. O conjunto de todos os pontos interiores de A é denominado interior de A e denotamos por* $\mathrm{int}(A)$.

- *Dizemos que x_0 é* ***ponto de acumulação*** *do conjunto A quando toda bola aberta de centro x_0 contém algum ponto de A, diferente do ponto x_0, isto é, para todo $r > 0$, tem-se $(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$. Também dizemos que x_0 é um ponto de acumulação de A se, e somente se, x_0 é limite de uma sequência de pontos de $A - \{x_0\}$. O conjunto de pontos de acumulação de A é denominado o conjunto derivado de A e denotamos por A'.*

Definição 1.4 *Um subconjunto A de V é dito aberto, quando todos os seus pontos são pontos interiores, isto é $A = \mathrm{int}(A)$.*

Exemplo 1.1 *A bola aberta $B_r(x_0)$ é um conjunto aberto.*

De fato, para qualquer $x \in B_r(x_0)$, temos que $\|x - x_0\| < r$ Mostraremos que todo ponto $x \in B_r(x_0)$ é centro de alguma bola aberta contida em $B_r(x_0)$. Tomando $\delta = r - \|x - x_0\|$, temos $\delta > 0$ e consideremos a bola aberta $B_\delta(x)$. Seja $y \in B_\delta(x)$ então

$$\|y - x_0\| = \|y - x + x - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < \delta + \|x - x_0\| = r,$$

logo $y \in B_r(x_0)$ e então $B_\delta(x) \subset B_r(x_0)$. Portanto todos os pontos $x \in B_r(x_0)$ são interiores.

Definição 1.5 *Um subconjunto A de V é dito fechado quando o seu complementar A^c é aberto.*

Definição 1.6 *O fecho de A, denotado por $\overline{A}$, é o conjunto obtido pela união de A com os seus pontos de acumulação, isto é, $\overline{A} = A \cup A'$. Um ponto $x_0 \in V$ pertence ao fecho de A, $x_0 \in \overline{A}$, quando x_0 é limite de uma sequência de pontos de A.*

Podemos também definir um conjunto fechado através da seguinte proposição.

Proposição 1.1 *A é fechado se, e somente se, $\overline{A} = A$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\overline{A} \not\subset A$. Consideremos A fechado, x_0 um ponto pertencente à $\overline{A}$ e suponhamos ainda que $x_0 \notin A$, logo $x_0 \in A'$ e consequentemente $x_0 \in A^c$. Como por hipótese A é fechado, A^c é aberto, então existe $r_0 > 0$ tal que $B_{r_0}(x_0) \subset A^c$, assim teremos que $(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset$, o que é uma contradição, pois x_0 é um ponto de acumulação de A, portanto $\overline{A} \subset A$. Como $A \subset \overline{A}$, temos que $\overline{A} = A$.

($\Leftarrow$) Consideremos agora $\overline{A} = A$. Seja $x_0 \in A^c$, então $x_0 \notin A = \overline{A}$, logo existe $r_0 > 0$ tal que $B_{r_0}(x_0) \cap A = \emptyset$, dessa forma, $B_{r_0}(x_0) \subset A^c$ e então A^c é um conjunto aberto, portanto A é fechado. $\square$

A partir deste resultado podemos entender que um conjunto A ser fechado significa que: se $\lim x_k = x$, com $x_k \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $x \in A$. Esta notação ficará mais clara nas seções 1.3 e 1.4.

Corolário 1.1 *O fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado.*

Demonstração:

Seja X um conjunto do espaço vetorial V. Devemos mostrar que $\overline{X}^c$ é aberto, ou seja, que todo ponto de $\overline{X}^c$ é centro de alguma bola contida em $\overline{X}^c$. Seja $x_0 \in \overline{X}^c$, pela definição de fecho, temos que $x_0 \notin X$ e $x_0 \notin X'$, logo existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \cap X = \emptyset$, isto é, $B_r(x_0) \subset X^c$. Iremos mostrar que $B_r(x_0) \subset \overline{X}^c$. De fato, seja $y \in B_r(x_0)$, como vimos no exemplo toda bola aberta é um conjunto aberto, temos que existe $r_1 > 0$ tal que $B_{r_1}(y) \subset B_r(x_0) \subset X^c$. Assim, $B_{r_1}(y) \cap X = \emptyset$, e isso implica que y não é ponto de acumulação de X. Logo $y \in \overline{X}^c$. E concluímos que $x_0 \in \text{int}(\overline{X}^c)$, portanto $\overline{X}^c$ é aberto e assim $\overline{X}$ é fechado. $\square$

Para definirmos a compacidade de um conjunto precisaremos do seguinte conceito de cobertura.

Definição 1.7 *Uma cobertura de um dado conjunto B é uma família $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos de V tal que $B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Isto quer dizer que para cada $x \in B$, existe um $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in A_\lambda$. Uma subcobertura é uma subfamília $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$, $\Lambda' \subset \Lambda$, onde ainda podemos ter $B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda$.*

Quando A_λ é conjunto aberto para todo $\lambda \in \Lambda$, dizemos que a cobertura é aberta. Se Λ é conjunto finito, a cobertura é finita.

A definição que introduzimos a seguir é o conceito mais geral de compacidade. Mas no decorrer do capítulo veremos que existem outras maneiras de caracterizarmos um conjunto compacto.

Definição 1.8 *Um conjunto $K \subset V$ é compacto se toda cobertura de K admitir subcobertura finita, ou seja, se $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é uma cobertura aberta de K, então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tais que*

$$K \subset A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A\lambda_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_{\lambda_i}.$$

Proposição 1.2 *Todo conjunto compacto é fechado e limitado.*

Demonstração: Sendo K um conjunto compacto, provaremos primeiramente que K é limitado. Temos que $\{B_1(x)\}_{x\in K}$ é uma cobertura aberta de K, então existem $x_1, x_2, \ldots, x_m \in K$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_1(x_i)$. Seja $\bar{r} := \max\{||x_1||, \ldots, ||x_m||\} + 1$. Logo $B_{\bar{r}}(0) \supset K$, de fato, se $x \in K$, então $x \in B_1(x_i)$ para algum $i = 1, \ldots, m$. Assim,

$$||x|| = ||x - x_i + x_i|| \leq ||x - x_i|| + ||x_i|| < 1 + ||x_i|| \leq \bar{r}.$$

Logo K é limitado.

Mostraremos agora que K é fechado, ou seja, que K^c é aberto.

Seja $x_0 \in K^c$, para cada $x \in K$ consideremos $r_x = \dfrac{1}{2}||x - x_0||$. Então $\{B_{r_x}(x)\}_{x\in K}$ é uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, podemos encontrar $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{r_{x_i}}(x_i).$$

Seja $\bar{r} := \min\{r_{x_1}, r_{x_2}, \ldots, r_{x_m}\} > 0$. Temos que $B_{\bar{r}}(x_0) \subset K^c$. De fato, pela definição de $\bar{r}$ temos $B_{\bar{r}}(x_0) = \bigcap_{i=1}^{m} B_{r_{x_i}}(x_0)$. Assim,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{r_{x_i}}(x_i) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B^c_{r_{x_i}}(x_0),$$

ou seja, $\forall x \in \bigcup_{i=1}^{m} B_{r_{x_i}}(x_i)$, $x \in \bigcup_{i=1}^{m} B^c_{r_{x_i}}(x_0)$.

Suponhamos por contradição que $\exists \bar{x} \in \bigcup_{i=1}^{m} B_{r_{x_i}}(x_i)$, mas $\bar{x} \notin \bigcup_{i=1}^{m} B^c r_{x_i}(x_0)$. Então $\bar{x} \in B_{r_{x_i}}(x_i)$ para algum $i = 1, 2, \ldots, m$, denotemos $\bar{x} = x_i$ e $r_{\bar{x}} = r_{x_i}$ para tal i. Se $x \in B_{r_{\bar{x}}}(\bar{x})$ temos $||x - \bar{x}|| < r_{\bar{x}} = \frac{1}{2}||\bar{x} - x_0||$.

Por contradição $x \notin \bigcup_{i=1}^{m} B^c_{r_{x_i}}(x_0)$ então $x \in B_{r_{x_i}}(x_0)$, para todo $i = 1, \ldots, m$, logo $x \in B_{r_{\bar{x}}}(x_0) \Rightarrow ||x - \bar{x}|| < \frac{1}{2}||\bar{x} - x_0||$.

Temos, $||x - \bar{x}|| < \frac{1}{2}||\bar{x} - x_0||$ e $||x - x_0|| < \frac{1}{2}||\bar{x} - x_0||$. Logo,

$$||\bar{x} - x_0|| \leq ||x - \bar{x}|| + ||x - x_0|| < \frac{1}{2}||\bar{x} - x_0|| + \frac{1}{2}||\bar{x} - x_0||.$$

Assim, $||\bar{x} - x_0|| < ||\bar{x} - x_0||$, o que é um absurdo. Portanto,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{r_{x_i}}(x_i) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B^c_{r_{x_i}}(x_0). \tag{1.1}$$

Passando ao complementar em (1.1) temos

$$K^c \supset \bigcap_{i=1}^{m} B^c_{r_{x_i}}(x_i) \supset \bigcap_{i=1}^{m} B_{r_{x_i}}(x_0) = B_{\bar{x}}(x_0).$$

Logo K^c é aberto e K é fechado. □

Em $\mathbb{R}^n$ todo conjunto fechado e limitado é um conjunto compacto, esta caracterização de compacidade é restrita apenas aos espaços de dimensão finita como poderemos verificar no capítulo 4.

1.3 Sequências em $\mathbb{R}^n$

As sequências aparecem em diversas aplicações e são muito úteis como ferramentas de demonstração. Definimos uma sequência de um espaço vetorial V como sendo qualquer função $\varphi : \mathbb{N} \to V$, em que $\varphi(k) = x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Em geral usaremos a notação $\{x_k\}$ para denotarmos uma sequência.

Definição 1.9 *Dizemos que um ponto $x_0 \in V$ é o limite de uma sequência $\{x_k\}$ de V, se para todo $\varepsilon > 0$ dado, podemos obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$ então $\|x_k - x_0\| < \varepsilon$. Neste caso dizemos que $\{x_k\}$ converge para x_0 e denotamos por $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$, $\lim x_k = x_0$ ou $x_k \to x_0$.*

Podemos também caracterizar a compacidade de um dado conjunto de um espaço vetorial normado através de sequências, como vemos no teorema a seguir.

Teorema 1.1 *Um conjunto K de um espaço vetorial V é compacto se, e somente se, toda sequência de $\{x_k\}$ de K possui subsequência $\{x_{k_i}\}$ convergente para algum elemento de K, isto é, $x_{k_i} \to \overline{x} \in K$.*

Demonstração: (Ver [2], Pág. 26, 27).

Também temos o teorema clássico a seguir, consequência do teorema de Bolzano-Weierstrass.

Teorema 1.2 *Toda sequência limitada de $\mathbb{R}^n$ admite subsequência convergente.*

Demonstração: (Ver [3], Pág. 17).

Temos ainda alguns tipos "especiais"de sequências que definimos a seguir.

Definição 1.10 (Sequências de Cauchy) *Dizemos que uma sequência $\{x_k\}$ de V espaço vetorial normado é sequência de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$, podemos obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k, l \geq k_0$ então $\|x_k - x_l\|_V < \varepsilon$.*

Lema 1.1 *Toda sequência de Cauchy de um espaço vetorial V é limitada em V.*

Demonstração: Seja $\{x_k\}$ uma sequência de Cauchy e $\varepsilon = 1$, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k, l \geq k_0$ então $\|x_k - x_l\|_V < 1$. Fixando $l = k_0$ temos $\|x_k - x_{k_0}\|_V < 1$. Da desigualdade triangular temos $|\|x_k\|_v - \|x_{k_0}\|_V| < 1$, em particular, $\|x_k\|_V \leq 1 + \|x_{k_0}\|_V$, para todo $k \geq k_0$. Assim, se tomermos $M = \max\{\|x_1\|_V, \ldots, \|x_{k_0-1}\|_V, \|x_{k_0}\|_V\}$, teremos $\|x_k\|_V \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo $\{x_k\}$ é limitada. □

Proposição 1.3 *Toda sequência convergente em um espaço vetorial normado é sequência de Cauchy.*

Demonstração:

Seja $\{x_k\}$ uma sequência convergente para algum x em V. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$ temos

$$\|x_k - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, se $k, l \geq k_0$, da desigualdade triangular temos que

$$\|x_k - x_l\| \leq \|x_k - x\| + \|x_l - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $\{x_k\}$ é uma sequência de Cauchy. □

A recíproca da proposição acima nem sempre é verdade em espaços normados. Definimos os espaços cujas as sequências de Cauchy são convergentes da seguinte forma.

Definição 1.11 (Espaço de Banach) *Dizemos que um espaço normado V é um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em V é convergente.*

Teorema 1.3 *O espaço $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach.*

Demonstração:

Para provarmos que $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach devemos mostrar que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ é convergente. Então, seja $\{x_k\}$ uma sequência de Cauchy, pelo lema (1.1) $\{x_k\}$ é limitada, logo possui uma subsequência $\{x_{k_i}\}$ convergente para algum $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, teorema (1.2). Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $i \geq i_0$ temos $\|x_{k_i} - \overline{x}\| < \varepsilon/2$. Além disso, como a sequência é de Cauchy, pela definição 1.10, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k, l \geq k_0$ então teremos $\|x_k - x_l\| < \varepsilon/2$. Se tomarmos $k_1 = \max\{k_0, k_{i_0}\}$ e se $k \geq k_1$ teremos que

$$\begin{aligned} \|x_k - \overline{x}\| = \|x_k - x_{k_{i_0}} + x_{k_{i_0}} - \overline{x}\| &\leq \|x_k - x_{k_{i_0}}\| + \|x_{k_{i_0}} - \overline{x}\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo a sequência de Cauchy é convergente. Portanto, $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach. □

Os espaços de Banach têm grande importância pois neles ficam assegurados os processos de limite que definimos na seção seguinte.

1.4 Limite e Continuidade

Iremos agora estudar o limite e continuidade de funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, podemos também chamar uma função de várias variáveis com valores em $\mathbb{R}^m$ de uma aplicação. Por $\| \cdot \|$ estaremos denotando as normas euclidianas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente.

Definição 1.12 *Sejam $f : A \to \mathbb{R}^m$, A subconjunto de $\mathbb{R}^n$, x_0 um ponto de acumulação de A. Dizemos que $b \in \mathbb{R}^m$ é o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de x_0 se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que*

$$x \in A \text{ e } 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon,$$

e escrevemos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

Podemos definir a continuidade em termos de limite.

Definição 1.13 *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $x_0 \in A \cap A'$, dizemos que f é contínua em x_0 se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ou mais precisamente, dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta > 0$ tal que se $x \in A$ e $\|x - x_0\| < \delta$ então $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$. Quando f é contínua em todos os pontos do seu domínio, dizemos simplesmente que f é função contínua.*

Usando a notação de bolas, temos que f é contínua em x_0 se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(A \cap B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.

Os limites e continuidade de funções em $\mathbb{R}^n$ satisfazem as mesmas propriedades de limite e continuidade de funções em $\mathbb{R}$ com relação a soma, produto e composição.

Teorema 1.4 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função. Então f é contínua se, e somente se para todo $A \subset \mathbb{R}^m$ aberto, a imagem inversa $f^{-1}(A)$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração:

Suponhamos que f é contínua e A é um aberto do $\mathbb{R}^m$, devemos mostrar que para qualquer $x_0 \in f^{-1}(A)$ existe bola aberta centrada em x_0 contida em $f^{-1}(A)$. Assim, se $x_0 \in f^{-1}(A)$ então $y_0 = f(x_0) \in A$. Como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(y_0) \subset A$ e da continuidade de f em x_0 existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)) = B_\varepsilon(y_0) \subset A$. Logo,

$$f^{-1}(f(B_\delta(x_0)) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(y_0)) \subset f^{-1}(A) \Rightarrow B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(A).$$

Portanto, para todo $x_0 \in f^{-1}(A)$ temos $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(A)$ e então $f^{-1}(A)$ é aberto.

De maneira recíproca, suponhamos que A em $\mathbb{R}^m$ e $f^{-1}(A)$ são conjuntos abertos quaisquer. Dado $\varepsilon > 0$, seja em particular $A = B_\varepsilon(y_0)$ em que $y_0 = f(x_0)$, ou seja $x_0 \in f^{-1}(A)$; como por hipótese temos $f^{-1}(A)$ aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(A)$. E portanto $f(B_\delta(x_0)) \subset f(f^{-1}(A)) \subset A$, logo f é contínua. $\square$

Observação 1.1 *Temos ainda, de maneira análoga, que* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é contínua se, e somente se para todo* $F \subset \mathbb{R}^m$ *fechado,* $f^{-1}(F)$ *é um conjunto fechado de* $\mathbb{R}^n$*.*

Teorema 1.5 *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *uma função contínua e* $K \subset \mathbb{R}^n$ *compacto. Então a sua imagem* $f(K)$ *é um conjunto compacto de* $\mathbb{R}^m$*.*

Demonstração:

Para mostrarmos que $f(K)$ é compacto devemos provar que toda cobertura de $f(K)$ admite subcobertura finita. Seja $\{A_\lambda\}$ uma cobertura aberta qualquer de $f(K)$. Como $f(K) \subset \bigcup A_\lambda$ temos

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_\lambda A_\lambda\right) = \bigcup_\lambda f^{-1}(A_\lambda).$$

Como f é contínua, pelo teorema (1.4) temos que $\{f^{-1}(A_\lambda)\}$ é cobertura aberta de K. Além disso, como K é compacto $\{f^{-1}(A_\lambda)\}$ admite subcobertura finita, isto é, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tais que $K \subset f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(A_{\lambda_k}) = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(A_{\lambda_i})$. Portanto,

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(A_{\lambda_i})\right) = \bigcup_{i=1}^{k} f(f^{-1}(A_{\lambda_i})) \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_{\lambda_i}.$$

Logo $\{A_\lambda\}$ admite subcobertura finita e assim concluímos que $f(K)$ é compacto. $\square$

O seguinte teorema diz que toda função contínua definida em um compacto atinge seu máximo e mínimo nesse conjunto.

Teorema 1.6 *Se* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua e* $K \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto compacto, então existem* $\underline{x}, \overline{x} \in K$ *tais que* $f(\underline{x}) = \min\{f(x) : x \in K\}$ *e* $f(\overline{x}) = \max\{f(x) : x \in K\}$*, isto é,* f *atinge seu máximo e mínimo em* K*.*

Demonstração:

Como K é compacto e f é contínua, pelo teorema (1.5) temos que $f(K)$ é compacto de $\mathbb{R}$, logo $f(K)$ é fechado e limitado. Sendo limitado, é limitado superiormente e inferiormente, pelo postulado de Dedekind existem $s = \sup f(K) < +\infty$ e $b = \inf f(K) > -\infty$. Como $f(K)$ é fechado temos então que $s \in f(K)$ e $b \in f(K)$, portanto existem $\underline{x}, \overline{x} \in K$ tais que $b = f(\underline{x})$ e $s = f(\overline{x})$. Neste caso, $s = \max f(K)$ e $b = \min f(K)$. $\square$

O seguinte teorema garante a equivalência de todas as normas em $\mathbb{R}^n$, isto quer dizer que, os conceitos e resultados já vistos e os que seguem, são válidos se substituirmos a norma que estamos usando por uma outra equivalente. Para este teorema precisamos de alguns resultados vistos anteriormente, por isso não foi abordado no início do capítulo.

Teorema 1.7 *Todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.*

Demonstração:

Seja $\|\cdot\|$ uma norma qualquer em $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|_1$ a norma da soma definida por $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$. Mostraremos que existem constantes $M, m > 0$ tais que para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ teremos

$$m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1.$$

Consideremos $M = \max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\}$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Então para qualquer $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\|x\| = \|xe_1 + \ldots + x_n e_n\| \leq |x_1|\|e_1\| + \ldots + |x_n|\|e_n\| \leq M\|x\|_1.$$

Seja $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1\}$ e $f(x) = \|x\|$, então $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é função contínua. E como K é um conjunto fechado e limitado do $\mathbb{R}^n$, logo compacto, pelo teorema (1.6) existe $\underline{x} \in K$ tal que $m = f(\underline{x}) = \min f(K)$. Temos que $m > 0$, pois se $0 = m = \|\underline{x}\| \Rightarrow \underline{x} = 0$ pela definição de norma, assim teríamos que $\|\underline{x}\|_1 = 0$ e como $\underline{x} \in K$ isso seria uma contradição. Seja x um ponto qualquer de $\mathbb{R}^n$, então $y = \dfrac{x}{\|x\|_1} \in K$ e

$$m \leq f(y) = \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_1} \Rightarrow m\|x\|_1 \leq \|x\|.$$

Portanto, $m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1$. $\square$

Podemos perceber que o conceito de continuidade que vimos até agora é algo local, pois para cada ε e para cada x temos $\delta = \delta(\varepsilon, x)$, isto é, δ depende tanto de ε quanto do ponto x em questão. Veremos agora um conceito mais global de continuidade: a continuidade uniforme, nesse caso δ não depende de nenhum x do domínio da função.

Definição 1.14 *Uma função $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ é dita uniformemente contínua em A se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in A$ e $\|x - y\| < \delta$, então $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.*

Toda função uniformemente contínua é contínua em seu domínio, mas uma função contínua não é necessariamente uniformemente contínua.

Definição 1.15 *Dizemos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função Lipschitz-contínua em A se existir $M > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$, para todo $x, y \in A$.*

É fácil de se verificar que toda função Lipschitz-contínua é uniformemente contínua. De fato, como $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$ para $x, y \in A$ arbitrários, dado qualquer $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \varepsilon/M$ e então teremos $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \dfrac{M\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

Proposição 1.4 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função linear, então f é Lipschitz-contínua.*

Demonstração:

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e consideremos $M = \max\{\|f(e_1)\|, \ldots, \|f(e_n)\|\}$. Então, se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ temos

$$\|f(x) - f(y)\| = \left\|f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) - f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right)\right\|,$$

como f é linear podemos escrever

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) - \sum_{i=1}^{n} y_i f(e_i)\| = \|\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i) f(e_i)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|(x_i - y_i) f(e_i)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \|f(e_i)\| \leq M\|x - y\|_1. \end{aligned}$$

E como todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes podemos concluir que f é Lipschitz-contínua. □

Teorema 1.8 *Toda função contínua definida em um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua.*

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer e $x \in K$. Como f é função contínua, existe $\delta_x > 0$ tal que se $\|y - x\| < \delta_x$, isto é $y \in B_{\delta_x}(x)$, então $\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon/2$. Podemos observar que

$\{B_{\delta_x}/2(x)\}$ é uma cobertura aberta de K e como K é compacto existem $x_1, x_2, \ldots, x_k$ em K tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{\delta_{x_i}}{2}}(x_i). \tag{1.2}$$

Seja $\delta = \min\left\{\frac{\delta_{x_1}}{2}, \frac{\delta_{x_2}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{x_k}}{2}\right\}$.

Mostraremos que se $x, y \in K$ são tais que $\|x - y\| < \delta$ então $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. De fato, se $x, y \in K$ e $\|x - y\| < \delta$, de (1.2) temos que $x \in B_{\frac{\delta_{x_i}}{2}}(x_i)$ para algum $i = 1, \ldots, k$. Então

$$\begin{aligned} \|y - x_i\| &\leq \|y - x\| + \|x - x_i\| \\ &< \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leq \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i}, \end{aligned}$$

e da continuidade de f em x_i temos

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leq \|f(x) - f(x_i)\| + \|f(x_i) - f(y)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, f é uniformemente contínua em K compacto. $\square$

1.5 Funções Diferenciáveis

Nesta seção faremos um estudo sobre a diferenciabilidade no caso das funções de n variáveis, primeiramente para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, em seguida estenderemos o cálculo diferencial para funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Para as definições que seguem consideraremos Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|$ a norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.16 *Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $x_0 \in \Omega$ se existirem funções $L, v_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + v_{x_0}(h), \quad x_0 + h \in \Omega \tag{1.3}$$

em que L é função linear e v_{x_0} satisfaz

$$\lim_{h \to 0} \frac{|v_{x_0}(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Se f é diferenciável em x_0, denominamos L como sendo a diferencial de f em x_0 e a denotamos por $f'(x_0)$.

Proposição 1.5 *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$, então f é diferenciável em x_0 se, e somente se, existir uma aplicação linear $L(h) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (que denotaremos por $f'(x_0)$), e dado $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $\|h\| < \delta \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)| < \varepsilon\|h\|$, isto é,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)|}{\|h\|} = 0.$$

Onde $h \in \mathbb{R}^n$ e $x_0 + h \in A$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos f diferenciável em x_0 então da definição (1.16) temos que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) + v(h),$$

assim existe $L(h) = f'(x_0)$ função linear e além disso $v(h)$ satisfazendo $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|v(h)|}{\|h\|} = 0$, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|h\| < \delta \Rightarrow |v(h)| < \varepsilon\|h\|$.

Dessa forma, $f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0) = v(h)$, então para todo $h \in \mathbb{R}^n$ com $\|h\| < \delta$, temos

$$|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)| = |v(h)| < \varepsilon\|h\|.$$

($\Leftarrow$) Consideremos agora que exista uma aplicação linear $f'(x_0)$ e para todo $\varepsilon > 0$ exista $\delta > 0$ tal que temos

$$\|h\| < \delta \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)| < \varepsilon\|h\|.$$

Queremos mostrar que existe $v(h)$ tal que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|v(h)|}{\|h\|} = 0$. Tomemos $v(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)$. Temos então que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) + v(h),$$

e além disso, para todo $h \in \mathbb{R}^n$ com $\|h\| < \delta$,

$$|v(h)| = |f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)| < \varepsilon\|h\|,$$

assim podemos concluir que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|v(h)|}{\|h\|} = 0$. E portanto f é diferenciável. $\square$

Proposição 1.6 *Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $x_0 \in \Omega$ então f é contínua em x_0.*

Demonstração:

Da definição de diferenciabilidade temos que se f é diferenciável em x_0, então temos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + v(h), \tag{1.4}$$

onde L é uma função linear e $\lim_{h\to 0} \dfrac{|v(h)|}{\|h\|} = 0$. Portanto, existe $\delta_1 > 0$ tal que se

$$\|h\| < \delta_1 \text{ então } \frac{|v(h)|}{\|h\|} < 1. \tag{1.5}$$

Como $L(h)$ é linear, pela proposição (1.4), L é Lipschitz-contínua, assim existe $\alpha \geq 0$ tal que

$$|L(h)| \leq \alpha\|h\|, \text{ para todo } h \in \mathbb{R}^n.$$

Seja $h = x - x_0$, dado $\varepsilon > 0$ queremos encontrar $\delta > 0$ tal que se $\|x - x_0\| < \delta$ temos $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. De (1.4) temos:

$$f(x) - f(x_0) = L(x - x_0) + v(x - x_0)$$

como L é linear e lipschitz contínua e se $\|x - x_0\| < \delta_1$, temos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |L(x) - L(x_0) + v(x - x_0)| \\ &\leq |L(x) - L(x_0)| + |v(x - x_0)| \\ &\leq \alpha\|x - x_0\| + \|x - x_0\| \\ &\leq (1 + \alpha)\|x - x_0\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $\delta = \min\left\{\delta_1, \dfrac{\varepsilon}{1+\alpha}\right\}$, e se $x \in \Omega$ é tal que $\|x - x_0\| < \delta$ então temos

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

logo f é contínua em x_0. □

Para o caso geral temos:

Definição 1.17 *Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é dita diferenciável em $x_0 \in \Omega$ se existem funções $L, v_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tais que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + v(h), \tag{1.6}$$

com L linear e v_{x_0} satisfazendo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|v(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{1.7}$$

Lema 1.2 *Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ é diferenciável em x_0 se, e somente se, cada uma de suas componentes $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ é diferenciável em x_0.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja f diferenciável em x_0 então, pela definição, existem funções $L = (L_1, \ldots, L_m)$ e $v = (v_1, \ldots, v_m)$ satisfazendo (1.6) e (1.7). Como L é linear, cada uma de suas componentes também será linear e como

$$\frac{|v_i(h)|}{\|h\|} \leq \frac{\|v(h)\|_1}{\|h\|} \to 0,$$

quando $h \to 0$, temos que existem funções L_i e v_i tais que $f_i(x_0 + h) = f_i(x_0) + L_i(h) + v_i(h)$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Portanto as funções componentes $(f_1, \ldots, f_m)$ de f são diferenciáveis em x_0.

($\Leftarrow$) Suponhamos que cada f_i seja diferenciável em x_0, isto quer dizer que existem funções L_i, v_i satisfazendo (1.4) tais que L_i é linear e $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|v_i(h)|}{\|h\|} = 0$. Temos que

$$(f_1(x_0), \ldots, f_m(x_0)) + (L_1(h), \ldots, L_m(h)) + (v_1(h), \ldots, v_m(h)) = (f_1(x_0+h), \ldots, f_m(x_0+h)).$$

Sejam $L = (L_1, \ldots, L_m)$ e $v = (v_1, \ldots, v_m)$, como $f = (f_1, \ldots, f_m)$ então

$$(f_1(x_0 + h), \ldots, f_m(x_0 + h)) = f(x_0) + L(h) + v(h) = f(x_0 + h)$$

Como cada L_i é linear é óbvio que L também é linear e da equivalência das normas em $\mathbb{R}^n$, temos que

$$\frac{\|v(h)\|}{\|h\|} \leq C\frac{\|v(h)\|_1}{\|h\|} = C\sum_{i=1}^{m} \frac{|v_i(h)|}{\|h\|} \to 0,$$

se $h \to 0$. Portanto f é diferenciável em x_0. □

Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função diferenciável em cada ponto x de seu domínio, podemos considerar a função linear $f'(x)$, diferencial de f em x. Podemos então definir a aplicação

$$\begin{aligned} f': \quad \Omega &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ denota o espaço de todas as aplicações lineares definidas em $\mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^m$.

Definição 1.18 *Uma função diferenciável $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ é dita de Classe $\mathcal{C}^1$, ou continuamente diferenciável, em $x_0 \in \Omega$ se a sua diferencial f' é função contínua em x_0. Se f' for contínua em todos os pontos de Ω dizemos que f é de Classe $\mathcal{C}^1$.*

Definição 1.19 (Curvas) *Denominamos uma curva de $\mathbb{R}^n$ toda e qualquer função contínua $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$. Se γ é uma função diferenciável em todos os pontos interiores de I, dizemos que γ é uma curva diferenciável.*

Capítulo 2

Sequências de funções e o espaço $C(K; \mathbb{R}^m)$

Iniciaremos agora o estudo do espaço $C(K; \mathbb{R}^m)$ das funções contínuas definidas em compactos, onde iremos fazer a aplicação de alguns teoremas clássicos da Análise. Veremos que este é um espaço vetorial de dimensão infinita e também um espaço de Banach.

2.1 Sequências de Funções

Nesta seção faremos um breve estudo sobre sequências de funções, de modo que possamos melhor compreender o espaço $C(K; \mathbb{R}^m)$ que definiremos na seção seguinte.

Consideramos $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ a coleção de todas as funções definidas em A, (A subconjunto de $\mathbb{R}^n$), e com valores em $\mathbb{R}^m$, ou seja,

$$\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m) = \{f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : f \text{ é função } \}.$$

Assim como as sequências estudadas no capítulo 1 (seção 1.3), as sequências de funções podem ou não convergir, neste caso temos dois tipos de convergência: **pontual** e **uniforme**, que definimos a seguir.

Definição 2.1 *Seja $\{f_k\}$ uma sequência de $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$, dizemos que essa sequência converge pontualmente para f em A se para todo $x \in A$,*

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x),$$

isto é, para todo $x \in A$ e para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, que pode depender de x e ε, tal que se $k \geq k_0$, temos $\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

Definição 2.2 *Dizemos que uma sequência $\{f_k\}$ de $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ converge uniformemente para $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$, temos $\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$, para todo $x \in A$. Neste caso, k_0 não depende de nenhum $x \in A$.*

A convergência uniforme implica na convergência pontual, porém a recíproca não acontece, como veremos no exemplo a seguir, pois o k_0 da convergência uniforme depende apenas de ε, enquanto que o k_0 da convergência pontual depende de ε e também de cada x do domínio das funções.

Exemplo 2.1 *Seja $\{f_k\}$ uma sequência de $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ definida por $f_k(x) = x^k$. Calculando o limite de $\{f_k\}$, se $x \in [0,1)$ temos*

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = \lim_{k \to \infty} x^k = 0,$$

pois $x < 1$. E se $x = 1$,

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = \lim_{k \to \infty} x^k = 1.$$

Assim, temos que a sequência $\{f_k\}$ converge pontualmente em $[0,1]$ para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \in [0,1) \\ 1, & se\ x = 1 \end{cases}$$

porém não converge uniformemente para essa função, visto que k_0 da convergência depende diretamente de cada $x \in [0,1]$.

As sequências que convergem uniformemente são caracterizadas pelo teorema que veremos a seguir, denominado como Critério Uniforme de Cauchy. Para este resultado, precisamos da seguinte definição.

Definição 2.3 *Denominamos uma sequência de $\mathcal{F}(A; \mathbb{R}^m)$ como uniformemente de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$, existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k, l \geq k_0$, então $\|f_k(x) - f_l(x)\| < \varepsilon$, para qualquer $x \in A$.*

Teorema 2.1 *Uma sequência de funções $f_k : A \to \mathbb{R}^m$ converge uniformemente em A se, e somente se, $\{f_k\}$ é uniformemente de Cauchy em A.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos que $f_k \to f$ uniformemente em A, então para todo $\varepsilon > 0$ temos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$ então $\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon/2$ para todo $x \in A$. Portanto, se $k, l \geq k_0$, teremos

$$\begin{aligned} \|f_k(x) - f_l(x)\| &= \|f_k(x) - f(x) + f(x) - f_l(x)\| \\ &\leq \|f_k(x) - f(x)\| + \|f_l(x) - f(x)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ para todo } x \in A. \end{aligned}$$

Logo, $\{f_k\}$ é uniformemente de Cauchy em A.

($\Leftarrow$) Se $\{f_k\}$ é uniformemente de Cauchy em A, então para cada $x \in A$, a sequência $\{f_k(x)\}$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^m$ e, como $\mathbb{R}^m$ é espaço de Banach (vide capítulo 1), existe $f(x) \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(x) = \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x)$, assim a sequência $\{f_k\}$ converge pontualmente para f em A.

Vamos provar que $f_k \to f$ uniformemente em A. Seja $\varepsilon > 0$, como por hipótese $\{f_k\}$ é sequência uniformemente de Cauchy , existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, l \geq k_0 \Rightarrow \|f_k(x) - f_l(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } x \in A. \tag{2.1}$$

Fixando k e passando ao limite para $l \to \infty$ em (2.1), obtemos, se $k \geq k_0$

$$\lim_{l \to \infty} \|f_k(x) - f_l(x)\| < \lim_{l \to \infty} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\lim_{l \to \infty}(f_k(x) - f_l(x))\| &= \|\lim_{l \to \infty} f_k(x) - \lim_{l \to \infty} f_l(x)\| \\ &= \|f_k(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in A. \end{aligned}$$

Como k_0 não depende de nenhum x, concluímos que $f_k \to f$ uniformemente em A.

$\square$

Com a convergência uniforme temos que as "boas"propriedades das funções f_k são preservadas para a função limite f. Por exemplo, se as funções f_k de uma sequência uniformemente convergente são contínuas, a função f para a qual a sequência converge será contínua também. De fato, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.2 *Seja $x_0 \in A \cap A'$ e $\{f_k\}$ uma sequência de funções de $\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^m)$ contínuas em x_0. Se $f_k \to f$ uniformemente em A, então f é contínua em x_0.*

Demonstração:

Seja qualquer $x \in A$, devemos mostrar que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &= \|f(x) - f_k(x) + f_k(x) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f(x_0)\| \\ &\leq \|f(x) - f_k(x)\| + \|f_k(x) - f_k(x_0)\| + \|f_k(x_0) - f(x_0)\| \quad (2.2) \end{aligned}$$

Como $f_k \to f$ uniformemente, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$, temos $\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon/3$, para todo $x \in A$. Logo, se fixarmos $k = k_0$ em (2.2), temos que

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &\leq \|f(x) - f_{k_0}(x)\| + \|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)\| + \|f_{k_0}(x_0) - f(x_0)\| \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)\| \end{aligned}$$

Como f_{k_0} é uma função contínua em x_0, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x - x_0\| < \delta$, então $\|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)\| < \varepsilon/3$. Portanto, se $\|x - x_0\| < \delta$ temos que

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

E assim, concluímos que f é contínua em x_0. $\square$

2.2 O espaço das funções contínuas: $C(K, \mathbb{R}^m)$

Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, ou seja, fechado e limitado. Definimos $C(K;\mathbb{R}^m)$ como o espaço das funções contínuas definidas no compacto K com imagem em $\mathbb{R}^m$, isto é,

$$C(K;\mathbb{R}^m) = \{f : K \to \mathbb{R}^m : f \text{ é função contínua}\}.$$

Podemos verificar que, munido das operações usuais de soma de funções e produto por escalar, $C(K;\mathbb{R}^m)$ é um **espaço vetorial de dimensão infinita**. De fato, da Álgebra Linear, temos que um espaço vetorial V é de dimensão n finita se, e somente se qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente linearmente dependente e, portanto qualquer conjunto linearmente independente tem no máximo n vetores.

Vamos fazer para o caso $V = C([0,1];\mathbb{R})$ e suponhamos que V é um espaço vetorial de dimensão finita n. Então existe um subconjunto finito e linearmente independente de V em que todas as funções do espaço podem ser representadas por uma combinação linear finita de seus elementos, digamos $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Porém, temos que o conjunto $A = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ é um conjunto L.I. em V. De fato,

$$\alpha_0.1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n = 0,$$

então da igualdade de polinômios temos que $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Assim, V contém um subespaço de dimensão $n+1$, o espaço gerado por A, o que é uma contradição e portanto V não pode ser de dimensão finita.

O espaço $C(K;\mathbb{R}^m)$ também é um espaço normado e a sua norma natural é a norma $\|\cdot\|_\infty$ definida por

$$\|f\|_\infty = \max\{\|f(x)\| : x \in K\},$$

onde $\|\cdot\|$ é uma norma qualquer de $\mathbb{R}^n$.

Como f é contínua, a composição $\|f(x)\|$ é ainda uma função contínua, além disso temos K compacto, então pelo teorema (1.6) temos que $\|f\|$ atinge seu máximo em K, isto é, existe $\overline{x} \in K$ tal que $\|f(\overline{x})\| = \max\{\|f(x)\| : x \in K\} = \|f\|_\infty$. Logo, a norma $\|\cdot\|_\infty$ é bem definida em $C(K;\mathbb{R}^m)$.

Agora verificaremos que $\|\cdot\|_\infty$ de fato é uma norma. Para isso devemos mostrar que satisfaz as condições da definição 1.1, e usaremos o fato de $\|\cdot\|$ ser uma norma do $\mathbb{R}^n$.

- Como $\|f(x)\| \geq 0$ para todo $x \in K$, pois é uma norma de $\mathbb{R}^n$, temos que para qualquer $f \in C(K;\mathbb{R}^m)$, $\|f\|_\infty = \max\{\|f(x)\| : x \in K\} \geq 0$.

- $\|f\|_\infty = \max\{\|f(x)\| : x \in K\} = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\| \leq \|f\|_\infty = 0$ para todo $x \in K \Leftrightarrow \|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ para todo $x \in K \Leftrightarrow f \equiv 0$.

- Para qualquer $f \in C(K;\mathbb{R}^m)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_\infty &= \max\{\|\lambda f(x)\| : x \in K\} \\ &= \max\{|\lambda|\|f(x)\| : x \in K\} \\ &= |\lambda| \max\{\|f(x)\| : x \in K\}. \end{aligned}$$

  Portanto, $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$.

- Sejam $f, g \in C(K : \mathbb{R}^m)$, temos que

$$\|f+g\|_\infty = \max\{\|f(x)+g(x)\| : x \in K\},$$

  como $\|.\|$ é norma em $\mathbb{R}^n$, vale a desigualdade triangular para esta norma,

$$\begin{aligned} \|f+g\|_\infty &\leq \max\{\|f(x)\| + \|g(x)\| : x \in K\} \\ &\leq \max\{\|f(x)\| : x \in K\} + \max\{\|g(x)\| : x \in K\} \\ &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Logo, $\|.\|_\infty$ é uma norma em $C(K;\mathbb{R}^m)$.

Veremos agora que munido de sua norma natural, o espaço $C(K;\mathbb{R}^m)$ é um espaço de Banach, o que assegura a validade de alguns resultados demonstrados no capítulo anterior.

Teorema 2.3 *O espaço $C(K;\mathbb{R}^m)$ munido da norma $\|.\|_\infty$ é um espaço de Banach.*

Demonstração:

Seja $\{f_k\}$ uma sequência arbitrária de Cauchy em $C(K;\mathbb{R}^m)$. Então, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k, l \geq k_0$ temos $\|f_k(x) - f_l(x)\| < \varepsilon$, para $x \in K$, como $\|f_k(x) - f_l(x)\| \leq \|f_k - f_l\|_\infty$ para todo $x \in K$, temos $\|f_k - f_l\|_\infty < \varepsilon$. Logo $\{f_k\}$ é uniformemente de Cauchy. Pelo teorema (2.1), essa sequência converge uniformemente para algum f, e pelo teorema (2.2) temos que $f \in C(K;\mathbb{R}^m)$, pois cada f_k da sequência é contínua em K. Portanto, $C(K;\mathbb{R}^m)$ é espaço de Banach. $\square$

O fato de $C(K;\mathbb{R}^m)$ ser um espaço de Banach será de grande importância ao aplicarmos o teorema de Picard neste espaço, como veremos no capítulo seguinte.

Capítulo 3

Teorema de Ponto Fixo de Banach e solução de P.V.I. em $C([0, T]; \mathbb{R}^n)$

Iniciaremos agora o estudo de alguns teoremas da Análise no espaço das funções contínuas, $C(K; \mathbb{R}^m)$. Neste capítulo iremos trabalhar o Teorema de Picard, que garante a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais em $C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ e cuja principal ferramenta para sua demonstração é o teorema do Ponto Fixo de Banach.

3.1 Teorema de Ponto Fixo de Banach

Começaremos trabalhando o teorema de ponto fixo de Banach, para isso precisamos das seguintes definições.

Definição 3.1 (Contração) *Seja V um espaço normado e $f : A \subset V \to V$ uma função. Dizemos que f é uma contração em A se existir $0 \leq \beta < 1$ tal que*

$$\|f(x) - f(y)\|_V \leq \beta \|x - y\|_V,$$

para quaisquer $x, y \in A$.

Definição 3.2 (Ponto fixo) *Um ponto $x_0 \in V$ é denominado um ponto fixo para uma função $f : V \to V$ se $f(x_0) = x_0$.*

O seguinte teorema denominado Teorema do Ponto Fixo de Banach, nos diz quais as condições necessárias para que uma determinada função possua um único ponto fixo. Este resultado será muito importante ao trabalharmos o teorema de Picard.

Teorema 3.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Seja V um espaço de Banach relativamente a norma $\|\cdot\|_V$, se $f : V \to V$ for uma contração em V, então f possui um único ponto fixo.*

Demonstração:

Como é um teorema de existência e unicidade, começaremos demonstrando a existência do ponto fixo. Seja $x_0 \in V$ e consideremos a sequência $\{x_k\}$ definida por $x_{k+1} = f(x_k)$, para todo $k \geq 0$. Como f é uma contração, podemos observar que

$$\begin{aligned}
\|x_2 - x_1\|_V &= \|f(x_1) - f(x_0)\|_V \leq \alpha\|x_1 - x_0\|_V \\
\|x_3 - x_2\|_V &= \|f(x_2) - f(x_1)\|_V \leq \alpha\|x_2 - x_1\|_V \leq \alpha^2\|x_1 - x_0\|_V \\
\|x_4 - x_3\|_V &= \|f(x_3) - f(x_2)\|_V \leq \alpha\|x_3 - x_2\|_V \leq \alpha^3\|x_1 - x_0\|_V,
\end{aligned}$$

então prosseguindo dessa maneira, obtemos

$$\|x_{k+1} - x_k\|_V \leq \alpha^k\|x_1 - x_0\|_V,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $k, l \in \mathbb{N}$ e supondo $k \geq l$ teremos

$$\begin{aligned}
\|x_k - x_l\|_V &\leq \|x_k - x_{k-1}\|_V + \|x_{k-1} - x_{k-2}\|_V + \ldots + \|x_{l+1} - x_l\|_V \\
&\leq (\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} + \ldots + \alpha^l)\|x_1 - x_0\|_V \\
&= \frac{\alpha^l - \alpha^k}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\|_V \\
&\leq \frac{\alpha^l}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\|_V.
\end{aligned}$$

Como $0 < \alpha < 1$, dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\alpha^{l_0}}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\|_V < \varepsilon,$$

de modo que se $k, l \geq l_0$ então $\|x_k - x_l\|_V < \varepsilon$. Logo $\{x_k\}$ é uma sequência de Cauchy em V e como V é um espaço de Banach, $\{x_k\}$ é convergente. Seja $\overline{x} = \lim x_k$, como $x_{k+1} = f(x_k)$ e f é contínua temos

$$\overline{x} = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = f(\overline{x}).$$

Assim, $\overline{x}$ é ponto fixo de f. Para provarmos a unicidade, consideraremos $x, y \in V$ pontos fixos de f, ou seja, $f(x) = x$ e $f(y) = y$. Dessa forma temos que

$$\|x - y\|_V = \|f(x) - f(y)\|_V \leq \alpha\|x - y\|_V,$$

daí,

$$(1 - \alpha)\|x - y\|_V \leq 0,$$

e como $1 - \alpha > 0$, podemos concluir que $\|x - y\|_V = 0$, logo $x = y$. Portanto, existe apenas um ponto fixo para f.

3.2 Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

Antes de trabalharmos o Teorema de Picard, lembremos um pouco do estudo de Equações Diferenciais Ordinárias. Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação que envolve uma função incógnita, sua variável independente e as derivadas dessa função incógnita. Uma EDO de primeira ordem é uma equação do tipo

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \text{ ou } y'(t) = f(t, y(t)), \tag{3.1}$$

a solução de (3.1) é uma função dada por

$$y(t) = \int f(t, y(t))dt + c \tag{3.2}$$

E a interpretação geométrica da equação solução (3.2) é uma família de curvas, pois teremos uma determinada curva para cada valor da constante c. Chamamos essas curvas de curvas integrais da EDO e podemos identificar uma curva por um determinado ponto (t_0, y_0) por onde ela passa e escrevemos essa exigência da seguinte forma

$$y(t_0) = y_0 \text{ (denominamos condição inicial).}$$

Uma condição inicial e uma EDO de primeira ordem constituem um problema de valor inicial (PVI),

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \ \forall t \in (0, T) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Podemos então nos perguntar se os PVIs sempre têm solução e se a solução existe, será que ela é única? Tais questões podem ser respondidas pelo teorema de Picard.

3.3 Teorema de Picard

O teorema de Picard nos diz quais as condições que a função f deve satisfazer para que tenhamos além da existência, a unicidade da solução do PVI. Para tanto, usaremos essencialmente o teorema de Ponto Fixo de Banach e a ideia de contração da seção 3.1.

Teorema 3.2 *Seja $T > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função Lipschitz-contínua, isto é, existe $L \geq 0$ tal que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.3}$$

Então, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe uma única curva $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $(0,T)$ (logo, contínua), que satisfaz ao seguinte problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \gamma'(t) & = f(t, \gamma(t)), \ \forall t \in (0,T) \\ \gamma(0) & = x_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Demonstração:

Antes de começarmos a demonstração do teorema observemos que se existe uma curva $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $(0,T)$ satisfazendo (3.4) então é implícito que $(t, \gamma(t)) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ para $t \in (0,T)$ e, como γ é contínua temos que a função $t \to f(t, \gamma(t))$ também é contínua. Logo, γ' é contínua em $(0,T)$ e segue do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) que

$$\gamma(t) = \int_0^t f(s, \gamma(s))ds + x_0 \qquad t \in (0,T). \tag{3.5}$$

Por outro lado, se $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ existe e satisfaz (3.5), então, novamente pelo TFC, $\gamma'(t) = f(t, \gamma(t)), \quad t \in (0,T)$ e $\gamma(0) = x_0$. Assim, encontrar uma curva γ satisfazendo à (3.4) é equivalente a encontrar uma γ satisfazendo à (3.5).

Para isso, iremos considerar a aplicação $\Psi : V \to V$, onde $V = C([0,T]; \mathbb{R}^n)$, definida por

$$\Psi(\gamma)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \gamma(s))ds.$$

Dessa forma, encontrar uma curva γ satisfazendo à (3.4) é suficiente encontrar um ponto fixo para Ψ. Como mostrado no capítulo 2, $C([0,T], \mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach e logo podemos utilizar o teorema do ponto fixo de Banach para garantirmos que a aplicação possui apenas um ponto fixo. Devemos então demonstrar que Ψ é uma contração.

Vejamos que, para todo $t \in [0,T]$, temos

$$\begin{aligned}
\|\Psi(\gamma_1)(t) - \Psi(\gamma_2)(t)\| &= \|x_0 + \int_0^t f(s,\gamma_1(s))ds - (x_0 + \int_0^t f(s,\gamma_2(s))ds)\| \\
&\leq \int_0^t \|f(s,\gamma_1(s)) - f(s,\gamma_2(s))\|ds, \text{ e de (3.3)}, \\
&\leq \int_0^t L\|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\|ds \\
&\leq L\int_0^t \|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty ds = L\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty t, \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

pois $\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| \leq \|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty$, para qualquer $t \in [0,T]$.

Consideremos $\Psi^2 = \Psi \circ \Psi$. Então para todo $\gamma \in V$,

$$\Psi^2(\gamma)(s) = x_0 + \int_0^t f(s,\Psi(\gamma)(s))ds, \quad \forall t \in [0,T]$$

e temos que

$$\begin{aligned}
\|\Psi^2(\gamma_1)(t) - \Psi^2(\gamma_2)(t)\| &= \|x_0 + \int_0^t f(s,\Psi(\gamma_1)(s))ds - (x_0 + \int_0^t f(s,\Psi(\gamma_2)(s))ds)\| \\
&\leq \int_0^t \|f(s,\Psi(\gamma_1)(s)) - f(s,\Psi(\gamma_2)(s))\|ds, \text{ usando novamente (3.3)}, \\
&\leq \int_0^t L\|\Psi(\gamma_1)(s) - \Psi(\gamma_2)(s)\|ds, \text{ e de (3.6)}, \\
&\leq L\int_0^t L\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty s ds = L^2\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty \frac{t^2}{2}.
\end{aligned}$$

Prosseguindo com esse argumento para $\Psi^3, \ldots, \Psi^k$, obtemos

$$\|\Psi^k(\gamma_1)(t) - \Psi^k(\gamma_2)(t)\| \leq \frac{L^k t^k}{k!}\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty \leq \frac{L^k T^k}{k!}\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty, \qquad (3.7)$$

para todo $t \in [0,T]$, pois $0 \leq t \leq T$.

Passando ao supremo em $t \in [0,T]$ na desigualdade (3.7) temos:

$$\|\Psi^k(\gamma_1) - \Psi^k(\gamma_2)\|_\infty \leq \frac{L^k T^k}{k!}\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty.$$

Temos que $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{L^k T^k}{k!} = 0$. De fato, sendo $x_k = \dfrac{(LT)^k}{k!}$, temos

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{\frac{(LT)^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{(LT)^k}{k!}} = \frac{(LT)^{k+1}}{(k+1)k!} \cdot \frac{k!}{(LT)^k} = \frac{LT}{k+1}.$$

Logo, $\lim_{k\to\infty} \frac{LT}{k+1} = 0$, e pelo teorema (A.4) - apêndice, temos que $\lim_{k\to\infty} \frac{L^k T^k}{k!} = 0$. Assim, podemos fixar $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{L^k T^k}{k!} < 1$.

Dessa forma, temos que Ψ^k é uma contração em V. Como V é um espaço de Banach, pelo teorema (3.1) temos que existe um único ponto $\gamma \in V$ que é ponto fixo para Ψ^k. Do corolário (A.2) - apêndice, temos que γ é ponto fixo de Ψ, isto é,

$$\gamma(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \gamma(s))ds,$$

portanto, temos que existe uma única curva $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo ao problema de valor inicial (3.4). $\square$

3.4 Fluxos

Do teorema de Picard temos que, se uma função $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é lipschitziana, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existirá uma única curva $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $(0, T)$ solução do PVI (3.4). Assim definimos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : \quad & \mathbb{R}^n \to C([0, T]; \mathbb{R}^n) \\ & x_0 \mapsto \Phi(x_0) \end{aligned} \tag{3.8}$$

em que $\Phi(x_0)(t) = \gamma(t)$ é a solução de (3.4), ou seja,

$$\Phi(x_0)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \Phi(x_0)(s))ds.$$

Denominamos a aplicação (3.8) como sendo o **Fluxo gerado por** f ou fluxo associado ao problema de valor inicial (3.4).

O lema a seguir, conhecido como Desigualdade de Gronwall nos ajudará a demonstrar um resultado básico da Teoria das Equações Diferenciais que veremos mais adiante.

Lema 3.1 (Desigualdade de Gronwall) *Sejam $\alpha, \beta \geq 0$ e $\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva tal que*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \varphi(s)ds, \ \textit{para todo } t \in [0, T].$$

Então $\varphi(t) \leq \alpha e^{\beta t}$.

Demonstração:

Consideremos a função $\psi(t) = \alpha + \beta \int_0^t \varphi(s)ds$. Então pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos $\psi'(t) = \beta\varphi(t)$. Como por hipótese $\varphi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \varphi(s)ds$, temos para todo $t \in [0, T]$ que

$$\psi'(t) = \beta\varphi(t) \leq \beta\psi(t). \tag{3.9}$$

Multiplicando a desigualdade (3.9) por $e^{-\beta t}$:

$$\psi'(t)e^{-\beta t} \leq \beta\psi(t)e^{-\beta t} \quad \Rightarrow \quad \psi'(t)e^{-\beta t} - \beta\psi(t)e^{-\beta t} \leq 0 \tag{3.10}$$

Observemos que temos a derivada do produto de duas funções. Assim, podemos escrever (3.10) da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}(e^{-\beta t}\psi(t)) \leq 0. \tag{3.11}$$

Integrando (3.11) de 0 a t, obtemos

$$e^{-\beta t}\psi(t) - e^{-\beta 0}\psi(0) \leq 0,$$

$$e^{-\beta t}\psi(t) \leq \psi(0) = \alpha.$$

Portanto, $\psi(t) \leq \alpha e^{-\beta t}$. E pela definição de ψ temos que

$$\varphi(t) \leq \psi(t) = \alpha + \beta \int_0^t \varphi(s)ds \leq \alpha e^{-\beta t},$$

e concluímos a demonstração. $\square$

O resultado do teorema que enunciamos a seguir é conhecido como dependência contínua das soluções com relação aos dados iniciais. Veremos que se os dados iniciais x_0 e x' do PVI (3.4) estão próximos, suas respectivas curvas soluções permanecem próximas também.

Teorema 3.3 *Seja $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função Lipschitz-contínua. Então o fluxo gerado por f também é uma função Lipschitz-contínua.*

Demonstração:

Como f é lipshitiziana, pelo teorema de Picard, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ teremos uma única curva $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $(0,T)$, em que $\gamma(t) = \Phi(x_0)(t)$, Φ sendo o fluxo gerado por f. Nessas condições, já vimos que o fluxo gerado por f é definido por

$$\Phi(x)(t) = x + \int_0^t f(s, \Phi(x)(s))ds.$$

Iremos mostrar que existe $L_1 \geq 0$ (constante de Lipschitz) tal que para qualquer $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\|\Phi(x) - \Phi(x_0)\|_\infty \leq L_1 \|x - x_0\|.$$

Assim, sejam x_0, x' dois pontos de $\mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned} \Phi(x_0)(t) &= x_0 + \int_0^t f(s, \Phi(x_0)(s))ds \\ \Phi(x')(t) &= x' + \int_0^t f(s, \Phi(x')(s))ds \end{aligned}$$

Subtraindo as duas identidades acima temos,

$$\Phi(x')(t) - \Phi(x_0)(t) = x' - x_0 + \int_0^t (f(s, \Phi(x')(s)) - f(s, \Phi(x_0)(s)))ds. \tag{3.12}$$

Agora calcularemos a norma em $\mathbb{R}^n$ de (3.12),

$$\begin{aligned} \|\Phi(x')(t) - \Phi(x_0)(t)\| &= \|x' - x_0 + \int_0^t (f(s, \Phi(x')(s)) - f(s, \Phi(x_0)(s)))ds\| \\ &\leq \|x' - x_0\| + \int_0^t \|f(s, \Phi(x')(s)) - f(s, \Phi(x_0)(s))\|ds \end{aligned}$$

Como f é Lipschitz-contínua temos

$$\|\Phi(x')(t) - \Phi(x_0)(t)\| \leq \|x' - x_0\| + \int_0^t L\|\Phi(x')(s) - \Phi(x_0)(s)\|ds$$

logo,

$$\|\Phi(x')(t) - \Phi(x_0)(t)\| \leq \|x' - x_0\| + L\int_0^t \|\Phi(x')(s) - \Phi(x_0)(s)\|ds.$$

Como $\|\Phi(x')(t) - \Phi(x_0)(t)\|$ é função contínua e positiva e $\|x' - x_0\| \geq 0$ e $L \geq 0$, pois é a constante de Lipschitz de f, podemos usar a desigualdade de Gronwall e assim obtemos:

$$\|\Phi(x')(t) - \Phi(x_0)(t)\| \leq \|x' - x_0\|e^{Lt} \leq \|x' - x_0\|e^{LT},$$

pois $0 < t < T$. Passando ao supremo em t na desigualdade acima, temos

$$\|\Phi(x') - \Phi(x_0)\|_\infty \leq \|x' - x_0\| e^{LT},$$

como $e^{LT} > 0$, esta é a constante de Lipschitz de Φ. Concluímos então que o fluxo Φ gerado por f é uma função Lipschitz-contínua. $\square$

Finalizando nosso estudo sobre fluxos temos o seguinte teorema que estabelece uma relação entre a diferencial do fluxo gerado por f e o fluxo gerado por f'.

Teorema 3.4 *Seja $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 Lipschitz-contínua e Φ o fluxo associado a f. Então Φ é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e a sua diferencial é o fluxo associado ao problema de valor inicial*

$$\begin{cases} h'(t) &= f'(t, \Phi(x_0)(t))h(t), \ \forall t \in (0,T) \\ h(0) &= h_0 \end{cases} \tag{3.13}$$

Demonstração:

Sejam $x_0, h_0 \in \mathbb{R}^n$ e consideremos $y(t) = \Phi(x_0 + h_0)(t)$, $x(t) = \Phi(x_0)(t)$ e $h(t) = \Psi_{x_0}(h_0)t$, onde Φ é o fluxo gerado por f e por Ψ_{x_0} estamos denotando o fluxo associado ao problema de valor inicial (3.13). Para mostrarmos que Φ é diferenciável em x_0 e sua diferencial é Ψ_{x_0}, devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|h_0\| < \delta$ então

$$\frac{\|\Phi(x_0 + h_0) - \Phi(x_0) - \Psi_{x_0}(h_0)\|_\infty}{\|h_0\|} < \varepsilon.$$

Pela definição de $y(t)$, $x(t)$, $h(t)$, temos que

$$\begin{cases} y(t) &= x_0 + h_0 + \displaystyle\int_0^t f(s, y(s))ds, \\ x(t) &= x_0 + \displaystyle\int_0^t f(s, x(s))ds, \\ h(t) &= h_0 + \displaystyle\int_0^t f'(s, x(s))h(s)ds. \end{cases}$$

Se considerarmos a função $\varphi(t) = \|y(t) - x(t) - h(t)\|$, temos

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \|x_0 + h_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds - x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds) - (h_0 + \int_0^t f'(s, x(s))h(s)ds)\| \\ &= \|\int_0^t (f(s, y(s)) - f(s, x(s)) - f'(s, x(s))h(s))ds\| \\ &\leq \int_0^t \|f(s, y(s)) - f(s, x(s)) - f'(s, x(s))h(s)\|ds \end{aligned} \tag{3.14}$$

Somando e subtraindo $f'(s,x(s))y(s)$ e $f'(s,x(s))x(s)$ em (3.14),

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &\leq \int_0^t \|f'(s,x(s))y(s) - f'(s,x(s))y(s) + f'(s,x(s))x(s) - f'(s,x(s))x(s) + \\
&+ f(s,y(s)) - f(s,x(s)) - f'(s,x(s))h(s)\|ds \\
&= \int_0^t \|f'(s,x(s))\Big(y(s) - x(s) - h(s)\Big) + f(s,y(s)) - f(s(x(s)) - \\
&- f'(s,x(s))\Big(y(s) - x(s)\Big)\|ds
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &\leq \int_0^t \|f'(s,x(s))\Big(y(s) - x(s) - h(s)\Big)\|ds + \\
&+ \int_0^t \|f(s,y(s)) - f(s,x(s)) - f'(s,x(s))\Big(y(s) - x(s)\Big)\|ds
\end{aligned}$$

Denotaremos

$$\epsilon(s,x(s),y(s)-x(s)) = f(s,y(s)) - f(s,x(s)) - f'(s,x(s))\Big(y(s) - x(s)\Big),$$

e assim temos

$$\varphi(t) \leq \int_0^t \|f'(s,x(s))\|\|(y(s) - x(s) - h(s))\|ds + \int_0^t \|\epsilon(s,x(s),y(s)-x(s))\|ds. \quad (3.15)$$

Tomando $C_1 = \max\{\|f'(s,x(s))\| : s \in [0,T]\}$ e $C_2 = \displaystyle\int_0^T \|\epsilon(s,x(s),y(s)-x(s))\|ds$. De (3.15), obtemos

$$\varphi(t) \leq C_1 \int_0^t \varphi(s)ds + C_2.$$

Como $C_1, C_2 \geq 0$ e φ é uma função contínua e positiva, podemos usar a Desigualdade de Gronwall e obter $\varphi(t) \leq C_2 e^{C_1 t}$, para todo $t \in [0,T]$. Mas,

$$\begin{aligned}
\varphi(t) = \|y(t) - x(t) - h(t)\| &= \|\Phi(x_0 + h_0)(t) - \Phi(x_0)(t) - \Psi_{x_0}(t)\| \\
&\leq \|\Phi(x_0 + h_0) - \Phi(x_0) - \Psi_{x_0}(h_0)\|_\infty.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|\Phi(x_0 + h_0) - \Phi(x_0) - \Psi_{x_0}(h_0)\|_\infty \leq C_2 e^{C_1 t} \leq C_2 e^{C_1 T}, \quad (3.16)$$

pois $0 < t < T$.

Pelo corolário (A.3) - apêndice, temos que f é uniformemente diferenciável nos compactos de $[0,T]\times\mathbb{R}^n$, então da definição de diferenciabilidade uniforme (definição A.4 - apêndice), temos que dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$\|\epsilon(t,x(t),y(t)-x(t))\|<\varepsilon\|y(t)-x(t)\|\leq\varepsilon\|y-x\|_\infty,$$

se $\|y-x\|_\infty<\delta$. Logo,

$$\int_0^T\|\epsilon(s,x(s),y(s)-x(s))\|ds\leq\varepsilon T\|y-x\|_\infty$$

se $\|y-x\|_\infty<\delta$. Portanto, de (3.16) temos que se $\|y-x\|_\infty<\delta$, então

$$\|\Phi(x_0+h_0)-\Phi(x_0)-\Psi_{x_0}(h_0)\|_\infty\leq\varepsilon T\|y-x\|_\infty e^{C_1T} \tag{3.17}$$

Por outro lado, como f é Lipschitz-contínua, pelo teorema (3.3), temos que o fluxo Φ gerado por f também é função Lipschitz-contínua, isto é,

$$\|\Phi(x_0+h_0)-\Phi(x_0)\|_\infty=\|y-x\|_\infty\leq e^{LT}\|h_0\|<\delta.$$

Logo,

$$\|\Phi(x_0+h_0)-\Phi(x_0)-\Psi_{x_0}(h_0)\|_\infty\leq\varepsilon T\|h_0\|e^{(C_1+L)T}, \tag{3.18}$$

se $\|h_0\|<\delta e^{-LT}$.

Portanto, se $\delta_1=\delta e^{-LT}$ e $\|h_0\|<\delta_1$, temos de (3.17) e (3.18)

$$\frac{\|\Phi(x_0+h_0)-\Phi(x_0)-\Psi_{x_0}(h_0)\|_\infty}{\|h_0\|}<C_3\varepsilon.$$

Assim, pela proposição (1.5), o fluxo Φ é diferenciável e a sua diferencial é o fluxo Ψ_{x_0} associado ao PVI (3.13), que é o fluxo gerado por f'. $\square$

Capítulo 4

O Teorema de Arzelà-Ascoli e compacidade de $C(K;\mathbb{R}^m)$

Neste capítulo faremos um estudo do teorema de Arzelà-Ascoli, que trabalha a compacidade no espaço das funções contínuas definidas em conjuntos compactos e possui diversas aplicações. Aqui apresentaremos a sua aplicação na demonstração da existência de soluções de equações diferenciais e equações integrais.

4.1 Compacidade no espaço $C(K;\mathbb{R}^m)$

Primeiramente vamos trabalhar a compacidade em espaço das funções contínuas com domínio compacto. Este é um espaço vetorial de dimensão infinita e munido da sua norma natural é espaço de Banach, dessa forma alguns resultados importantes do $\mathbb{R}^n$ são válidos em $C(K;\mathbb{R}^m)$. Vimos anteriormente que todo conjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$, ou de qualquer espaço vetorial de dimensão finita, é compacto. Podemos nos perguntar então se esse resultado também é válido para $C(K;\mathbb{R}^m)$. Para respondermos esta questão, vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 4.1 *Seja a bola fechada $B = \{f \in C([0,1];\mathbb{R}) : \ \|f\|_\infty \leq 1\}$. B é um conjunto de $C([0,1];\mathbb{R})$ fechado e limitado; iremos verificar se B é compacto neste espaço.*

Seja a sequência de funções $\{f_k\} \subset C([0,1];\mathbb{R})$*, definidas por*

$$f_k(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-kx)^2}.$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$ *e para todo* $x \in [0,1]$*, temos*

$$x^2 \leq x^2 + (1-kx)^2,$$

logo $f_k(x) \leq 1$ *e* $\|f_k\|_\infty = \max\{|f_k(x)| : \ x \in [0,1]\} \leq 1$*, então* $\{f_k\} \subset B$*. Além disso, temos que* $f_k \to 0$ *pontualmente em* $[0,1]$*. De fato,*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^2}{x^2+(1-kx)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{x^2}{k^2}}{\frac{x^2+(1-kx)^2}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{x^2/k^2}{\frac{x^2}{k^2} + \frac{1}{k^2} - \frac{2kx}{k^2} + \frac{k^2x^2}{k^2}}$$

Usando as propriedades de soma e subtração de limites, temos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^2}{x^2+(1-kx)^2} = \frac{0}{x^2} = 0, \ \textit{se } x \in (0,1].$$

E se $x = 0$*, temos*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^2}{x^2+(1-kx)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{0^2}{0^2+(1-k0)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{0}{1} = 0.$$

Como B *é conjunto de um espaço vetorial normado, se for compacto então toda sequência de* B *deve possuir subsequência convergente. Neste caso,* $\{f_k\}$ *deve admitir subsequência convergente necessariamente a zero. Assim, seja* $\{f_{k_i}\}$ *subsequência de* $\{f_k\}$*, vejamos que se tomarmos* $x = \dfrac{1}{k_j}$ *teremos* $\forall j \in \mathbb{N}$*,*

$$f_{k_j}(1/k_j) = \frac{(1/k_j)^2}{(1/k_j)^2 + (1-k_j/k_j)^2} = 1.$$

Dessa forma, $f_{k_j} \not\to 0$*, isto é, existe* $\varepsilon > 0$*, para todo* $j \in \mathbb{N}$ *tal que* $|f_{k_j}(x)| > \varepsilon$*, para algum* $x \in [0,1]$*. De fato, tomando* $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ *e* $x = \dfrac{1}{k_j}$*, temos*

$$|f_{k_j}(1/k_j)| = 1 > \frac{1}{2}.$$

Logo B *não é compacto.*

Com este exemplo, podemos perceber que apesar de B ser fechado e limitado, não é compacto em $C([0,1];\mathbb{R})$, o que nos mostra que nem todo conjunto fechado e limitado de $C(K;\mathbb{R}^m)$ é necessariamente compacto.

A compacidade dos conjuntos deste espaço é caracterizada pelo teorema de Arzelà-Ascoli que veremos mais adiante.

4.2 O Teorema de Arzelà-Ascoli

Antes de começarmos o estudo do teorema, precisamos da definição de conjunto equicontínuo.

Definição 4.1 *Um conjunto $\mathcal{X} \subset C(K;\mathbb{R}^m)$ é dito equicontínuo se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $x, y \in K$ e $\|x - y\| < \delta$ então $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ para qualquer $f \in \mathcal{X}$.*

Denotamos o conjunto imagem das funções de $\mathcal{X} \subset C(K;\mathbb{R}^m)$, por $\mathcal{X}(x) = \{f(x) : \ f \in \mathcal{X}\}$.

Exemplo 4.2 *Dados $[a,b] \subset \mathbb{R}$ com $a < b$ e $M > 0$, o conjunto*

$$\mathcal{X} = \{f \in \mathcal{C}^{(1)}([a,b]); \|f'\| \leq M\}$$

é equicontínuo; aqui $\mathcal{C}^{(1)}([a,b])$ é o conjunto das funções reais contínuas definidas em $[a,b]$, cuja diferencial também é contínua e $\|f'\| = \sup\limits_{a \leq t \leq b} |f'(t)|$.

De fato, dado $t_0 \in [a,b]$, para todo $t \in [a,b]$ e $f \in \mathcal{X}$, temos

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| = |\int_{t_0}^{t} f'(s)ds| &\leq \int_{t_0}^{t} |f'(s)|ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f'\|ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} Mds \leq M|t - t_0|. \end{aligned}$$

Temos então que $|f(t) - f(t_0)| \leq M|t - t_0|$. Como $M > 0$ e t, t_0 são pontos quaisquer de $[a,b]$, f é Lipschitz-contínua e, consequentemente, uniformemente contínua, isto é, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que se $t, t_0 \in [a,b]$, $\|t - t_0\| < \delta$ então $\|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon$. Como isto vale para qualquer $f \in \mathcal{X}$, concluímos que $\mathcal{X}$ é equicontínuo.

Exemplo 4.3 *Para $n \geq 2$ e $t \in [0,1]$ definimos*

$$f_n(t) = \begin{cases} nt, & se \quad 0 \leq t \leq 1/n; \\ 2 - nt, & se \quad 1/n \leq t \leq 2/n; \\ 0, & se \quad 2/n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{X} = \{f_n; \quad n \geq 2\} \subset \mathcal{C}([0,1])$*, temos que* $\mathcal{X}$ *não é equicontínuo no ponto* $t_0 = 0$*. Devemos mostrar então que existe* $\varepsilon > 0$*, para todo* $\delta > 0$*, tal que* $t, t_0 \in [0,1]$ *e* $|t - t_0| < \delta$ $\Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$ *para algum* $f \in \mathcal{X}$*.*

De fato, tomando $\varepsilon = 1/2$*, qualquer que seja* $\delta > 0$*, pela propriedade arquimediana nos reais, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < 1/n_0 < \delta$*, logo* $|0 - 1/n_0| < \delta$ *e*

$$|f_{n_0}(1/n_0) - f_{n_0}(0)| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon.$$

Vamos agora caracterizar os conjuntos compactos de $C(K;\mathbb{R}^m)$, através do seguinte teorema.

Teorema 4.1 (Arzelà-Ascoli 1) *Seja* $\mathcal{X}$ *um subconjunto fechado de* $C(K;\mathbb{R}^m)$*. Então* $\mathcal{X}$ *é compacto em* $C(K;\mathbb{R}^m)$ *se e somente se,* $\mathcal{X}$ *é equicontínuo e para todo* $x \in K$*,* $\mathcal{X}(x)$ *é compacto em* $\mathbb{R}^m$*.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos $\mathcal{X}$ compacto em $C(K;\mathbb{R}^m)$ e $x_0 \in K$.

Provaremos primeiramente que $\mathcal{X}(x_0)$ é compacto em $\mathbb{R}^m$. Consideremos $\{\xi_k\}$ uma sequência de $\mathcal{X}(x_0)$, pela definição de $\mathcal{X}(x_0)$, existe $f_k \in \mathcal{X}$ tal que $f_k(x_0) = \xi_k$. Como $C(K;\mathbb{R}^m)$ é um espaço vetorial normado podemos dizer que $\mathcal{X}$ é sequencialmente compacto pelo teorema (1.1), logo $\{f_k\}$ admite subsequência $\{f_{k_i}\}$ tal que para algum $f \in \mathcal{X}$, $f_{k_i} \to f$ uniformemente. Isto é, $f_{k_i}(x) \to f(x)$, $\forall x \in K$, pois a convergência uniforme implica a convergência pontual, em particular para x_0 temos,

$$\xi_{k_i} = f_{k_i}(x_0) \to f(x_0) = \xi \in \mathcal{X}(x_0),$$

logo $\{\xi_k\}$ possui subsequência convergente para algum elemento de $\mathcal{X}(x_0)$ e pelo teorema (1.1), $\mathcal{X}(x_0)$ é compacto em $\mathbb{R}^m$.

Para provarmos a equicontinuidade de $\mathcal{X}$, tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer e consideremos a cobertura $\{B_\varepsilon(f)\}_{f \in \mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$, onde $B_\varepsilon(f) = \{g \in C(K;\mathbb{R}^m) : \|g - f\|_\infty < \varepsilon\}$. Da compacidade de $\mathcal{X}$, por meio de coberturas, temos que existem $f_1, f_2, \ldots, f_k$ em $\mathcal{X}$ tais que

$$\mathcal{X} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_\varepsilon(f_i) \quad \text{(subcobertura finita de } \mathcal{X}\text{)}. \tag{4.1}$$

Sabemos que cada f_i é contínua em K e K é compacto de $\mathbb{R}^n$, logo f_i é uniformemente contínua em K pelo teorema (1.8), dessa forma $\exists \delta_i > 0$ para todo $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|x - y\| < \delta_i \Rightarrow \|f_i(x) - f_i(y)\| < \varepsilon, \text{ para cada } i = 1, \ldots, k. \tag{4.2}$$

Temos que $f \in \mathcal{X}$ implica $f \in B_\varepsilon(f_{i_0})$ por (4.1) para algum $i_0 = 1, \ldots, k$. Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k\}$, se $\|x - y\| < \delta$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f_{i_0}(x)\| + \|f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)\| + \|f_{i_0}(y) - f(y)\|$$

Como $\|f - f_{i_0}\|_\infty = \max\{\|f(x) - f_{i_0}(x)\| : x \in K\}$ então $\|f(x) - f_{i_0}(x)\| \leq \|f - f_{i_0}\|_\infty$ para qualquer $x \in K$. Assim,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq 2\|f - f_{i_0}\|_\infty + \|f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)\|.$$

Como $\|x - y\| < \delta \leq \delta_i$, da continuidade uniforme de f_{i_0} em (4.2) temos $\|f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)\| < \varepsilon/2$, além disso, $\|f - f_{i_0}\|_\infty < \varepsilon$ pois $f \in B_\varepsilon(f_{i_0})$, como estamos considerando ε qualquer, em particular é válido também para $\varepsilon/4$. Portanto,

$$\|f(x) - f(y)\| < \frac{2\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ para qualquer } f \in \mathcal{X},$$

logo $\mathcal{X}$ é equicontínuo.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora $\mathcal{X}(x)$ compacto em $\mathbb{R}^m$ para todo $x \in K$ e $\mathcal{X}$ equicontínuo. Iremos provar que $\mathcal{X}$ é compacto em $C(K; \mathbb{R}^m)$, ou seja, toda sequência de $\mathcal{X}$ possui subsequência convergente em $\mathcal{X}$.

Assim, consideremos $\{f_k\}$ uma sequência qualquer de $\mathcal{X}$, como $\mathcal{X}$ é equicontínuo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f_k(x) - f_k(y)\| < \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Seja $\{B_\delta(x)\}_{x \in K}$ uma cobertura de K, como K é compacto de $\mathbb{R}^n$ possui subcobertura finita, ou seja, existem $x_1, x_2, \ldots, x_l \in K$ tais que $K \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{l} B_\delta(x_j)$.

Da hipótese $\mathcal{X}(x_1)$ é compacto, então $\{f_k(x_1)\} \subset \mathcal{X}(x_1)$ admite uma subsequência $\{f_{k_i}\}$ convergente para um elemento de $\mathcal{X}(x_1)$. Da mesma forma, $\mathcal{X}(x_2)$ é compacto, $\{f_{k_i}(x_2)\}$ admite subsequência $\{f_{k_{i_j}}(x_2)\}$ convergente para um elemento de $\mathcal{X}(x_2)$. Seguindo com este mesmo raciocínio para $\mathcal{X}(x_i)$, $i = 1, \ldots, k$, podemos construir uma subsequência de $\{f_k\}$, que denotaremos por $\{f_{k_i}\}$, que converge pontualmente em x_j, $\forall j = 1, 2, \ldots, l$. Logo $\{f_{k_i}\}$ é uma sequência de Cauchy, então $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$i, i' \geq i_0 \Rightarrow \|f_{k_i}(x_j) - f_{k_{i'}}(x_j)\| < \varepsilon \quad j = 1, 2, \ldots, l. \tag{4.4}$$

Tomando $x \in K$, temos que $x \in B_\delta(x_{j_0})$ para algum j_0. Se $i, i' \geq i_0$, podemos escrever

$$\|f_{k_i}(x) - f_{k_{i'}}(x)\| \leq \|f_{k_i}(x) - f_{k_i}(x_{j_0})\| + \|f_{k_i}(x_{j_0}) - f_{k_{i'}}(x_{j_0})\| + \|f_{k_{i'}}(x_{j_0}) - f_{k_{i'}}(x)\|.$$

Como $\|x - x_{j_0}\| < \delta$; da equicontinuidade de $\mathcal{X}$ temos: $\|f_{k_i}(x) - f_{k_i}(x_{j_0})\| < \varepsilon/3$ e $\|f_{k_{i'}}(x_{j_0}) - f_{k_{i'}}(x)\| < \varepsilon/3$. Além disso, de (4.4) se $i, i' \geq i_0, \quad \|f_{k_i}(x_{j_0}) - f_{k_{i'}}(x_{j_0}) < \varepsilon/3$. Como i_0 não depende de x, podemos concluir que $\{f_{k_i}\}$ converge uniformemente para algum $f \in C(K; \mathbb{R}^m)$. Em particular $f \in \overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$, pois $\mathcal{X}$ é subconjunto fechado. Portanto $\mathcal{X}$ é compacto em $C(K; \mathbb{R}^m)$. □

Apesar de termos um resultado muito importante com esse teorema, para que a compacidade de $\mathcal{X}$ seja garantida é necessário que $\mathcal{X}$ seja fechado, equicontínuo e o seu conjunto imagem deve ser fechado e limitado (compacto) em $\mathbb{R}^m$. Mas em muitas aplicações teremos conjuntos $\mathcal{X}$ em que $\mathcal{X}(x)$ é apenas limitado para todo x, como veremos na seção 1.3. Nestes casos, não podemos utilizar o teorema acima, porém veremos que mesmo enfraquecendo as hipóteses do teorema (4.1) o seu resultado não perde a força e nem a sua importância, pois ainda garantirá a compacidade relativa do conjunto.

Antes disso, vejamos o que é um conjunto relativamente compacto.

Definição 4.2 *Dizemos que um conjunto X de um espaço métrico é relativamente compacto se $\overline{X}$ é compacto.*

Observação 4.1 *Se o espaço métrico em questão é $\mathbb{R}^m$, teremos que relativamente compacto é o mesmo que ser limitado.*
De fato, se $X \subset \mathbb{R}^m$ é relativamente compacto então $\overline{X}$ é compacto de $\mathbb{R}^m$, ou seja, é fechado e limitado. Como $X \subset \overline{X}$, é subconjunto de um conjunto limitado, logo X também é limitado.

O lema a seguir nos ajudará na demonstração do teorema seguinte.

Lema 4.1 *Seja $\mathcal{X} \subset C(K; \mathbb{R}^m)$. Então:*

(a) *$\mathcal{X}$ é equicontínuo $\Longleftrightarrow \overline{\mathcal{X}}$ é equicontínuo;*

(b) $\overline{\mathcal{X}}(x) \subset \overline{\mathcal{X}(x)}, \quad \forall x \in K$;

(c) *Se $\mathcal{X}$ é equicontínuo e $\mathcal{X}(x)$ é limitado para todo $x \in K$ (K compacto de $\mathbb{R}^n$), então* $\overline{\mathcal{X}}(x) = \overline{\mathcal{X}(x)} \quad \forall x \in K$.

Demonstração:

(a) Se $\overline{\mathcal{X}}$ é equicontínuo é óbvio que $\mathcal{X}$ também será, pois $\mathcal{X} \subset \overline{\mathcal{X}}$. Mostraremos então que se $\mathcal{X}$ for equicontínuo o seu fecho $\overline{\mathcal{X}}$ também será equicontínuo.

Suponhamos que $\mathcal{X}$ é equicontínuo, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que, $x, y \in K$ e $\|x-y\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon/3$ para todo $f \in \mathcal{X}$. Seja $f^* \in \overline{\mathcal{X}}$, logo existe uma sequência $\{f_k\} \subset \mathcal{X}$ tal que $f_k \to f^*$ uniformemente em K, isto é, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall x \in K$, $\|f_k(x) - f^*(x)\| < \varepsilon/3$ se $k \geq k_0$. Para $x, y \in K$, $f_k \in \mathcal{X}$ e $\forall k \geq k_0$, temos

$$\begin{aligned} \|f^*(x) - f^*(y)\| &\leq \|f^*(x) - f_k(x)\| + \|f_k(x) - f_k(y)\| + \|f_k(y) - f^*(y)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $\overline{\mathcal{X}}$ é equicontínuo.

(b) Seja $\xi_k \in \overline{\mathcal{X}}(x)$, mostraremos que ξ_k também pertence a $\overline{\mathcal{X}(x)}$. Pela definição do conjunto $\mathcal{X}(x)$, existe uma função $f \in \overline{\mathcal{X}}$ tal que $\xi_k = f(x)$. Como $\overline{\mathcal{X}}$ é fecho de $\mathcal{X}$ então f é ponto aderente de $\mathcal{X}$, logo existe $f_k \in \mathcal{X}$ em que $f_k \to f$ uniformemente, isto é, $f_k(x) \to f(x)$ pontualmente para todo $x \in K$. Como $f_k(x) \in \mathcal{X}(x)$ então $f(x) \in \overline{\mathcal{X}(x)}$, logo $f(x) = \xi_k \Rightarrow \xi_k \in \overline{\mathcal{X}}$. Portanto $\overline{\mathcal{X}}(x) \subset \overline{\mathcal{X}(x)}$, $\forall x \in K$.

(c) Como acabamos de mostrar que para todo $x \in K$ temos $\overline{\mathcal{X}}(x) \subset \overline{\mathcal{X}(x)}$, para provarmos que $\overline{\mathcal{X}}(x) = \overline{\mathcal{X}(x)}$, basta mostrarmos que $\overline{\mathcal{X}(x)} \subset \overline{\mathcal{X}}(x)$.

Seja $\xi \in \overline{\mathcal{X}(x)}$, então pela definição do fecho de conjunto, existe uma sequência $\{\xi_k\} \subset \mathcal{X}(x)$ tal que $\xi_k \to \xi$. Pela definição de $\mathcal{X}(x)$, existe $\{f_k\}$ sequência de $\mathcal{X}$ tal que $f_k(x) = \xi_k$. Provaremos que $\{f_k\}$ converge uniformemente em K. Por hipótese $\mathcal{X}$ é equicontínuo, então dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f_k(x) - f_k(y)\| < \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Consideremos $\{B_\delta(x)\}_{x\in K}$, com f de (4.5) uma cobertura aberta de K e como K é compacto de $\mathbb{R}^n$, possui subcobertura finita, ou seja, existem $x_1, x_2, \ldots, x_l \in K$ tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{l} B_\delta(x_j). \tag{4.6}$$

Da hipótese temos também que $\mathcal{X}(x_1)$ é limitado, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, $\{f_k(x_1)\} \subset \mathcal{X}(x_1)$ possui subsequência $\{f_{k_i}\}$ convergente. Do mesmo modo, $\mathcal{X}(x_2)$ é limitado, $\{f_{k_i}(x_2)\}$ possui subsequência $\{f_{k_{i_j}}(x_2)\}$ convergente. Prosseguindo com este mesmo argumento para os conjuntos $\mathcal{X}(x_j)$, construímos uma subsequência de $\{f_k\}$, que denotaremos por $\{f_{k_i}\}$, que converge pontualmente em x_j, para todo $j = 1, 2, \ldots, l$. Como $\{f_{k_i}\}$ é convergente, $\{f_{k_i}\}$ é sequência de Cauchy vide proposição (1.3), logo existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$i, i' \geq i_0 \Rightarrow \|f_{k_i}(x_j) - f_{k_{i'}}(x_j)\| < \varepsilon/3 \quad j = 1, 2, \ldots, l. \tag{4.7}$$

Tomemos $x' \in K$, então $x' \in B_\delta(x_{j_0})$ por (4.6), para algum $j_0 = 1, \ldots, l$. Assim, se $i, i' \geq i_0$, temos

$$\|f_{k_i}(x') - f_{k_{i'}}(x')\| \leq \|f_{k_i}(x') - f_{k_i}(x_{j_0})\| + \|f_{k_i}(x_{j_0}) - f_{k_{i'}}(x_{j_0})\| + \|f_{k_{i'}}(x_{j_0}) - f_{k_{i'}}(x')\|.$$

Como $\|x' - x_{j_0}\| < \delta$; de (4.5): $\|f_{k_i}(x') - f_{k_i}(x_{j_0})\| < \varepsilon/3$ e $\|f_{k_{i'}}(x_{j_0}) - f_{k_{i'}}(x')\| < \varepsilon/3$. E de (4.7) se $i, i' \geq i_0$, $\quad \|f_{k_i}(x_{j_0}) - f_{k_{i'}}(x_{j_0})\| < \varepsilon/3$. Como i_0 não depende de x', podemos concluir que $\{f_{k_i}\}$ converge uniformemente para algum $f \in \overline{\mathcal{X}}$ e então a sequência $\{f_k\}$ também converge uniformemente para f, isto é, $f_k(x) = \xi_k \to f(x)$, para todo $x \in K$, da unicidade do limite de ξ_k podemos concluir que $f(x) = \xi \in \overline{\mathcal{X}}(x)$. Logo $\overline{\mathcal{X}(x)} \subset \overline{\mathcal{X}}(x)$ e portanto $\overline{\mathcal{X}}(x) = \overline{\mathcal{X}(x)}$. $\square$

Enunciaremos agora o teorema de Arzelà-Ascoli que determina quais as condições necessárias e suficientes para que tenhamos a compacidade relativa de um conjunto pertencente a $C(K; \mathbb{R}^m)$.

Teorema 4.2 (Arzelà-Ascoli 2) *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $\mathcal{X} \subset C(K; \mathbb{R}^m)$. Então $\mathcal{X}$ é relativamente compacto em $C(K; \mathbb{R}^m)$, se e somente se, $\mathcal{X}$ é equicontínuo e $\mathcal{X}(x)$ é limitado de $\mathbb{R}^m$, para todo $x \in K$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Consideremos que $\mathcal{X}$ é relativamente compacto em $C(K;\mathbb{R}^m)$, ou seja, $\overline{\mathcal{X}}$ é compacto. Como $\overline{\mathcal{X}}$ é fechado (por ser o fecho de $\mathcal{X}$), da caracterização dos conjuntos compactos de $C(K;\mathbb{R}^m)$ dada no teorema (4.1), temos que $\overline{\mathcal{X}}$ é equicontínuo e $\overline{\mathcal{X}}(x)$ é compacto em $\mathbb{R}^m$ para todo $x \in K$. Pelo lema anterior, $\mathcal{X}$ é equicontínuo e $\overline{\mathcal{X}}(x) = \overline{\mathcal{X}(x)}$ é compacto. Concluímos então que $\mathcal{X}$ é equicontínuo e para todo $x \in K$, $\mathcal{X}(x)$ é limitado em $\mathbb{R}^m$.

($\Leftarrow$) Consideremos agora, $\mathcal{X}$ equicontínuo e $\mathcal{X}(x)$ limitado de $\mathbb{R}^m$ para todo $x \in K$, isto é, $\overline{\mathcal{X}(x)}$ é compacto. Pelo lema (4.1), do item (a) temos que $\overline{\mathcal{X}}$ é equicontínuo e usando o item (c) temos que $\overline{\mathcal{X}(x)} = \overline{\mathcal{X}}(x)$, logo $\overline{\mathcal{X}}(x)$ é compacto em $\mathbb{R}^m$ para todo $x \in K$. Como $\overline{\mathcal{X}}$ é um conjunto fechado, pelo teorema (4.1), $\overline{\mathcal{X}}$ é compacto em $C(K;\mathbb{R}^m)$ e concluímos que $\mathcal{X}$ é relativamente compacto. □

Mesmo que o teorema garanta apenas a compacidade do fecho de um conjunto $\mathcal{X}$ de $C(K;\mathbb{R}^m)$, as condições exigidas no mesmo são satisfeitas mais facilmente do que as condições do teorema (4.1), pois nem sempre $\mathcal{X}(x)$ é compacto.

Na aplicação a seguir do teorema de Arzelà-Ascoli, é este resultado acima que utilizamos. Porém, como vimos, precisamos do teorema (4.1) para provarmos o teorema (4.2), por isso ambos tem grande importância quando nos referimos a compacidade de conjuntos em $C(K;\mathbb{R}^m)$.

4.3 Teorema de Cauchy-Peano

Faremos agora a aplicação do Teorema de Arzelà-Ascoli na demonstração do teorema de Cauchy-Peano, que é um teorema de existência de solução para problemas de valor inicial.

Teorema 4.3 *Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $(x_0, y_0) \in \Omega$.*
Então existe $r > 0$ e pelo menos uma função de classe C^1, $\varphi : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x_0) = y_0$, satisfazendo

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r). \tag{4.8}$$

Ou seja, por todo ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ *passa uma solução da equação diferencial* $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Demonstração:

Para provarmos o teorema iremos considerar uma vizinhança limitada, $U \subset \Omega$, de (x_0, y_0) e definiremos $M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in \overline{U}\}$.

Consideremos $r > 0$ de forma que o retângulo

$$R = \{(x, y) \in \Omega : |x - x_0| \leq r, |y - y_0| \leq Mr\}$$

esteja contido em U.

Como a função que deve satisfazer (4.8) é definida em $[x_0 - r, x_0 + r]$, podemos considerar os intervalos $[x_0, x_0 + r]$ e $[x_0 - r, x_0]$ para facilitar a demonstração. Assim, primeiro consideraremos $[x_0, x_0 + r]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomaremos a partição de $[x_0, x_0 + r]$ definida por $x_i = x_0 + \dfrac{ir}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ e consideremos também a função poligonal

$$\psi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i^n \varphi_i^n(x),$$

em que os coeficientes a_i^n são definidos por

$$a_0 = y_0 \tag{4.9}$$
$$a_{i+1} = a_i + \frac{r}{n} f(x_i, a_i), \; i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{4.10}$$

E as funções φ_i^n são definidas da seguinte forma

$$\varphi_0^n(x) = \begin{cases} \dfrac{n(x_1 - x)}{r} & \text{se } x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0 & \text{senão.} \end{cases}$$

$$\varphi_n^n(x) = \begin{cases} \dfrac{n(x - x_{n-1})}{r} & \text{se } x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ 0 & \text{senão.} \end{cases}$$

e para $i = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\varphi_i^n(x) = \begin{cases} \dfrac{n(x - x_{i-1})}{r} & \text{se } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \dfrac{n(x_{i+1} - x)}{r} & \text{se } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{senão.} \end{cases}$$

Seja $\mathcal{X} = \{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$, iremos mostrar que $\mathcal{X}$ é relativamente compacto em $C([x_0, x_0 + r]; \mathbb{R})$ e pelo teorema de Arzelà-Ascoli (4.2) é suficiente demonstrar que $\mathcal{X}$ satisfaz as condições necessárias, isto é, se $\mathcal{X}$ é equicontínuo e se $\mathcal{X}(x)$ é limitado para todo x.

Verifiquemos que para $i = 1, 2, \ldots, n$, temos

$$\begin{aligned}
|a_i - a_0| &\leq |a_i - a_{i-1}| + |a_{i-1} - a_{i-2}| + \ldots + |a_2 - a_1| + |a_1 - a_0| \\
&= |a_{i-1} + \frac{r}{n} f(x_{i-1}, a_{i-1}) - a_{i-1}| + \ldots + |a_1 + \frac{r}{n} f(x_1, a_1) - a_1| + \\
&+ |a_0 + \frac{r}{n} f(x_0, a_0) - a_0| \\
&= \frac{r}{n}(|f(x_{i-1}, a_{i-1})| + |f(x_{i-2}, a_{i-2})| + \ldots + |f(x_1, a_1)| + |f(x_0, a_0)|) \\
&\leq \frac{r}{n}(M + M + \ldots + M + M) \\
&\leq \frac{nMr}{n} = Mr.
\end{aligned}$$

Como $|a_i - a_0| \leq Mr$, o gráfico de ψ_n está inteiramente contido no retângulo R, isto quer dizer que $(x_i, a_i) \in U,\ i = 0, 1, \ldots, n$. Podemos ver que ψ_n é contínua e a sua derivada ψ_n' é contínua por partes. De fato, como

$$\psi_n(x) = \frac{n}{r}(a_{i-1}^n x_i - a_{i-1}^n x + a_i^n x - a_i^n x_{i-1})$$

então $\psi_n'(x) = \frac{n}{r}(-a_{i-1}^n - a_i^n)$. Mais precisamente,

$$\psi_n'(x) = (a_i^n - a_{i-1}^n)\frac{n}{r} = f(x_{i-1}, a_{i-1}^n), \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i).$$

Em particular,

$$|\psi_n'(x)| \leq \frac{n}{r}|a_i^n - a_{i-1}^n| \leq |f(x_{i-1}, a_{i-1}^n)| \leq M, \tag{4.11}$$

pois já vimos que $(x_i, a_i) \in U \subset \overline{U}$.

Além disso, como pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\psi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \psi_n'(s) ds, \tag{4.12}$$

temos

$$\begin{aligned}
|\psi_n(x)| &= |y_0 + \int_{x_0}^{x} \psi_n'(s)ds| \\
&\leq |y_0| + \int_{x_0}^{x} |\psi_n'(s)|ds \\
&\leq |y_0| + \int_{x_0}^{x} M ds \\
&\leq |y_0| + M|x - x_0| \\
&\leq Mr.
\end{aligned}$$

o que nos mostra que $\mathcal{X}(x)$ é limitado para qualquer $x \in [x_0, x_0 + r]$.

Para toda função $\psi_n \in \mathcal{X}$, dados $x', x \in [x_0, x_0 + r]$, temos

$$\begin{aligned}
|\psi_n(x') - \psi_n(x)| &= |y_0 + \int_{x_0}^{x'} \psi_n'(s)ds - (y_0 + \int_{x_0}^{x} \psi_n'(s)ds)| \\
&\leq |\int_{x_0}^{x'} \psi_n'(s)ds - \int_{x_0}^{x} \psi_n'(s)ds| \\
&\leq \int_{x}^{x'} |\psi_n'(s)|ds \leq M|x' - x|,
\end{aligned}$$

o que nos mostra que ψ_n é Lipschitz-contínua e usando o mesmo argumento utilizado no exemplo (4.2), concluímos que $\mathcal{X}$ é equicontínuo. Logo $\mathcal{X}$ satisfaz as condições do teorema de Arzelà-Ascoli 2, sendo portanto relativamente compacto em $C([x_0, x_0 + r]; \mathbb{R})$, isto é, $\overline{\mathcal{X}}$ é compacto.

Como $C([x_0, x_0 + r]; \mathbb{R})$ é espaço vetorial, $\overline{\mathcal{X}}$ é sequencialmente compacto, então toda sequência de $\overline{\mathcal{X}}$ possui subsequência convergente. Como $\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X}' \cup \mathcal{X}$, teremos que $\{\psi_n\}_n$ possui uma subsequência (que denotaremos ainda por ψ_n) que converge uniformemente em $[x_0, x_0 + r]$ para alguma função $\psi \in C([x_0, x_0 + r])$.

Para concluírmos a demonstração devemos mostrar que ψ satisfaz a equação (4.8), pelo Teorema Fundamental do Cálculo isso é equivalente a mostrar que

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \psi(s))ds.$$

Para este fim, consideremos as funções Φ_n e Φ definidas por

$$\Phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \psi_n(s))ds \quad \text{e} \quad \Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \psi(s))ds.$$

Como f é uniformemente contínua em R, (pois f é contínua e R é subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^2$, portanto compacto), dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - x'| < \delta$ e $|y - y'| < \delta$, temos $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$. Temos ainda que ψ_n converge uniformemente para ψ em $[x_0, x_0 + r]$, então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_1$, $|\psi_n(x) - \psi(x)| < \delta$.

Consideremos a partição tal que $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, $i = 1, \ldots, n$, então $\dfrac{r}{n} < \delta \Rightarrow n > \dfrac{r}{\delta}$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, r/\delta\}$ temos para $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
|\Phi_n(x) - \Phi(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, \psi_n(s)) - f(s, \psi(s))| ds \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(s, \psi_n(s)) - f(s, \psi(s))| ds \\
&\leq \int_{x_0}^{x_1} |f(s, \psi_n(s)) - f(s, \psi(s))| ds + \int_{x_1}^{x_2} |f(s, \psi_n(s)) - f(s, \psi(s))| ds + \ldots \\
&+ \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} |f(s, \psi_n(s)) - f(s, \psi(s))| ds + \int_{x_{n-1}}^{x_n} |f(s, \psi_n(s)) - f(s, \psi(s))| ds \\
&< \int_{x_0}^{x_1} \varepsilon ds + \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon ds + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \varepsilon ds + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varepsilon ds \\
&\leq \varepsilon(|x_1 - x_0| + |x_1 - x_2| + \ldots + |x_{n-1} - x_{n-2}| + |x_n - x_{n-1}|) \\
&\leq \varepsilon |x_n - x_0| \leq \varepsilon r
\end{aligned}$$

e podemos concluir que Φ_n converge uniformemente para Φ.

Porém, como

$$\Phi_n(x) - \psi_n(x) = \int_{x_0}^{x} (f(s, \psi_n(s)) - \psi_n'(s)) ds,$$

podemos escrever

$$|\Phi_n(x) - \psi_n(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(s, \psi_n(s)) - \psi_n'(s)| ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(s, \psi_n(s)) - f(x_{i-1}, a_{i-1}^n)| ds.$$

Como ψ_n é função contínua definida em $[x_0, x_0 + r]$, ψ_n é uniformemente contínua neste intervalo. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|x - x'| < \delta_1 \Rightarrow |\psi_n(x) - \psi_n(x')| < \varepsilon$, em particular, $|\psi_n(x) - \psi_n(x')| < \delta$. E como $a_{i-1}^n = \psi_n(x_{i-1})$, temos

$$\begin{aligned}
|\Phi_n(x) - \psi_n(x)| &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(s, \psi_n(s)) - f(x_{i-1}, \psi_n(x_{i-1}))| ds \\
&\leq \varepsilon r.
\end{aligned}$$

Dessa forma temos que a sequência $\Phi_n - \psi_n$ converge uniformemente para 0. Como já vimos que ψ_n converge uniformemente para ψ e Φ_n converge uniformemente para Φ, podemos concluir que $\Phi = \psi$. Portanto ψ satisfaz a equação (4.8). O mesmo argumento pode ser utilizado para o intervalo $[x_0 - r, x_0]$, assim concluímos a demonstração. $\square$

Lembremos que, no teorema de Picard, trabalhamos um problema de valor inicial semelhante ao que acabamos de ver e mostramos que existe uma única solução que satisfaz ao PVI dado, se a função contínua f for Lipschitz-contínua na sua segunda variável. Note que, do teorema de Cauchy-Peano podemos concluir que se f for apenas contínua, ainda teremos como garantir a existência da solução, mas nesse caso, ela não será necessariamente única.

Capítulo 5

O Teorema de Weierstrass e separabilidade de $C([a, b]; \mathbb{R})$

Neste capítulo faremos um pequeno estudo sobre separabilidade, demonstraremos o Teorema da Aproximação de Weierstrass, um dos teoremas fundamentais da Análise e ferramenta fundamental para provarmos a separabilidade do espaço $C([a, b]; \mathbb{R})$.

5.1 Teorema da Aproximação de Weierstrass

O Teorema de Weierstrass nos diz que toda função real contínua em $[a, b]$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios, ou em outras palavras, que o conjunto dos polinômios é denso em $C([a, b]; \mathbb{R})$. A demonstração que apresentamos aqui é devida a H.Lebesgue.

Teorema 5.1 (Teorema da Aproximação de Weierstrass) *Se $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$, então existe uma sequência de polinômios $\{P_k\}_k$ tal que $P_k \to f$ uniformemente em $[a, b]$.*

Demonstração:

Faremos a demonstração em duas etapas. Primeiramente, mostraremos que o teorema é válido para o caso particular em que $a = 0$ e $b = 1$, em seguida, a partir do caso particular, generalizaremos o teorema para um intervalo $[a, b]$ qualquer.

Etapa 1: Consideremos $a = 0, b = 1$ e $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. Suponhamos que $f(0) = 0$. Como f é função contínua definida no compacto $[0,1]$ pelo teorema (1.8) é uniformemente contínua em $[0,1]$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x, x' \in [0,1]$,

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.1}$$

Primeiramente, mostraremos que f pode ser aproximada uniformemente por funções poligonais. Dessa forma, seja $n \in \mathbb{N}$ de modo que $1/n < \delta$ e consideremos a partição $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[0,1]$ definida por $x_i = i/n, \quad i = 0, 1, \ldots, n$. E para cada $i = 0, 1, \ldots, n-1$ consideraremos a função $\varphi_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_i(x) = (x - x_i)^+ = \max\{x - x_i, 0\} = \frac{|x - x_i| + x - x_i}{2}.$$

Ou seja, $\varphi_i(x) = 0$, se $x - x_i \leq 0$ e $\varphi_i(x) = x - x_i$, se $x > x_i$.

Seja ψ a função poligonal,

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varphi_i(x),$$

em que os seus coeficientes α_i são definidos pela recorrência

$$\begin{cases} \alpha_0 = n f(x_1) \\ \alpha_i = n(f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})), \quad i = 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Então $\psi(x_i) = f(x_i)$. De fato, por indução, temos que

$$\begin{aligned} \psi(x_0) &= \alpha_0\varphi_0(x_0) + \alpha_1\varphi_1(x_0) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x_0) = 0 = f(x_0) \\ \psi(x_1) &= \alpha_0\varphi_0(x_1) + \alpha_1\varphi_1(x_1) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x_1) = \alpha_0 x_1 + \alpha_1 0 + \ldots + \alpha_n 0 \\ &= n f(x_1)\frac{1}{n} = f(x_1) \end{aligned}$$

Suponhamos para um i arbitrário que $\psi(x_i) = f(x_i)$ é verdade, mostraremos que para $i+1$ temos $\psi(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \psi(x_i) &= \alpha_0\varphi_0(x_i) + \alpha_1\varphi_1(x_i) + \ldots + \alpha_{i-2}\varphi_{i-2}(x_i) + \alpha_{i-1}\varphi_{i-1}(x_i) \\ &= \alpha_0(x_i - x_0) + \alpha_1(x_i - x_1) + \ldots + \alpha_{i-2}(x_i - x_{i-2}) + \alpha_{i-1}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \alpha_0\frac{i}{n} + \alpha_1\frac{i-1}{n} + \ldots + \frac{2}{n}\alpha_{i-2} + \frac{\alpha_{i-1}}{n} = f(x_i), \text{ por hipótese de indução.} \end{aligned}$$

Para $i+1$ temos,

$$\begin{aligned}
\psi(x_{i+1}) &= \alpha_0\varphi_0(x_{i+1}) + \alpha_1\varphi_1(x_{i+1}) + \ldots + \alpha_{i-1}\varphi_{i-1}(x_{i+1}) + \alpha_i\varphi_i(x_{i+1}) \\
&= \alpha_0(x_{i+1}-x_0) + \alpha_1(x_{i+1}-x_1) + \ldots + \alpha_{i-1}(x_{i+1}-x_{i-1}) + \alpha_i(x_{i+1}-x_i) \\
&= \alpha_0\left(\frac{i+1}{n}\right) + \alpha_1\left(\frac{i}{n}\right) + \alpha_2\left(\frac{i-1}{n}\right) + \ldots + \alpha_{i-2}\left(\frac{3}{n}\right) + \alpha_{i-1}\left(\frac{2}{n}\right) + \alpha_i\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \alpha_0\frac{i}{n} + \frac{\alpha_0}{n} + \alpha_1\frac{i}{n} + \alpha_2\frac{i}{n} - \frac{\alpha_2}{n} + \ldots + \frac{3}{n}\alpha_{i-2} + \frac{2}{n}\alpha_{i-1} + \frac{\alpha_i}{n}. \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\alpha_1/n, \alpha_2/n, \ldots, \alpha_{i-2}/n, \alpha_{i-1}/n$ em (5.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\psi(x_{i+1}) &= \alpha_0\frac{i}{n} + \alpha_1\frac{i-1}{n} + \ldots + \frac{2}{n}\alpha_{i-2} + \frac{\alpha_{i-1}}{n} + \frac{\alpha_0}{n} + \frac{\alpha_1}{n} + \ldots + \frac{\alpha_{i-1}}{n} + \frac{\alpha_i}{n} \\
&= \psi(x_i) + \frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1} + \alpha_i}{n}
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}(\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1} + \alpha_i) &= n(f(x_1) + f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0) + \ldots + f(x_i) \\
&- 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}) + f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})) \\
&= f(x_{i+1}) - f(x_i)
\end{aligned}$$

então $\psi(x_{i+1}) = f(x_i) + f(x_{i+1}) - f(x_i)$. Logo $\psi(x_i) = f(x_i)$, para todo $i = 0, 1, \ldots, n$.

Temos que

$$\begin{aligned}
\|f-\psi\|_\infty &= \max\{\|f(x)-\psi(x)\| : x \in [0,1]\} \\
&= \max\{\max\{\|f(x)-\psi(x)\| : x \in [0,x_1], \max\{\|f(x)-\psi(x)\| : x \in [x_1,x_2]\}, \\
\ldots, &\ \max\{\|f(x)-\psi(x)\| : x \in [x_{n-1},1]\}\}
\end{aligned}$$

E para todo $i = 0, 1, \ldots, n$,

$$\|f(x)-\psi(x)\| = \|f(x)-f(x_i)+f(x_i)-\psi(x)\| \leq \|f(x)-f(x_i)\| + \|\psi(x_i)-\psi(x)\|.$$

Como consequência de (5.1) temos

$$|x-x_i| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

para qualquer $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Além disso, ψ também é uniformemente contínua e como estamos considerando a partição $\mathcal{P} = \{x_0, \cdots, x_n\}$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$, se x, x_i pertencem ao mesmo intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ da partição então teremos

$$|x-x_i| \leq \frac{1}{n} < \delta \Rightarrow |\psi(x)-\psi(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Logo, se $x, x_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \cdots, n$ e $|x - x_i| < \delta$ então temos que

$$\|f(x) - \psi(x)\| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

portanto, $\|f - \psi\|_\infty < \varepsilon/2$.

Como $\varphi_i(x) = \dfrac{1}{2}(|x - x_i| + x - x_i)$, mostraremos que as funções $x \mapsto |x - x_i|$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$; podem ser aproximadas uniformemente por polinômios em $[0, 1]$ e assim poderemos concluir a demonstração desta etapa.

Para isso, consideraremos a função $\phi(\xi) = \sqrt{1 - \xi}$, cuja série de Taylor em torno de $\xi_0 = 0$ é

$$1 - \frac{1}{2}\xi + \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{(2n-3)!}{n!(n-2)!2^{2(n-1)}}\xi^n.$$

Calculando o intervalo de convergência dessa série:

$$\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \left|\frac{\frac{-(2n-3)!}{n!(n-2)!2^{2(n-1)}}}{\frac{-(2n-1)!}{(n+1)(n-1)!2^{2n}}}\right| = \frac{4(n+1)(n-1)}{(2n-1)2(n-1)} = \frac{2n-2}{2n-1}$$

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-2}{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Logo o intervalo de convergência é $|\xi| < 1$. Se considerarmos a sequência de polinômios $\{S_k\}$ definidos por

$$S_k(\xi) = 1 - \frac{1}{2}\xi + \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{(2n-3)!}{n!(n-2)!2^{2(n-1)}}\xi^n,$$

então S_k converge uniformemente para ϕ nos compactos de $|\xi| < 1$.

Em particular, $Q_k(\xi) = S_k(1 - \xi^2)$ define uma sequência de polinômios que converge uniformemente para $\xi \mapsto \sqrt{1 - (1 - \xi^2)} = |\xi|$ nos compactos de $|\xi| < \sqrt{2}$. Como temos que $[0, 1] \subset (x_i - \sqrt{2}, x_i + \sqrt{2})$, a sequência $\{Q_k(x - x_i)\}$ converge uniformemente para a função $|x - x_i|$, $\forall i$.

Vamos agora provar que f é aproximada por polinômios em $[0, 1]$. Como $x \mapsto |x - x_i|$ pode ser aproximada por polinômios, digamos $\{Q_i(x)\}$, então

$$||x - x_i| - Q_i(x)| < \frac{\varepsilon}{nM},\ \forall x \in [0, 1],\ i = 0, \ldots, n-1,$$

onde $M = \max\{|\alpha_0|, \ldots, |\alpha_{n-1}|\}$. Considerando

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i P_i(x),\ \text{onde } P_i(x) = \frac{1}{2}(Q_i(x) + x - x_i),$$

temos,

$$
\begin{aligned}
|\psi(x) - P(x)| &= \Big|\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varphi_i(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i P_i(x)\Big| \\
&= \Big|\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\frac{1}{2}(|x - x_i| + x - x_i) - \frac{1}{2}(Q_i(x) + x - x_i))\Big| \\
&\leq \Big|\sum_{i=0}^{n-1} |\alpha_i| \frac{1}{2}(|x - x_i| - Q_i(x))\Big| \\
&\leq \Big|\sum_{i=0}^{n-1} \frac{M}{2}(|x - x_i| - Q_i(x))\Big| \\
&\leq \frac{M}{2}\sum_{i=0}^{n-1} ||x - x_i| - Q_i(x)| \\
&< \frac{M}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{nM} = \frac{Mn\varepsilon}{2nM} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Como $|\psi(x) - P(x)| \leq \|\psi - P\|_\infty$ para todo $x \in [0,1]$, temos $\|\psi - P\|_\infty < \varepsilon/2$, isto é, ψ é aproximada uniformemente por polinômios. Daí,

$$\|f - P\|_\infty \leq \|f - \psi\|_\infty + \|\psi - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ é aproximada uniformemente por polinômios em $[0,1]$.

Etapa 2: Como acabamos de provar a validade do teorema para funções reais contínuas definidas em $[0,1]$, estenderemos o resultado para qualquer intervalo $[a,b]$, $a < b$.

Para isso, seja $f \in C([a,b]; \mathbb{R})$ e consideremos $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(xb + (1-x)a) - (1-x)f(a).$$

Notemos que $g \in C([0,1]; \mathbb{R})$ e $g(0) = 0$. Então podemos usar o resultado da etapa 1. Assim, existe uma sequência de polinômios $\{G_k\}$ que converge uniformemente para g em $[0,1]$, isto é, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$,

$$|G_k(y) - g(y)| < \varepsilon, \text{ para todo } y \in [0,1].$$

Para $x \in [a,b]$, tomemos $y = \dfrac{x-a}{b-a} \in [0,1]$, então

$$\begin{aligned}
g(y) = g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) &= f\left(\left(\frac{x-a}{b-a}\right)b + \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)a\right) - \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)f(a)\\
&= f\left(\left(\frac{x-a}{b-a}\right)b + a - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)a\right) - \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)f(a)\\
&= f\left(\left(\frac{x-a}{b-a}\right)(b-a) + a\right) - \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)f(a)\\
&= f(x-a+a) - \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)f(a)\\
&= f(x) - \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)f(a).
\end{aligned}$$

Seja P_k o polinômio definido por

$$P_k(x) = G_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)f(a).$$

Então temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} P_k(x) &= \lim_{k\to\infty}\left(G_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)f(a)\right)\\
&= \lim_{k\to\infty} G_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)f(a)\\
&= g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)f(a)\\
&= f(x) - \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)f(a) + \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)f(a) = f(x).
\end{aligned}$$

Assim $\lim_{k\to\infty} P_k(x) = f(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Portanto, $P_k \to f$ uniformemente em $[a,b]$. □

Da demonstração do teorema podemos observar que:

- toda função poligonal é combinação linear de funções do tipo $|x-a|$, além disso, como vimos, a função do valor absoluto é limite uniforme de polinômios assim temos que toda função poligonal pode ser aproximada uniformemente por polinômios;

- toda função f contínua definida num intervalo compacto pode ser aproximada por funções poligonais; pois podemos determinar uma partição $\mathcal{P}$ do seu intervalo de definição de modo que nos extremos de cada intervalo da partição, f e a função poligonal assumem o mesmo valor.

5.2 Separabilidade de $C([a,b];\mathbb{R})$

Nesta seção faremos uma primeira aplicação do Teorema da Aproximação de Weierstrass demonstrando a separabilidade do espaço das funções contínuas $C([a,b];\mathbb{R})$. Antes disso, lembraremos o que é um espaço separável e veremos um lema importante sobre separabilidade.

Definição 5.1 *Dizemos que um espaço normado E é separável quando contém um subconjunto enumerável e denso em E.*

Seja E um espaço vetorial normado e A um subconjunto de E. Por $[A]$ estamos denotando o subespaço de E gerado por A, isto é, o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de A.

O lema a seguir é muito importante para nos ajudar a verificar a separabilidade de alguns espaços normados, como veremos no exemplo seguinte.

Lema 5.1 *Um espaço normado E é separável se e somente se, existe um subconjunto enumerável $A \subseteq E$ tal que $[A]$ é denso em E, ou seja $\overline{[A]} = E$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos E separável, então existe $A \subseteq E$ enumerável e denso em E. Logo $E = \overline{A} \subseteq \overline{[A]}$. Vejamos que se $x \in \overline{[A]}$ então x é ponto aderente de $[A]$, logo existe $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \in [A]$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = x.$$

Assim, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = x$, dessa forma $x \in \overline{E}$ e então $\overline{[A]} \subseteq \overline{E}$. Portanto, temos

$$E = \overline{A} \subseteq \overline{[A]} \subseteq \overline{E},$$

e como pelo corolário (1.1), $\overline{E}$ é um conjunto fechado, pela proposição (1.1) temos $\overline{E} = E$, o que nos dá $\overline{[A]} = E$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que exista um subconjunto enumerável $A \subseteq E$ tal que $\overline{[A]} = E$. Devemos provar que E possui um subconjunto enumerável e denso.

Chamemos de B o conjunto formado por todas as combinações lineares finitas de elementos de A com coeficientes em $\mathbb{Q}$, ou seja,

$$B = \{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n : \ x_1, \ldots, x_n \in A, \ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q} \text{ e } n \in \mathbb{N}\}.$$

Mostraremos primeiramente que B é enumerável. Para isso definimos os conjuntos:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{a_1x_1 : a_1 \in \mathbb{Q}, \ x_1 \in A\} \\
B_2 &= \{a_1x_1 + a_2x_2 : a_1, a_2 \in \mathbb{Q}, \ x_1, x_2 \in A\} \\
&\ \vdots \\
B_n &= \{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n : \ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}, \ x_1, \ldots, x_n \in A\} \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Temos que $B = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$ definiremos a função:

$$\begin{aligned}
f_n : \ \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q} \times A \times \ldots \times A &\longrightarrow B_n \\
(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto f_n(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n
\end{aligned}$$

então f_n é sobrejetora pela definição de B_n, além disso, $(\mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q} \times A \times \ldots \times A)$ é enumerável, pois é o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis, logo B_n é enumerável pelo teorema (A.3)- apêndice. Então B é enumerável por ser a união enumerável de conjuntos enumeráveis pelo corolário (A.1) do apêndice. Provaremos agora que B é denso em E, isto é, $\overline{B} = E$. Devemos mostrar então que dados $x \in E$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer, existe $y \in B$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$. Assim, sejam $x \in E$ e $\varepsilon > 0$, por hipótese temos que $\overline{[A]} = E$, logo existe $y_0 \in [A]$ tal que $\|x - y_0\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, denotemos $y_0 = b_1x_1 + \ldots + b_kx_k$; onde $k \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{Q}$ e $x_1, \ldots, x_k \in A$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, existem $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Q}$ tais que

$$|a_j - b_j| < \frac{\varepsilon}{2\left(1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \|x_i\|\right)}, \ \text{ para todo } j = 1, \ldots, k.$$

Tomando $y = a_1x_1 + \ldots + a_kx_k$ temos que $y \in B$ e

$$\begin{aligned}
\|x-y\| &= \|x-y_0+y_0-y\| \leq \|x-y_0\| + \|y_0-y\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|(b_1x_1+\ldots+b_kx_k) - (a_1x_1+\ldots+a_kx_k)\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|(b_1-a_1)x_1+\ldots+(b_k-a_k)x_k\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + |b_1-a_1|\|x_1\| + \ldots + |b_k-a_k|\|x_k\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \max_{j=1,\ldots,k} |b_j-a_j|(\|x_1\|+\ldots+\|x_k\|) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\left(1+\sum_{i=1}^{k}\|x_i\|\right)}\left(\sum_{i=1}^{k}\|x_i\|\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

o que prova que $\overline{B} = E$.

Logo $B \subseteq E$ é enumerável e denso, e portanto E é separável. □

Exemplo 5.1 *Por c_0 denotamos o conjunto de todas as sequências de escalares que convergem para zero, isto é,*

$$c_0 = \{(a_k)_k^\infty = 1 : a_k \in \mathbb{R} \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e } a_k \to 0\}.$$

c_0 é um espaço vetorial normado munido da norma $\|(a_k)_{k=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$. Mostraremos que c_0 é separável.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $e_n = (0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots)$ a sequência formada por 1 na n-ésima cordenada e 0 nas demais coordenadas. Os vetores $e_1, e_2, \ldots$ são chamados de vetores unitários canônicos dos espaços de sequências.

Vamos mostrar que $c_0 = \overline{[e_1, e_2, \ldots]}$. Dado $x = (a_j)_{j=1}^\infty \in c_0$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \|x - \sum_{j=1}^{k} a_je_j\|_\infty &= \lim_{k\to\infty} \|(a_1,a_2,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots) - (a_1,a_2,\ldots,a_k)\|_\infty \\
&= \lim_{k\to\infty} \|(0,0,\ldots,0,a_{k+1},a_{k+2},\ldots)\|_\infty \\
&= \lim_{k\to\infty} \sup_{j>k} |a_j| = 0,
\end{aligned}$$

pois $a_j \to 0$, quando $j \to \infty$. E assim temos que, $\sum_{j=1}^{k} a_je_j \to x$ em c_0 se $k \to \infty$. Como $\sum_{j=1}^{k} a_je_j \in [e_1, e_2, \ldots]$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $x \in \overline{[e_1, e_2, \ldots]}$. Portanto pelo lema (5.1), c_0 é separável.

Exemplo 5.2 *Seja ℓ_∞ o espaço das sequências limitadas de escalares, ou seja,*

$$\ell_\infty = \{(a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{R} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j < \infty\}.$$

A norma $\|(a_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}$ torna ℓ_∞ um espaço normado; verificaremos que ℓ_∞ não é separável.

Suponhamos que ℓ_∞ seja separável, então existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ densa. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos $x_n = (a_j^n)_{j=1}^\infty$. Seja $y = (b_j)_{j=1}^\infty$ a sequência definida por

$$b_j = 0 \text{ se } |a_j^j| \geq 1; \quad e \quad b_j = a_j + 1 \text{ se } |a_j^j| < 1.$$

Temos que $y \in \ell_\infty$, pois

$$\|y\|_\infty = \sup\{|a_j^j + 1| : a_j^j < 1\} \leq \sup\{|a_j^j| + 1 : a_j^j < 1\} \leq 1 + 1 = 2,$$

para todo j.

Da densidade da sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|y - x_n\|_\infty < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Em particular para $\varepsilon = 1$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|y - x_n\|_\infty < 1 \text{ para todo } n \geq n_1. \tag{5.3}$$

Porém,

$$\begin{aligned}
\|y - x_n\|_\infty &= \|(b_j - a_j)_{j=1}^\infty\|_\infty \\
&= \sup\{|b_1 - a_1^n|, |b_2 - a_2^n|, \ldots, |b_n - a_n^n|, |b_{n+1} - a_{n+1}^n|, \ldots\} \\
&\geq |b_n - a_n^n| \\
&= \begin{cases} |0 - a_n^n| & se\ |a_n^n| \geq 1 \\ |a_n^n + 1 - a_n^n| & se\ |a_n^n| < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a_n^n| \ se\ |a_n^n| \geq 1 \\ 1 \ se\ |a_n^n| < 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Assim, temos que $\|y - x_n\|_\infty \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é contradição. Logo ℓ_∞ não é separável.

Faremos agora a aplicação do teorema (5.1) para demonstrar que $C([a, b]; \mathbb{R})$ possui a propriedade da separabilidade.

Teorema 5.2 *O espaço das funções contínuas $C([a, b]; \mathbb{R})$ é separável.*

Demonstração:

De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $f_n(t) = t^n$. Tomando $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, temos que $A \subset C([a,b];\mathbb{R})$ é enumerável e além disso $[A]$ é o conjunto de todos os polinômios. Como pelo teorema de Weierstrass (teorema 5.1) temos sequência de polinômios convergindo uniformemente para uma função contínua, então $\overline{[A]} = C([a,b];\mathbb{R})$. Portanto pelo lema (5.1), temos que $C([a,b];\mathbb{R})$ é separável. $\square$

5.3 Momento de uma função contínua

Faremos agora uma aplicação simples, porém interessante do teorema da Aproximação de Weierstrass relacionada aos momentos de uma função contínua.

Definição 5.2 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, definimos o n-ésimo momento de f por*

$$M_n(f) = \int_a^b x^n f(x)dx, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Temos que

$$\int_a^b x^n f(x)dx = \int_a^b x^n g(x)dx \not\Rightarrow f = g.$$

Isso quer dizer que duas funções contínuas definidas num mesmo intervalo podem ter vários momentos iguais sem que sejam exatamente idênticas, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 5.3 *Sejam f, g funções definidas no intervalo $[-1,1]$, tais que $f(x) = 1$ e $g(x) = 0$, para todo x.*

Temos então que,

$$\begin{aligned} M_n(f) - M_n(g) &= \int_{-1}^1 x^n f(x)dx - \int_{-1}^1 x^n g(x)dx \\ &= \int_{-1}^1 x^n (f(x) - g(x))dx \\ &= \int_{-1}^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Assim, se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar $M_n(f) - M_n(g) = 0$. Portanto, $M_n(f) = M_n(g)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ímpar, porém $f \neq g$.

Dessa forma, f e g são funções contínuas diferentes uma da outra mas possuem um número infinito de momentos iguais. Porém, o interessante é que se todos os momentos de duas funções contínuas são iguais, então essas funções são idênticas. Esse fato é provado a seguir, e usaremos o teorema (5.1).

Teorema 5.3 *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Então $f = g$ se, e somente se, $M_n(f) = M_n(g)$ para todo n natural.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Consideremos $f = g$, isto é, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Multiplicando a igualdade por x^n temos,

$$x^n f(x) = x^n g(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Podemos integrar (5.4) de a a b e assim obtemos,

$$M_n(f) = \int_a^b x^n f(x)dx = \int_a^b x^n g(x)dx = M_n(g).$$

Portanto, todos os momentos das funções contínuas f e g, são iguais.

($\Leftarrow$) Consideremos $M_n(f) = M_n(g)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned} M_n(f) - M_n(g) &= \int_a^b x^n f(x)dx - \int_a^b x^n g(x)dx \\ &= \int_a^b x^n (f(x) - g(x))dx = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Tomemos um polinômio qualquer $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Então

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x)(f(x) - g(x))dx &= a_n \int_a^b x^n (f(x) - g(x))dx + a_{n-1} \int_a^b x^{n-1}(f(x) - g(x))dx + \\ + \ldots &+ a_1 \int_a^b x(f(x) - g(x))dx + a_0 \int_a^b (f(x) - g(x))dx, \end{aligned}$$

de (5.5), para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $\int_a^b x^n (f(x) - g(x))dx = 0$, assim

$$\int_a^b P(x)(f(x) - g(x))dx = 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 = 0. \tag{5.6}$$

Pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass, existe uma sequência de polinômios $\{P_n\}$ tais que $\|P_n - (f - g)\|_\infty < \varepsilon$, isto é $P_n \to (f - g)$ uniformemente em $C([a, b])$.

Tomando $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{\|f-g\|_\infty}$, temos $\|P_n - (f-g)\|_\infty < \varepsilon_1$ e

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_\infty \|P_n - (f-g)\|_\infty &< \frac{\varepsilon}{\|f-g\|_\infty}\|f-g\|_\infty \\
\|(f-g)(P_n - (f-g))\|_\infty &< \varepsilon \\
\|P_n(f-g) - (f-g)^2\|_\infty &< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ou seja, $(P_n(f-g))$ converge uniformemente para $(f-g)^2$ em $[a,b]$. Pelo teorema da Análise Real - teorema (A.5) apêndice,

$$\int_a^b P_n(x)(f(x)-g(x))dx \longrightarrow \int_a^b (f(x)-g(x))^2 dx.$$

Mas de (5.6) temos que

$$\int_a^b P_n(x)(f(x)-g(x))dx = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$\int_a^b (f(x)-g(x))^2 dx = 0.$$

Como $(f(x)-g(x))^2 \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ e $(f-g)$ é função contínua, temos que $(f-g)^2 = 0$, isto é, $f = g$. E concluímos a demonstração. $\square$

Conclusão

No decorrer do trabalho verificamos que o espaço $C(K;\mathbb{R}^m)$ possui algumas propriedades semelhantes as de $\mathbb{R}^n$, que é um espaço de dimensão finita. O fato de $C(K;\mathbb{R}^m)$ ser um espaço de Banach nos propicia o uso do teorema do ponto fixo de Banach neste espaço e do teorema de Picard e, por meio desses, garantimos a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais em $C([0,T];\mathbb{R}^n)$. Também caracterizamos os conjuntos compactos de $C(K;\mathbb{R}^m)$ através do teorema de Arzelà-Ascoli, apesar dos conjuntos deste espaço não serem carcterizados da mesma forma que os conjuntos de espaços de dimensão finita.

A separabilidade por sua vez é uma propriedade importante da Análise Funcional, pois possui grande importância quando falamos de espaços de Hilbert e sistemas ortonormais completos, pois temos uma equivalência entre eles, um espaço de Hilbert é separável se, e somente se possui um sistema ortonormal completo. Por meio do teorema de aproximação de Weierstrass, um dos teoremas fundamentais da análise, provamos que $C([a,b];\mathbb{R})$ também possui a propriedade da separabilidade.

O estudo das funções contínuas, $C(K;\mathbb{R}^m)$, possui grande importância, por este possuir propriedades de espaços de dimensão finita e infinita, é um espaço interessante para fazermos a transição do estudo de Análise no $\mathbb{R}^n$ para Análise Funcional onde são estudados espaços de dimensão infinita mais gerais, como os espaços $L_p(\Omega)$, os espaços de Sobolev $(H_0^1(\Omega), H^m(\Omega))$, entre outros. Vale ressaltar que a Análise Funcional desempenha um papel importante em diversos ramos da Matemática, entre eles Análise Não-Linear, Otimização, EDP's e principalmente na Teoria dos Espaços de Banach, por isso o estudo do espaço $C(K;\mathbb{R}^m)$ é fundamental, visto que pode ser considerado um estudo introdutório para esta linha de pesquisa.

Apêndice A

Séries de Potências

Definição A.1 *Uma série de potências é uma expressão do tipo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots .$$

O número $r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ chama-se o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. Quando $r > 0$, o intervalo aberto $(-r, r)$ chama-se o intervalo de convergência da série $\sum a_n x^n$.

Teorema A.1 *Uma série de potência converge uniformemente em todo intervalo comapcto contido no seu intervalo de convergência.*

Demonstração: Ver [5], pag. 387.

Série de Taylor

Definição A.2 *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função infinitamente derivável em um intervalo aberto (a, b). Seja $x_0 \in (a, b)$. A série de Taylor da função f, relativamente a x_0, é definida por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

A série de Taylor é um exemplo de série de potências.

Conjuntos enumeráveis

Definição A.3 *Um conjunto X é dito enumerável quando é finito ou quando existe uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*

Para os resultados que seguem ver [5].

Teorema A.2 *Seja X um conjunto enumerável. Se $f : X \to Y$ é sobrejetiva, então Y é enumerável.*

Teorema A.3 *Sejam X e Y conjuntos enumeráveis. O produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável.*

Corolário A.1 *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots,$ conjuntos enumeráveis. A reunião $X = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é enumerável.*

Alguns resultados importantes

Corolário A.2 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que para algum k, $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ vezes}}$ é uma contração. Então f possui um único ponto fixo.*

Demonstração:

Seja $\overline{x}$ o único ponto fixo de f^k, provaremos que $\overline{x}$ é o ponto fixo de f. Como $f(f^n(x))) = f^n(f(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$f(\overline{x}) = f(f^k(\overline{x})) = f^k(f(\overline{x})),$$

logo $f(\overline{x}) = \overline{x}$, pois f^k possui um único ponto fixo "$\overline{x}$". De outro lado, como todo ponto fixo de f é ponto fixo de f^k, $\overline{x}$ é o único ponto fixo de f.

Para os demais resultados ver [5] e [6].

Postulado de Dedekind: Existe um corpo ordenado $\mathbb{R}$, chamado corpo dos números reais, com $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$, tal que todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$, limitado superiormente, possui supremo em $\mathbb{R}$.

Teorema A.4 *Seja* $\{x_n\}$ *uma sequência de números reais positivos tal que* $\overline{r} := \lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ *existe. Se* $\overline{r} < 1$*, então* $\{x_n\}$ *converge e* $\lim x_n = 0$*. Por outro lado, se* $\overline{r} > 1$ *então* $\{x_n\}$ *é divergente.*

Teorema A.5 *Se uma sequência de funções integráveis* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *converge uniformemente para* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, então* f *é integrável e vale* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$*.*

Teorema A.6 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Seja* $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}^n$ *uma função com derivada integrável. Então*

$$f(a+h) - f(a) = \int_a^{a+h} f'(t)dt = h \int_0^1 f'(a+th)dt.$$

Definição A.4 (Diferenciabilidade Uniforme) *Diz-se que a aplicação diferenciável* $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *é uniformemente diferenciável num subconjunto* $X \subset U$ *quando, para todo* $\varepsilon > 0$ *dado, existe* $\delta > 0$ *tal que* $\|h\| < \delta \Rightarrow \|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\| < \varepsilon\|h\|$*, seja qual for* $x \in X$ *(com* $x + h \in U$*).*

Corolário A.3 *Uma aplicação* $f : U \to \mathbb{R}^n$*, de classe* $\mathcal{C}^1$*, é uniformemente diferenciável em qualquer compacto* $K \subset U$*.*

Bibliografia

[1] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E.; ***Fundamentos de Análise Funcional***, Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2] CAROTHERS, N.L.; ***Real Analysis***, Cambridge University Press, 2000.

[3] CIPOLATTI, R.; ***Cálculo Avançado I***, 2.ed. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2002.

[4] HONIG, C. S. ; ***Aplicações da topologia à análise***, São Paulo: Editora Livraria da Física 2011 - (Coleção textos universitários do IME - USP; v.4).

[5] LIMA, E.L.; ***Curso de Análise, Vol.1***, 14.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014.

[6] LIMA, E.L.; ***Curso de Análise, Vol.2***, 11.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[7] LIMA, E.L.; ***Espaços métricos*** , 4.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[8] LOPES, W. A.; ***O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações***, Universidade Federal de Uberlândia, Fevereiro, 2009. Dissertação de Mestrado.