UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

REPRESENTAÇÃO DE RELAÇÔES: MATRICIAL E POR GRAFO DIRECIONADO

MACAPÁ-AP
2015

José Ivaney Araújo da Silva
Solano Nicolas Costa de Carvalho

Representação de Relações: Matricial e Por grafo Direcionado

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente do Curso de Licenciatura em Matemática - UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção da Graduação em Licenciatura em Matemática.

Área de Concentração: Teoria dos Conjuntos
Orientador: ***Dr. José Walter Cárdenas Sotil***

MACAPÁ-AP
2015

Representação de Relações: Matricial e Por Grafo Direcionado

por

Silva, José Ivaney Araújo da
Carvalho, Solano Nicolas Costa de

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Banca Examinadora

Orientador: Prof. *Dr.* José Walter Cárdenas Sotil.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Membro: Prof. *Dr.* Erasmo Senger.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Membro: Prof. *Dr.* Guzmán Eulalio Islá Chamilco.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Avaliado em: 04 de maio de 2015.

MACAPÁ-AP
2015

À minha mãe, à minha esposa e a todos os amigos que contribuíram direta e indiretamente para mais essa conquista em minha vida.

(José Ivaney Araújo da Silva)

Aos meus Pais, esposa, filhos e a todos que colaboram para a realização desse sonho.

(Solano Nicolas Costa de Carvalho)

Agradecimentos

A Deus, primeiramente, por está sempre ao meu lado nesta árdua caminhada e por dar-me mais esta oportunidade.

A minha mãe, Maria Benedita Araújo da Silva, a minha esposa Ana Paula de Melo Fernandes que sempre estiveram ao meu lado na conquista desse objetivo e de outros também.

Ao professor Dr. Walter Cárdenas, pelas orientações, dedicação, paciência e apoio durante toda a conclusão deste que é, sem dúvida, o trabalho mais importante de nossas vidas.

Ao amigo e parceiro de trabalho Solano Nicolas Costa de Carvalho, pela sua dedicação e empenho para a realização desse que é o mais difícil trabalho de toda nossa longa jornada como acadêmico do curso de matemática.

A todos os Professores do Colegiado de Matemática, que contribuíram na nossa formação como acadêmico.

Aos nossos grandes amigos, que estiveram presente em nosso dia a dia e que ficarão para sempre marcado em nossas vidas pelos bons momentos que passamos juntos.

Enfim, a todos que contribuíram de alguma forma para a realização desse sonho.

(José Ivaney Araújo da Silva)

Agradecimentos

Ao Deus Todo-poderoso, primeiramente, por ter-me encorajado e capacitado nesta difícil tarefa, estar suprindo minhas necessidades e por ter colocado pessoais especiais que colaboraram para o meu crescimento.

A minha esposa Danielen Alves Pimentel de Carvalho, por ter sempre apoiado nas minhas escolhas e compreendido nossos planos.

Ao Caík e a Nicolly, meus filhos queridos, por todo amor, carinho e compreensão.

Aos meus pais Leônidas fernandes de Carvalho e Rosângela Maria Santos da Costa, e aos meus sogros José Raimundo Pimentel e Maria de Fátima Pimentel por todo incentivo neste percurso de graduação.

Ao professor Dr. Walter Cárdenas, por sua atenção nas orientações, pela dedicação neste projeto e por estar sempre me encentivando nesta ardua tarefa.

Ao amigo e co-autor deste trabalho José Ivaney Araújo da Silva, que compreendeu e assimilou este projeto e que esteve dedicado, junto com sua família, na elaboração do trabalho.

Ao Renato Queiroz, quem nos auxiliou na estrutura física deste trabalho, opinando e, até mesmo, empenhando-se na construção dele.

Aos meus familiares, amigos, a todos do colegiado de matemática e discente, pela força e compamhia, proporcionando um cotidiano mais agradável e momentos únicos.

(Solano Nicolas Costa de Carvalho)

“ Se A é o sucesso, então é igual a X mais Y mais Z. O trabalho é X; Y é o lazer; e Z é manter a boca fechada. ”

(Albert Einstein)

“ A Matemática foi o alfabeto em que Deus escreveu o universo. ”

(Galileu Galilei)

RESUMO

Este trabalho tem como sua fundamentação teórica A Teoria dos Conjuntos e descreve formalmente a álgebra das Relações entre os elementos pertencentes a esses conjuntos, a partir das questões relevantes, naturais e fundamentais que se podem ou que se devem propor a cerca dos mesmos. Primeiramente, abordamos o contexto histórico para termos a noção da grande importância que esse tema tem para a evolução da matemática ao longo dos tempos; em seguida, abordamos uma forma mais direta de expressar relações entre elementos de dois conjuntos, usando pares ordenados, essa relação é denominada de Relação Binária, e existem muitas formas de representar essas relações, podendo ser por uma lista de pares ordenados, usando uma tabela ou entre outras formas, como no capítulo 3, que usaremos o método de representar uma relação através da Matriz zero-um, também conhecida como matrizes booleanas, em geral essas matrizes são usadas na representação de relações em programas computacionais, o que facilita a sua implementação e o armazenamento de dados, e, por fim, no capítulo 4 apresentaremos mais um método para a representação de relações entre conjuntos, a Representação por Grafo Direcionado, esse tipo de representação é feito usando um ponto para cada elemento do conjunto e cada par ordenado por um arco com sua direção indicado por uma seta, em geral, a representação de relações por meio de gráfico é muito útil para entender as propriedades dessas relações.

Palavras-chave: Conjuntos, Relação binária, Operações com Relações, Propriedades da Relação, Matriz, Representação Matricial da Relação, Grafo direcionado, Representação de Relação por Grafo.

ABSTRACT

This work has as its theoretical foundation the set theory and describes formally the algebra of relations between elements belonging to these sets, based on the relevant, natural and fundamental issues that can or should be proposed about those sets. First, we discuss the historical context in order to realize the great importance of this topic for the evolution of mathematics over the years; then we present a direct way of expressing relations between of two sets of elements, using ordered pairs. This relation is called Binary Relation, and there are many ways to represent them, which may be by a list of ordered pairs, using a table, among other ways, as in Chapter 3, in which we will use the method of representing a relationship by the Matrix zero one, also known as Boolean matrices. In general, these matrices are used to represent relations in computer programs, facilitating the implementation and the storage of data. Finally, in chapter 4, we present another method for representing relations between sets, the representation by directed graph. This type of representation uses a point for each element of the set end each ordered pair by an arch with their direction by an arrow. In general, the representation of relations by graphs is very useful to understand the their properties.

Keywords: Set, Binary Relation, Operations with Relation, Relations Properties, Matrix, Matrix Representation of Relation, Directed Graph, relation representation of by directed graph.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

Capítulo 1

INTRODUÇÃO: História Moderna da Matemática

Com este trabalho, objetivamos a conclusão da graduação em Licenciatura em Matemática e foi feito utilizando-se como eixo temático a Teoria dos Conjuntos, sendo o tema principal Representação de Relações: Matricial e por Grafo Direcionado. O estudo do tema foi focado no livro Matemática Discreta e Suas Aplicações, de Kenneth H. Rosen, além de ter outras fontes que nos auxiliaram nas pesquisas que serão citadas nas referências bibliográficas.

A teoria dos conjuntos, este fantástico ramo da matemática, começa ter uma compreensão moderna há cerca de dois séculos. Neste período dois matemáticos destacaram-se neste estudo, Georg Cantor (1845-1918) e Richard Dedekind (1831-1916), que culminou em 1874 com a elaboração de um artigo com o título *"a respeito de uma propriedade características de todos os números algébricos reais"* de Cantor, o qual contemplou todas as discussões relacionadas às ideias sobre os conjuntos. Porém, todo o entusiasmo com a teoria dos conjuntos no ano de 1900 foi contida pela descoberta de várias contradições, chamadas de Paradoxos, na teoria Cantoriana. A descoberta do principal dos paradoxos da Teoria dos Conjuntos, o paradoxo de Russell, que leva esse nome em homenagem a um dos seus descobridores, Bertrand Russell (1872-1970). Foram Russell e Ernst Zermelo, quem descobriram este que é um dos paradoxos mais famosos da história da humanidade: *"o conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si mesmos"*.

Atualmente, existem várias formas de expressar um conjunto, seja através de uma propriedade comum a todos os seus elementos, do diagrama de Venn (matemático e lógico inglês, 1834-1923), dos diagramas de Euller (matemático e físico suíço, 1707-1783) ou nomeando os seus elementos. Um dos motivos pelo qual se considera imprescindível trabalhar com conjuntos, é que implicitamente, existe uma álgebra capaz de operar com união, interseção, diferença, além das propriedades comutativa e distributiva e outras possibilidades mais que sem essa linguagem seria impossível realizar.

A Teoria dos conjuntos começa com uma fundamental relação binária entre um objeto o e um conjunto A. Se o é um membro (ou elemento) de A, nós escrevemos $o \in A$. Uma vez que conjuntos são objetos, a relação de pertinência também pode relacionar conjuntos. No capítulo 2 estaremos realizando as operações entre conjuntos distintos e iguais e exibindo a relação binária oriundo desse relacionamento.

A origem da matriz, também emergiu no século XIX. O matemático inglês Arthur Cayley (1821 - 1895) foi o primeiro a estudar matrizes, definindo matriz nula, matriz identidade e tudo o que se pode pensar em operações sobre elas. Cayley, no período em que era estudante conheceu James Joseph Sylvester (1814 - 1897), também um ícone da álgebra britânica. Como ambos pesquisavam as mesmas áreas, tornaram grandes amigos. E foi no ano de 1855 que Cayley escreveu um artigo usando o termo matriz (termo este que já teria sido usado por Sylvester há cinco anos), destacando que, como pela lógica, a noção de matriz antecedesse a de determinantes, o que historicamente não era correto, pois os determinantes já eram usados na resolução de sistemas lineares muito antes da criação das matrizes. Os chineses alguns séculos antes de Cristo já resolviam sistemas de equações lineares por processos em que está implícita a ideia de matriz. Algumas dessas álgebras estão sendo usadas no capítulo 3, o qual representará as relações em forma matricial.

Os problemas de Percurso em Arcos são os mais antigos relacionados a grafos. Os primeiros trabalhos em teoria dos grafos surgiram no século XVIII. A primeira referência que se conhece sobre eles vem do famoso problema das sete pontes sobre o rio Pregel de Konigsberg, que buscava saber se havia um caminho fechado, isto é, que a partir de um determinado ponto, passar por todas as sete pontes exatamente uma vez e retornar ao ponto inicial. O problema foi solucionado em 1736 pelo matemático suíço Leonhard Euler, que encontrou as condições para a existência de um percurso fechado (grafo euleriano), e mostrou que não havia solução que satisfizesse aquele caso particular.

Dentre as muitas e famosas histórias da Teoria dos Grafos, sem dúvida uma das mais curiosas é a do matemático William Rowan Hamilton, que,aos 22 anos, já fazia parte da Royal Astronomia Irlandesa, foi condecorado Cavalheiro aos 30 anos, e foi reconhecido como um dos líderes matemáticos de sua época. Uma de suas descobertas foi chamada por ele de *O Cálculo Icosiano*, o qual pode ser interpretado em termos de caminhos sobre um grafo descrito por um dodecaedro regular. Hamilton comunicou sua descoberta em uma carta datada de 7 de outubro de 1856, e posteriormente publicou dois artigos sobre o assunto. Ele usou uma representação gráfica como base de um quebra-cabeça, que ele chamou de *O Jogo Icosiano*.

É interessante observar que os problemas de Hamilton e de Euler encontraram aplicação, respectivamente um e dois séculos mais tarde. Além disso, o desenvolvimento dessa teoria foi impulsionado somente no século XX, pelos problemas de otimização no campo da pesquisa operacional, já que, até então, suas aplicações eram realizadas em áreas disjuntas, como circuitos elétricos e química orgânica. Utilizaremos o capítulo 4 para conceituar o e operar grafo direcionado, o qual tomará a Relação para a representação.

Capítulo 2

RELAÇÃO: NOÇÕES BÁSICAS

Para iniciar este tema, será necessária a apresentação do conceito de produto cartesiano que se posiciona como essencial para o estudo deste assunto. O produto cartesiano é gerado por pares ordenados, os quais são elementos básicos de uma relação.

2.1 Produto Cartesiano

O produto cartesiano é uma operação sobre conjuntos que envolve a noção de par ordenado. Se A e B são dois conjuntos dados, então um par ordenado de elementos de A e de B é um objeto denotado por (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$. Nesse caso, a é dito o primeiro elemento do par, e b é dito segundo elemento do par.

Definição 2.1.1. *Dado os conjuntos A e B, o produto cartesiano de A por B, denotado por A × B, é o conjunto formado por todas as combinações de pares ordenados (a,b), onde $a \in A$ e $b \in B$. Isto é:*

$$A \times B = \{(a, b); \forall a \in A, \forall b \in B\}$$

Exemplo 2.1.1. *Dados $A = \{b_1, b_2, b_3\}$ e $B = \{c_1, c_2\}$ dois conjuntos. Logo, o produto cartesiano de $A \times B$ é:*

$$A \times B = \{(b_1, c_1), (b_2, c_2), (b_2, c_1), (b_2, c_2), (b_3, c_1), (b_3, c_2)\}$$

Ou seja, para todo elemento a de A serão associados os elementos b de B.

Exemplo 2.1.2. *Dados* $X = \{2, 4, 6\}$ *e* $Y = \{2, 4\}$ *dois conjuntos. Logo, o produto cartesiano é:*

$$X \times Y = \{(2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (6, 2), (6, 4), \}$$

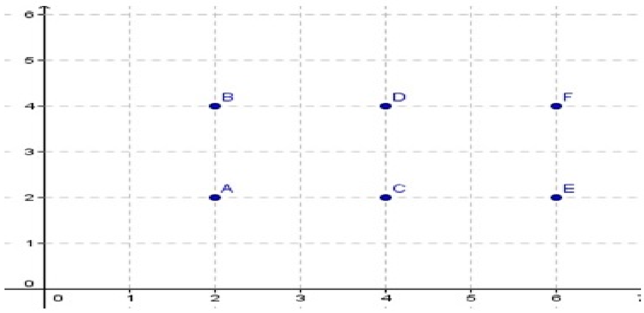


Figura 2.1 *Gráfico do produto cartesiano* $X \times Y$.

Onde os elementos de X estão sobre o eixo da abscissa e os elementos de Y estão sobre o eixo da ordenada, e os pares ordenados são identificados pelos pontos $A = (2, 2)$, $B = (2, 4)$, $C = (4, 2)$, $D = (4, 4)$, $E = (6, 2)$ e $F = (6, 4)$.

2.2 Relação

Dados os conjuntos A e B, uma relação $\Re$ de A em B, denotada $\Re : A \to$ B, é qualquer subconjunto do produto cartesiano de $A \times B$. Sendo $\Re$ uma relação de A para B, então $\Re$ é um conjunto de pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$.

Em geral usa-se a notação $a\Re b$ para dizer que $(a, b) \in \Re$ e $a \not\Re\ b$ para dizer que $(a, b) \notin \Re$. Se $(a, b) \in \Re$ dizemos que a está relacionado com b pela relação $\Re$.

Se $A = B$, a relação $\Re \subset A \times A$ é dita uma relação sobre A, ou uma endorrelação ou ainda uma autorrelação.

Exemplo 2.2.1. *Seja dado um conjunto* $B = \{1, 2, 3, 4\}$. *A relação* $\Re$ *sobre* B *é uma endorrelação que satisfará a seguinte condição:*

$\Re = \{(a, b) \in B \times B / a > b\}$. Então a relação $\Re$ será:

$$\Re = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}.$$

Na figura 2.2 temos uma representação gráfica da relação $\Re$, denominado diagrama de setas. Neste diagrama cada elemento (a, b) da relação $\Re$ é representado por uma seta ou vetor com origem no elemento a do Conjunto B e vértice final no elemento b do conjunto B.

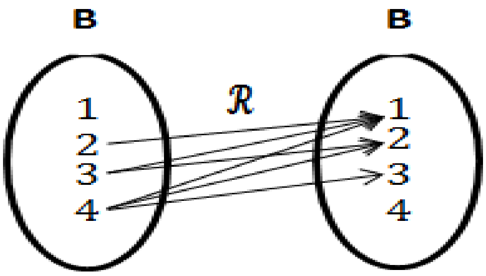


Figura 2.2 *Representação do conjunto de setas da Relação A para B.*

Neste exemplo, temos que $2\Re1$, $3\Re1$ e $3\Re2$, $4\Re1$, $4\Re2$ e $4\Re3$, mas $1\not\Re1$, $1\not\Re2$, $1\not\Re3$, $1\not\Re4$, $2\not\Re2$, $2\not\Re3$, $2\not\Re4$, $3\not\Re3$, $3\not\Re4$ e $4\not\Re4$.

Outra forma de denominar este termo é relação binária, onde $\Re$ será o subconjunto de A por B, isto é:

$$\Re \text{ é relação binária de } A \text{ em } B \leftrightarrow \Re \subset \mathrm{A} \times \mathrm{B}.$$

2.2.1 Domínio e Imagem

O *Domínio* de uma relação $\Re$, denotado $Dom(\Re)$, é o conjunto formado pelos primeiros elementos de cada par ordenado da relação. Isto é:

$$Dom = \{a \in A / \exists b \in B \text{ com } (a, b) \in \Re\}$$

No exemplo 2.2.1, o *domínio* é o conjunto $Dom(\Re) = \{2, 3, 4\}$.

A *Imagem* de uma relação $\Re$, denotada $Im(\Re)$, é o conjunto formado pelos segundos elementos de cada par ordenado da relação.

$$Im(\Re) = \{b \in B / \exists a \in A \text{ com } (a, b) \in \Re\}$$

No exemplo 2.2.1, a *imagem* é o conjunto $Im(\Re) = \{1, 2, 3\}$.

2.3 Inversa de uma Relação

Seja $\Re$ uma relação de um conjunto A para um conjunto B, a relação inversa de $\Re$, denotada por $\Re^{-1}$, é a relação de B para A que consiste nos pares ordenados que, quando têm sua ordem revertida, pertencem a $\Re$, isto é:

$$\Re^{-1} = \{(b, a) \in B \times A/(a, b) \in \Re\}$$

Exemplo 2.3.1. *Sejam dados os conjuntos* $A = \{1, 2, 3\}$,$B = \{2, 3, 4\}$ *e* $\Re = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$. *Construimos a relação inversa* $\Re^{-1}$ *de* B *em* A *invertendo a posição de cada par ordenado de* $\Re$*, isto é:*

$$\begin{aligned}(1, 2) \in \Re &\rightarrow (2, 1) \in \Re^{-1}\\(2, 3) \in \Re &\rightarrow (3, 2) \in \Re^{-1}\\(3, 4) \in \Re &\rightarrow (4, 3) \in \Re^{-1}\end{aligned}$$

Portanto, temos a relação inversa $\Re^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$. Assim, $2(\Re^{-1})1$, $3(\Re^{-1})2$ e $4(\Re^{-1})3$.

Na figura 2.3 ela apresenta o gráfico de setas das relações $\Re$ e $\Re^{-1}$

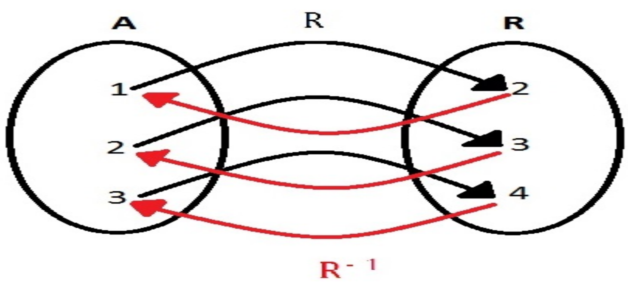


Figura 2.3 *Mostrando a relação* $\Re : A \rightarrow B$ *e* $\Re^{-1} : B \rightarrow A$

.

2.4 Operações sobre Relações

Suponha que $\Re$ é o conjunto de todas as relações binárias no Produto cartesiano $A \times B$. Se $\Re_1$ e $\Re_2$ pertencem a $\Re$ vamos definir as operações de união e intersecção sobre estas relações, as quais resultarão em novas relações.

2.4.1 União

A união das relações $\Re_1$ e $\Re_2 \subset A \times B$, denotadas por $\Re_1 \cup \Re_2$, será o conjunto de todos os pares ordenados de ambas as relações. Isto é:

$$a(\Re_1 \cup \Re_2)b \leftrightarrow (a\Re_1 b) \vee (a\Re_2 b)$$

Lê-se, a está relacionado com b através da relação $(\Re_1 \cup \Re_2)$ se, e somente se, a esta relacionado com b através da relação $\Re_1$ ou a está relacionado com b através da relação $\Re_2$.

Na operação de união, como o nome já diz, insere-se no conjunto os elementos idênticos e os elementos distintos, fazendo um conjunto de todos os elementos de $\Re_1$ com todos os elementos de $\Re_2$.

Exemplo 2.4.1.1. *Seja o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Dadas as relações $\Re_1$ e $\Re_2$ sobre A, em que:*

$\Re_1 = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_1), (a_3, a_3)\}$ *e*

$\Re_2 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_3), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1)\}$.

Da definição temos:

$\Re_1 \cup \Re_2 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_3, a_3)\}$

Logo, nesta união temos os pares $(a_1, a_1) \in \Re_2$, $(a_1, a_2) \in \Re_1$, $(a_1, a_3) \in \Re_1$ e $\Re_2$, $(a_2, a_1) \in \Re_1$, $(a_2, a_2) \in \Re_2$, $(a_2, a_3) \in \Re_2$, $(a_3, a_1) \in \Re_2$ e $(a_3, a_3) \in \Re_1$.

A figura 2.4 ilustra $\Re_1 \cup \Re_2$, as setas de $\Re_1 \cup \Re_2$ são formadas ao juntar as setas de $\Re_1$ e $\Re_2$.

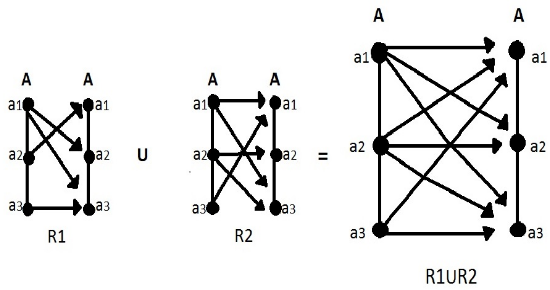


Figura 2.4 *Representação de setas da união de Relações.*

2.4.2 Interseção

Sejam $\Re_1$ e $\Re_2$ duas relações definidas no conjunto A para o conjunto B. Então a interseção $\Re_1 \cap \Re_2 \subset A \times B$ é uma relação definida pelos elementos comuns de $\Re_1$ e $\Re_2$, isto é,

$$a(\Re_1 \cap \Re_2)b \leftrightarrow (a\Re_1 b) \wedge (a\Re_2 b)$$

Portanto, para o elemento pertencer à interseção deve ser idêntico em ambas as relações $\Re_1$ e $\Re_2$.

Exemplo 2.4.2.1. *Sejam as relações $\Re_1$ e $\Re_2$ em $A \times B$, tais que:*

$$a\Re_1 b \leftrightarrow a < b \ e$$
$$a\Re_2 b \leftrightarrow b = a + 1.$$

Utilizemos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ para identificar os pares ordenados de $A \times B$, encotrar as relações $\Re_1$ e $\Re_2$ e operar a união e interseção entre as relaçoes.

i) O produto cartesiano $A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$.

ii) A relação $\Re_1 = \{(1,2); (1,3); (1,4); (2,3); (2,4); (3,4)\}$.

iii) A relação $\Re_2 = \{(1,2); (2,3); (3,4)\}$.

iv) A união de $\Re_1 \cup \Re_2 = \{(1,2); (1,3); (1,4); (2,3); (2,4); (3,4)\}$, que neste caso é igual a $\Re_1$.

v) A interseção de $\Re_1 \cap \Re_2$=$\{(1,2);(2,3);(3,4)\}$, que neste caso é igual a $\Re_2$.

2.5 Composição de Relações

A operação de composição de relações destaca as associações de três conjuntos A, B e C, para formar pares ordenados dos conjuntos composto por elementos de dois desses, cujos conjuntos são A e C interligados por uma transitividade de relacionamento.

A composição das relações $\Re_1 \subset A \times B$ e $\Re_2 \subset B \times C$ é uma relação $\Re_2 \circ \Re_1 \subset A \times C$ que está definida como:

$$\Re_2 \circ \Re_1 = \{(a,c) \in A \times C / \exists b \in \mathrm{B} \text{ com } a\Re_1 b \text{ e } b\Re_2 c\}$$

Exemplo 2.5.1. *Sejam os conjuntos* $A = \{a,b,c\}, B = \{c,d,e\}$ *e* $C = \{a,e\}$ *e as relações* $\Re_1 = \{(a,c),(a,e),(b,c),(c,d)\} \subset A \times B$ *e* $\Re_2 = \{(c,a),(d,a),(d,e),(e,e)\} \subset B \times C$*. Os elementos* $x\Re y$ *e* $y\Re z$ *são:*

$$\begin{aligned} a\Re_1 c \wedge c\Re_2 a &\Rightarrow a(\Re_2 \circ \Re_1)a \\ a\Re_1 e \wedge e\Re_2 e &\Rightarrow a(\Re_2 \circ \Re_1)e \\ b\Re_1 c \wedge c\Re_2 a &\Rightarrow b(\Re_2 \circ \Re_1)a \\ c\Re_1 d \wedge d\Re_2 a &\Rightarrow c(\Re_2 \circ \Re_1)a \\ c\Re_1 d \wedge d\Re_2 e &\Rightarrow c(\Re_2 \circ \Re_1)e \end{aligned}$$

Logo $\Re_2 \circ \Re_1 = \{(a,a),(a,e),(b,a),(c,a),(c,e)\}$

Na figura 2.4 é apresentado o diagrama de setas para $\Re_2 \circ \Re_1$.

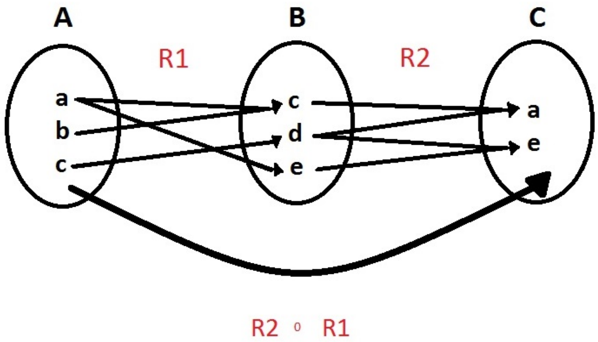


Figura 2.5 *Diagrama de setas da relação composta*

.

2.6 Propriedades da Relações

Nesta seção vamos definir relações sobre o produto cartesiano $A \times A$, isto é, relação sobre um único conjunto A.

Para exemplificar, consideremos as seguintes relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$
\begin{aligned}
\Re_1 &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\};\\
\Re_2 &= \{(1,1),(1,2),(2,1)\};\\
\Re_3 &= \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\};\\
\Re_4 &= \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\};\\
\Re_5 &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}e\\
\Re_6 &= \{(3,4)\}.
\end{aligned}
$$

A partir destas relações vamos verificar quais são do tipo reflexiva, simétrica, transitiva ou anti-simétrica.

2.6.1 Reflexiva:

Uma Relação $\Re$ sobre um conjunto A é dita REFLEXIVA se cada elemento de A está relacionado consigo mesmo. Isto é, se $(a, a) \in \Re$, para cada elemento a de A.

Assim temos.

$\Re_1$ é reflexiva, pois $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$ e $(4, 4) \in \Re$.

$\Re_2$ não é reflexiva pois $(2,2) \notin \Re$.
$\Re_3$ é reflexiva, pois $(1,1),(2,2),(3,3)$ e $(4,4) \in \Re$.
$\Re_4$ não é reflexiva pois $(1,1),(2,2),(3,3)$ e $(4,4) \notin \Re$
$\Re_5$ é reflexiva, pois $(1,1),(2,2),(3,3)e(4,4) \in \Re$.
$\Re_6$ não é reflexiva pois $(1,1),(2,2),(3,3)$ e $(4,4) \notin \Re$.

Trivialmente, podemos dizer que uma relação é reflexiva num determinado conjunto, se todos os elementos de um determinado conjunto relacionam-se consigo.

2.6.2 Simétrica:

Uma Relação $\Re$ sobre um conjunto A é dita SIMÉTRICA se para cada par ordenado da relação o seu simétrico também pertence a relação, isto é, se $(a,b) \in \Re$, então $(b,a) \in \Re$.

Temos que na relação simétrica o elemento $(a,a) \in \Re$ é seu próprio simétrico, logo não iremos visar o par $(a,a) \in \Re$, e sim o par $(a,b) \in \Re$, $a \neq b$.
Assim,

$\Re_1$ não é simétrica, pois (3,4) $\in \Re$ e (4,3) $\notin \Re$.
$\Re_2$ é simétrica, pois (1,2) $\in \Re$ e (2,1) $\in \Re$.
$\Re_3$ é simétrica, pois (1,2) e (2,1) $\in \Re$ e (1,4) e (4,1) $\in \Re$.
$\Re_4$ não é simétrica, pois (2,1) $\in \Re$ e (1,2) $\notin \Re$.
$\Re_5$ não é simétrica, pois (1,2) $\in \Re$ e (2,1) $\notin \Re$.
$\Re_6$ não é simétrica, pois (3,4) $\in \Re$ e (4,3) $\notin \Re$.

2.6.3 Transitiva:

Uma Relação $\Re$ sobre um conjunto A é dita TRANSITIVA se

$$(a,b) \in \Re \wedge (b,c) \in \Re, \text{ então } (a,c) \in \Re.$$

Assim,

$\Re_1$ não é transitiva, pois $3\Re4 \wedge 2\Re1$, mas $3 \not\Re 1$.
$\Re_2$ não é transitiva, pois $2\Re1 \wedge 1\Re2$, mas $2 \not\Re 2$.
$\Re_3$ não é transitiva, pois $4\Re1 \wedge 1\Re2$, mas $4 \not\Re 2$.

$\Re_4$ é transitiva, pois $3\Re 2 \wedge 2\Re 1 \rightarrow 3\Re 1$, $4\Re 2 \wedge 2\Re 1 \rightarrow 4\Re 1$, $4\Re 3 \wedge 3\Re 1 \rightarrow 4\Re 1$ e $4\Re 3 \wedge 3\Re 2 \rightarrow 3\Re 2$.

$\Re_5$ é transitiva, pois $1\Re 1 \wedge 1\Re 2 \rightarrow 1\Re 2$, $1\Re 2 \wedge 2\Re 3 \rightarrow 1\Re 3$, $1\Re 2 \wedge 2\Re 4 \rightarrow 1\Re 4$, $2\Re 2 \wedge 2\Re 3 \rightarrow 2\Re 3$, $3\Re 3 \wedge 3\Re 4 \rightarrow 3\Re 4$ e $3\Re 4 \wedge 4\Re 4 \rightarrow 3\Re 4$.

No caso da relação $\Re_6 = \{(3,4)\}$, e por não existir um elemento $c \subset$ {(3,4)}, então o antecedente $3\Re 4 \wedge 4\Re c$ é falso e, portanto, a implicação $3\Re 4 \wedge 4\Re c \rightarrow 3\Re c$ é verdadeira, logo $\Re_6$ é transitiva.

2.6.4 Anti-Simétrica:

Seja $\Re$ uma Relação binária definida num conjunto A. $\Re$ é dita ANTI-SIMÉTRICA quando ela satisfaz a seguinte propriedade:

$$\forall \text{a e b} \in \text{A}; (a,b) \in \Re \wedge (b,a) \in \Re \Rightarrow b = a$$

Isto significa que se $a\Re b$ e $b\Re a$, então $a = b$.

Assim,

$\Re_1$ não é anti-simétrica, pois $(1,2) \in \Re$ e $(2,1) \in \Re$, mas $1 \neq 2$.

$\Re_2$ não é anti-simétrica, pois $(1,2) \in \Re$ e $(2,1) \in \Re$, mas $1 \neq 2$.

$\Re_3$ não é anti-simétrica, pois $(1,4) \in \Re$ e $(4,1) \in \Re$, mas $1 \neq 4$.

$\Re_4$ é anti-simétrica, pois $(2,1) \in \Re$ e $(1,2) \notin \Re$, $(3,1) \in \Re$ e $(1,3) \notin \Re$, $(3,2) \in \Re$ e $(2,3) \notin \Re$, $(4,1) \in \Re$ e $(1,4) \notin \Re$, $(4,2) \in \Re$ e $(2,4) \notin \Re$ e $(4,3) \in \Re$ e $(3,4) \notin \Re$.

$\Re_5$ é anti-simétrica, pois $(1,2),(1,3),(1,4) \in \Re$ e $(2,1),(3,1),(4,1) \notin \Re$; $(2,3),(2,4) \in \Re$ e $(3,2),(4,2) \notin \Re$; $(3,4) \in \Re$ e $(4,3) \notin \Re$. Os pares (1,1),(2,2),(3,3) e (4,4) satisfazem a condição, pois $a = b$.

$\Re_6$ é anti-simétrica, pois $(3,4) \in \Re$ e $(4,3) \notin \Re$.

2.7 Relação de Equivalência:

Dizemos que uma relação $\Re$ sobre o conjunto A é uma relação de equivalência se $\Re$ é reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja:

$\forall a \in A$, $a\Re a$ (reflexividade)

Se $a\Re b \to b\Re a$ (simetria)
Se $a\Re b \wedge b\Re c \to a\Re c$ (transitividade)

Exemplo 2.7.1. *Dado um conjunto* $A = \{1, 2, 3, 4\}$*. seja a relação* $\Re = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$*. Queremos mostrar que* $\Re$ *é reflexiva, simétrica e transitiva.*

$\Re$ é reflexiva, pois os pares (1,1),(2,2),(3,3) e (4,4)$\in \Re$
$\Re$ é simétrica, pois (1,2)$\in \Re$ e (2,1)$\in \Re$, o (3,4)$\in \Re$ e o (4,3)$\in \Re$.
$\Re$ é transitiva, pois $1\Re2 \wedge 2\Re1 \to 1\Re1$; $2\Re1 \wedge 1\Re2 \to 2\Re2$; $3\Re4 \wedge 4\Re3 \to 3\Re3$; $4\Re3 \wedge 3\Re4 \to 4\Re4$; $1\Re1 \wedge 1\Re2 \to 1\Re2$; $2\Re1 \wedge 1\Re1 \to 2\Re1$; $4\Re3 \wedge 3\Re3 \to 4\Re3$ e $3\Re3 \wedge 3\Re4 \to 3\Re4$.

2.8 Relação de Ordem:

Existem dois tipos de relação de ordem: total e parcial.

2.8.1 Relação de Ordem Total:

Uma relação $\Re$ em um conjunto S é denominada total se

i) $\Re$ é anti-simétrica, reflexiva e transitiva

ii) Para todos os elementos a, $b \in A$, necessariamente a $\Re$ b ou b $\Re$ a.

Exemplo 2.8.1.1. *A relação* $\leq$ *no conjunto dos números reais é uma relação de ordem total, pois é*

- Antissimétrica: se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$;
- Reflexiva: $a \leq a$;
- Transitiva: $a \leq b$ e $b \leq c$, isso implica que $a \leq c$.

E observa-se também que para quaisquer dois números reais, temos que $a \leq b$ ou $b \leq a$.

2.8.2 Relação de Ordem Parcial:

Uma relação $\Re$ em um conjunto S é denominada parcial se $\Re$ é antissimétrica, reflexiva e transitiva.

O exemplo anterior também é exemplo de uma relação de ordem parcial, pois toda relação de ordem total é também parcial.

Capítulo 3

Representação Matricial de uma Relação

No capítulo 2 temos apresentado a representação de setas para as relações binárias as quais são úteis para a visualização das operações e propriedades das relações. Neste capítulo focamos na representação matricial de uma relação a qual não é uma representação gráfica e sim uma ferramenta para trabalhar com grande volume de dados, como por exemplo num banco de dados relacionados. Iniciamos com a definição e características de uma Matriz e depois desenvolvemos a representação matricial de uma Relação.

3.1 Definição de Matriz

Uma matriz é uma tabela de ordem m por n, em que m e n são números naturais diferentes de zero, onde m indicará o número de linhas e n indicará o número de colunas.

Denotamos por a_{ij}, o elemento de A que está na linha i e a coluna j. A matriz abaixo tem m linhas e n colunas, dizemos que ela tem dimensão $m \times n$ (m por n) e a representamos por $A = (a_{ij})_{mxn}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & & a_{3n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{1_{mn}} & \end{bmatrix}$$

Numa matriz em que o número de linhas é igual a $1 (m = 1)$, denominaremos de matriz linha.

$$A = [\ a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n}\ ]$$

Agora, se o número de colunas da matriz for igual a $1(n = 1)$, então será denominada de matriz coluna.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Quando o número de linhas é igual ao número de colunas, dizemos que a matriz é de ordem n e a chamamos de matriz quadrada. Por exemplo se $n = 3$ temos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Numa matriz B quadrada definimos a diagonal principal que é formada pelos elementos b_{ij} tais que $i = j$.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

Dada uma matriz C, sua diagonal segundaria tem os elementos c_{ij} tais que$i + j = n + 1$.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

Em matemática, matriz transposta é a matriz obtida da troca de linhas por colunas.Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Então, a transposta da matriz A, será representada por $A^t = (b_{ji})_{n\times m}$, é definida como:

$$b_{ji} = a_{ij}, \begin{array}{rcl} i & = & 1, 2, \ldots, n. \\ j & = & 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

Exemplo 3.1.1. *Seja uma matriz* $A = (a_{ij})_{3\times 2_j}$.

$$A = (a_{ij})_{3\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Portanto, matriz transposta A^t será:

$$A^t = (b_{ij})_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$$

3.2 Operações com Matrizes

A seguir são definidas a adição, subtração, multiplicação por um escalar e produto de matrizes.

3.2.1 Adição

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, chama-se soma $A + B$ a matriz $C = (c_{ij})m \times n$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j.

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

Exemplo 3.2.1.1. *:*

$$\textit{Sejam } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \textit{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \textit{então:}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{21} + b_{21} \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.2.1.2.

$$Dados\ A{=}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 22 \end{bmatrix} e\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, então:$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+0 & 6+1 \\ 4+5 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Como a soma de matrizes é formada simplesmente adicionando-se os elementos correspondentes, é claro que as regras válidas para a adição de matrizes reais são exatamente as que são válidas para a adição de números reais.

3.2.2 Subtração

Para executar a operação de subtração, será necessário a definição de matriz oposta.

Definição 3.2.2.1. *Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se oposta de A (indica-se $-A$) a matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ tal que $A + B = 0$. Assim $b_{ij}{=}{-}a_{ij}$. Denotamos $B = -A$ à oposta de A. Se m e $n = 2$ temos:*

$$B = -A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}$$

Dadas duas matrizes$A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})m \times n$, chama-se diferença $A - B$ a matriz soma de A com o oposto de B.

A diferença entre A e B denotada por $A - B$ é definida por:
$A - B = A + (-B) = (a_{ij}) + (-b_{ij}) = (c_{ij})$
onde $(c_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$, $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$.

Exemplo 3.2.2.1. *:*

$$Sejam\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} e\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},\ então:$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{21} - b_{21} \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.2.2.2. *:*

Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 11 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 10 & 12 \end{bmatrix}$, *a diferença* $C = A - B$ *é:*

$$C = A - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 10 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 5-4 & 7-6 \\ 3-1 & 9-10 & 11-12 \end{bmatrix}$$

logo, temos que C $= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

3.2.3 Produto de um Escalar por uma Matriz

Seja α um número real e A uma matriz, então o produto de α pela matriz A é denotado por $\alpha A = B$. A matriz B será obtida multiplicando-se cada elemento de A por α. $B = (\alpha . a_{ij})_{m \times n}$.

Exemplo 3.2.3.1.

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *e* α *um número, temos:*

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}$$

3.2.4 Produto de Matrizes

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$, chama-se o produto de AB a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que cada elemento c_{ij} é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da $i-$ésima linha de A pelos elementos da $j-$ésima coluna B, isto é,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Exemplo 3.2.4.1.

$$Se\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\ e\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},temos:$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.2.4.2.

$$Dadas\ as\ matrizes\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\ e\ B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ então\ o\ produto\ AB\ é:$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 + 2.1 & 1.4 + 2.3 \\ 2.2 + 1.1 & 2.4 + 1.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$$

3.3 Representação Matricial das Relações

Neste tópico estará sendo evidenciada a relação de conjuntos na forma matricial, com a qual poderão ser executados vários tipos de operações.

Seja uma relação $\Re$ de A em B, sendo $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$; $B = \{b_1, b_2, ..., b_q\}$; onde $\Re$ pode ser representada pela matriz $M_\Re = [m_{ij}]$. Cada elemento m_ij será correspondido pelo par ordenado (a_i, b_j).

$$M_\Re = \begin{array}{c|cccc} AXB & b_1 & b_2 & \dots & b_q \\ \hline a_1 & m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1q} \\ a_2 & m_{21} & m_{22} & \dots & m_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p & m_{p1} & m_{p2} & \vdots & m_{pq} \end{array}$$

onde m_{ij} é definida no conjunto binário como $\{0, 1\}$ por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } (a_i, b_j) \in \Re \\ 0, \text{ se } (a_i, b_j) \notin \Re \end{cases}$$

Exemplo 3.3.1. *Sejam* $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ *e* $B = \{b_1, b_2\}$. $\Re$ *é a relação de* A *para* B *contendo os pares ordenados* $(a, b) \in A \times B$ *tal que* $a \succ b$

Assim, $\Re = \{(a_2, b_1), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\} = \{m_{21}, m_{31}, m_{32}\}$. Logo,

$$M_{\Re} = \begin{array}{c|cc} & b_1 & b_2 \\ \hline a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 \\ a_3 & 1 & 1 \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A relação $\Re : A \to B$, como vimos, pode ser representada na forma de matriz, o que facilita sua implementação em sistemas computacionais.

Sejam $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ dois conjuntos finitos. A representação da relação $\Re : A \to B$ como matriz é como segue:

a) o número de linhas é m (número de elementos do domínio);

b) o número de colunas é n (número de elementos da imagem);

c) a matriz resultante possui $m \times n$ posições e cada posição contem um valor lógico - verdadeiro ou falso;

d) Se $(a_i, b_j) \in \Re$, então a posição conterá o valor verdadeiro (1); caso contrário, terá o valor falso (0).

Exemplo 3.3.2. *Seja* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e* $\Re \subset A \times B$, $\Re = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 4), (3, 5)\}$, *então a matriz fica:*

$$M_R = \begin{array}{l|ccccc} AXB & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

3.3.1 Matriz de uma Relação Reflexiva

Seja $\Re$ uma relação reflexiva sobre um conjunto A com n elementos.

Como $\Re$ é reflexiva, temos que $(a_i, a_i) \in \Re$ e portanto $m_{ii} = 1$

Assim, a matriz de uma relação reflexiva tem os elementos da diagonal principal iguais 1.

Logo, $\Re$ é uma relação reflexiva sobre $A \Leftrightarrow (a_i, a_i) \in \Re \to m_{ii} = 1$

Por exemplo, se

$$M_{\Re} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A relação é reflexiva, pois os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

3.3.2 Matriz de uma Relação Simétrica

Seja $\Re$ uma relação simétrica sobre o conjunto A com n elementos.
Assim se $a_{ij} \in \Re$ então $a_{ji} \in \Re$, o qual equivale á:
Se $m_{ij} = 1$, então $m_{ji} = 1$ e portanto
$\Re$ é uma relação simétrica $\Leftrightarrow M_R^t = M_R$

Exemplo 3.3.3. *Seja a relação* $R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),$ $(4,1),(4,4)\}$ *sobre o conjunto* $A = \{1,2,3,4\}$*, portanto, temos:*

$$M_{\Re} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{\Re}^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $M_R^t = M_R$, pode-se afirmar que a relação $\Re$ é simétrica.

Observe os elementos das matrizes $M_R = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{31}, a_{33}\}$ e $M_R^t = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{31}, a_{33}\}$. Portanto, basta fazer a matriz transposta da matriz M_R para saber se a relação é simétrica.

3.3.3 Matriz de uma Relação Anti-Simétrica

Seja $\Re \subset A \times A$ uma relação anti-simétrica, isto é, se $a\Re b \wedge b\Re a \to a = b$, $\forall a,b \in A$,

A representação matricial M_R correspondente desta relação terá o elemento $m_{ij} = 1$, com $i \neq j$, mas com o termo m_{ji} não pertencendo a matriz.

Exemplo 3.3.4. *Seja* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $\Re = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$*. A matriz* M_R *desta relação será:*

$$M_R = \begin{array}{c|ccc} A \times A & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Figura 3.1 *Matriz da relação anti-simétrica.*

3.3.4 Matriz de uma Relação Transitiva

Seja $\Re \subset A \times A$ uma relação transitiva, isto é:

$$\text{Se } (a, b) \in \Re \text{ e } (b, c) \in \Re \rightarrow (a, c) \in \Re$$

E isto é a composição de $\Re \circ \Re$, e a composição de $\Re \circ \Re \subset \Re$.

Logo, se M_R é a matriz da relação $\Re$, deve-se verificar que:

$$M_{R \circ R} \subset M_R$$
$$\text{ou } M_R.M_R \subset M_R$$
$$\text{ou } M_R^2 \subset M_R \text{ —(1)}$$

Multiplicando por M_R, temos:

$$M_R.M_R^2 \subset M_R.M_R$$
$$\text{ou } M_R^3 \subset M_R^2 \text{ —(2)}$$

De (1) em (2) resulta

$$M_R^3 \subset M_R^2 \subset M_R$$
$$\text{ou } M_R^3 \subset M_R$$

Usando a indução matemática temos a seguinte proposição.

Proposição: Se $\Re$ é uma relação transitiva de $A \times A$ e M_R é a sua representação matricial, então temos:

$$M_R^n \subset M_R, \forall n \in \mathbb{N}$$

Corolário 3.3.1. *Se para algum* $n, M_R^n \not\subset M_R$, *então* $\Re$ *não é uma relação transitiva.*

Exemplo 3.3.5. *Vamos utilizar a relação* $\Re_6 = \{(3,4)\}$ *do exemplo 2.6.1 para demonstração.*

Conforme a proposição, se $M_{R_6}^n \subset M_{R_6}$, então a relação $\Re$ é transitiva. Fazendo $n = 2$ e pelo produto direto, temos:

$$M_{R_6}^2 = M_{R_6}.M_{R_6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_{R_6}^2 = M_{R_6}$$

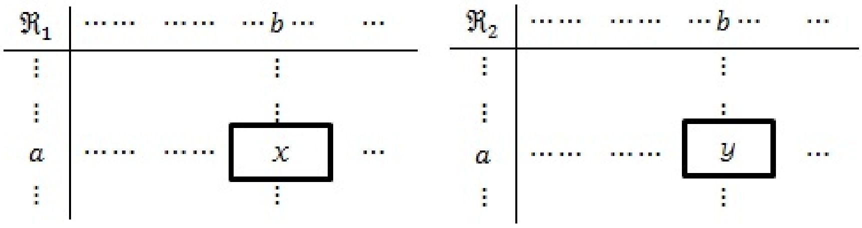
Se $M_{R_6}^2 \subset M_{R_6}$ e pela proposição de transição, temos que $\Re_6$ é transitiva.

3.4 Matriz da União de Relações

Sejam as relações $\Re_1$ e $\Re_2 \subset A \times B$ e suas matrizes associadas M_{R_1} e M_{R_2} respectivamente.

Desejamos descrever a matriz $M_{R1} \cup \Re_2$ da relação $\Re_1 \cup \Re_2$ em termos da M_{R_1} e M_{R_2}.

Um elemento $(a,b) \in \Re_1 \cup \Re_2$ se, e somente se, $(a,b) \in \Re_1$ ou $(a,b) \in \Re_2$. Em termos de representação matricial temos a seguinte configuração.



Observe que, se

I. $x = 1$ e $y = 1 \Rightarrow (a, b) \in \Re_1 \cup \Re_2$

II. $x = 1$ e $y = 0 \Rightarrow (a, b) \in \Re_1 \cup \Re_2$

III. $x = 0$ e $y = 1 \Rightarrow (a, b) \in \Re_1 \cup \Re_2$

IV. $x = 0$ e $y = 0 \Rightarrow (a, b) \notin \Re_1 \cup \Re_2$

Construímos assim a seguinte tabela para a união associada à soma de matrizes, cujo símbolo denotado por $\oplus$.

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

Isto é suficiente, basta que um dos componentes seja igual a 1, para que a soma seja 1 (indicando um elemento de $\Re_1 \cup \Re_2$).

No caso que ambos os componentes são nulos, isto indica que o elemento não pertence a $\Re_1 \cup \Re_2$.

Isto pode ser feito componente a componente de M_{R_1} e M_{R_2}, definindo por tanto $M_{R_1 \cup R_2}$ associado a $\Re_1 \cup \Re_2$ como:

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \oplus M_{R_2}$$

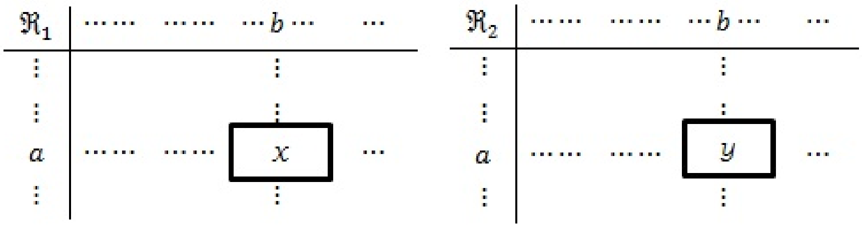
Com componentes

$$M_{R_1 \cup R_2}(i, j) = M_{R_1}(i, j) \oplus M_{R_2}(i, j)$$

3.5 Matriz da Interseção de Relações

Analogamente à definição de união, dá-se a definição de interseção, obviamente, cada uma com sua peculiaridade inerente.

Portanto, um elemento $(a, b) \in \Re_1 \cap \Re_2$ se, e somente se, $(a, b) \in \Re_1$ e $(a, b) \in \Re_2$. Na representação matricial temos o seguinte processo.



Pois,

- Se $x = 1$ e $y = 1 \Rightarrow (a, b) \in \Re_1 \cap \Re_2$
- Se $x = 1$ e $y = 0 \Rightarrow (a, b) \notin \Re_1 \cap \Re_2$
- Se $x = 0$ e $y = 1 \Rightarrow (a, b) \notin \Re_1 \cap \Re_2$
- Se $x = 0$ e $y = 0 \Rightarrow (a, b) \notin \Re_1 \cap \Re_2$

A partir disto, podemos reproduzir uma tabela para a interseção, desenvolvida pelo produto de matrizes, mas com característica elementar da multiplicação, tento o $\otimes$ como símbolo.

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

Figura 3.2 *Tabela de multiplicação de componentes*

.

Ou seja, para que o produto dos componentes seja um (1), temos que ter os dois componentes iguais a um (1)(indicando elemento $\Re_1 \cap \Re_2$).

Do contrário, basta que um dos componentes seja nulo para que este elemento não pertença a $\Re_1 \cap \Re_2$.

Utilizando os componentes um por um de M_{R_1} e M_{R_2} , definimos, portanto $M_{R_1 \cap R_2}$ associado a $\Re_1 \cap \Re_2$ como:

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \otimes M_{R_2}$$

Com componentes

$$M_{R_1 \cap R_2}(i,j) = M_{R_1}(i,j) \otimes M_{R_2}(i,j)$$

3.5.1 Matriz da Composição de duas Relações

A composição de relações pode ser representada na forma de matriz como será a seguir.

Sejam $\Re_1$ uma relação de A em B e $\Re_2$ uma relação de B em C, e suas matrizes M_{R_1} e M_{R_2}, respectivamente.

Objetivamos encontrar um elemento $m_{ij} \in M_{R_2 \circ R_1}$, tal que $m_{ij} = 1$, isto se, e somente se, $m_{R_1}(i,k) \wedge m_{R_2}(k,j) = 1$, $k = \{1, 2, ..., n\}$. Logo, a matriz da relação composição $M_{R_2 \circ R_1}$ terá o número de linhas da matriz M_{R_1} e o número de colunas da matriz M_{R_2} e o seu elemento estará disposto na linha i e coluna j. O elemento m_{R_1} (i,k) se relacionará com todos os elementos $m_{R_2}(k,j)$ que estiverem na linha k.

Outra forma de encontrar a matriz da relação composição é fazendo da seguinte maneira:

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1}.M_{R_2}$$

Ou seja, o produto das matrizes M_{R_1} e M_{R_2} também define a matriz da relação composição $M_{R_2 \circ R_1}$. Mas contendo uma peculiaridade distinta. Toda vez que na multiplica de linha por coluna houver um número ≥ 1, será colocado o (1).

Exemplo 3.5.1. *Dados os conjuntos* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ *e* $C = \{3, 5, 7, 9\}$. *Sejam* $\Re_1 \subset A \times B$ *e* $\Re_2 \subset B \times C$, *tais que* $\Re_1 = \{(1,2), (1,6), (2,4), (4,2), (5,2), (5,6)\}$ *e* $\Re_2 = \{(2,5), (2,7), (2,9), (4,3), (4,7), (6,9)\}$. *As matrizes que representam* M_{R_1}, M_{R_2} *e* $M_{R_2 \circ R_1}$ *são:*

$$M_{R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_{R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizaremos a primeiro método para encontrar elementos da composição.

$$
\begin{aligned}
m_{R_1(1,1)} \wedge m_{R_2(1,2)} &= 1 \Rightarrow m_{R_2 \circ R_1(1,2)} = 1 \\
m_{R_1(1,1)} \wedge m_{R_2(1,3)} &= 1 \Rightarrow m_{R_2 \circ R_1(1,3)} = 1 \\
m_{R_1(1,1)} \wedge m_{R_2(1,4)} &= 1 \Rightarrow m_{R_2 \circ R_1(1,4)} = 1
\end{aligned}
$$

Para $i = 4$ e $k = 1$ temos:

$$
\begin{aligned}
m_{R_1(4,1)} \wedge m_{R_2(1,2)} &= 1 \Rightarrow m_{R_2 \circ R_1(3,2)} = 1 \\
m_{R_1(4,1)} \wedge m_{R_2(1,3)} &= 1 \Rightarrow m_{R_2 \circ R_1(3,3)} = 1 \\
m_{R_1(4,1)} \wedge m_{R_2(1,4)} &= 1 \Rightarrow m_{R_2 \circ R_1(3,4)} = 1
\end{aligned}
$$

Para $i = 5$ e $k = 1$ temos:

$$
\begin{aligned}
m_{R_1(5,1)} \wedge m_{R_2(1,2)} &= 1 \Rightarrow m_{R_2 \circ R_1(5,2)} = 1 \\
m_{R_1(5,1)} \wedge m_{R_2(1,3)} &= 1 \Rightarrow m_{R_2 \circ R_1(5,3)} = 1 \\
m_{R_1(5,1)} \wedge m_{R_2(1,4)} &= 1 \Rightarrow m_{R_2 \circ R_1(5,4)} = 1
\end{aligned}
$$

Para $i = 2$ e $k = 2$ temos:

$$
\begin{aligned}
m_{R_1(2,1)} \wedge m_{R_2(2,2)} &= 1 \Rightarrow m_{R_2 \circ R_1(2,2)} = 1 \\
m_{R_1(2,1)} \wedge m_{R_2(2,3)} &= 1 \Rightarrow m_{R_2 \circ R_1(2,3)} = 1
\end{aligned}
$$

Para $i = 1$ e $k = 3$ temos:

$$
m_{R_1(1,3)} \wedge m_{R_2(3,4)} = 1 \Rightarrow m_{R_2 \circ R_1(1,4)} = 1
$$

Para $i = 5$ e $k = 3$ temos:

$$
m_{R_1(5,3)} \wedge m_{R_2(3,4)} = 1 \Rightarrow m_{R_2 \circ R_1(5,4)} = 1
$$

E a matriz composição fica assim:

$$M_{R_2 \circ R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, utilizaremos o método da multiplicação de matrizes para achar a matriz da relação composta.

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1}.M_{R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.5.2 Matriz da Relação Inversa

Como determinado no seção 2.3, a relação inversa de $\Re$, denotada por $\Re^{-1}$, é a relação do conjunto B para o conjunto A tal que se, e somente se, o elemento $(a, b) \in \Re$, então o elemento $(b, a) \in \Re^{-1}$.

A representação matricial de uma relação inversa, simbolizada por $M_{R^{-1}}$, dá-se no mesmo critério que dispomos os elementos de uma relação como matriz, mas modificando a ordem e os termos da matriz. Onde tiver o termo m_{ij}, representando o elemento de $\Re$, terá o termo m_{ji} indicando elemento de $\Re^{-1}$, com j sendo o número de linhas e i o número de colunas da matriz $M_{R^{-1}}$.

Em conformidade com a seção 3.1 no que tange sobre matriz transposta, essa troca de linha por coluna e vice versa, caracteriza uma matriz transposta. Portanto, para achar a relação inversa de $\Re$, basta representar $\Re$ como matriz M_R e encontrar a matriz transposta de M_R. Isto é:

$$M_{R^{-1}} = M_R^t$$

Exemplo 3.5.2. *Dados os conjuntos* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{2, 4, 6\}$. *Seja*

$\Re = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,6)\}$ *sobre* $A \times B$. *A matriz da relação inversa será:*

Primeiro, devemos encontrar M_R.

$$M_{\Re} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, queremos encontrar a matriz da relação inversa. Sendo assim, devemos encontrar $M^t_{\Re}$ que é igual $M_{\Re^{-1}}$. Para encotrar a matriz transposta de $\Re$, basta trocar as linhas por colunas da matriz de $\Re$, logo:

$$M^t_{\Re} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Capítulo 4

Representação por Grafo Direcionado

A representação de uma relação por grafo direcionado pode ser feita da seguinte maneira: desenhando um círculo para cada vértice e para cada aresta é desenhado um arco contendo suas extremidades, para que seja direcionado, é necessário que seu sentido seja indicado na aresta por uma seta figura 4.1.

Muitas situações podem ser descritas através de um diagrama de conjunto de pontos juntamente com linhas que ligam alguns desses pares de pontos. Por exemplo, os pontos podem representar pessoas, as linhas ligam pares de amigos; os pontos podem representar centros de comunicação, as linhas ligações entre os centros. A abstração matemática desse tipo de situações é o conceito de grafo.

4.1 Definição de Grafo

Definiremos um *grafo* (finito) G formado por um par $(V(G), A(G))$ onde $V(G)$ é um conjunto finito não vazio e $A(G)$ uma família de pares não ordenados de elementos, não necessariamente distintos, de $V(G)$. Uma família é uma coleção de elementos, os quais podem ser repetidos.

Os elementos de $V(G)$ são chamados de vértices e os elementos $A(G)$, arestas. Denotaremos $V(G)$ e $A(G)$ apenas por V e A. Uma aresta $\{a, b\} \in A(G)$ será denotada simplesmente por ab, além disso, dizemos que a aresta ab contém os vértices a e b, ou que a pertencem a aresta ab. $G - ab$ representa o grafo G menos a aresta ab e G-v o grafo G menos o vértice v e toda aresta que contém v.

Quando existe uma aresta ligando dois vértices dizemos que os vértices são adjacentes e que a aresta é incidente aos vértices.

Exemplo 4.1.1. *Um grafo qualquer contendo um conjunto de vértices* $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ *e um conjunto de arestas* $E = \{(a, e), (f, e), (e, b), (e, d), (b, d), (b, c), (c, d)\}$.

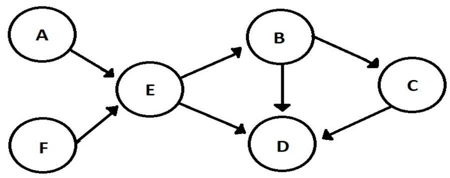


Figura 4.1 *Representação de Grafo Direcionado*

.

O número de vértices será simbolizado por $|V|$ ou pela letra n, no exemplo 4.1.1 $n = 5$

O número de arestas será simbolizado por $|A|$ ou pela letra m, no exemplo 4.1.1 $m = 7$

4.1.1 Grau de um Vértice

No nosso exemplo vimos que o vértice a tem uma aresta ligada a ele, o vértice f tem uma aresta ligada a ele, o vértice e tem 4 arestas ligada a ele e assim por diante.

Dizemos que estas arestas são incidentes ao vértice. O número de vezes que as arestas incidem sobre o vértice v é chamado grau do vértice v, simbolizamos por $d(v)$. No nosso exemplo, $d(a) = 1; d(f) = 1; d(e) = 4$.

Pode ser observado que a soma dos graus de um grafo é sempre o dobro do número de arestas, esse resultado é descrito matematicamente pelo

Teorema 4.1.1. *Para todo grafo G*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot m$$

isto é:

"a soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas".

Demonstração 4.1.1.1. *Quando contamos os graus dos vértice, estamos contando as extremidades, cada aresta foi contada duas vezes.*

$\square$

Corolário 4.1.1. *Todo grafo G possui um número de par de vértices de grau ímpar demonstração.*

Se tivéssemos um número ímpar de vértices de grau ímpar a soma dos graus seria ímpar. Mas a soma dos graus é o dobro do número de arestas e, portando é um número par.

$\square$

Quando temos um grafo em que uma aresta liga ao vértice a ela mesmo é o que chamamos de laço, para haver coerência com os resultados anteriores é necessário contar duas vezes (uma para cada extremidade) quando calcularmos o grau do vértice.

4.2 Grafo de uma Relação

Seja uma relação do tipo $\Re \subset A\times$ A representada na forma de um grafo direcionado sendo cada elemento representado por um pequeno círculo, chamado nó e cada par $(a, b) \in \Re$ será representado por uma seta de a a b, chamada arco.

Exemplo 4.2.1. *Seja o conjunto* $A = \{a, b, c, d\}$ *e a relação* $\Re = \{(a, b),$ $(b, a), (a, d), (d, c), (c, c), (c, a)\}$ *sobre A. Note que existe um laço do vértice c para ele mesmo, correspondente ao par* $(c, c) \in \Re$*. Além disso, de um nó para outro existe no máximo um arco, não sendo permitido arcos "paralelos".*

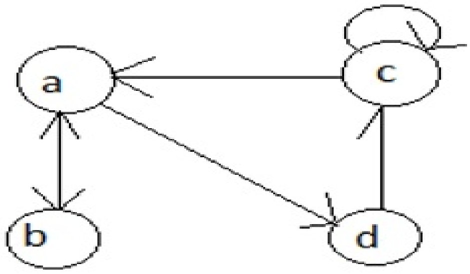


Figura 4.2 *Grafo de uma Relação*

4.2.1 Reflexiva

Um grafo direcionado que represente uma relação reflexiva possui um laço de cada nó para si próprio.

Exemplo 4.2.2. *Seja o conjunto* $A = \{1, 2, 3\}$ *e a relação* $\Re = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$ *sobre* A*. Note que a relação* $\Re$ *é reflexiva pois para todos os vértices do grafo, existem arestas ligando o vértice a ele mesmo.*

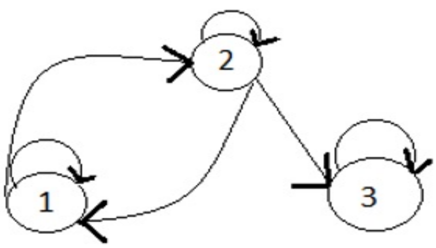


Figura 4.3 *Grafo de uma Relação Reflexiva*

.

4.2.2 Simétrica

Uma relação $\Re \subset A \times A$ é dita simétrica se $(\forall (a, b) \in \Re : (a, b) \in \Re)$. Um grafo direcionado que represente uma relação simétrica possui, entre quaisquer outros dois nós, 0 ou 2 arcos, isto é, quaisquer dois nós ou não possuem arcos entre eles, ou, se possuem, tais arcos estão em ambas as direções.

Exemplo 4.2.3. *Seja o conjunto* $A = \{1, 2, 3\}$ *e a relação* $\Re = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ *sobre* A*, note que a relação* $\Re$ *é simétrica pois* *partindo de qualquer aresta para um outro vértice, deve obrigatoriamente existir uma aresta no sentido contrário.*

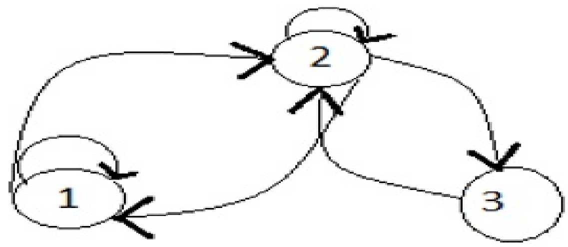


Figura 4.4 *Grafo de uma Relação Simétrica*

.

4.2.3 Anti-Simétrica

Um grafo direcionado representa uma relação anti-simetrica se para cada par de vértices ocorre uma das seguintes possibilidades em relação aos arcos:

i) não existe arco ligando os vértices, ou

ii) entre os dois vértices existe exatamente um arco.

Exemplo 4.2.4. *Seja o conjunto* $A = \{1, 2, 3\}$ *e a relação* $\Re = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,2)\}$ *sobre* A*. Note que não existe uma aresta ligando um vértice em sentido contrário, tornando assim a relação anti-simétrica.*

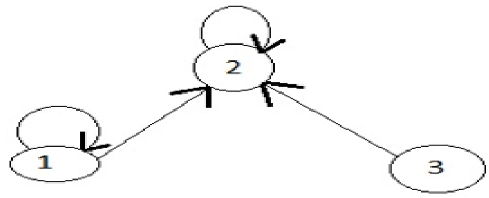


Figura 4.5 *Grafo de uma Relação Anti-Simétrica*

.

4.2.4 Transitiva

Um grafo direcionado representa uma relação Transitiva se para cada par de vértices ocorre uma das seguintes possibilidades em relação aos arcos:

i) não existe arco ligando o par de vértices, ou

ii) existe pelo menos um arco ligando diretamente os vértices e/ou existe um vértice intermediário que permite ligar o par de vértices.

Exemplo 4.2.5. *Seja o conjunto* $A = \{1, 2, 3\}$ *e a relação* $\Re = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ *sobre A. Note que a relação* $\Re$ *é transitiva, pois existe o vértice* $(1, 3) \in \Re$.

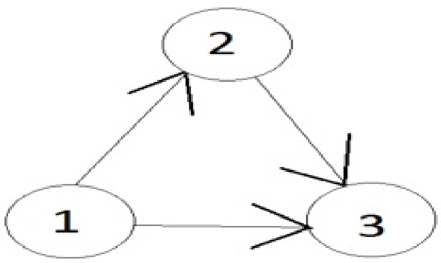


Figura 4.6 *Grafo de uma Relação Transitiva*

.

4.3 Fecho de uma Relação

Sejam R uma relação em um conjunto A, P uma propriedade de relações, e S uma relação em A com a propriedade P.

Dizemos que S é o fecho da relação $\Re$ com respeito à propriedade P, se S contém $\Re$ e está contida em toda relação que possui a propriedade P e contém $\Re$.

Em outras palavras, S é o fecho de $\Re$ com respeito à propriedade P se:

i) $\Re \subseteq S$

ii) S satisfaz a propriedade P

iii) Para toda relação T em A, se $\Re \subseteq T$ e T satisfaz a propriedade P, então $S \subseteq T$. Podemos definir os fechos como, reflexivo, simétrico e transitivo.

4.3.1 Reflexivo

Seja $\Re$ uma relação sobre um conjunto A. Se $\Re$ não é reflexiva sobre A, é porque não possui um ou mais pares da forma (a, a) com $a \in A$. Se acrescentarmos todos esses pares $\Re$, obtemos uma relação S que é reflexiva sobre A e contém $\Re$. Essa relação é chamada de fecho reflexivo de $\Re$ sobre A.

Exemplo 4.3.1. *Seja o conjunto* $A = \{1, 2, 3\}$ *e a relação* $\Re = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$*, note que* $\Re$ *não é reflexiva, pois os pares (2,2) e (3,3) não pertencem* $\Re$*, logo para torna-la reflexiva, basta acrescentar os pares necessários para isso, assim criando uma nova relação* $\Re^* = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2)\}$ *claramente, essa nova relação* $\Re^*$ *é reflexiva e é chamada de fecho reflexivo de* $\Re$*.*

4.3.2 Símetrico

Analogamente ao item anterior sobre fecho reflexivo, seja $\Re$ é uma relação não simétrica, obtemos seu fecho simétrico acrescentando a $\Re$ todos os pares necessários para torna-la uma relação simétrica, isto é, todo par da forma (b, a) tal que $(a, b) \in \Re$

Exemplo 4.3.2. *Seja o conjunto* $A = \{1, 2, 3\}$ *e a relação* $\Re = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$ *sobre o conjunto A, note que* $\Re$ *não simétrica pois não possui os pares (2,1) e (1,3), logo para torna-la simétrica, basta adicionar os pares que faltam, desse modo* $\Re^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$*. Essa nova relação é o fecho simétrico de* $\Re$*.*

4.3.3 Transitivo

Vamos agora considerar o problema análogo de completar uma relação $\Re$, se necessário, de modo a torna-la transitiva. Para isso, precisamos garantir que, para quaisquer pares (a, b) e (b, c) na relação, o par (a, c) também está na relação.

Podemos pensar que basta examinar todos os pares (a, c) e (b, c) que está na relação dada $\Re$. Entretanto, isso não é o suficiente.

Exemplo 4.3.3. *Considere a relação* $\Re = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ *sobre o conjunto* $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Esta relação falha a definição de relação transitiva em exatamente dois casos.

(1,2) $\in \Re \wedge$ (2,3) $\in \Re$ mas $(1, 3) \notin \Re$

(2,3) $\in \Re \wedge$ (3,4) $\in \Re$ mas $(2, 4) \notin \Re$

Acrescentando os pares (1,3) e (2,4) obtemos a relação

$\Re' = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ ainda não é transitiva; pois ela possui (1,3) e (3,4) mas não possui (1,4), então, acrescentando o par (1,4) a $\Re'$ temos $\Re'' = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ que claramente é transitiva. Observe que esta falha de transitividade foi revelada quando acrescentamos o par (1,3) à relação.

Os pares que faltam em $\Re$ são da forma (a, c) tais que existe algum b com $(a, b) \in \Re$ e $(b, c) \in \Re$, ou seja, são os pares $\Re \circ \Re = \Re^2$. Portanto, ao acrescentarmos esses pares estamos construindo a relação $\Re' = R \cup \Re^2$. Pela mesma razão, os pares que ainda faltam em $\Re'$ estão na relação $\Re' \cup \Re' = (\Re \cup \Re^2)^2$ que é a relação $\Re^2 \cup \Re^3 \cup \Re^4$. Portanto, acrescentando esses pares obtemos $\Re'' = \Re \cup \Re^2 \cup \Re^3 \cup \Re^4$. No próximo passo, obtemos $\Re \cup \Re^2 \cup ... \cup \Re^7 \cup \Re^8$. E assim por diante.

Por estas considerações, o fecho transitivo de $\Re$, denotado por $\Re^*$ é definido como sendo a união de todas as potências de $\Re$, isto é

$$\Re^* = \Re \cup \Re^2 \cup \Re^3 \cup \dots \qquad (4.1)$$

que pode ser descrita como

$$\Re^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Re^k \tag{4.2}$$

ou seja, um par (a, b) está em $\Re^*$ se, e somente se, existe um inteiro $k \geq 1$ tal que $(a, b) \in \Re^k$.

Se $\Re$ é uma relação sobre um conjunto finito A, a união eventualmente deixa de crescer após um número finito de termos; pois os pares que acrescentamos pertencem ao conjunto $A \times A$, que é finito. Vamos mostrar que, se A tem n elementos, o processo termina com o termo $\Re^n$, no máximo. Nesse caso, a relação $\Re^*$ assim obtida é uma relação transitiva, por construção.

No caso de A ser finito, também podemos escrever a formula (4.3) em termos das matrizes booleanas. Se M é a matriz de $\Re$, a matriz M^* de $\Re^*$ é dada pela formula

$$M^* = \bigcup_{(k=1)}^{n} M^k = M \vee M^2 \vee M^3 \vee \ldots \vee M^n \tag{4.3}$$

Caso o conjunto A seja infinito, o processo pode nunca terminar, após cada acréscimo de pares que faltam pode surgir novos casos de falha de transitividade. Nesse caso a união (4.3) precisa incluir todas as potências de $\Re$.

Teorema 4.3.1. *para qualquer relação $\Re$, a relação $\Re^*$ é transitiva.*

Prova 4.3.1. *Sejam a, b, c elementos tais que (a, b) e (b, c) estão em $\mathbb{R}^*$. Vamos provar que (a, c) também está em $\Re^*$.*

Pela definição de $\Re^*$, existem inteiros $i \geq 1$ e $j \geq 1$ tais que $(a, b) \in \Re^i$ e $(b, c) \in \Re^j$. Portanto (a, c) está na composição $\Re^j \in \Re^i$ que é igual a $\Re^{i+j}$. $\square$

Por outro lado, o teorema a seguir mostra que o fecho transitivo $\Re^*$ calculado pela fórmula (4.3) não tem nenhum par supérfluo:

Teorema 4.3.2. *Para qualquer relação $\Re$, qualquer relação transitiva que contém $\Re$ contém o fecho transitivo $\Re^*$ de $\Re$.*

Prova 4.3.2. *Seja $\Re$ uma relação qualquer, e seja S uma relação que contém $\Re$, para todo $n \geq 1$, temos que $\Re^n \subseteq S^n$ e $S^n = S$ logo $R^n \subseteq S$. Uma vez que todos os termos das fórmulas (4.3.3) estão contidos em S, então a união de todos esses termos $\Re^*$ também está.*

Os teoremas acima citados implicam que o fecho transitivo $\Re^*$ definido pela fórmula (4.3.3) é a única relação transitiva que contém $\Re$ e está contida em qualquer relação transitiva que contém $\Re$. Portanto ela é também a menor relação transitiva que contém $\Re$.

4.4 Comparação do Grafo Direcionado com a Representação Matricial

Toda relação $\Re : A \to B$ pode ser representada a partir de um grafo direcionado, da mesma forma também podemos fazer a sua representação em forma de matriz, oque facilita sua implementação em sistemas computacionais.

Exemplo 4.4.1. *Seja o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ e a relação $\Re = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, f), (b, d)(c, c), (c, e), (c, f)\}$ sobre A, pode ser representada por um grafo direcionado assim como foi visto na seção 4.2, onde cada vértice é ligado por uma aresta se existir relação, logo sua representação por grafo direcionado fica assim:*

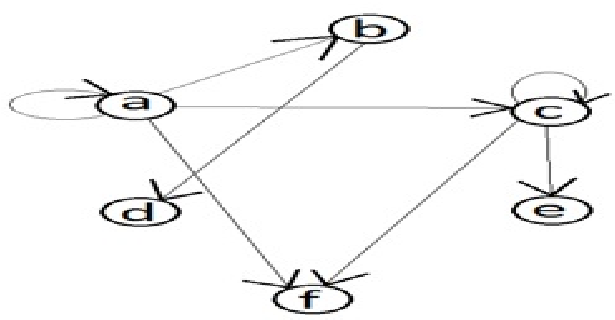


Figura 4.7 *Representação de um Grafo Direcionado*

Como foi visto anteriormente na seção 3.3, podemos representar a mesma relação do exemplo 4.4.1 em forma de matriz, onde $M_R = [m_{ij}]$

em que M_R=$\begin{cases} 1se(a_i, b_j) \in \Re \\ 0se(a_i, b_j) \notin \Re \end{cases}$

Assim, a matriz M_R da relação $\Re$ será:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A representação de relações por grafo direcionado dá uma visualização da informação das relações e das suas propriedades enquanto que a representação por matriz ajuda na implementação em computadores, tornando-as ferramenta importante para um melhor entendimento do problema, ficando mais fácil a busca por sua solução.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, dedicamos nosso foco em demonstrar as operações efetuadas nas relaçõe entre conjuntos. Todo esse mecanismo algébrico é consequência da condição impostas pela associação de elementos, os quais podem revelar que tipo de relação temos entre eles.

A representatividade matricial das relações é outra maneira de expressar a associação entre elementos de dois conjuntos. Neste caso, dispondo o termo 1 para indicar a ligação entre os elementos ou dispondo 0 para a não vinculação deles, facilitando a geração de informação que determinado termo quer transmitir. Por exemplo, estes tipos de transmição são usados em grandes bancos de dados, que milhares de vezes ao dia são operados para adicionar, deletar, atualizar. buscar ou combinar registros.

Vemos no capítulo 4 mais uma forma de representar a relação de conjuntos, os quais agora podemos visualizar por grafos e como determinado elemento (chamado *vértice*) se associa a outro (chamado *aresta*). Estes modelos matemáticos são utilizados, por exemplo, para determinar uma malha rodoviária de um estado, onde as cidades são os *vértices* e as estradas são as *arestas*, visualizando quais cidades se relacionam.

Sendo assim, este trabalho servirá como uma apostila de consulta, possibilitando que o acadêmico de exatas obtenha sucesso no curso ministrado durante sua graduação.

Portanto, diante da álgebra disposta neste trabalho de conclusão de curso, sugere-se que esta parte do estudo da matemática discreta seja uma base de uma próxima pesquisa sobre relações e suas representatividades, e até mesmo, para algumas aplicações que desenvolve e aprimore nossas tarefas diárias.

BIBLIOGRAFIA

[1] ROSEN, HENNETH H. ***Matemática Discreta e Suas aplicações***. *6.ed* Porto Alegre : AMGH, 2010.

[2] MENEZES, PAULO B. ***Matemática Discreta para Computação e Informática***. *2.ed* Porto Alegre : UFRGS, 2006.

[3] IEZZI, G. ***Fundamentos de Matemática Elementar, 4:sequência, matrizes, determinante, sistemas: exercícios resolvidos,exercício proposto com resposta, testes de vestibular com resposta***. *6.ed.* São Paulo: Atual, 1993.

[4] GOMIDE, A., STOLFI, J. ***Elementos de Matemática Discreta Para Computador*** *Versão Preliminar.* São Paulo : SBM, 2011. 85p.

[5] SÁ, LAURO C. ***Uso de Problema Histórico para Abordagem de Grafos no Ensino Médio***. VII jornada de Iniciação Científica do IFES. Espírito Santo: IFES, 2012.

[6] SILVA, CARLOS ROBERTO DA ***Material de Apoio: Matematia- 1º AS e 1º PD***. cidade: Uniban, 2007.

[7] *http://www.wikipedia.com.br*