UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ESTUDO DA TEORIA DO CÁLCULO VARIACIONAL E SUAS APLICAÇÕES

LEIDECLEY MACIEL DA SILVA
SAMUEL CAMPOS

Macapá-AP
2014

LEIDECLEY MACIEL DA SILVA
SAMUEL CAMPOS

ESTUDO DA TEORIA DO CÁLCULO VARIACIONAL E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado de matemática, através da disciplina TCC, ministrada pelo prof. João ferreira, a ser defendido para a obtenção de grau de licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco.

Macapá-AP
2014

Estudo da Teoria do Cálculo Variacional e suas Aplicações

por

SILVA, Leidecley Maciel; CAMPOS, Samuel

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Banca Examinadora

Orientador: Prof. *Dr.* Guzmán Eulalio Isla Chamilco.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Membro: Prof. *Dr.* José Walter Cárdenas Sotil.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Membro: Prof. *Msc.* Marcel Lucas Picanço Nascimento
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Avaliado em: 15/04/2014

MACAPÁ-AP

2014

Dedicamos este trabalho primeiramente a Deus e à nossas famílias.

Agradecimentos

Primeiramente agradecemos a Deus pela plenitude da vida que nos concebeu este dom e também por ter nos proporcionado mais esta realização, dando-nos força e coragem para enfrentar obstáculos que ao longo da vida nos deparamos.

Agradecemos em especial ao nosso orientador, *Prof. Dr. Guzmán Eulalio Isla Chamilco*, que nos guiou com competência, sabedoria no decorrer do curso e também no enriquecimento deste trabalho, deixamos todo nosso respeito, admiração e gratidão.

A todos os nossos colegas do curso de matemática, em especial aos amigos *Áurea Rodrigues Borges, Alessandra Mendes, Adriana Natividade, Késia Pinheiro, Ramon Costa, Francisco Cavalcante e César França*, que nos estimularam de algum modo a persistir e nos acompanharam nas nossas conquistas acadêmicas.

A todos os professores da instituição UNIFAP que perpassaram durante toda nossa formação no curso, também ao *Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil* pelas contribuições teóricas para o desenvolvimento deste estudo e ao *Prof. Esp. João Ferreira* por nos ajudar a digitar o TCC no latex, a eles nossos sinceros agradecimentos.

Eu, Samuel, agradeço a minha família que me incentivou, principalmente, ao meu avô *Benedito Manço de Lima*, já falecido, e a minha avó *Filismina Campos de Lima* e as minhas irmãs *Bernadete, Ester, Graça, Jemina e Elizabethe* por terem me acompanhado nesta trajetória e por terem contribuído com apoio e incentivo nos bons e maus momentos de minha vida sem a presença da minha querida mãe, *Maria das Graças Campos* que não está mais entre nós, mas com certeza esta feliz por mais uma vitória em minha vida. E, também em especial a minha namorada *Jenny Pantoja* que nos ajudou na elaboração deste trabalho. Aos amigos *Cley* e *Angélica*, que me acompanharam nos momentos bons e ruins que tivemos no decorrer do curso.

Eu, Leidecley, agradeço a minha família pela dedicação, apoio e incentivo que me proporcionaram boa educação, por terem me acompanhado nesta trajetória e por terem contribuído com apoio e incentivo nos bons e maus momentos de minha vida. A minha namorada *Angélica Figueiredo Vilhena* por ter me apoiado, me dando incentivo e muita força para que eu pudesse terminar meu curso. Aos meus amigos *samuca* e a mulher dele *Jenny Pantoja* que me ajudou em todas as etapas do curso e a todos aqueles que nos acompanharam para a concretização e êxito do nosso trabalho de forma direta e indireta.

O Senhor é o meu pastor, nada me faltará. (...) Ainda que eu andasse pelo vale da sombra da morte, não temeria mal algum, porque tu estás comigo; a tua vara e o teu cajado me consolam. (...) Certamente que a bondade e a misericórdia me seguirão todos os dias da minha vida; e habitarei na casa do SENHOR por longos dias. (Salmo 23)

"Um bom ensino de matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência."
(Irene de Albuquerque)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo um estudo da teoria do Cálculo Variacional e suas Aplicações, na qual sua área de concentração é a matemática aplicada e a linha de pesquisa em modelagem matemática computacional. Desse modo, o alicerce teórico principal deste trabalho será postulados pelos autores Flores [2], Lima [5] e João [4], sendo que, tem como base uma pesquisa bibliográfica, que se desenvolveu a partir de leituras sistematizadas levantando idéias centrais defendidos por cada autor com relação ao assunto em estudo. Desse modo, dar-se-á ênfase a Equação de Euler - Lagrange, que trata de uma condição necessária para uma função ser extremo de um funcional, visto que surgiu no século XVIII, com contribuições de Leonhard Euler (1707 - 1783) e Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) o qual o cálculo variacional tornou-se uma ferramenta efetiva. Com isso, discuti-se também sobre formulação de dois problemas clássicos do cálculo variacional: Curva Plana de Comprimento Mínimo e o Problema da Braquistócrona. Em seguida, apresentam-se alguns exemplos de aplicações da Equação de Euler e por fim, a resolução dos dois problemas clássicos já formulados e uma simulação computacional do Problema da Braquistócrona segundo resultados obtidos por [5].

Palavras-chave: Cálculo Variacional, Equação Euler - Lagrange, Problemas Clássicos.

Resúmen

Este trabajo tiene como objetivo un estudio de la teoria do Cálculo Variacional y suas Aplicaciones, en la qual su área de concentración es la matemática aplicada y la linea de investigación en modelagem matemática computacional. De ese modo, el alicerce teórico principal de éste trabajo serán postulados por los autores Flores [2], Lima [5] y João [4], siendo que, tienen como base una investigación bibliográfica, que se desarrollo a partir de lecturas sistematizadas levantando ideas centrales defendidos por cada autor con relación al asunto en estudio. De ése modo, dar ênfase a la Ecuação de Euler - Lagrange, que trata de una condición nescesária para una función ser extremo de una funcional, visto que surgió enj el siglo XVIII, con contribuciones de Leonhard Euler (1707 - 1783) y Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) el cual el cálculo variacional se torno una herramienta efectiva. Con eso, se descuti tambiém sobre formulación de dos problemas clásicos del cálculo variacional: Curva Plana de Longitud Mínimo e el Problema da Braquistócrona. En seguida, se presenta algunos ejemplos de aplicaciones da Ecuação de Euler y por fin, la resolución de los dos problemas clásicos yá formulados e una simulación computacional do Problema da Braquistócrona según los resultados por [5].

Palabras - clave: Cálculo Variacional, Ecuación Euler - Lagrange, Problemas Clássicos.

Lista de Figuras

3.1 Partição de [a,b] 24
3.2 Problema da Braquistócrona 25

4.1 Calculo Variacional de primeira ordem da função $y(x)$ extremizante do funcional 28
4.2 Variação δy em torno de função extremizante $y(x)$ 31
4.3 Particularização do problema da braquistócrona 35
4.4 Curva de arco de ciclóide para um tempo mínimo (Braquistócrona) 41

5.1 Os dois segmentos de reta e os dois arcos de ciclóide considerados, visualizados simultaneamente 44

Sumário

1 Introdução **11**

2 Preliminares **13**

2.1 Um Breve Histórico do Cálculo Variacional 19

2.1.1 O Desenvolvimento do Cálculo Variacional 19

3 Formulação de dois Problemas Clássicos do Cálculo Variacional **23**

3.1 Curva Plana de Comprimento Mínimo 23

3.1.1 Funcional do problema 23

3.2 O Problema da Braquistócrona 25

4 Pressuposto Teórico da Equação de Euler-Lagrange e Suas Aplicações **27**

4.1 A equação de Euler-Lagrange - primeira Variação 27

4.2 Exemplos de aplicações 32

4.3 Resolução dos dois problemas clássicos do Cálculo Variacional 34

4.3.1 Curva Plana de Comprimento Mínimo 34

4.3.2 O Problema da Braquistócrona 35

5 Simulação Computacional: O Problema da Braquistócrona com base nos resultados do autor Lima (2004) **42**

5.1 Análise de dados obtidos através das simulações computacionais 43

CONSIDERAÇÕES FINAIS **45**

REFERÊNCIAS **46**

Capítulo 1

Introdução

Uma área da Matemática que é muito favorável para a solução de otimização nos problemas é o Cálculo Variacional, pois generaliza a teoria de máximo e mínimo em uma função, cujo domínio é estabelecido por um conjunto de curvas admissíveis. Quando se tenta resolver um problema de otimização, deduz-se como o próprio nome diz buscar o melhor resultado, de acordo com algum critério pré-estabelecido. Os problemas que se referem a valores de máximos e mínimos são bem mais atrativos que outros problemas matemáticos de dificuldades comparáveis.

Isso ocorre devido a uma razão muito simples: esses problemas arquitetam nossos problemas cotidianos em várias situações. Por exemplo, quando alguém quer comprar um objeto com o menor preço possível, realizar o máximo de trabalho em um determinado tempo, alcançar um objetivo realizando o menor esforço. Desse modo, a natureza também é norteada por princípios de máximos e mínimos. Desde então o estudo da Teoria do Cálculo de Variações tornou-se uma ferramenta básica muito importante em diversas áreas da Matemática Pura, da Matemática Aplicada, da Física e da Engenharia.

Logo, este trabalho tem como objetivo o Estudo da Teoria do Cálculo Variacional e suas Aplicações, sendo uma área da Matemática muito útil na solução de problemas de otimização. Assim, neste estudo existem muitas variedades de problemas para se abordar, porém, destacou-se a Equação de Euler - Lagrange, tendo como o estudo dois problemas clássicos: Curva Plana de Comprimento Mínimo e o Problema da Braquistócrona. No entanto, a finalidade aqui não é esgotar o assunto, mas sim dar uma ideia de como o Cálculo Variacional se tornou importante na Matemática.

Neste aspecto, utilizaram-se renomados pesquisadores da Matemática como base

nas referências bibliográficas. As ideias precursoras do Cálculo Variacional são antigas. É a partir das postulações de Leonhard Euler (1707 - 1783) que chegou à equação em 1744, e contribuiu para o estudo do cálculo de variações. Posteriormente, em 1760, Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), aprofundou-se na análise prévia de Euler com outros métodos importantes na construção da equação e por este motivo é chamada de equação de Euler - Lagrange. A equação de Euler é uma condição necessária, mas não suficiente em alguns casos de integrabilidade.

Desta forma, o trabalho foi desenvolvido através de uma revisão bibliográfica, tendo como fonte de pesquisa livros, artigos, dissertação de mestrado e doutorado, levando-se em conta que todo o material foi devidamente sistematizado através de leituras e resumos, destacando os elementos primordiais para a construção do mesmo. Assim, este estudo tem como base uma pesquisa bibliográfica.

No primeiro capítulo, apresenta-se a"Introdução", onde faz-se uma abordagem geral do trabalho com o foco no objetivo e sua justificativa, assim, como temática principal o Estudo do Cálculo Variacional e suas Aplicações.

No segundo capítulo, denominado "Preliminares", apresentam-se algumas definições e resultados importantes do Cálculo Variacional que serão utilizados durante o trabalho. Em seguida, será apresentado "Um Breve Histórico do Cálculo Variacional" que aborda sobre o desenvolvimento do cálculo de variações quanto ao surgimento dos problemas de máximos e mínimos com intuito de compreender melhor o seu percurso na história da matemática.

No terceiro capítulo, cujo título é "Formulação de dois Problemas Clássicos do Cálculo Variacional", visto que as formulações dos problemas são: Curva Plana de Comprimento Mínimo e o Problema da Braquistócrona.

No quarto capítulo, denominado "Pressuposto Teórico da Equação de Euler - Lagrange e suas aplicações", tem como foco a dedução da Equação de Euler, em seguida, apresentação de alguns exemplos de aplicações da equação, logo após, as resoluções dos dois problemas clássicos formulados no terceiro capítulo.

Por fim, no quinto capítulo, com a "Simulação Computacional: O Problema da Braquistócrona com base nos resultados do autor Lima (2004)", na qual, apresenta-se a análise de dados obtidos através da simulação computacional.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentam-se algumas definições e resultados importantes do Cálculo Variacional que serão utilizados durante o trabalho. Em seguida, será apresentado um breve histórico do cálculo variacional para se ter uma visão histórica do percurso do estudo da teoria do cálculo de variações.

Definição 1 - Função: Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Uma função f definida em A e com valores em B é uma lei que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$. As notações usuais são: $f : A \to B$ tal que $y = f(x)$ ou $f : A \to B$ quando $x \to f(x)$.

O número x é chamado variável independente da função e y variável dependente da função.

Definição 1.2 - Domínio da Função: O conjunto de todos os $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a definição de função é chamado domínio da função f e é denotado por $Dom(f)$.

Definição 1.3 - Imagem da Função: O conjunto de todos os $y \in \mathbb{R}$ tais que $y = f(x)$, onde $x \in Dom(f)$ é chamado imagem da função f e é denotado por $Im(f)$. É claro que $Dom(f) \subset \mathbb{R}$,$Im(f) \subset \mathbb{R}$, e que $Dom(f)$ é o conjunto dos valores da variável independente para os quais f é definida; $Im(f)$ é o conjunto dos valores da variável dependente calculados a partir dos elementos do domínio.

Definição 2 - Limite: Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ uma função e $b \in \mathbb{R}$ tais que para todo intervalo aberto I, contendo b, tem-se $I \cap (A - \{b\}) \neq \emptyset$. O número real L é o limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de b quando para todo número $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ε), tal que, se $x \in A$ e $0 < |x - b| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

A notação é:

$$\lim_{x \to b} f(x) = L$$

A definição é equivalente a dizer:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (b - \delta, b + \delta) \cap (A - \{b\})$, então $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Definição 2.1 - Função Contínua: Uma função f é contínua em um número a se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Observe que a Definição 2.1 implicitamente requer três coisas para a continuidade de f em a:

1. $f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemplo 2.1.

[1] Considere:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{, se} \quad x \neq 1, \\ 1 & \text{, se} \quad x = 1. \end{cases}$$

Note que $Dom(f) = \mathbb{R}$, mas f não é contínua em 1

.

De fato,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2 \neq f(1)$$

Definição 3 - Derivada: Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função definida num domínio D que pode ser um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos ou ainda, D tal que para todo intervalo aberto I que contenha x_0, se tenha: $I \cap (D - \{x_0\}) \neq \emptyset$. f é derivável ou diferenciável no ponto x_0 quando existe o seguinte limite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Fazendo a mudança $t = x - x_0$, temos:

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

$f'(x_0)$ é chamada a derivada de f no ponto x_0. Como x_0 é um ponto arbitrário, podemos calcular a derivada de f para qualquer ponto $x \in Dom(f)$;

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t}$$

Assim, f' é função de x e $f'(x_0) \in \mathbb{R}$.

Definição 3.1: Uma função f é derivável (ou diferenciável) em $A \subset \mathbb{R}$, se é derivável ou diferenciável em cada ponto $x \in A$.

Definição 4 - Integral Definida: Sejam f uma função definida no intervalo $[a, b]$, P uma partição qualquer do intervalo $[a, b]$ e c_i um ponto qualquer em cada subintervalo definido pela partição. A integral definida de f de a até b é denotada por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

definida por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

se o limite existe.

Se o limite da definição existe, é independente das escolhas feitas, como no caso da definição de área. Portanto, deve ter sempre um único valor.

Definição 5 - Espaço vetorial: Um espaço vetorial V é um conjunto não-vazio de elementos, chamados vetores, sob os quais se definem duas operações: a adição, que a cada par de vetores $u, v \in V$ faz corresponder um novo vetor $u + v \in V$, chamado a soma de u e v, e a multiplicação por um número real, que a cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $u \in V$ faz corresponder um vetor $\alpha u \in V$, chamado o produto de α por v. Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in V$, os seguintes axiomas:

1. **Comutatividade:** $u + v = v + v$;

2. **Associatividade:** $(u + v) + w = u + (v + w)$ e $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;

3. **Vetor Nulo:** existe um vetor $0 \in V$, chamado vetor nulo, tal que para todo $v \in V$ tem-se $v + 0 = 0 + v = v$;

4. **Inverso Aditivo:** Para todo $v \in V$ existe o seu inverso aditivo ou simplesmente inverso, designado por $-v$, tal que $v + (-v) = 0$;

5. **Distributividade:** Tem-se as seguintes propriedades distributivas em relação a multiplicação por um número real $\alpha(u+v) = \alpha u+\alpha v$ e à adição $(\alpha+\beta)v = \alpha v+\beta v$;

6. **Multiplicação por 1:** $1.v = v$, onde 1 é a identidade em $\mathbb{R}$.

Exemplo 5.1. Seja $C^0[a, b]$ o conjunto de todas as funções contínuas de valor real definidas no intervalo $[a, b]$. Se $f, g \in C^0[a, b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então este conjunto torna-se um espaço vetorial quando se define a soma $f + g$ de duas funções e o produto αf do número α pela função f da forma.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad x \in [a, b]$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \qquad\qquad x \in [a, b]$$

Definição 6 - Funcional: Um funcional I é uma regra de correspondência que associa a cada função y em certa classe Ω, um único número real. Observe que o conjunto Ω é chamado domínio de um funcional e o conjunto de números reais associados com as funções em Ω é chamado de conjunto imagem do funcional. O domínio de um funcional é uma classe de funções. Intuitivamente, pode-se dizer que um funcional é uma "função de uma função".

Definição 6.1: I é um funcional linear se:

1. $I(\alpha y) = \alpha I(y)$ para todo $y \in \Omega$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que $\alpha y \in \Omega$.

2. $I(x + y) = I(x) + I(y)$, para todo $x, y \in \Omega$ e $x + y \in \Omega$

Definição 7 - Dada uma função $y = y(x)$, a sua expansão em Série de Taylor, na vizinhança de $x = a$, é dada por (admitindo que $f(x)$ tenha derivadas contínuas em $x = a$):

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + ...$$

e portanto:

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + ...$$

Para que $f(a)$ seja um valor mínimo relativo à função, $f(x) - f(a) > 0$ para todos os valores de x numa vizinhança de a, ou seja, para todos os "valores admissíveis" de $f(a)$. Onde o ponto a é um ponto extremo ou extremizante da função.

Da mesma maneira, para que $f(a)$ seja um máximo relativo, $f(x) - f(a) < 0$. Como $(x-a)$ adquire valores positivos e negativos, impõe-se a condição de que $f'(a) = 0$, a fim de que o termo predominantemente do desenvolvimento em série tenha valores não negativos, isto é:

$$\left((x-a)^2 > 0 \quad e \quad \left|(x-a)^3\right| > (x-a)^4 ...\right)$$

A condição $f'(a) = 0$ é a condição necessária para que o ponto $x = a$ seja ponto extremo da função. Como $(x-a)^2 > 0$, se $f''(a) > 0$ tem-se um ponto de mínimo em $x = a$; se $f''(a) < 0$ tem-se um ponto de máximo em $x = a$. Se $f''(a) = 0$, o termo predominante passa a ser o terceiro, que altera o sinal para valores admissíveis de x à direita e à esquerda de a, caracterizando um ponto de inflexão ($se \quad f''(a) \neq 0$).

A extremização do funcional está sempre ligada a algum critério matemático ou principio físico imposto ao problema, conforme uma necessidade prática, como no caso da curva de tempo mínimo (Braquistócrona).

Lema 1. ***Lema Fundamental do Cálculo Variacional***

Se $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ é uma função continua e se é valida a condição

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\eta(x)dx = 0$$

Para toda função diferenciável $\eta : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ tal que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ então $f(x) = 0$, para todo $x \in (x_1, x_2)$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $f(x') \neq 0$ para algum $x' \in (x_1, x_2)$. Sem perda de generalidade suponha que $f(x') > 0$. Pela continuidade de f, existe uma vizi-

nhança de x', digamos, $c \leq x' \leq d$ na qual $f(x) > 0$, $\forall x \in [c, d]$. Mas com isso a igualdade abaixo não se verifica para toda função diferenciável η.

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) f(x) dx = 0$$

Por exemplo, considerando-se a função:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{, se} \quad x_1 \leq x \leq c \\ (x-c)^2(x-d)^2 & \text{, se} \quad c < x < d \\ 0 & \text{, se} \quad d \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

Obtêm-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\eta(x) dx = \int_c^d (x-c)^2(x-d)^2 f(x) dx$$

e como $f(x) > 0$ para $c \leq x \leq d$ tem-se que

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\eta(x) dx \neq 0$$

O que contradiz a hipótese

.

O caso $f(x') < 0$ e análogo e assim o lema esta provado.

$\square$

Propriedades do Operador

1. $\delta\left[\dfrac{dy}{dx}\right] = \dfrac{d}{dx}(\delta y)$: comutativa com o operador diferencial.

   Vejamos a variação da função $\dfrac{dy}{dx}$

   $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\sim} = \frac{d\tilde{y}}{dx}$$

   Logo

   $\delta\left[\dfrac{dy}{dx}\right] = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{\sim} - \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\tilde{y}}{dx} - \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d(\tilde{y}-y)}{dx} = \dfrac{d(\delta y)}{dx}$

2. $\delta[\int y dx] = \int \delta y dx$: comutativa com operador integral.

Vejamos a variação da função integral $\int ydx$ cujo caminho variável é dado por:

$$\left(\int ydx\right)^{\sim} = \int \tilde{y}dx$$

Então

$$\delta\left[\int ydx\right] = \left(\int ydx\right)^{\sim} - \int ydx = \int \tilde{y}dx - \int ydx = \int (\tilde{y} - y)dx = \int \delta ydx$$

2.1 Um Breve Histórico do Cálculo Variacional

Nesta seção serão abordadas questões relevantes quanto ao um breve contexto histórico do Cálculo Variacional sobre o surgimento dos problemas de máximos e mínimos. A apresentação desta nota histórica visa entender melhor o percurso do estudo da teoria do Cálculo Variacional para a resolução das indagações propostas por alguns autores renomados da matemática.

2.1.1 O Desenvolvimento do Cálculo Variacional

Uma das áreas da Matemática que se utiliza para solução de problemas de otimização é o Cálculo Variacional que apresenta a teoria de máximos e mínimos do Cálculo Diferencial.

O problema de máximo e mínimo que se tem registro mais antigo é visto na lenda de Dido. Em [5] afirma que essa é a lenda da história da fundação de Cartago que é retratada no livro Eneida de Publio Virgílio Maronis (70 - 19 a. C.). A lenda relata que foi prometida a Rainha Dido de Cartago uma extensão de terra que ela pudesse cercar com o couro de um boi. Desse modo, ela preparou uma extensa correia do couro e cercou um terreno semicircular, beirando o Mar Mediterrâneo. Os mapas das cidades medievais européias mostram que normalmente a cidade de Cartago tinha a forma de semicírculo.

O problema de Dido consiste em encontrar dentre todas as curvas planas de um dado comprimento, a que engloba a maior área. Pode-se perceber com isso que máximos e mínimos despertaram o interesse da humanidade já há algum tempo, uma vez que o problema de Dido data de 850 a.C, ou seja, problema este já discutido a muito tempo do que se têm registros.

Porém, a narrativa da lenda da fundação de Cartago, não é prova por si só da teoria de máximo e mínimo, mesmo ilustrando bem o fato. Por outro lado, existem muitos estudos da história da matemática que comprovem a busca por soluções para esses problemas sendo considerado muito antigo na história.

Embora a história do cálculo variacional date a Grécia Antiga, foi a partir do século XVIII o seu progresso na Europa Ocidental. Contudo, [6] também esclarece informações sobre um breve histórico do cálculo variacional, que é de suma importância para a história da matemática. Sendo que, tais acontecimentos históricos demonstram o desenvolvimento do estudo do cálculo variacional, na qual, este interesse sobre o estudo serve como ponto de partida para o incremento da teoria e suas aplicações. O próprio autor relata neste excerto quanto o surgimento do cálculo variacional:

> As idéias mais primitivas do Cálculo Variacional foram apresentadas por Aristóteles (384 - 322 a.C.), por volta de 300 a.C., onde constam pela primeira vez referências a velocidades virtuais, conceito usado em algumas abordagens de problemas de mínimos e máximos. Porém, a primeira aplicação de um princípio de minimização foi feita por Herão de Alexandria (20 - 62). Ele postulou que, na reflexão por um espelho plano, a luz seguiria o caminho mais curto entre dois pontos. Uma simples análise geométrica, com conceitos abordados no ensino médio, é possível verificar que este princípio leva, corretamente, à lei da reflexão (igualdade entre os ângulos de reflexão e incidência). Até mesmo Galileu (1564 - 1642) fez referências as velocidades virtuais em alguns de seus trabalhos. ([6], p.6 - 7).

Assim, pode-se perceber a importância em abordar um panorama do contexto histórico da origem do Cálculo Variacional. Desse modo, os estudos se aprofundaram por um longo tempo por renomados teóricos, visto que só ocorreu apartir do século XVII onde começaram a ser desenvolvidos métodos gerais de resolução destes problemas, sendo apresentados por [5] alguns desses teóricos:

> "Matemáticos como Pierre de Fermat (1601-1665), Isaac Newton (1642-1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph Louis Lagrange (1736-1813) criaram métodos que serviram de base para vários ramos da teoria de problemas extremais como programação matemática e cálculo de variações. (p. 2)".

Entretanto, o desenvolvimento do Cálculo Variacional surgiu no ano de 1696 quando Johann Bernoulli (1667 - 1748) divulgou no jornal científico Acta Eruditorium

uma nota com o seguinte título: "Um novo problema que convido os matemáticos a resolver". De acordo com [5] este problema é a versão que se conhece do problema da Braquistócrona, sendo que, em grego significa (Brachystos = brevíssimo e Chronos = tempos). Assim, sejam A e B dois pontos dados em um plano vertical. O problema da braquistócrona consiste em encontrar a curva que uma partícula M precisa descrever para sair de A e chegar em B no menor tempo possível, somente sob a ação da força da gravidade. Johann Bernoulli sugeriu, em 1697, um método para resolvê-lo que dependia de uma analogia com o problema de determinar o caminho percorrido por um raio de luz em um meio com índice de refração variável.

Esse método, no entanto, não era simples de ser aplicado a outras situações. Porém, no mesmo ano, James Bernoulli (1654-1705), irmão de Johann, resolveu o problema de outra maneira. Esse método desenvolvido por James era muito eficiente para a resolução de uma grande variedade de problemas de máximos e mínimos.

No entanto, foi Leonhard Euler (1707 - 1783), aluno de Johann que fez parte do trabalho dos irmãos Bernoulli, na qual, passou a estudar e a se aperfeiçoar o método de James. Segundo [5], Leonhard Euler fez uma das principais descobertas presentes neste trabalho que é a equação diferencial que se denominou como Equação de Euler.

Muitos anos depois, os matemáticos começaram a sugerir problemas de grande dificuldade e o método de Euler tornava-os ainda mais complicados. Então, em 1762 e 1770, Joseph Louis Lagrange (1736 -1813), publicou um método analítico que permitia deduzir, de fato, qual a equação diferencial das curvas que minimizavam problemas mais gerais. Assim, uma grande variedade de problemas físicos e mecânicos puderam ser resolvidos. Desse modo, [5] nos relata com precisão como se chegou à equação trabalhada por Lagrange:

> Esse método de Lagrange trocava a função $y(x)$, presente nas integrais a serem minimizadas, pela função $y(x) + \delta y(x)$. Euler prontamente adotou o método e as notações de Lagrange e chamou $\delta y(x)$ de variação da função $y(x)$ e δI de variação da integral. É por isso que esta nova teoria que estava sendo desenvolvida ganhou o nome de cálculo das variações ou cálculo variacional. ([5], p. 4).

Todavia, sabe-se que Lagrange é um dos mais notáveis matemáticos do século XVIII, sendo a primeira e maior contribuição para a Matemática o Cálculo de Variações. Segundo [2], Carl Gustav Jacobi (1804-1851) também contribuiu para essa área e David

Hilbert (1862-1943) estudou Cálculo de Variações de 1900 a 1905. Outros problemas específicos foram resolvidos e uma teoria geral desenvolvida ao longo dos anos. As primeiras aplicações de Cálculo de Variações em Economia surgiram no final de 1920 e início de 1930 por Roos, Evans, Hotelling e Ramsey, com outras aplicações publicadas mais tarde.

Portanto, o desenvolvimento do Cálculo Variacional partiu de iniciativas de grandes teóricos matemáticos, as quais suas contribuições tornaram-se ferramentas muito importantes para o estudo desta área paralelamente com o desenvolvimento da própria Matemática.

Capítulo 3

Formulação de dois Problemas Clássicos do Cálculo Variacional

Neste capítulo serão formulados dois problemas clássicos do cálculo de variações para começarmos a compreender o tipo de situações ou problemas que iremos trabalhar e quais ferramentas vamos precisar, na qual serão apresentadas suas resoluções utilizando a Equação de Euler - Lagrange no capítulo 4 deste trabalho. As formulações de problemas a serem tratadas nesse capítulo serão: Curva Plana de Comprimento Mínimo e o Problema da Braquistócrona. Tais problemas foram consultados nas referências de [2], [3] e [1].

3.1 Curva Plana de Comprimento Mínimo

Segundo [2], o problema do comprimento de arco consiste em encontrar a equação de uma curva de classe C^1 com comprimento mínimo que conecta dois pontos distintos (fixos).

3.1.1 Funcional do problema

Seja $y = y(x)$ com derivada contínua em $[a, b]$ e seja $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Indicando por $L(P)$ o comprimento da poligonal de vértices

$P_i = (x_i, y(x_i))$, onde $i = 1, 2, ..., n$, temos:

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y(x_i) - y(x_{i-1}))^2} \tag{3.1}$$

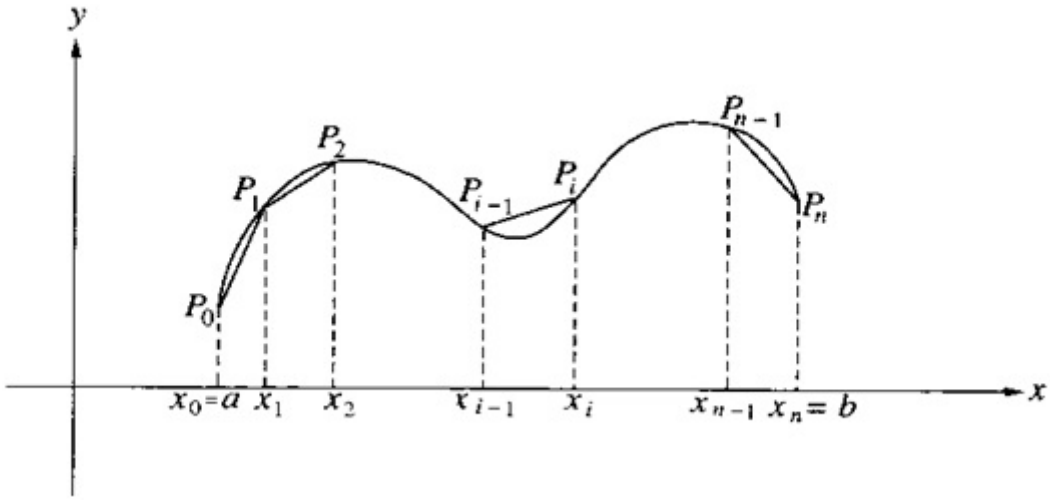

Figura 3.1: Partição de [a,b]
Fonte: Guidorizzi, 2001, p. 416.

Aplicando o Teorema do Valor Médio, para cada i, onde $i = 1, 2, ..., n$ descobrimos que existe um $c_i, x_{i-1} < c_i < x_i$, tal que

$y(x_i) - y(x_{i-1}) = y'(c_i)\Delta x_i$, onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Segue que

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + (y'(c_i)\Delta x_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [y'(c_i)]^2}\sqrt{(\Delta x_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (y'(x_i))^2}\Delta x_i \tag{3.2}$$

Portanto,[3] define que para máx Δx_i tendendo a zero, $L(P)$ tenderá para

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx \tag{3.3}$$

Assim, nada mais natural, então, do que definir o comprimento do gráfico de x, ou da curva $y = y(x)$, por

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \tag{3.4}$$

Portanto, o problema da Curva Plana de Comprimento Mínimo se resume a encontrar uma função $y(x)$ tal que (3.4) assume o mínimo valor possível.

3.2 O Problema da Braquistócrona

Uma partícula cai do ponto (1) para o ponto (2), deslizando sem atrito sobre uma curva $y = y(x)$, conforme mostrado na Figura 3.2. Determine a curva correspondente ao tempo mínimo de queda.

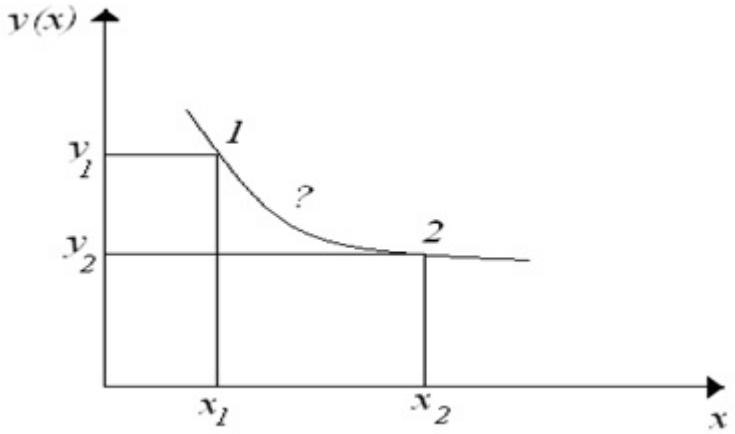

Figura 3.2: Problema da Braquistócrona
Fonte: Alves, 2007, p. 58.

Solução:

Tempo de queda:

$$\int_{(1)}^{(2)} dt \tag{3.5}$$

Velocidade:

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{3.6}$$

Onde o comprimento da curva descrita é dado por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{3.7}$$

Logo

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + (y')^2}dx \tag{3.8}$$

Pelo principio da Conservação de Energia (Sistema Conservativo)

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \tag{3.9}$$

Onde a velocidade de queda é dada por:

$$v = \sqrt{v_1^2 + 2g(y_1 - y)} \tag{3.10}$$

Assim:

$$dt = \frac{ds}{v} \tag{3.11}$$

Logo

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{v_1^2 + 2g(y_1 - y)}}dx \tag{3.12}$$

Desse modo, (3.12) I é uma função especial denominada funcional. Assim, o problema da braquistócrona consiste em encontrar uma função $y(x)$ que minimiza (3.12). Portanto, percebe-se que nessas formulações de problemas sempre chegamos a um novo problema que consiste em encontrar uma função que minimiza uma integral, ou seja, o funcional do problema. Esse é o problema do cálculo variacional, que incide em determinar as funções que extremizam o funcional. Essas funções são obtidas após se estabelecerem as condições necessárias à extremização do funcional, segundo um procedimento análogo ao da procura dos pontos extremos (extremantes) de uma função.

Capítulo 4

Pressuposto Teórico da Equação de Euler-Lagrange e Suas Aplicações

Neste capítulo, dar-se-á um resultado extremamente importante do Cálculo Variacional, onde será deduzido a Equação de Euler - Lagrange, que trata de uma importante ferramenta na busca de extremos para um funcional, na qual é uma condição necessária para que uma função seja um extremo do funcional. Em seguida, serão abordados alguns exemplos de aplicações da Equação de Euler - Lagrange. Logo após, serão feitas as resoluções dos dois problemas clássicos do capítulo 3.

4.1 A equação de Euler-Lagrange - primeira Variação

O valor do funcional depende da função escolhida, função esta que corresponde ao caminho entre x_1 e x_2.

Admite-se a existência de certo caminho, $y(x)$, que extremiza o funcional em relação aos caminhos vizinhos (variados), $\tilde{y}(x)$. Uma família de caminhos variados, dependentes de um parâmetro ε é definida como:

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x) \tag{4.1}$$

Onde $\eta(x)$ é uma função derivável, arbitrariamente escolhida, que se anula em $x = x_1$ e $x = x_2 : \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Nota-se ainda que, qualquer que seja a escolha de $\eta(x)$, quando $\varepsilon = 0$ os caminhos variados coincidem com o caminho extremizante.

Considerando os caminhos variados, o funcional:

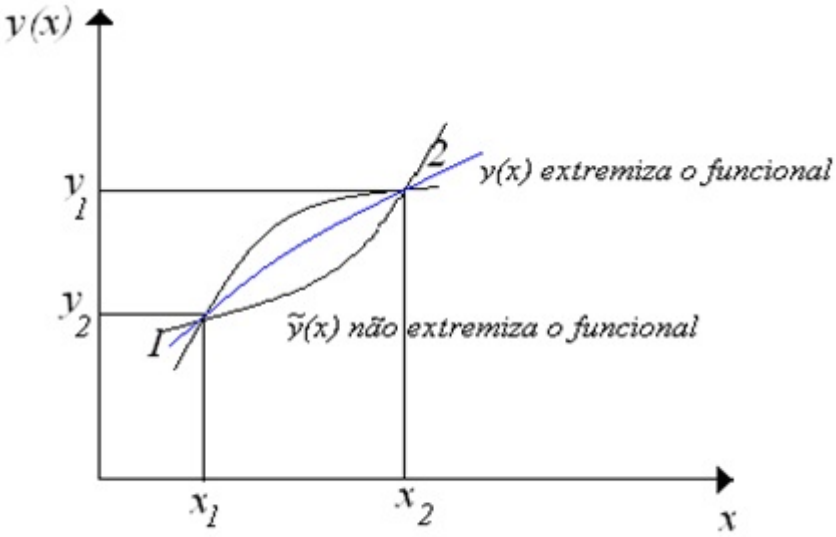

Figura 4.1: Calculo Variacional de primeira ordem da função $y(x)$ extremizante do funcional

Fonte: Alves, 2007, p. 61.

$$\tilde{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')dx \tag{4.2}$$

tem o seu valor extremo dado por (já que por hipótese, y extremiza o funcional):

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx \tag{4.3}$$

Substituindo (4.1) em (4.2):

$$\tilde{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(\varepsilon, \tilde{y}(\varepsilon), \tilde{y}'(\varepsilon))dx \tag{4.4}$$

ou

$$\tilde{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')dx \tag{4.5}$$

Em (4.5), o funcional está escrito como função do parâmetro ε e pode ser expandido em Série de Taylor na vizinhança de $\varepsilon = 0$ (porque em $\varepsilon = 0$ temos $\tilde{y} = y$):

$$\tilde{I} = (\tilde{I})_{\varepsilon=0} + \left(\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \varepsilon + \left(\frac{d^2\tilde{I}}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon^2}{2!} + ... \tag{4.6}$$

ou

$$\tilde{I} - I = \left(\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \varepsilon + \left(\frac{d^2\tilde{I}}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon^2}{2!} + ... \tag{4.7}$$

Analogamente ao caso da função $y = f(x)$, a condição necessária para que $\tilde{I}$ seja extremo em $\varepsilon = 0$ é dada por:

$$\tilde{I} = \tilde{I}(\varepsilon, \tilde{y}(\varepsilon), \tilde{y}'(\varepsilon)) \tag{4.8}$$

onde

$$\delta\tilde{I} = \left(\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right) d\varepsilon = \int \delta F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')dx = 0 \tag{4.9}$$

Logo

$$\delta F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') = \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \varepsilon}\right) \delta\varepsilon \tag{4.10}$$

e

$$\left(\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \varepsilon = 0 \tag{4.11}$$

ou seja

$$\left(\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0 \tag{4.12}$$

Logo

$$\left(\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left[\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \varepsilon}\right) \delta\varepsilon dx\right]_{\varepsilon=0} = 0 \tag{4.13}$$

De (4.5):

$$\left(\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left[\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\eta + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\eta'\right) dx\right]_{\varepsilon=0} = 0 \tag{4.14}$$

Como em $\varepsilon = 0, \tilde{y} = y$ e $\tilde{y}' = y'$, a expressão (4.14) pode ser escrita como:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \right) dx = 0 \tag{4.15}$$

Agora vamos procurar eliminar o segundo termo da integral.

Integrando por partes, pode-se eliminar η':

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial F}{\partial y'} \Rightarrow du = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) dx \\ dv = \eta' dx \Rightarrow v = \eta \end{cases} \tag{4.16}$$

Logo

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' dx = \frac{\partial F}{\partial y'}\eta \Bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \eta dx \tag{4.17}$$

Como $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \eta dx \tag{4.18}$$

Substituindo (4.18) em (4.15)

temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right] \eta dx = 0 \tag{4.19}$$

Usando o LEMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO DAS VARIAÇÕES. Se

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\eta(x)dx = 0$$

com $f(x)$ e $\eta(x)$ continuamente derivável (ou diferenciável) e anulando-se em x_1 e x_2, então $f(x) = 0$ no intervalo considerado.

Assim tem-se de (4.19) que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \tag{4.20}$$

que é a **Equação de Euler - Lagrange** e é condição a que $y(x)$ deve obedecer para que seja *extremizante do funcional.*

Da equação (4.1) pode-se definir o operador δ:

$$\delta y = \tilde{y} - y = \varepsilon\eta \quad ; \quad \tilde{y} = y + \varepsilon\eta \tag{4.21}$$

Por definição, δy representa uma variação arbitrária introduzida na variável dependente y para um valor fixo da variável independente x. Graficamente temos:

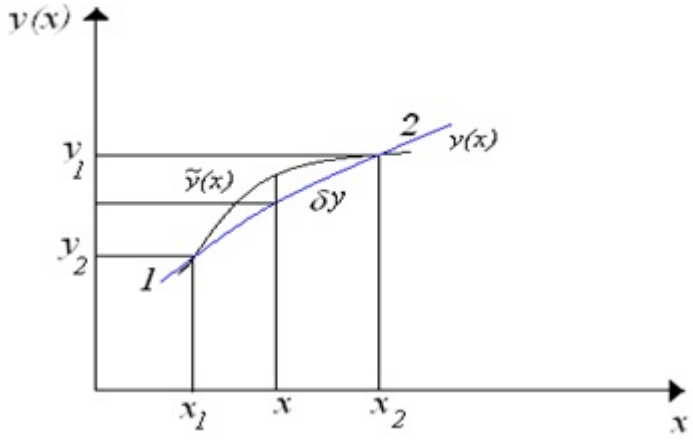

Figura 4.2: Variação δy em torno de função extremizante $y(x)$
Fonte: Alves, 2007, p. 64.

Substituindo (4.15) no segundo termo à direita em (4.6):

$$\left[\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)dx\right]\varepsilon = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta\varepsilon + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\varepsilon\right)dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx \tag{4.22}$$

Integrando por partes o segundo termo de (4.22):

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial F}{\partial y'} \Rightarrow du = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)dx \\ dv = \delta y' dx \Rightarrow v = \displaystyle\int \delta y' dx = \delta \int y' dx = \delta y \end{cases} \tag{4.23}$$

Logo

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' dx = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y}_{=0}\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx \tag{4.24}$$

Mas $\delta y = \tilde{y} - y = 0$ porque são iguais em x_1 e x_2.

Substituindo (4.24) em (4.22):

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0 \tag{4.25}$$

A expressão (4.25) é denominada primeira variação do funcional. Portanto, a condição necessária à extremização requer que a primeira variação do funcional seja igual a zero.

4.2 Exemplos de aplicações

Exemplo 1- Extremizar o seguinte funcional:

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} (xy' + (y')^2) dx, \quad onde \quad F(x, y, y') = xy' + (y')^2$$

Solução:

A partir da equação de Euler - Lagrange temos que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

sendo $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$ temos:

$$0 - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

O que implica que:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

Logo, $F = F(x, y')$

Retornando a equação de Euler - Lagrange tem-se:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} (xy' + (y')^2) = x + 2y'$$

ou

$$x + 2y' = C \Rightarrow y' = -\frac{x}{2} + \frac{C}{2}$$

Portanto,

$$y = -\frac{x^2}{4} + \frac{Cx}{2} + D$$

Exemplo 2 - Considere o funcional:

$$I(y) = \int_0^1 [(y')^2 + 2xy]dx$$

$y(0) = 0$ e $y(1) = 1$, neste caso, $F(x, y, y') = (y')^2 + 12xy$

Para buscarmos os candidatos a extremo desse funcional, aplicamos a equação de Euler - Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(y')^2 + 12xy\right] - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial y'}((y')^2 + 12xy)\right] = 0$$

$$\Rightarrow 12x - \frac{d}{dx}(2y') = 0$$

$$\Rightarrow 12x - 2y'' = 0$$

$$\Rightarrow 6x - y'' = 0$$

Resolvendo a equação diferencial:

$$y'' = 6x \Rightarrow y' = \int 6xdx = 3x^2 + c_1$$

$$\Rightarrow y = \int (3x^2 + C_1)dx = x^3 + C_1x + C_2$$

Para determinar as constantes de integração são usadas as condições de contorno,

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0^3 + C_1 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow 1^3 + C_1 1 = 1 \Rightarrow C_1 = 1 - 1 = 0$$

Logo, $y(x) = x^3$ é um candidato a extremo.

4.3 Resolução dos dois problemas clássicos do Cálculo Variacional

Nesta seção serão apresentadas as resoluções dos dois problemas clássicos do cálculo de variações utilizando a Equação de Euler - Lagrange, visto que foram formuladas no capítulo 3 deste trabalho.

4.3.1 Curva Plana de Comprimento Mínimo

Como visto no capítulo 3 sobre formulações de dois problemas clássicos, neste caso, tem-se o funcional do problema da Curva Plana de Comprimento Mínimo:

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}dx$$

Neste caso $F(x, y, y') = \sqrt{1+(y')^2}$. Desse modo, analisam-se os candidatos a serem extremo do funcional aplicando a Equação - Euler:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1+(y')^2}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)\right) = 0 \tag{4.26}$$

Note que
$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1+(y')^2}\right) = 0$, então temos:

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)\right) = 0 \tag{4.27}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) = 0 \tag{4.28}$$

$$\Rightarrow \frac{y''\sqrt{1+(y')^2} - y'\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1+(y')^2}\right]}{\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)^2} = 0 \tag{4.29}$$

Observe que no segundo termo de (4.29) temos uma derivação implícita:

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1+(y')^2}\right] = \frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}}y'' = \frac{y'y''}{\sqrt{1+(y')^2}} \tag{4.30}$$

Substituindo (4.30) em (4.29) segue que:

$$\frac{y''\sqrt{1+(y')^2} - y'\dfrac{y'y''}{\sqrt{1+(y')^2}}}{1+(y')^2} = 0 \tag{4.31}$$

$$\Rightarrow \frac{y''\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{1+(y')^2} - y'y'y''}{\sqrt{1+(y')^2}(1+(y')^2)} = 0 \tag{4.32}$$

$$\Rightarrow \frac{y''[1+(y')^2] - (y')^2}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \tag{4.33}$$

$$\frac{y''.1}{\underbrace{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}_{>0}} = 0 \tag{4.34}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow y = c_1 x + c_2 \tag{4.35}$$

Portanto, o candidato a extremo para o problema da Curva Plana de Comprimento Mínimo é dado pela função:

$$y(x) = c_1 x + c_2 \tag{4.36}$$

Para determinar as constantes C_1 e C_2 basta usar as condições de contorno.

4.3.2 O Problema da Braquistócrona

De acordo com o capítulo 3 sobre formulações de dois problemas clássicos, tem-se o funcional do Problema da Braquistócrona:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{v_1^2 + 2g(y_1 - y)}} dx$$

Particularizando o problema para $v_1 = 0$ e considerando o ponto $(1) = (x_1, y_1)$ na origem e com o sentido invertido para y, conforme mostra a figura 4.3 logo abaixo:

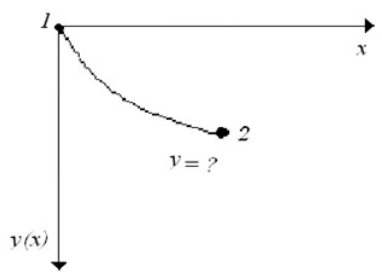

Figura 4.3: Particularização do problema da braquistócrona
Fonte: Alves, 2007, p. 70.

A equação sobre o funcional do problema da braquistócrona fica:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} dx \tag{4.37}$$

Com o sentido invertido para y. Logo, o funcional a ser extremizado é:

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} \tag{4.38}$$

e a Equação de Euler - Lagrange se apresenta dessa forma:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{4.39}$$

Substituindo (4.38) na Equação de Euler - Lagrange apresentada em (4.39), tem-se:

$$i. \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)\sqrt{y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{y}\right)\sqrt{1+(y')^2}}{\left(\sqrt{y}\right)^2}$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)\sqrt{y} = 0$$

$$\frac{-\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{y}\right)\sqrt{1+(y'^2)}}{\left(\sqrt{y}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}\sqrt{1+(y')^2}}{\left(\sqrt{y}\right)^2}$$

$$-\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{2\sqrt{y}\left(\sqrt{y}\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{(\sqrt{y})^3}$$

Portanto,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\left(\sqrt{y}\right)^3} \tag{4.40}$$

$$ii. \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial y'}\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)\sqrt{y} - \frac{\partial}{\partial y'}\left(\sqrt{y}\right)\sqrt{1+(y')^2}}{\left(\sqrt{y}\right)^2}$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(\sqrt{y}\right)\sqrt{1+(y')^2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial}{\partial y'}\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)\sqrt{y}}{\left(\sqrt{y}\right)^2}=\frac{\frac{2y'\sqrt{y}}{2\sqrt{1+(y')^2}}}{\left(\sqrt{y}\right)^2}$$

$$=\frac{2y'\sqrt{y}}{2\sqrt{1+(y')}\left(\sqrt{y}\right)^2}=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}}$$

Portanto,

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}} \tag{4.41}$$

iii. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}}\right)=\frac{\frac{d}{dx}\left(y'\right)\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}-\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}\right)y'}{\left(\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}\right)^2}$$

$$=\frac{y''\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}-y'\left[\frac{2y'y''\sqrt{y}}{2\sqrt{1+(y')^2}}+\frac{\sqrt{1+(y')^2}y'}{2\sqrt{y}}\right]}{\left(\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}\right)^2}$$

$$=\frac{y''\sqrt{1+(y)^2}\sqrt{y}-\frac{(y')^2y''\sqrt{y}}{\sqrt{1+(y')^2}}-\frac{(y')^2\sqrt{1+(y')^2}}{2\sqrt{y}}}{\left(\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}\right)^2}$$

$$=\frac{y''\sqrt{1+(y)^2}\sqrt{y}}{\left(\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}\right)^2}-\frac{\frac{(y')^2y''\sqrt{y}}{\sqrt{1+(y')^2}}}{\left(\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}\right)^2}-\frac{\frac{(y')^2\sqrt{1+(y')^2}}{2\sqrt{y}}}{\left(\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}\right)^2}$$

$$=\frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}}-\frac{(y')^2y''}{\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)^3\sqrt{y}}-\frac{1}{2}\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}\left(\sqrt{y}\right)^3}$$

Portanto

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}} - \frac{(y')^2 y''}{\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)^3\sqrt{y}} - \frac{1}{2}\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}\left(\sqrt{y}\right)^3} \tag{4.42}$$

Logo, unindo (4.40), (4.41) e (4.42) em (4.39), tem-se:

$$\frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}} - \frac{(y')^2 y''}{\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)^3\sqrt{y}} - \frac{1}{2}\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}\left(\sqrt{y}\right)^3} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\left(\sqrt{y}\right)^3} = 0 \tag{4.43}$$

Multiplicando tudo por $\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}$, tem-se:

$$y'' - \frac{y''(y')^2}{(1+(y')^2)} - \frac{(y')^2}{2y} + \frac{(1+(y')^2)}{2y} = 0 \tag{4.44}$$

Multiplicando tudo por $2y$, tem-se:

$$2yy'' - \frac{2yy''(y')^2}{1+(y')^2} - (y')^2 + 1 + (y')^2 = 0 \tag{4.45}$$

ou

$$2yy'' - \frac{2yy''(y')^2}{1+(y')^2} + 1 = 0 \tag{4.46}$$

$$2yy''(1+(y')^2) - 2y(y')^2 y'' + 1 + (y')^2 = 0 \tag{4.47}$$

Simplificando os termos semelhantes,

$$2yy'' + 2y(y')^2 y'' - 2y(y')^2 y'' + 1 + (y')^2 = 0 \tag{4.48}$$

obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$2yy'' + (y')^2 + 1 = 0 \tag{4.49}$$

Fazendo-se uma mudança de variáveis tem-se:

$$y' = u \tag{4.50}$$

e

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = y'\frac{du}{dy} = u\frac{du}{dy} \tag{4.51}$$

Logo,

$$2yu\frac{du}{dy} + u^2 + 1 = 0 \tag{4.52}$$

$$2yudu + (u^2 + 1)dy = 0 \tag{4.53}$$

$$2yudu = -(u^2 + 1)dy \tag{4.54}$$

$$\frac{2udu}{(u^2 + 1)} = -\frac{dy}{y} \tag{4.55}$$

Integrando os dois membros de (4.55), tem-se:

$$\int \frac{2udu}{(u^2 + 1)} = -\int \frac{dy}{y} \tag{4.56}$$

$$\Rightarrow ln(u^2 + 1) = -ln(y) + ln(a) \tag{4.57}$$

onde $ln(a) = constante$.

Logo,

$$\Rightarrow ln(u^2 + 1) = ln[(y^{-1})a] \tag{4.58}$$

$$\Rightarrow e^{ln(u^2 + 1)} = e^{ln[(y^{-1})a]} \tag{4.59}$$

$$\Rightarrow u^2 + 1 = y^{-1}a \tag{4.60}$$

$$u^2 = \frac{a}{y} - 1 \tag{4.61}$$

Como $y' = u$, tem-se:

$$(y')^2 = \frac{a}{y} - 1 \tag{4.62}$$

$$y' = \sqrt{\frac{a}{y} - 1} \tag{4.63}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a-y}{y}} \tag{4.64}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a-y}}{\sqrt{y}} \tag{4.65}$$

$$dy = \frac{\sqrt{a-y}}{\sqrt{y}}dx \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a-y}}dy \tag{4.66}$$

Integrando (4.66), tem-se:

$$x = \int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{a-y}} + x_0 \tag{4.67}$$

Fazendo:

$$y = asen^2(t/2) \tag{4.68}$$

Logo

$$dy = \frac{2asen(t/2)cos(t/2)}{2}dt = asen(t/2)cos(t/2)dt \tag{4.69}$$

$$x = \int \frac{\sqrt{a}sen(t/2)}{\sqrt{a}cos(t/2)}asen(t/2)cos(t/2)dt + x_0 \tag{4.70}$$

ou

$$x = a\int sen^2(t/2)dt + x_0 \tag{4.71}$$

Como:

$$sen^2(t/2) = \frac{1 - cos(t)}{2} \tag{4.72}$$

Ficamos com:

$$x = \frac{a}{2}\int (1 - cos(t))dt + x_0 \tag{4.73}$$

Portanto

$$x = a\left(\frac{t}{2} - \frac{sen(t)}{2}\right) + x_0 \tag{4.74}$$

para $y\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$. A solução fica

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2}(t - sen(t)) \\ e \\ y = asen^2(t/2) = \dfrac{a}{2}(1 - cos(t)), \end{cases}$$

Esta equação é a equação da ciclóide.

Deste modo, a Braquistócrona é um arco de ciclóide desde o ponto (1) com ($x = 0$, $y = 0$) até o ponto (2) com ($x = x_2$, $y = y_2$).

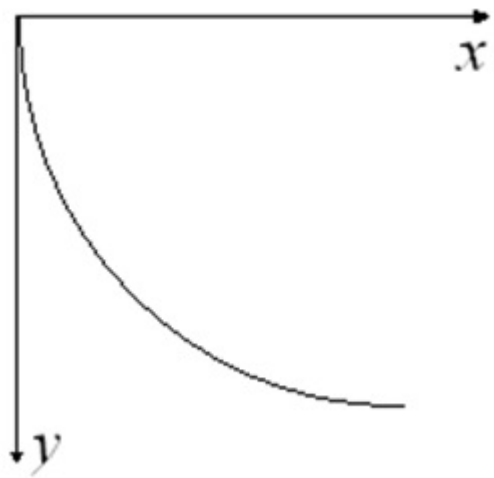

Figura 4.4: Curva de arco de ciclóide para um tempo mínimo (Braquistócrona)
Fonte: Alves, 2007, p. 74.

Portanto, a ciclóide tem a propriedade que procuramos e assim, ela é a solução do problema da Braquistócrona, como já havíamos obtido na resolução variacional do problema.

Capítulo 5

Simulação Computacional: O Problema da Braquistócrona com base nos resultados do autor Lima (2004)

Acredita-se que é de suma importância apresentar várias formas de resolver um mesmo problema, mostrando maneiras alternativas e de que forma antes era obtido os resultados de um determinado problema. Assim, pode-se perceber o porquê do desenvolvimento de novas teorias, novos campos de pesquisas na matemática e as importâncias desse desenvolvimento. Sobretudo, neste capítulo serão apresentados resultados obtidos por [5] sobre o Problema da Braquistócrona através de uma simulação computacional utilizando o software Mathematica.

Segundo [5], no caso do Problema da Braquistócrona é interessante analisar também a ideia intuitiva que geralmente se tem: o caminho que minimiza o tempo de descida de uma partícula a um ponto dado, num plano inclinado é a linha reta. Porém, a resposta do problema obtido é do arco da ciclóide e não de uma reta como a intuição sugere. Levando em conta este fato, é interessante calcular o tempo de descida pela ciclóide e pela reta, com a mesma velocidade, para validar a solução encontrada pelos métodos neste capítulo.

5.1 Análise de dados obtidos através das simulações computacionais

Dado os pontos $A = (0,0), B = (\pi, 2), C = (2\pi, 1)$ num plano inclinado e considerar $g = 10m/s^2$. Iremos calcular o tempo que uma partícula leva para ir de A a B por uma reta e por um arco de ciclóide. Em seguida, faremos o mesmo para os pontos A e C. Para calcular os tempos precisaremos calcular a integral:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx \tag{5.1}$$

Primeiro Caso: avaliar o tempo que uma partícula leva para ir de A a B em um plano inclinado pela reta $y = \frac{2}{\pi}x$ e pelo arco de ciclóide $x = \theta - sen\theta$, $y = 1 - cos\theta$. Para a reta, a integral fica

$$t = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}}{\sqrt{\frac{40x}{\pi}}} dx = 1.17769 \tag{5.2}$$

e para o arco de ciclóide

$$t = 0.993459 \tag{5.3}$$

Segundo Caso: fazendo os mesmos cálculos só que agora para os pontos A e C, para a reta $y = \frac{x}{2\pi}$ e para o mesmo arco de ciclóide obtemos para a reta

$$t = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}}}{\sqrt{\frac{10x}{\pi}}} dx = 2.84529 \tag{5.4}$$

e para o arco de ciclóide

$$t = 1.57859 \tag{5.5}$$

Portanto, em (5.2), (5.3), (5.4) e (5.5), podemos perceber que, de fato, a descida é mais rápida pelo arco de ciclóide confirmando assim nossas respostas encontradas anteriormente. Para estes cálculos consideramos $g = 10m/s^2$.

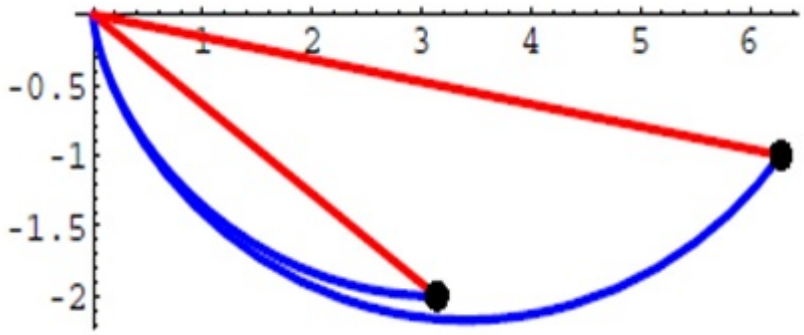

Figura 5.1: Os dois segmentos de reta e os dois arcos de ciclóide considerados, visualizados simultaneamente

Fonte: Lima, 2004, p. 33.

Considerações Finais

No decorrer deste trabalho, evidenciou-se o Estudo da Teoria do Cálculo Variacional. Embora exista uma variedade grande de problemas, nos restringimos a Equação de Euler - Lagrange, que trata de uma condição necessária para uma função ser extremo de um funcional. Sobretudo, aos problemas clássicos: Curva Plana de Comprimento Mínimo e o Problema da Braquistócrona.

Para a construção deste trabalho durante todo o seu processo foi utilizado como referencial primordial as postulações da teoria de [5] como instrumento a sua dissertação de mestrado que apresenta um amadurecimento e maior domínio do conteúdo em estudo. Trata-se de um material valioso para o aprofundamento das ideias subjacentes ao Cálculo Variacional, e que transita dos problemas clássicos, definições, resultados, e também a própria Equação de Euler.

As soluções dos problemas clássicos abordados no capítulo 4 proporcionaram uma melhor compreensão deles, haja vista que na maioria das bibliografias a solução apresentada em alguns momentos era obtida diretamente. Desse modo, conseguiu-se realizar soluções mais compreensíveis, com base nos autores utilizados como análise do estudo.

Para o Problema da Braquistócrona, por sua vez, utilizou-se recursos computacionais, como estimativa gráfica para uma comparação do tempo gasto pela partícula durante o percurso, através do software denominado Mathematica, a conclusão obtida já era esperada devido ao desenvolvimento teórico, mais uma vez constatamos que a ciclóide é a curva que resulta o menor tempo e não por uma reta como a intuição sugere.

Portanto, espera-se que outras propostas possam surgir a partir deste trabalho, assim, inspirando outras iniciativas nesta linha de pesquisa do segmento matemático, ao passo que este estudo é considerado uma base para aprofundamento ao Cálculo Variacional e suas Aplicações.

Referências

[1] ALVES, Lucas Máximo. **Introdução aos Métodos aproximados em Engenharia -** Apostila do curso de Doutorado do Programa de Pós - graduação em Métodos Numéricos do setor de Tecnologia/Ciências Exatas. Departamento de Engenharia Civil/ Departamento de Matemática. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2007.

[2] FLORES, Ana Paula Ximenes. **Cálculo Variacional:** aspectos teóricos e aplicações. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2011.

[3] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo - Volume 1.** 5ª edição. Editora S.A.: LTC - Livros Técnicos e Científicos Rio de Janeiro, 2001.

[4] JOÃO, Antônio. **Introdução ao Cálculo Variacional.** Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Centro de Ciências Físicas e Matemática - Departamento de Matemática, Florianópolis, 2006.

[5] LIMA, Gabriel Loureiro de. **Cálculo Variacional:** problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, 2004.

[6] MACEDO, Daniel Leal. **Aplicações do cálculo variacional: Braquistócrona e o princípio de Fermat.** Relatório final do projeto de instrumento para o ensino. Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Instituto de Física "Gleb Wataghin", Campinas, 2004.

[7] SOUSA, José Ribamar Alves Júnior. **O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona.** Dissertação de mestrado. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2010.

[8] STEWART, James. **Cálculo: Volume I**. Tradução da 6ª edição norte-americana, São Paulo: Cengage Learning, 2010.

[9] STEWART, James. **Cálculo: Volume II**. Tradução da 6ª edição norte-americana, São Paulo: Cengage Learning, 2010.