UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ – UNIFAP

MELQUISEDEQUE PIMENTEL PACHECO

VALDEIR PIRES MORAES

TEOREMA DE LYAPUNOV

MACAPÁ – AP

2015

Melquisedeque Pimentel Pacheco

Valdeir Pires Moraes

TEOREMA DE LYAPUNOV

Trabalho de conclusão de curso submetido à Universidade Federal do Amapá como parte dos requisitos necessários para a obtenção da graduação em Licenciatura Plena em Matemática. Sob a orientação do professor Guzmán Eulálio Isla Chamilco.

MACAPÁ – AP

2015

MELQUISEDEQUE PIMENTEL PACHECO

VALDEIR PIRES MORAES

TEOREMA DE LYAPUNOV

Trabalho de conclusão de curso submetido à Universidade Federal do Amapá como parte dos requisitos necessários para a obtenção da graduação em Licenciatura Plena em Matemática. Sob a orientação do professor Guzmán Eulálio Isla Chamilco.

Trabalho de conclusão de curso apresentado e aprovado em ___/___/___, pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
Universidade Federal do Amapá

Profª. MSc. Caroline Lima de Souza , Membro da Banca – Examinador
Universidade Federal do Amapá

Prof. MSc. Kelmem da Cruz Barroso, Membro da Banca – Examinador
Universidade Federal do Amapá

Dedicamos este trabalho a todos que contribuíram direta ou indiretamente em nossa formação acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a todos que contribuíram no decorrer desta jornada, especialmente:

A Deus, a quem devemos nossas vidas.

As nossas famílias que sempre nos apoiaram nos estudos e nas escolhas tomadas.

Ao orientador Prof. Guzmán Eulálio Isla Chamilco que teve papel fundamental na elaboração deste trabalho

Aos nossos colegas pelo companheirismo e disponibilidade para nos auxiliarem em vários momentos.

“*Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível.”*

Charles Chaplin

Resumo

Iremos estudar aqui dois métodos apresentados pelo matemático russo Aleksandr M. Lyapunov sobre estabilidade. O primeiro método conhecido como método indireto ou método da linearização, permite investigar a estabilidade local de um sistema não linear através do seu modelo linearizado. Já o segundo método de Lyapunov, conhecido também como método direto, é um importante critério que avalia a estabilidade de pontos de equilíbrio.

Palavras – chave: Estabilidade. Sistemas não lineares. Teorema de Lyapunov

Abstract

We will study here two methods presented by the Russian mathematician Aleksandr M. Lyapunov about stability. The first method or indirect method known as the linearization method enables to investigate the local stability of a nonlinear system through its linearized model. The second method of Lyapunov, also known as direct method, is an important criterion measuring the stability of equilibrium points.

Keywords: stability. Nonlinear systems.theorem lyapunov.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov nasceu em Yaroslavl, na Rússia, em 6 de junho 1857. Lyapunov era filho de Sofia Aleksandrovna Shilipova e Mikhail Vasilievich. Seu pai foi um astrônomo que trabalhou na universidade de Kazan até dois anos antes de Lyapunov nascer, quando sua família mudou-se para Yaroslavl devido à nomeação de seu pai como diretor do Demidoviski Lyceum. Aleksandr Lyapunov tinha mais dois irmãos muito talentosos, Sergei, que era compositor, e Boris que com a sua experiência em línguas eslavas, tornou-se membro da Academia Soviética de Ciências. Começou a estudar em casa e depois um de seus tios RM Sechenov preparou-o para entrar no ginásio. Sechenov também ensinava sua filha, Natalia Rafailovna Sechenov, ao mesmo tempo em que ensinava Lyapunov. Anos mais tarde Natalia e Aleksandr casaram-se quando ele tinha 29 anos de idade. Alguns anos após a morte de seu pai, Sofia Aleksandrovna Shilipova mudou-se para Nizhny Novgorod (nomeado Gorky 1932-1990) em 1870 com seus filhos e foi nessa cidade que Lyapunov entrou para o ginásio. Na escola, tornou-se amigo de Markov. Formou-se em 1876 e, como o seu amigo Markov, entrou na Faculdade de Física e Matemática na Universidade de São Petersburgo.

Na Universidade de São Petersburgo ele foi ensinado por Chebyshev, que teve uma forte influencia sobre o mesmo. Lyapunov formou-se em 1880 e manteve-se em São Petersburgo para realizar pesquisas. Em 1881 publicou dois artigos sobre hidrostática: *o equilíbrio de um corpo pesado em um fluido pesado contido em um navio de uma determinada forma fixa* e *sobre o potencial de pressão hidrostática.* No ano seguinte Chebyshev fez uma pergunta para Lyapunov que iria definir a agenda para uma de suas principais linhas de pesquisa ao longo de muitos anos:

Sabe-se que em certas formas elipsoidais uma velocidade angular deixa de ter as formas de equilíbrio de um liquido em rotação. Neste caso, *é que eles vão mudar para algumas novas formas de equilíbrio que diferem um pouco dos elipsoides para pequenos aumentos na velocidade angular?*

Embora a tese de mestrado de Lyapunov não respondesse a esta questão, o trabalho de tese foi motivado por isso. Ele apresentou a tese sobre *a estabilidade de formas elipsoidais de equilíbrio de um liquido em rotação* em 1884 e defendeu-a na

Universidade de São Petersburgo, no ano seguinte. Após isso, ele foi apontado como professor na Universidade de Kharkov, onde ensinou mecânica e continuou suas pesquisas para a tese de doutorado. Ele apresentou sua tese de doutorado sobre *O problema geral da estabilidade de movimento* para a universidade de Moscou e concluiu seu doutorado depois de defender sua tese em 12 de outubro de 1892.

Enquanto como professor na universidade de Kharkov, ele desempenhou um papel importante na Sociedade Matemática Kharkov, sendo seu vice-presidente 1891-1898 e presidente de 1899 até que ele deixou Kharkov em 1902.

Em 1901 Lyapunov foi eleito para a Academia de Ciências da Rússia em São Petersburgo e no ano seguinte tornou-se professor ordinário da Faculdade de Matemática Aplicada da Universidade. A posição havia sido deixada vaga pela morte de seu ex-professor, Chebyshev. Em São Petersburgo, Lyapunov dedicou-se completamente ao trabalho científico, porque ele não tinha nenhuma obrigação de ensino, dessa forma pôde voltar para o problema que Chebyshev havia colocado diante dele e, em uma extensa série de documentos que continuou até sua morte, desenvolveu a teoria das figuras de equilíbrio de rotação de líquidos pesados.

Em 1917 Lyapunov deixou São Petersburgo para assumir um cargo na Universidade de Odessa, na costa do Mar Negro. Ele ensinou na Universidade, mas na primavera de 1918, a saúde de sua esposa começou a se deteriorar rapidamente. Natalia Rafailovna Sechenov sofria de uma forma de tuberculose e Lyapunov estava muito perturbado para assistir a sua saúde falhar. Em 31 de outubro de 1918 a esposa de Lyapunov morreu e mais tarde naquele dia, Lyapunov deu um tiro na cabeça, e no hospital três dias depois ele morreu.

Lyapunov contribuiu para vários campos, incluindo Equações Diferenciais, Teoria do Potencial, Sistemas Dinâmicos e Teoria das Probabilidades. As suas principais preocupações eram a estabilidade do equilíbrio e o movimento dos sistemas mecânicos, e o estudo das partículas sob a influência da gravidade. Seu trabalho no campo da Física Matemática considerando o problema do valor limite da equação de Laplace. Na teoria do potencial, o seu trabalho de 1897 sobre algumas questões relacionadas com o problema de Dirichlet esclareceu vários aspectos importantes da teoria. Seu trabalho nessa área está em estreita ligação com o trabalho de Steklov.

Lyapunov desenvolveu muitos métodos de aproximações importantes. Seu método, que ele desenvolveu em 1899, tornou-se possível para definir a estabilidade do conjunto de equações diferenciais ordinárias. Ele criou a moderna teoria da estabilidade de um sistema dinâmico. Na teoria da probabilidade, ele generalizou as obras de Chebychev e Markov, e provou o Teorema do Limite Central em condições mais gerais que seus antecessores. O método de funções características que ele usou para a prova mais tarde encontrando uso generalizado na teoria da probabilidade.

Como muitos matemáticos, Lyapunov preferia trabalhar sozinho e comunicava-se principalmente com alguns colegas e parentes próximos. Ele geralmente trabalhava até tarde, de quatro a cinco horas por noite, às vezes a noite inteira. Uma ou duas vezes por ano visitou o teatro, ou foi a algum show. Ele tinha muitos alunos. Foi homenageado por suas contribuições em dívida por eleição por várias academias como a Accademia dei Lincei (1909) e a Academia de Ciências da França (1916). Ele também foi dado como membro honorário das Universidades de São Petersburgo, Kharkov e Kazan. As contribuições de Lyapunov foram significativas, e um número de diferentes conceitos matemáticos, portanto, tem o seu nome: Equação de Lyapunov, expoente de Lyapunov, função de Lyapunov, Lyapunov fractal, estabilidade de Lyapunov, teorema do limite central de Lyapunov, vetor de Lyapunov.

No segundo capítulo descrevemos nas preliminares elementos básicos para a teoria subsequente, apresentando algumas definições e exemplos de resultados importantes da Álgebra Linear, do Cálculo e das Equações Diferenciais. No terceiro e quarto capítulo desenvolvemos os métodos de Lyapunov, apresentando exemplo das aplicações dos métodos, definições de funções positivas definida, positiva semi-definida, globalmente positiva definida, negativo definida, etc. bem como a demonstração do segundo método de Lyapunov sobre estabilidade local para sistema invariante no tempo.

2 PRELIMINARES

A Álgebra Linear fornece alguns resultados que podem ser utilizados nas resoluções de sistemas lineares de equações diferenciais. Será feito neste capítulo, uma exposição bastante simples e objetiva sem nenhuma preocupação em demonstrar resultados e apresentações de exemplos mais elaborados.

2.1 Transformações Lineares

Definição 2.1.1. Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo K. Uma função $T : U \to V$ é uma *transformação linear* se:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$, $\forall\ u\ ,\ v \in U$
2. $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall\ u \in U$.

Exemplo 2.1.1. Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $T(x) = 5x$, vemos que esta função é uma transformação linear.

De fato, sejam x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ então

$$T(x_1 + x_2) = 5(x_1 + x_2) = 5x_1 + 5x_2 = T(x_1) + T(x_2)$$

E ainda seja $x \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então

$$T(\lambda x) = 5(\lambda x) = \lambda(5x) = \lambda T(x).$$

No caso em que $U = V$, uma transformação linear $T : U \to V$ é chamada também de *operador linear.*

Daí, a definição anterior pode ser resumida por:

Exemplo 2.1.2. A transformação identidade $I : U \to V$, definida por $I(u) = u$, $\forall\ u \in U$ é um exemplo de transformação linear, pois:

i. $I(u + v) = u + v = I(u) + I(v)$;
ii. $I(\lambda u) = \lambda u = \lambda I(u)$.

I é também chamado o operador *idêntico* de U.

Exemplo 2.1.3. Observemos que a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por:

$$T(x,y,z) \to (x+1, y+z)$$

Não é uma transformação linear. De fato, dados $u = (x_1, y_{1,}z_1)$ e $v = (x_2, y_{2,}z_2)$

i. $T(u+v) = T(x_1 + x_{2,}y_1 + y_{2,}z_1 + z_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + z_1 + z_2)$

enquanto que

$T(u) + T(v) = (x_1 + 1, y_1 + z_1) + (x_2 + 1,\ y_2 + z_2) = (x_1 + x_2 + 2,\ y_1 + z_1 + y_2 + z_2)$.

Portanto, $T(u+v) \neq T(u) + T(v)$, ou seja, não satisfaz i.

Observação 2.1.1. Decorre da definição que, uma transformação linear $T:U \to V$ leva o vetor nulo de U no vetor nulo de V, isto é, se $0 \in U$, $T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0)$, subtraindo $T(0)$, $T(0) - T(0) = T(0) + T(0) - T(0) \Rightarrow T(0) = 0 \in V$. Isto nos auxilia a detectar transformações não lineares. Se $T(0) \neq 0$, T não é linear. Assim, no exemplo (2.1.3) podemos detectar que T não é uma transformação linear pelo fato de $T(0) \neq 0$. No entanto pode ocorrer de $T(0) = 0$, mas T não ser uma transformação linear.

2.2 Autovalores e Autovetores

Definição 2.2.1. Seja $T:V \to V$ um operador linear. Se existirem $v \in V$, $v \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$, dizemos que λ é um *autovalor* de T e v um *autovetor* de T associado a λ.

Exemplo 2.2.1. Seja $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (2x+2y, y)$. Vamos resolver $T(x,y) = \lambda(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$. Isto é, $(2x+2y, y) = \lambda(x,y)$, assim:

$$\begin{cases} 2x + 2y = \lambda x \\ y = \lambda y \end{cases}$$

Consideremos os casos:

- Se $y \neq 0$ então da segunda equação temos $\lambda = 1$. Logo $2x + 2y = x$ e assim $y = -\frac{1}{2}x$. Obtemos assim, para o autovalor $\lambda = 1$, os autovetores do tipo $\left(x, -\frac{1}{2}x\right)$, $x \neq 0$.

- Se $y = 0$ então $x \neq 0$ pois $(x, y) \neq (0,0)$. Da primeira equação temos que $2x = \lambda x$, ou seja, $\lambda = 2$. Portanto outro autovalor é 2 e qualquer vetor não nulo $(x, 0)$ é um autovetor correspondente.

Temos assim, para esta transformação T, autovetores $\left(x, -\frac{1}{2}x\right)$, $x \neq 0$ associados a 1 e autovetores $(x, 0)$, $x \neq 0$ associados a 2.

Definição 2.2.2. O subespaço $V_\lambda = \{\ v \in V\ :\ T(v) = \lambda v\ \}$ é chamado *o subespaço associado ao autovalor* λ*.*

É possível, de certa forma, que o estudo das transformações lineares seja reduzido ao estudo de matrizes, ou seja, podemos verificar que a toda matriz $m \times n$ está associada uma transformação linear: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. E formalizando estes resultados para espaços vetoriais U e V pode ser estabelecido o recíproco, isto é, uma vez fixadas as bases, a toda transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ estará associada uma única matriz. Para quem estiver interessado em se aprofundar mais nessa questão poderá consultar os livros que estão na bibliografia.

Com isso, faz sentido em pensar em como encontrar autovalores e autovetores se conhecermos apenas a matriz da transformação. Vejamos um método para encontra-los.

2.3 Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, estaremos entendendo por autovalor e autovetor de A o autovalor e autovetor da transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, associada a matriz A em relação a base canônica, isto é, $T_A(v) = Av$ (v na forma coluna). Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de A e um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, são soluções da equação:

$$Av = \lambda v.$$

Exemplo 2.3.1. Dada a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e dados os vetores $e_1 = (1\ ,0,0,\dots,0)$, $e_2 = (1\ ,0,0,\dots,0)$, ... , $e_n = (1\ ,0,0,\dots,0)$, temos:

$$Ae_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11}e_i$$

e, em geral, $A.e_1 = a_{ii}e_i$. Então, estes vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ são autovalores para A, e o autovetor e_i é associado ao autovalor a_{ii}.

2.4 Polinômio Característico

Seja A uma matriz de ordem n. Chama-se *polinômio característico* da matriz A o $\det(\lambda I - A) = 0$ e é denotado por $p(\lambda)$.

Exemplo 2.4.1. Consideremos a matriz associada a transformação linear do exemplo (1.4), isto é,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos os autovalores e autovetores associados a essa matriz:

$$\det(\lambda I - A) = \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

Assim, o polinômio característico é

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

e os autovalores são as raízes deste polinômio. Isto é,

$$\lambda = 1 \text{ e } \lambda = 2.$$

Para encontrarmos os autovetores, temos:

Para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -2 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

Ou seja,

$$v = \left(x, -\frac{1}{2}x\right), x \neq 0$$

é o autovetor associado ao autovalor 1.

Para $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 2-2 & -2 \\ 0 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0 \text{ e } x \neq 0$$

Ou seja,

$$v = (x, 0), x \neq 0$$

É o autovetor associado ao autovalor 2.

Um resultado importante sobre autovalores e autovetores fala que:

Teorema 2.4.1. Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Isto nos diz de certo modo, que podemos garantir a existência de uma base de autovetores desde que consigamos encontrar tantos autovalores distintos quanto for a dimensão do espaço vetorial.

2.5 Derivadas Parciais

E agora vamos fornecer uma definição de maneira geral, o conceito de derivada parcial para uma função real definida em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.5.1. Seja:

$$f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \to f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

E seja $x_0 = (x_{1\,0}, x_{2\,0}, \dots, x_{n\,0}) \in$ *Dom*(f)*. Vamos criar uma nova função* $g_i x_0$*, definida da seguinte forma:*

$$g_i x_0 : Dom(g_i x_0) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x_i \to g_i x_0(x_i) = f\big(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{(i-1)0}, x_i, x_{(i+1)0}, x_{n0}\big)$$

Isto é, todas as variáveis, com exceção de x_i*, foram fixadas:*

$$x_1 = x_{10}$$

$$x_2 = x_{20}$$

$$\vdots$$

$$x_{(i-1)} = x_{(i-1)0}$$

$$x_{(i+1)} = x_{(i+1)0}$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n0}$$

$g_i x_0$ é portanto um função da reta na reta e, se $g_i x_0$ é derivável em x_i, definimos a derivada parcial de f com relação à variável x_i no ponto $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ como $g_i' x_0(x_{i0})$ e a notação utilizada é $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$ Sendo assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = g_i' x_0(x_{i0}) = \lim_{h \to 0} \frac{g_i x_0(x_{i0} + h) - g_i x_0(x_{i0})}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_{10}, \dots, x_{io} + h, \dots, x_{n0}) - f(x_{10}, \dots, x_{io}, \dots, x_{n0})}{h}$$

Observação 2.5.1. No cálculo de derivadas parciais de funções de n variáveis, todas as regras de derivações de funções de uma variável podem ser naturalmente aplicadas, considerando que cada vez existe apenas uma variável e as outras variáveis que "sobram" são vista apenas como constante.

Exemplo 2.5.1. Se $f(x,y) = sen\left(\frac{x}{1+y}\right)$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solução Usando a Regra da Cadeia para a função de uma variável, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = cos\left(\frac{x}{1+y}\right).\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\frac{1}{1+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = cos\left(\frac{x}{1+y}\right).\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = -cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\frac{1}{(1+y)^2}$$

Matriz jacobiana

Dado uma função vetorial de várias variáveis $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ com $F(X) = \big(f_1(X), \dots, f_n(X)\big)$, a representação matricial da derivada, quando existe, é denominada de *matriz jacobiana* é definido como sendo

$$JF(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

Quando $m = n$, a *matriz jacobiana* é uma matriz quadrada e o seu determinante

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} = det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

é denominado de *função jacobiana.*

2.6 Gradiente

Definição 2.6.1. Dada a função real de n variáveis reais,

$$f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \to f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Se f possui todas as derivadas parciais de primeira ordem em $X_0 \in$ *Dom*(f), *definimos o vetor gradiente de* f *em* X_0*, denotado por* $\nabla f(X_0)$*, como*

$$\nabla f(X_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\right)$$

2.7 Série de Taylor

Como já sabemos podemos expressar uma função em série de potencia, e seja a função f que possua expansão em séries de potência em torno do ponto x_0, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad |x - x_0| < R$$

Seus coeficientes são dados pela formula

$$a_n = \frac{f^{(n)}.(x_0)}{n!}$$

Em outras palavras se f tiver uma expansão em série de potência centrada em x_0, logo ela deve ter a forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}.(x_0)}{n!}.(x - x_0)^n$$

A série da equação a cima e chamada de **série de Taylor** da função f centrada em x_0.

2.8 Equações Diferenciais Ordinárias

Sabemos que equações algébricas são equações em que as incógnitas são números. No caso das equações diferenciais as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas dessas funções. Na função incógnita $x(t)$ de uma equação diferencial, t é a variável independente enquanto que x é a variável dependente. Passemos as definições formais.

Seja D um subconjunto aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ = $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}^n$, onde $\mathbb{R}$ é a reta real e $\mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano $n - dimensional$, onde um elemento de D é denotado por (t, x), com $t \in \mathbb{R}$ e $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Considere agora, $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, $x : I \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável definida em um intervalo I dos reais e $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ a derivada de x com relação a variável independente t.

Assim, uma Equação Diferencial Ordinária de primeira ordem é uma relação da forma:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \text{ ou, simplesmente, } \dot{x} = f(t, x). \tag{1}$$

Definição 2.8.1. Dizemos que uma equação diferenciável $x : I \to \mathbb{R}^n$, onde $I \subset \mathbb{R}$, é solução da equação (1) em I se:

$i)$ $\big(t, x(t)\big) \in D$, para todo $t \in I$, e

$ii)$ x satisfaz a equação (1) para todo $t \in I$.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.8.1. Considerando a função

$$f(t, x) = \begin{cases} \sqrt{x}, se\ x \geq 0 \\ 0, se\ x < 0 \end{cases},$$

Temos que a equação diferencial $\dot{x} = f(t,x)$ admite como solução a função $x(t) = \frac{(t+c)^2}{4}$ para $t \in [-c\,,+\infty)$ ou a função $x(t) = -k$, onde k é uma constante positiva qualquer.

De fato, para $x = 0$, a função nula é solução da equação e para $x > 0$, a equação $\dot{x} = \sqrt{x}$ é equivalente a $x^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{dt} = 1$. Integrando ambos os membros da última equação com relação à t, obtemos:

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{dt}dt = \int dt \Leftrightarrow 2x^{\frac{1}{2}} = t + c \Leftrightarrow x(t) = \frac{(t+c)^2}{4},$$

Onde c é uma constante real arbitrária.

Assim, para $t \in [-c\,,+\infty)$, $x(t) = \frac{(t+c)^2}{4}$ é uma solução.

Agora, para $x < 0$ temos $\dot{x} = 0$, logo a função $x(t) = -k$ para $t \in \mathbb{R}$, onde k é uma constante positiva, é solução.

Agora, considere $(t_0\,, x_0) \in D$ um ponto dado arbitrariamente. Resolver um problema de valor inicial para a equação (1) consiste em encontrar um intervalo I contendo t_0 e uma solução x da equação (1) satisfazendo $x(t_0) = x_0$. Simbolicamente, o problema de valor inicial é denotado por:

$$\dot{x} = f(t,x), x(t_0) = x_0 \;\; t \in I. \tag{2}$$

Observamos que, se existir um intervalo I contendo t_0 e uma solução x satisfazendo (2), então dizemos que $x(t)$ é uma solução da equação (1) passando por $(t_0\,, x_0)$. A notação usual para as soluções da equação (2) é $x(t\,, t_0\,, x_0)$, entretanto somente a utilizaremos quando for indispensável.

TEOREMA 2.8.1. Existência de uma única solução

Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \le x \le b, c \le y \le d$ que contém o ponto (x_0, y_0). Se $f(x,y)$e $\partial f\ /\ \partial y$ são contínuas em R, então existe algum intervalo $I_0\colon x_0 - h < x < x_0 + h,\ h > 0$, contido em $a \leq x \leq b$, e uma única função $y(x)$, definida em I_0, que é uma solução do problema de valor inicial (2).

Agora, tomando a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e escrevendo $x(t) = (\,x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ e $f(t,x) = (\,f_1(t,x), f_2(t,x), \dots, f_n(t,x))$, observamos que a equação (1), em $\mathbb{R}^n$, nada mais é que uma equação diferencial vetorial. Logo, podemos interpretá-la como um sistema de equações diferenciais escalares, como segue:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t\,, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(t\,, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \qquad\qquad\vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(t\,, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

Assim, uma condição inicial para esse sistema é dada por $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ onde $x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$, ..., $x_n(t_0) = x_n^0$. Uma solução em $I \subset \mathbb{R}$ consiste em n funções reais diferenciáveis $x_j : I \to \mathbb{R}$ tais que, para cada $t \in I$,

$$\dot{x}_j(t) = f_j(t\,, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \text{ com } j = 1, 2, \dots, n,$$

Enquanto que a n-upla $x(t) = (\,x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ dada por estas funções constitui uma solução da equação (1) em $\mathbb{R}^n$.

A equação vetorial $\dot{x} = f(t,x)$ em $\mathbb{R}^n$ é classificada como sendo de primeira ordem, por envolver apenas a derivada primeira. Sistemas lineares envolvendo derivadas de ordem mais altas podem ser reduzidos a sistemas de primeira ordem. Então, vamos considerar uma equação diferencial $x^{(n)} = g(\,t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$, de ordem n em $\mathbb{R}$, dada por uma função $g : D \to \mathbb{R}$ onde D é um aberto de $\mathbb{R}^{(n+1)}$, que pode ser estudada admitindo-se um sistema associado com uma equação diferencial de primeira ordem em $\mathbb{R}^n$, como dado abaixo:

$$\begin{cases} y_1(t) = x(t) \\ y_2(t) = \dot{y}_1(t) = \dot{x}(t) \\ y_3(t) = \dot{y}_2(t) = \ddot{y}_1(t) = \ddot{x}(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_n(t) = \dot{y}_{n-1}(t) = \cdots = x^{(n-1)}(t) \end{cases}$$

Onde temos:

$$\dot{y}_n(t) = x^{(n)}(t) = g\left(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right) =$$

$$g(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)).$$

Logo, como

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)),$$

Então

$$\dot{y}(t) = (\dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \ldots, \dot{y}_n(t)$$

$$= \left(y_2(t), y_3(t), \ldots, y_n(t), g\left(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\right)\right)$$

$$= \left(y_2(t), y_3(t), \ldots, y_n(t), g(t, y(t))\right)$$

Portanto, para obtermos uma solução de $x^{(n)} = g(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$ basta obtermos uma solução $(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ do sistema associado, dado acima, pois se $x(t)$ é uma solução da equação de ordem n, então necessariamente

$$(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) = \left(x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n-1)}(t) \right)$$

É solução do sistema associado.

Então, podemos observar que não é necessário estabelecer um estudo separado para equações de ordem n

2.9 Equações Autônomas

O estudo desenvolvido nesse trabalho se dará para equações em que a f não depende explicitamente da variável independente t, ou seja, equações autônomas que são estudadas a seguir.

Definição 2.9.1. Uma equação da forma

$$\dot{x} = f(x) \tag{3}$$

Onde a função f depende somente de x e não explicitamente da variável t, é chamada de equação autônoma.

As equações das Definições 2.9.2, 2.9.3 e 2.9.4 são exemplos de equações autônomas. Agora vamos estudar alguns resultados importantes sobre equações autônomas.

Proposição 2.9.1. Se $x(t)$ é uma solução para a equação (3) com domínio I e se h e um numero real, então $x(t+h)$ é uma solução de (3) com domínio

$I_h = \{t + h : t \in I\}$.

Demonstração. Seja $\bar{x}(t) = x(t+h)$. Então, considerando $s = t + h$, temos:

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t) = \frac{d}{ds}x(s)\frac{d}{dt}s(t) = \frac{d}{ds}x(s) = f\big(x(s)\big) = f\big(x(t+h)\big) = f\big(\bar{x}(t)\big) \blacksquare$$

E isto completa a demonstração.

Observamos que o argumento usado na prova da proposição 2.9.1 não e verdadeiro se a equação (3) é não autônoma pois

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t+h) = f\big(t+h, x(t+h)\big) = f\big(t+h, \bar{x}(t)\big)$$

Portanto concluímos que, se transladarmos uma solução da equação (3) no eixo t, obteremos ainda uma solução da equação (3).

Próximo resultado evidencia que o comportamento da solução de uma equação diferencial autônoma independe do valor inicial dado.

Definição 2.9.2. Supondo existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial

$$\dot{x} = f(x),\ x(t_0) = x_0 \tag{4}$$

Podemos afirmar que $x(t)$ é solução de (4) se, e somente se, $x(t + t_0)$ é solução de

$$\dot{x} = f(x),\ x(0) = x_0 \tag{5}$$

Demonstração: Se $x(t)$ é solução do problema de valor inicial (4) então pela preposição 2.9.1, temos que $\bar{x}(t) = x(t + t_0)$ é solução da equação $\dot{x} = f(x)$.

Como $\bar{x}(0) = x(t_0) = x_0$ temos, portanto, que $x(t + t_0)$ é solução do problema de valor inicial (5).

Reciprocamente, se $x(t + t_0)$ é solução do problema de valor inicial (5), então considerando $\bar{x}(t) = x(t + t_0)$ $s = t + t_0$ teremos que $\bar{x}(s - t_0) = x(s)$, logo

$$\frac{d}{ds}x(s) = \frac{d}{ds}\bar{x}(s - t_0) = f\big(\bar{x}(s - t_0)\big) = f\big(x(s)\big),$$

Ou seja, $x(s)$ é solução da equação $\dot{x} = f(x)$.

Agora, como $x(t_0) = \bar{x}(s - t_0) = \bar{x}(o) = x_0$ temos, então, que $x(t)$ é solução do problema de valor inicial (4).

A partir desse resultado podemos estudar todas as soluções das equações autônomas (3) tomando sempre a condição inicial $t_0 = 0$.

Notemos que, pela unicidade de soluções, vale a igualdade

$$x(t + t_0, x_0) = x(t, x(t_0, x_0))$$

para todo $t_0 > 0$, lembrando que a notação $x(t, x_0)$ indica o instante $x(t)$ com a condição inicial $x(0) = x_0$. De fato, as funções

$$\phi_1(t) = x(t + t_0, x_0) \quad e \quad \phi_1(t) = x(t, x(t_0, x_0))$$

São soluções da equação $\dot{x} = f(x)$ e coincide em $t = 0$, pois $\phi_1(0) = x(t_0, x_0)$ e $\phi_1(0) = x\big(0, x(t_0, x_0)\big) = x(t_0, x_0)$ e, portanto, as funções coincidem para todo $t \geq 0$.

Também, pela unicidade de soluções, podemos garantir que os gráficos das soluções distintas da equação autônoma (3) em $\mathbb{R}$ não irão se cruzar e assim, as soluções constantes desempenham um papel importante na análise do comportamento das soluções em geral, que devem se aproximar ou afastar das soluções constantes. Situação análoga ocorre com as equações autônomas no $\mathbb{R}^n$, onde as soluções em geral deverão se aproximar ou se afastar, ou ate mesmo oscilar em torno das soluções constantes.

Definição 2.9.4. Se $\bar{x}$ é um zero de f, isto é, $f(\bar{x}) = 0$, então $x(t) \equiv \bar{x}$ é solução da equação (3) e é chamada de solução de equilíbrio ou estacionária de (3).

Desta forma notamos que basta $f(\bar{x})$ ser zero para que a função $x(t) \equiv \bar{x}$ seja solução da equação (3). E reciprocamente, se $x(t) \equiv \bar{x}$ para $t \geq 0$ é solução da equação (3), então $f(\bar{x}) = 0$.

Observamos que a função constante nula, isto é, $x(t) \equiv 0$ é solução de equilíbrio da equação (3), quando temos $f(0) = 0$, e é chamado de equilíbrio de (3).

Agora, quando uma solução com valor inicial próximo ao valor de um ponto de equilíbrio $\bar{x}$, permanece próximo da solução $x(t) \equiv \bar{x}$ com o passar do tempo, daremos uma denominação especial ao ponto de equilibro, a saber:

Definição 2.9.5. O ponto de equilíbrio $\bar{x}$ da equação (3) é estável, se pegarmos um $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ a solução do problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x), \qquad x(0) = x_0$$

é tal que $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.

Definição 2.9.6. O ponto de equilíbrio $\bar{x}$ da equação (3) é assintoticamente estável se for estável e se existir $\rho > 0$ tal que, para $\|x_0 - \bar{x}\| < \rho$, a solução do problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x), \qquad x(0) = x_0$$

É tal que $x(t, x_0) \to \bar{x}$, quando $t \to +\infty$.

Exemplo 2.9.1. Toda solução da equação $\dot{x} = 0$ é estável, mas nem uma solução e assintoticamente estável.

De fato, vemos claramente que $x(t) = c$, onde c é uma constante real arbitrária, é solução da equação $\dot{x} = 0$.

Mostremos que $x(t, c) = c$ é estável, para todo $c \in \mathbb{R}^n$.

Dado um $\varepsilon > 0$, podemos tomar um $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ de modo que se $\|x_0 - c\| < \delta$, então $\|x(t, x_0) - x(t, c)\| = \|x_0 - c\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

para todo $c \in \mathbb{R}^n$ a solução de $x(t, c) = c$ não é assintoticamente estável pois, para x_0 próximo de c, temos que $x(t, x_0) \nrightarrow$ c, quando $t \to +\infty$.

Notamos que, sem perda de generalidade, podemos nos limitar ao estudo da estabilidade de equilíbrio nulo de (3), pois se $\bar{x}(t)$ é qualquer solução da equação $\dot{x} = f(x)$, definida em $[0, +\infty)$ então com a mudança de variável $y = x - \bar{x}$ obteremos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x} - \dot{\bar{x}} \\ &= f(x) - f(\bar{x}) \\ &= f(y + \bar{x}) - f(\bar{x}) \end{aligned}$$

Assim, fazendo

$$f(y + \bar{x}) - f(\bar{x}) = g(y)$$

Obtemos

$$g(y) = \dot{y}$$

De modo que $g(0) = 0$

Logo podemos afirmar que $\bar{x}(t)$ é estável ou assintoticamente estável, respectivamente.

Vamos agora então definir a estabilidade do equilíbrio nulo.

Definição 2.9.7. O equilíbrio nulo da equação (3) é estável, se dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para $\|x_0\| < \delta$ a solução do problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x), \qquad x(0) = x_0$$

é tal que $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.

Definição 2.9.8. O equilíbrio nulo da equação (3) é assintoticamente estável se for estável e existir um $\rho > 0$ tal que, para $\|x_0\| < \rho$, a solução de problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(x), \qquad x(0) = x_0$$

é tal que $x(t, x_0) \to 0$, quando $t \to +\infty$.

Encerramos este capitulo discutindo o conceito de estabilidade de equilíbrio nulo de (3), que é nosso principal foco. Entretanto, em geral este conceito não é de fácil verificação, via definição, e também por não conhecermos as soluções para todas as equações.

2.10 Sistemas Autônomos e Estabilidade

Uma grande variedade de fenômenos naturais são modelizados por sistemas bidimensionais com a forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

Em que a variável independente, t, não aparece explicitamente. Um sistema deste tipo designa-se por **sistema autônomo**. Vamos supor que as funções f e g são funções de classe C^1 numa região R do plano $z = x - y$, que designaremos por **plano de fase.** Recordando o teorema da existência e unicidade da solução de um problema de valor inicial, dado t_0 e um ponto (x_0, y_0) de R existe uma única solução,

$x = x(t)$, $y = y(t)$ do sistema autônomo definida num intervalo I contendo t_0 satisfazendo as condições iniciais,

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$$

As equações $x = x(t)$, $y = y(t)$ representam a parametrização das curvas solução no plano de fase. Ao traço dessas curvas designa-se usualmente por trajetória ou curva integral. Por cada ponto da região R passa uma e só uma trajetória ou curva integral.

As soluções constantes de um sistema autônomo desempenham um papel importante no estudo do comportamento do sistema, pois as outras soluções tendem a se aproximar ou afastar das mesmas.

Um **ponto crítico** do sistema autônomo, ou **ponto de equilíbrio**, é um ponto $(x_e\,, y_e)$ tal que

$$f(x_e\,, y_e) = g(x_e\,, y_e) = 0.$$

A seguir, para caracterizarmos a natureza de um ponto de equilíbrio (tipo de estabilidade), ou seja, se uma solução qualquer se aproxima ou se afasta de uma solução constante do problema, apresentaremos as definições de ponto de equilíbrio estável, assintoticamente estável e instável.

2.11 Sistemas Autônomos Lineares

Um sistema autônomo linear é um sistema com a forma

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{ax} + \mathrm{by}$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Sob a forma matricial um sistema autônomo linear escreve-se

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Designemos por $\boldsymbol{A}$ a matriz dos coeficientes do sistema. Para um sistema autônomo linear, a origem $(0,0)$ é um ponto de equilíbrio. Além disso, se $\det(A) \neq 0$ a origem $(0,0)$ é o único ponto de equilíbrio do sistema. Nesse caso dizemos que a origem é um ponto de equilíbrio **isolado.** Observe que $\det(A) \neq 0$ se e só se a matriz $\boldsymbol{A}$ tem valores próprios não nulos. Vamos fazer agora a representação do retrato de fase para as diferentes possibilidades em função dos valores próprios da matriz $\boldsymbol{A}$, que designaremos por λ_1e λ_2:

1. λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$
2. λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$
3. λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\lambda_1 = \lambda_2$
4. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$
5. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Caso 1 (λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$)

Neste caso o sistema tem um único ponto de equilíbrio, a origem. A solução geral é

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

Onde (λ_1, v_1) e $(\lambda_2,\ v_2)$ são pares próprios de $\boldsymbol{A}$**.** Designemos por E_i os espaços próprios,

$$E_i = \{w = \alpha \boldsymbol{v_i}\}, i = 1{,}2$$

Para este caso, três possibilidades podem ocorrer:

1. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Neste primeiro caso e uma vez que os valores próprios são ambos negativos, as soluções convergem para a origem quando $t \to +\infty$. Se a condição inicial $x(t_0) = \big(x(t_0), y(t_0)\big)$ pertença a um dos espaços próprios, por exemplo, se $x(t_0) \in E_1$ então a solução geral é

$$x(t) = \alpha e^{\lambda_1 (t - t_0)} v_1 \ \in E_1$$

De modo análogo, se $\boldsymbol{x}(t_0) \in E_2$ então a solução geral é

$$x(t) = \alpha e^{\lambda_2(t-t_0)} v_2 \in E_2$$

Observando que os conjuntos E_1 e E_2 são retas, podemos afirmar que as trajetórias são semirretas desde que a condição inicial $x(t_0)$ pertença a um dos espaços próprios. Se a condição inicial $x(t_0)$ não pertence a um dos espaços próprios então a solução terá uma componente segundo v_1 e outra segundo v_2,

$$x(t_0) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$

A solução do sistema satisfazendo esta condição inicial é

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2(t-t_0)} v_2$$

Como λ_2 é, o valor próprio de menor valor absoluto, segue-se que quando $t \to +\infty$ a componente $e^{\lambda_1(t-t_0)}$ tende para 0 mais depressa do que $e^{\lambda_2(t-t_0)}$ e portanto para *t* suficientemente grande a componente segundo v_1 é muito menor do que a componente segundo v_2.

2. $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. Neste caso, tudo permanece como no caso anterior se mudarmos *t* para *–t.* A única alteração surge no sentido do percurso das trajetórias.
3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Finalmente para este caso as soluções com condições iniciais em E_1 convergem para a origem quando $t \to +\infty$ e as soluções com condições iniciais E_2 convergem para a origem quando $t \to -\infty$.

Caso 2 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Seja $\lambda_1 = a + ib \; com \; a, b \; reais \; e \; b \neq 0$. Como a matriz $\boldsymbol{A}$ é real, $\lambda_2 = a - ib$. Seja $v = v_R + iv_I$ o vetor próprio associado a λ_1. A solução geral escreve-se

$$x(t) = c_1 e^{at}[\cos(bt)\, v_R - sen(bt) v_I] + c_2 e^{at}[sen(bt) v_R + \cos(bt)\, v_I]$$

Ora, esta expressão pode escrever-se

$$x(t) = pc_1 e^{at}[\cos(w - bt)\, v_R + sen(w - bt) v_I]$$

Fazendo $c_1 = pcos(w)$ e $c_2 = psen(w)$.

Vejamos agora três situações distintas:

$a = 0$. Neste caso as soluções não nulas são soluções periódicas e as trajetórias são elipses centradas na origem com orientação determinada pelos vetores v_R e v_I.

$a > 0$. Neste caso as soluções não nulas são soluções tais que $x(t) \to 0$ quando $t \to -\infty$. O termo periódico continua presente na solução mas agora multiplicado por uma exponencial. As trajetórias são espirais centradas na origem com orientação determinada pelos vetores v_R e v_I.

$a < 0$. Neste caso as soluções não nulas são soluções tais que $x(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$. O termo periódico continua presente na solução mas agora multiplicado por uma exponencial. As trajetórias são espirais centradas na origem com orientação determinada pelos vetores v_R e v_I.

Caso 3 $\lambda_1,\ \lambda_2\ \in\ \mathbb{R} - \{0\},\ \lambda_1 = \lambda_2$. Neste caso estamos perante um valor próprio duplo, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, e há duas situações distintas a considerar:

1. $\boldsymbol{A}$ é diagonalizável. Neste caso associado ao valor próprio λ temos dois vetores próprios linearmente independentes, v_1 e v_2. A solução geral é

$$x(t) = (c_1 v_1 + c_2 v_2)e^{\lambda t}$$

Consequentemente as trajetórias para além da origem são semirretas. As soluções tendem para o ponto de equilíbrio quando $t \to +\infty$ se $\lambda < 0$ e tendem para o ponto de equilíbrio quando $t \to -\infty$ se $\lambda > 0$. Para $\lambda < 0$ a origem diz-se um **nó próprio estável**, atrator e para $\lambda > 0$ a origem diz-se um **nó próprio instável**, repulsor. Um nó próprio pode também ser designado por **ponto estrela**.

2. $\boldsymbol{A}$ é não diagonalizável. Neste caso associado ao valor próprio $\lambda \neq 0$ temos apenas um vetor próprio, v_1. Seja E_1 a direção própria. Se a condição inicial estiver em E_1 a solução permanece em E_1. Todas as restantes trajetórias tendem a tornarem-se paralelas a E_1 quando $t \to +\infty$ e quando $t \to -\infty$. Se $\lambda < 0$, neste caso o ponto de equilíbrio, a origem, designa-se por **nó improprio** estável ou atrator.
   Se $\lambda > 0$, o ponto de equilíbrio, a origem designa-se por **nó improprio** instável ou repulsor.

Caso 4 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Neste caso a origem não é um ponto de equilíbrio isolado. Seja v_1 o vetor próprio associado a λ_1 e v_2 o vetor próprio associado a λ_2. A solução geral é

$$x(t) = c_1 v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

Com c_1 e c_2 constantes reais arbitrárias.

Se a condição inicial está no espaço próprio E_1, associado a λ_1, então $c_2 = 0$ e a solução x é constante, ou seja, não varia com t. Então todos os pontos de E_1 são pontos de equilíbrio.

Caso $c_2 \neq 0$ então a trajetória é uma semirreta paralela a $E_2 = 0$ e

• se $\lambda_2 < 0$

$$x \to c_1 v_1,\ t \to +\infty$$

• se $\lambda_2 > 0$

$$x \to c_1 v_1,\ t \to -\infty$$

Caso 5 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0$. Neste caso a origem não é um ponto de equilíbrio isolado. Temos a considerar duas situações distintas:

1. $\boldsymbol{A}$ é diagonalizável. Neste caso associado ao valor próprio zero temos dois vetores próprios linearmente independentes, v_1 e v_2. A solução geral é
$$x(t) = c_1 v_1 + c_2 v_2$$
Consequentemente todas as soluções são constantes e, portanto todos os pontos do plano são pontos de equilíbrio.
2. $\boldsymbol{A}$ é não diagonalizavel. Neste caso associado ao valor próprio zero temos apenas um vetor próprio, v_1. Seja E_1 a direção própria. Neste caso os elementos do conjunto E_1 são os pontos de equilíbrio do sistema. Todas as restantes trajetórias são paralelas a E_1.

Ao classificar os pontos de equilíbrio, é usual designar os nós estáveis atratores por **poço** e os nós instáveis repulsores por **fonte**. Os conceitos apresentados de estabilidade ou instabilidade de soluções têm a ver com o comportamento de soluções da equação quando $t \to +\infty$. Vamos agora definir estabilidade e estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio.

Definição 2.11.1. Um ponto de equilíbrio (x^*, y^*) de um sistema autônomo, diz-se **estável** desde que para qualquer ponto inicial (x_0, y_0) suficientemente próximo de (x^*, y^*), $\big(x(t), y(t)\big)$ permanece próximo de (x^*, y^*) para todo $t > 0$.

Um ponto de equilíbrio (x^*, y^*) é **instável** se não é estável.

Com esta definição para além dos pontos de equilíbrio classificados anteriormente, podemos afirmar que um ponto de sela é um ponto de equilíbrio instável e que um centro é um ponto de equilíbrio estável.

Definição 2.11.2. Um ponto de equilíbrio (x^*, y^*) estável de um sistema autônomo, diz-se assintoticamente estável se toda a trajetória que inicie suficientemente próximo de (x^*, y^*) tende para (x^*, y^*) quando $t \to +\infty$.

Podemos agora afirmar que um centro é um ponto de equilíbrio estável, mas não assintoticamente estável.

Para sistemas autônomos lineares em que a origem é um ponto de equilíbrio isolado podemos afirmar que:

1. A origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável se a parte real dos valores próprios é negativa.
2. A origem é um ponto de equilíbrio estável, mas não assintoticamente estável se a parte real dos valores próprios é nula.
3. A origem é um ponto de equilíbrio instável se a parte real de um dos valores próprios é positiva.

2.12 Sistemas Não Lineares

Uma forma de abordar os sistemas não lineares é tentar aproximar sistemas não lineares por sistemas lineares. Esta abordagem designa-se por **linearização**.

Considere o sistema não linear

$$x' = \boldsymbol{F}(x)$$

Em que $\boldsymbol{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1. Suponha que x_0 é um zero de $\boldsymbol{F}$ e, portanto um ponto de equilíbrio do sistema. Então podemos esperar que o retrato de fase para x próximo de x_0 seja bem aproximado pelo retrato de fase do sistema linear

$$y' = \boldsymbol{A}(y)$$

Com $y = x - x_0$ próximo da origem. A matriz $\boldsymbol{A}$ é a matriz que representa a derivada de $\boldsymbol{F}$ em x_0. Esta ideia funciona em muitas circunstâncias, mas não em todas. Pode falhar quando a matriz $\boldsymbol{A}$ tem um valor próprio com parte real nula.

Vejamos um exemplo de linearização em torno de pontos de equilíbrio.

Exemplo 2.12.1. Determinar o tipo de estabilidade da origem, ponto de equilíbrio do sistema não linear

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y + 2x^2 - 3y^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y - 7xy \end{cases}$$

A origem é de fato um ponto de equilíbrio do sistema. A função $\boldsymbol{F}$ definida por

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \left(4x + 2y + 2x^2 - 3y^2, 4x - 3y - 7xy\right)$$

É de classe C^1 e a matriz jacobiana $\boldsymbol{J}(x, y)$ é

$$\boldsymbol{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 4 + 4x & 2 - 6y \\ 4 - 7y & -3 - 7x \end{bmatrix}$$

Portanto $\boldsymbol{J}(0,0)$ é

$$\boldsymbol{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

E a linearização conduz ao sistema linear

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = \ 4x - 3y \end{cases}$$

Os valores próprios são dados por

$$(4-\lambda)(-3-\lambda) - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \; ou \; \lambda = -4$$

Portanto os valores próprios tem ambos parte real não nula. A origem é um ponto de sela para o sistema linear e, portanto a origem é um ponto de equilíbrio instável para o sistema não linear.

2.13 Estabilidade

A estabilidade é uma das características mais importante de sistemas, quer seja no sentido da capacidade de retornar ao ponto de equilíbrio após perturbações, ou no tocante à manutenção de soluções periódicas como o caso de osciladores.

Definição 2.13.1. Um estado de x_e é dito ser ponto de equilíbrio de

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), t)$$

Se $x(t_0) = x_e \Longrightarrow x(t) = x_e, \ \forall t \geq t_0$, ou seja, $f(x_e, t) = 0, \ \forall t \geq t_0$.

Observação 2.13.1. Sistemas lineares invariantes no tempo

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t)$$

possuem um único ponto de equilíbrio $x_e = 0$ A é não singular, mas infinitos pontos $\{x_e \in Ker(A)\}$ se $\det(A) = 0$ e constituem um subespaço do espaço de estado.

Observação 2.13.2. Sistemas não lineares podem ter múltiplos pontos de equilíbrio isolados

Para efeito de análise local de um dado ponto de equilíbrio x_e de

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), t)$$

pode-se fazer a translação $\check{x}(t) = x(t) - x_e$, de modo que

$$\frac{d\check{x}}{dt}(t) = f(\check{x}(t)) - x_e, t) = \check{f}(\check{x}(t), t)$$

E, portanto, não há perda de generalidade quando se refere apenas a ponto de equilíbrio em 0.

Definição 2.13.2. Um ponto de equilíbrio x_e é dito ser estável se dado $\varepsilon > 0$ arbritário, $\exists\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta \Longrightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \qquad \forall t \geq t_0$$

Definição 2.13.3. Um ponto de equilíbrio x_e é dito ser assintoticamente estável se é estável e $\exists\delta > 0$ tal que

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta \Longrightarrow \|x(t) - x_e\| \downarrow 0 \text{ para } t \uparrow \infty$$

Definição 2.13.4. Um ponto de equilíbrio x_e é dito exponencialmente estável se $\exists\alpha, \delta, \lambda > 0$ tal que

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta \Longrightarrow \|x(t) - x_e\| \leq \alpha\|x(t_0) - x_e\|e^{-\lambda t}$$

Definição 2.13.5. Um ponto de equilíbrio x_e é dito ser globalmente assintoticamente estável se $\forall x(t_0)$

$$\|x(t) - x_e\| \downarrow 0 \;\; para\; t \uparrow \infty$$

Definição 2.13.6. Um ponto de equilíbrio x_e é dito ser globalmente assintoticamente estável se $\exists\alpha\lambda > 0$ tal que para $\forall x(t_0)$

$$\|x(t) - x_e\| \leq \alpha\|x(t_0) - x_e\|e^{-\lambda t}$$

Os sistemas com entradas forçantes, ou seja,

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

Com $u(t) \neq 0 \;\; e \;\; y(t) = h(x, u, t)$, são usualmente estudados com relação a estabilidade entrada-saída (ou estabilidade externa).

3 Primeiro Método de Lyapunov

O primeiro método de Lyapunov, também conhecido como o método indireto ou método da linearização, permite investigar a estabilidade local de um sistema não linear através do seu modelo linearizado. Os sistemas não lineares são aproximados por truncamento em representação em série de Taylor em torno dos pontos de equilíbrio e sua estabilidade e estudada através de seus autovalores. Trata-se de um resultado de grande relevância prática, pois serve de base para projetos de controladores utilizando modelos linearizados em torno de um ponto de operação nominal.

Seja o sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \tag{6}$$

E x_E o ponto de equilíbrio de (6) corresponde a uma excitação constante $u(t) = u_E$, ou seja,

$$f(x_E, u_E) = 0$$

Correspondendo a uma entrada perturbada $u = u_E + v$ o estado perturbado é do tipo $x = x_E + \xi$, satisfazendo (6)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x_E + \xi)}{dt}$$

$$= \frac{\overbrace{dx_E}^{0}}{dt} + \frac{d\xi}{dt}$$

$$= f(x,u)$$

$$= f(x_E + \xi, u_E + v)$$

Escrevendo (6) em forma de sistema bidimensional temos:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,\, u) \\ \dot{u} = g(x,\, u) \end{cases}$$

Expandindo (2) em torno de (x_E, u_E) usando a Série de Taylor obtemos:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,\, u) = f(x_E, u_E) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_E, u_E)(x - x_E) + \dfrac{\partial f}{\partial u}(x_E, u_E)(u - u_E) \\ \dot{u} = g(x,\, u) = g(x_E, u_E) + \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_E, u_E)(x - x_E) + \dfrac{\partial g}{\partial u}(x_E, u_E)(u - u_E) \end{cases}$$

e utilizando.

$$f(x_E, u_E) = g(x_E, u_E) = 0,\ \ \dot{x} = \frac{d\xi}{dt} \quad e \quad \dot{u} = \frac{dv}{dt}$$

Ficamos com

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_E, u_E)\xi + \dfrac{\partial f}{\partial u}(x_E, u_E)v = a\xi + bv \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_E, u_E)\xi + \dfrac{\partial g}{\partial u}(x_E, u_E)v = c\xi + dv \end{cases}$$

Onde os coeficientes a, b, c e d são as derivadas parciais de $f(x,\, u)$ e g$(x,\, u)$ calculados no ponto fixo (x_E, u_E).

O método linearizado é, portanto,

$$\begin{bmatrix} \frac{d\xi}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ v \end{bmatrix}$$

E a linearização do sistema é

$$\frac{d\xi}{dt} = \overbrace{\nabla_x f(x_E, u_E)\xi}^{A} + \overbrace{\nabla_u f(x_E, u_E)v}^{B} \ \ \blacksquare \qquad (7)$$

Teorema 3.1. (Primeiro Método de Lyapunov)

(i) Se o modelo linearizado (7) é assintoticamente estável, então o sistema original (1) é assintoticamente estável em torno de x_E.

(ii) Se o modelo (7) é estável, então o sistema (6) é estável em torno de x_E.

Observação 3.1. Se o modelo linearizado (7) é estável, mas não assintoticamente estável (algum autovalor de A se localiza sobre o eixo imaginário), nada se pode afirmar sobre o sistema original (6).

Aplicação 3.1. O pêndulo com haste rígida é descrito, na ausência de atrito, por

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{g}{\ell} sen(x_1)$$

Os pontos de equilíbrio são da forma $(k\pi, 0), k = 0, 1, 2, \ldots$ e os correspondentes de (7) são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} cos(x_1) & 0 \end{bmatrix}_{x_1 = k\pi}$$

Em torno de $x_E = (0, 0)$, obtemos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 \end{bmatrix}$$

E a linearização conduz ao sistema linear

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{g}{\ell} x_1 \end{cases}$$

E os valores próprios são dados por

$$\left| \lambda I - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & 0 \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 + \frac{g}{\ell} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm j\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

e o primeiro método de Lyapunov não permite garantir a estabilidade do sistema original (neste exemplo, em particular, o pêndulo apresenta oscilação em torno da posição vertical, se a energia não é suficiente para que haja rotação).

Em torno de $x_E = (\pi, 0)$

$$\left|\lambda I - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & 0 \end{bmatrix}\right| = \lambda^2 - \frac{g}{\ell} = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

e, portanto, há um autovalor no semi-plano direito. De fato, o pêndulo investido é estável.

4 Segundo Método de Lyapunov

O segundo método de Lyapunov, também conhecido como o Método Direito, é baseado em um conceito análogo ao de energia. Considerando-se para efeito de ilustração, um pêndulo simples de massa m e comprimento ℓ, sob efeito da gravidade g uniforme da direção vertical e imerso em um meio viscoso com coeficiente b

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mgsen(\theta) = 0$$

Onde θ é o ângulo entre a haste do pêndulo e a vertical, as energias cinética e potencial são dadas por

$$E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$E_p = mg\ell(1 - cos\theta)$$

A energia total é dada por

$$E_T = E_c + E_p$$

E se verifica por calculo simples que

$$\frac{dE_T}{dt} = -\ell\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 b \leq 0$$

$$-\ell\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 b = 0 \Longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = 0$$

Portanto, a energia do pêndulo decresce sempre que $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$, tendendo a E_T mínimo que, no caso ocorre para $\left(o, \frac{d\theta}{dt}\right) = (0,0)$, onde também $\frac{dE_T}{dt} = 0$

Definição 4.1. Uma função $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita ser positiva definida em uma vizinhança $B(0, \rho)$, $V(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Definição 4.2. Uma função $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita ser positivo semi-definida em uma vizinhança $B(0, \rho)$ da origem com raio ρ se $\forall x \in B(0, \rho)$, $V(x) \geq 0$ mas $V(x) = 0 \nRightarrow x = 0$.

Definição 4.3. Uma função $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita ser globalmente positiva definida se é positivo definida em $B(0, \rho)$ $\rho \uparrow \infty$.

Definição 4.4. Uma função $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita ser negativo definida em uma vizinhança $B(0, \rho)$ da origem com raio ρ se $-V$ é positivo definida.

As outras definições que combinam os quantitativos positivo, negativo, globalmente e semi-definida são obtidas por analogia (por exemplo, globalmente negativo semi-definida).

Teorema 4.1. (Segundo Método de Lyapunov: Estabilidade Local para Sistema Invariante no Tempo) o sistema de ordem n (ou seja, $x(t) \in \mathbb{R}^n$)

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t))$$

$$f(0) = 0$$

é estável em uma vizinhança $B(0, \rho)$ se existe uma função continua $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

V é positivo em $B(0, \rho)$ (i)

$V(x(t))$ possui derivadas continuas em relação a t (ii)

$\frac{dV(x(t))}{dt}$ é negativo semi-definida em $B(0, \rho)$ (iii)

Prova. Um ponto de equilíbrio 0 é estável se dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $x(t_0) \in B(0, \delta) \Rightarrow x(t) \in B(0, \varepsilon)$. Dado $\varepsilon > 0$ seja $\partial B(0, \varepsilon)$ a fronteira do $B(0, \varepsilon)$ (ou seja, a casca da esfera). Seja V_{min} o volume de $V(x)$ para $x \in \partial B(0, \varepsilon)$ e note que $V(x) < V_{min} \Rightarrow x \in B(0, \varepsilon)$. Seja δ tal que $\forall x \in B(0, \varepsilon)$, $V(x) < V_{min}$. Se $x(t_0) \in B(0, \varepsilon)$ então $V(x(t)) < V_{min}$ para $t \geq t_0$ pois $\frac{dV(x(t))}{dt} \leq 0$ e $V(x(t_0)) \leq V(x(t))$ para

$t \geq t_0$. Portanto $x(t) \in B(0, \varepsilon)$, $\forall t \geq t_0$.■

observação 9 uma função V que satisfaz as condições (i) é chamada de Função de Lyapunov.

Definição 4.5. uma função $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita ser radialmente ilimitada se

$$\|x\| \uparrow \infty \Longrightarrow V(x) \uparrow \infty$$

Teorema 4.2. (Segundo Método de Lyapunov: Estabilidade Global para Sistema Invariante no tempo) O sistema de ordem n (ou seja, $x(t) \in \mathbb{R}^n$)

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t))$$

$$f(0) = 0$$

é globalmente estável se existe uma função continua $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

V é positivo definida em $\mathbb{R}^n$

$V(x(t))$ possui derivadas continuas em relação a t

$\frac{dV(x(t))}{dt}$ é é negativo semi-definida em $\mathbb{R}^n$

V é radicalmente ilimitada

Prova. Similar ao caso local, Teorema anterior, notando que para $\forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n$, $V(x(t_0)) \leq V(x(t))$ em uma vista de $\frac{dV(x(t))}{dt} \leq 0$ e V ser radicalmente ilimitada.■

Exemplo 4.1. Considere o sistema unidimensional

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\sigma\big(x(t)\big)$$

Onde $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que

$$\xi\sigma(\xi) > 0, \forall \xi \neq 0$$

Utilizando a função candidata de Lyapunov, positivo definida e radialmente ilimitada

$$V(X) = x^2$$

Obtém-se que

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = 2x(t)\frac{dx}{dt}$$

$$= -2x(t)c(x(t)) \leq 0$$

ou seja, o sistema é globalmente estável.

5 Considerações Finais

Neste trabalho procuramos estudar sobre a estabilidade de sistemas a partir dos métodos de Lyapunov. Ao iniciarmos o estudo sobre o tema, ficamos mais motivados ao descobrirmos sobre suas aplicações em diversas áreas . Nelas nos deparamos frequentemente com sistemas dinâmicos como, por exemplo, na física, engenharia, matemática e biologia. Com isso, a teoria de Lyapunov vem sendo usada há anos para analisar a estabilidade de sistemas nessas áreas.

No segundo capítulo, foi necessário um estudo prévio da álgebra linear, do cálculo e principalmente sobre sistemas lineares e não lineares de equações diferenciais. Ainda neste capitulo, um dos resultados mais importantes foi o teorema de existência e unicidade de soluções. Diante de um problema com dado inicial, podemos saber se a solução existe através deste teorema, e claro, se existe ela é única.

No terceiro e quarto capítulo vimos o desenvolvimento dos métodos e a importância do capítulo anterior. Omitimos a demonstração do primeiro método, pois buscamos apresentar o resultado através de exemplo, mas nas referências você poderá encontrar o caminho a ser seguido para a demonstração do primeiro método.

E por fim, afirmamos sobre a importância do estudo destes métodos, pois o tema pode facilmente ser aplicado em áreas mais complexas, não acabando aqui.

6 Referencias Bibliográficas

[1] FALEIROS, Antônio Cândido. **Teoria Matemática de Sistemas**. São Paulo: Arte & Ciência, 2002.

[2] BOLDRINI, José Luiz. et al. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra Ltda., 1986.

[3] FERRACINI, Evelize Aparecida dos Santos. **Estabilidade de Equações Diferenciais Ordinárias Através de Funções Dicotômicas**. 2011. 56 p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. São Paulo.

[4] VETOR Gradiente. Interpretação Geométrica. Parte 11. Disponível em: <http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CB8QFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.professores.uff.br%2Falmaraz%2Fimages%2Fstories%2FAulas_Denise%2FParte_11_Calc_2B_-_Vetor_Gradiente.pdf&ei=kAa4VI3tBoucyQTXxIDoAQ&usg=AFQjCNG0xfPmnAXWOh7ezwH7IYKhVAFsDg&bvm=bv.83640239,d.aWw>

[5] BESSA, Gislene Ramos. **Teoria de Estabilidade de Equações Diferencias Ordinárias e Aplicações.** 2011. 97 p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. São Paulo.

[6] LYAPUNOV biography. mac tutor history of mathematics. Disponível em: <www-mcs.st-andrews.ac.uk/.../Lyapunov.html>