UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
JUNIELSON PANTOJA DE AQUINO

TEOREMA DE HAHN BANACH E APLICAÇÕES

Macapá - AP
2015

Junielson Pantoja de Aquino

TEOREMA DE HAHN-BANACH E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Matemática como requisito para obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Gúzman Eulálio Isla Chamilco.

Macapá - AP
2015

Junielson Pantoja de Aquino

Teorema de Hahn-Banach e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá, Campus Marco Zero, aprovado pela Comissão de professores:

Prof. Dr. Gúzman Eulálio Isla Chamilco.
(Orientador)
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof. Dr. Gilberlandio Jesus Dias.
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sótil.
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Macapá - AP
2015

A minha família.
E a eu.
Dedico.

AGRADECIMENTOS

Eu, Junielson Pantoja de Aquino, agradeço primeiramente a Deus por guiar me no caminho dos estudos, mesmo em momentos difíceis da vida.

Agradeço a minha mãe, Maria Nelziana Pantoja de Aquino, e a meu pai, Jonezio Almeida de Aquino, pela oportunidade de viver, e por tantas outras, e também a minha família.

Agradeço ao professor Gúzman Eulálio Isla Chamilco, pela sua orientação, pontualidade, e rigorosidade durante suas orientações.

Agradeço também ao grande parceiro, Elias da Costa Ferreira, pelo seu apoio durante meus estudos, e pela sua amizade.

A todos muito obrigado!

“Meus senhores, eu acho que devo lembrar a todos que minhas chances de sucesso aumentam a cada tentativa.”

(John Nash)

Resumo

Neste trabalho, temos como objetivo principal apresentar e demonstrar o Teorema de Hahn-Banach que é um dos resultados de maior aplicação da análise funcional. Este teorema permite que funionais lineares definidos em um subespaço de um espaço vetorial sejam estendidos a todo o espaço. Neste trabalho será apresentado o Teorema de Hahn-Banch na sua forma analítica e geométrica, seguida de umas de suas aplicações. Em sua forma analítica, o Teorema de Hahn-Banch será demonstrado para o caso em que o espaço vetorial é real. Na sua forma geométrica, o Teorema de Hahn-Banach trata da separação de conjuntos convexos por hiperplanos. Dessa forma, neste trabalho apresentamos os pressupostos necessários para enunciarmos e demonstarmos o Teorema de Hahn-Banch.

Palavras-chave: Análise Funcional, Lema de Zorn, Funcionais lineares, Teoremas de Hahn-Banach.

Abstract

In this paper, our main objective to present and demonstrate the Hahn-Banach theorem that is a result of increased application of functional analysis. This theorem allows linear funionais defined in a subspace of a vector space are extended to any space. In this work will be presented the Hahn-Banch theorem in its analytical and geometric shape, followed by some of their applications. In its analytical form, the Hahn-Banch theorem will be demonstrated for the case where the vector space is real. In its geometric shape, the Hahn-Banach theorem deals with the separation of convex sets by hyperplanes. Thus, in this work we present the conditions necessary for enunciarmos and demonstarmos Theorem of Hahn-Banch.

Keywords: Functional Analysis, Zorn's lemma, linear functionals, Hahn-Banach theorem.

Sumário

Introdução

Iniciamos nossa introdução contando um pouco as histórias de vida dos matemáticos Hans Hahn (27/09/1879 - 24/07/ 1934) e Stefan Banach (30/03/1892 - 1945). Hans Hahn matemático austríaco, filho de Ludwig Benedikt Hahn e Emma Blümel. Realizou seus estudos básicos em Estrasburgo, Munique e Göttingen. Doutorou-se na Universidade de Viena, sob orientação de Gustav Ritter Von Escherich em 1902 com a tese Zur Theorie der Zweiten Variação Einfacher Integrale. Quanto morou em Viena, ele formou uma estreita amizade com outros três estudantes de matemática, Paul Ehrenfest, Heinrich Tietze e Herglotz, formando um grupo conhecidos como os "quatro inseparáveis". Em 1905 Hahn foi nomeado docente em Viena, posteriormente no período 1909-1914 lecionou em Czernowitz na Áustria - Hungria como professor extraordinário; Czernowitz foi rebatizado como Cernauti quando se tornou parte da Roménia após a Primeira Guerra Mundial, e como Chernovtsy depois que se tornou parte da URSS em 1940. Hahn serviu no exército Austro-Húngaro na Primeira Guerra Mundial e foi gravemente ferido. Em 1916 mudou-se para Bonn, onde foi nomeado como professor extraordinário até 1920. Ele retornou a uma cadeira em Viena, em 1921. Seus três alunos mais famosos em Viena foram Karl Menger em 1924, Witold Hurewicz em 1926, e Kurt Gödel em 1929. Os primeiros resultados de Hahn foram contribuições para o clássico Cálculo das Variações, os espaços abstratos de Fréchet e muita outras teorias. No entanto, para muitos matemáticos ele é mais lembrado pelo Teorema de Hahn-Banach. Stefan Banach nasceu o 30 de março de 1892 na Cracóvia no então território do Império Austro-Húngaro e faleceu em Lviv o 31 de agosto de 1945. Banach freqüentou o ensino primário em Cracóvia e saiu de lá em 1902, para fazer o ensino secundário no Henryk Sienkiewicz Gymnasium No 4. Depois de terminar a escola, foi para Lviv (Ucrânia) e ingressou na faculdade de engenharia na Universidade Técnica da cidade. Como não dependia economicamente dos pais, Banach teve que se manter virando tutor. Ele se graduou em 1914, mas por causa da Primeira Guerra Mundial, Banach acabou saindo de Lviv. Em 1916 conheceu a Hugo Steinhaus, com quem passou a ter contato regularmente e acabou por fundar uma "sociedade matemática". Steinhaus contou-lhes sobre um problema no qual estava trabalhando sem sucesso. Depois de um tempo Banach teve uma idéia para o contraexemplo requerido e contou a Steinhaus, e eles realizaram um trabalho em conjunto e apresentaram a Zaremba para publicação. A guerra acabou atrasando a publicação. Banach apareceu pela primeira vez no boletim da Academia de Cracóvia em 1918. Junto com Steinhaus, Banach produziu muitos trabalhos matemáticos. Não é possível saber se ele faria o mesmo sem ter conhecido Steinhaus. Além disso, foi através de Steinhaus que Banach conheceu sua mulher, Lucja Braus, com a qual casou em 1920. A Sociedade Matemática de Cracóvia foi estabelecida em 1919 por iniciativa de Steinhaus. Zaremba presidiu a cerimônia inaugural e foi eleito o primeiro presidente da sociedade. Banach fez palestras nessa sociedade e continuou a produzir trabalhos matemáticos. Em 1920 a Sociedade Matemática de Cracóvia se tornou "Sociedade Matemática da Polônia". Em 1920 foi oferecido a Banach o cargo de assistente de Antoni Tomnicki na Universidade Técnica de Lviv, donde ministrou palestras de matemática e tentou submeter a sua tese de doutorado sob a supervisão de Tomnicki. Em 1922 a Universidade Jan Kazimierz em Lviv deu a Banach a sua habilitação (grau acadêmico semelhante ao de livre docente no Brasil) pela tese sobre Teoria da Medida. Em 1924 Banach foi promovido a Professor Titular e passou o período acadêmico 1924-1925 em Paris. Nas entre guerras, Banach continuou a produzir importantes trabalhos, escrevendo livros didáticos de Álgebra, Geometria e Aritmética para o ensino médio, contribuindo para a divulgação da matemática. Em 1929 lançou o jornal Studia Mathematica junto com Steinhaus, tornando-se os dois os primeiros editores, tendo como política o foco em Análise Funcional e tópicos relacionados. Em 1939, Banach conseguiu a presidência da Sociedade Matemática da Polônia. Quando a Segunda Guerra Mundial estourou, as tropas soviéticas invadiram Lviv. Mas como Banach tinha boas relações com os matemáticos da União Soviética, indo os visitar às vezes, ele conseguiu se manter no cargo e foi bem tratado nessa nova administração, a guerra não mudou muito a vida de Banach, que continuava com suas pesquisas, escrevendo seus livros didáticos, dando palestras e indo a cafés. Sobolev e Aleksandrov visitaram Banach em 1940 em Lviv. Quando a Alemanha invadiu a União Soviética, Banach, que estava em Kiev, saiu imediatamente de lá e retornou para sua família em Lviv. A ocupação nazista de Lviv em Junho de 1941 fez com que a vida de Banach ficasse difícil, durante esta época muitos acadêmicos poloneses foram mortos, até seu supervisor Antoni Tomnicki foi morto em um dia de massacre

- 3 de Julho de 1941. Banach chegou a ser preso sob suspeita de traficar moeda da Alemanha mas foi solto um tempo depois. Em 1944, quando os soviéticos retomaram a cidade de Lviv, Banach já tinha aumentodo sua lista de contatos com grandes matemáticos, sendo um deles Sobolev. Banach pretendia ir a Cracóvia depois da guerra para se tornar o presidente da área de matemática na Jagiellonian University mas morreu em Lviv em 1945 de câncer ao pulmão. A análise funcional é o ramo da matemática, e mais especificamente da análise, que trata o estudo de espaços de funções. Tem suas raízes históricas no estudo de transformações, tais como a Transformada de Fourier, e no estudo de equações diferenciais e equações integrais. A palavra funcional remonta ao cálculo de variações, seu uso em geral é atribuído a Volterra. A modelagem deu um grande impulso ao avanço da análise funcional durante o século XX, devida a John Von Neumann. São teoremas importantes da análise funcional: teorema de hahn-Banach, teorema da função aberta, teorema do ponto fixo de Banach, teorema do ponto fixo de Schauder, teorema de Banach-Alaoglu. Um tópico da análise funcional que possui forte relação com a topologia é o estudo dos espaços vetoriais localmente convexos, onde não se admite necessariamente a existência de uma norma definindo uma topologia sobre os espaços vetoriais estudados. A partir da segunda metade do século XX, graças aos trabalhos de Von Neumann, Naimark e Gelfand, a análise funcional tem sido utilizada no estudo de álgebras não-comutativas e da K-teoria algébrica. O teorema de Hahn-Banach é um dos principais resultados da análise funcional e é difícil mensurar sua importância, tantos são seus corolários e suas aplicações. A essência do teorema em sua versão para espaços normados, é que funcionais lineares contínuos não nulos definidos em um subespaço de um espaço normado pode ser estendido a todo o espaço preservando, linearidade, continuidade e até mesmo o valor da norma. Riesz e Helly interessados em resolver algumas equações diferenciais, obtiveram os primeiros teoremas de extensão de funcionais em alguns espaços de funções. Hahn em 1927 obtive o primeiro resultado para o caso real e Banach em 1929 conseguiu resultados para casos mais gerais. No presente trabalho nosso objetivo é estudar o Teorema de Hahn-Banach, isto é entender suas demonstrações tanto na sua forma analítica como na sua forma geométrica e suas aplicações. No segundo capítulo desenvolveremos as teorias e conceitos tanto da álgebra linear como da análise real que serão utilizados nas demonstrações. No terceiro capítulo enunciaremos o Teorema de Hahn-Banach na suas duas formas e suas respectivas demonstrações e algumas aplicações, seguidamente bem as considerações finais e as referências bibliográfica.

Capítulo 2

Preliminares.

2.1 Espaços métricos

Definição 2.1.1. *Diremos que um conjunto $X \neq \emptyset$ é um espaço métrico, se sobre ele está definida uma aplicação,*

$$d : X \times X \longmapsto \mathbb{R}$$

Satisfazendo às seguintes propriedades:

1. $d(x, y) \geq 0$ *para quaisquer* $x, y \in X$ *e ainda* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2. *A aplicação* d *é simétrica, isto é,* $d(x, y) = d(y, x)$.

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(desigualdade triangular).*

A aplicação d é chamada de métrica.

Um espaço métrico esta definido desta forma pelo par ordenado (X, d). Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.1.1. *Tomemos o conjunto de pontos* $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. *Definimos sobre este conjunto a aplicação:*

$$d : A \times A \longmapsto \mathbb{R}$$

da seguinte forma

$$d(x_i, x_j) = 1 - \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} *é o delta de Kroncker, definido como*

$$\delta_{ij} = 0, \ \ se \ \ i \neq j, \ \ \delta_{ii} = 1.$$

Facilmente verifica-se que d *é uma métrica.*

Daqui pra frente iremos trabalhar com conjuntos munidos das estruturas algébricas de espaços vetoriais (ver [2]).

Exemplo 2.1.2. *Denotemos por* $X = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_3; \|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq 1 \right\}$. *Sobre este espaço definimos a aplicação:*

$$d : X \times X \longmapsto \mathbb{R}$$

da seguinte forma

$$d(x, y) = \|x - y\| \, .$$

Exemplo 2.1.3. *Denotemos por* $X = C(a, b)$ *o espaço de todas as funções contínuas definidas sobre o conjunto fechado* $[a, b]$. *Sobre este espaço definimos a aplicação*

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

temos que o par ordenado (X, d) *é um espaço métrico.*

Demonstração. Primeiramente vamos verificar que a aplicação d esta bem definida. Sabemos que a diferença e a composição de funçoes contínuas também é uma função contínua (ver [1]), como as funçoes $f \;\; e \;\; g$ são contínuas, segue que a função $f - g$ é contínua, temos também que a função modulo é contínua, dai a composição $|f(x) - g(x)|$ também é contínua. Seja o intervalo $[a, b]$ compacto, sabemos que a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é compacto (ver [1]) , dai a imagem da função $|f(x) - g(x)|$ no intervalo $[a, b]$ é campacta, logo é fechada e limitada, assim existe:

$$\sup \{ |f(x) - g(x)| \; ; x \in [a, b] \} \, .$$

Portanto a aplicação d está bem definida. Agora vamos verificar se o par ordenado (X, d) satisfaz as condiçoes de espaço métrico.

1. Como a função modulo é sempre maior ou igual a zero, temos que

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \; \geq 0 \;\; para \;\; quaisquer \;\; f, g \in X,$$

se $d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \; = 0$ temos $|f(x) - g(x)| \; = 0 \;\; \forall x \in [a, b]$, que por sua vez implica $f(x) = g(x) \;\; \forall x \in [a, b]$.

2. Dados $f, g \in X$, temos que $|f(x) - g(x)| \ = |g(x) - f(x)| \ \forall x \in [a, b]$ tomando o supremo em ambos os lados dessa igualdade obtemos: $d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \ = \sup_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)| \ = d(g, f)$ (d é simétrica).

3. Dados $f, g \ e \ h \in X$ segue das propriedades do modulo que:

$$|f(x) - g(x)| \ \leq |f(x) - h(x)| \ + |h(x) - g(x)| \ .$$

Tomando o supremo em ambos os lados dessa desigualdade temos

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \ \leq \sup_{x \in [a,b]} \{|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \ \},$$

segue das propriedades de supremo que

$$\sup_{x \in [a,b]} \{|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \ \} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - h(x)| \ + \sup_{x \in [a,b]} |h(x) - g(x)| \ ,$$

dai

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

Portanto o par ordenado (X, d) definido acima é um espaço métrico □

Definição 2.1.2. *Seja X um espaço métrico e $x \in X$. Dado um número real $r > 0$, definimos:*

1. *A* ***Bola Aberta*** *de centro $x \ \ e \ \ raio \ \ r$, denotado por $B_r(x)$, com sendo o conjunto*

$$B_r(x) = \{y \in X; d(x, y) < r\}.$$

2. *A* ***Bola Fechada*** *de centro $x \ \ e \ \ raio \ \ r$, denotado por $B_r[x]$, com sendo o conjunto*

$$B_r[x] = \{y \in X; d(x, y) \leq r\}.$$

3. *A* ***Esfera*** *de centro $x \ \ e \ \ raio \ \ r$, denotado por $S_r(x)$, com sendo o conjunto*

$$S_r(x) = \{y \in X; d(x, y) = r\}.$$

Definição 2.1.3. *Seja (X, d) um espaço métrico, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \ \ e \ \ x \in X$. Dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente para x no espaço métrico X se para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0, N \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon.$$

Definição 2.1.4. *Seja (X,d) um espaço métrico e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. *Dizemos que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy no espaço métrico* X, *se para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $N > 0, N \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Quando toda sequência de Cauchy é convergente, diremos que o espaço métrico é completo.

Exemplo 2.1.4. *O conjunto dos números reais com a métrica dada pelo valor absoluto é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $X = \mathbb{R}$, mostremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada: Tomando $\epsilon = 1 > 0$ existe $N > 0$ tal que:

$$n, n_* \geq N \Rightarrow |x_n - x_{n_*}| < 1$$

Fixemos agora o indece $n_* = N$. Da desigualdade triangular, temos

$$|x_n| < |x_n - x_N| + |x_N| < 1 + |x_N|$$

Tomando $C_0 = 1 + |x_N|$, obtemos

$$|x_n| < C_0 \;\; \forall n > N$$

Tomando C como

$$C = \max\{x_1, x_2, ..., x_N, C_0\}$$

temos

$$|x_n| < C \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Como a sequência é limitada, do teorema de Bolzano-Weierstrass (ver [1]) segue que existe uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que a denotaremos por $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e um número real x tal que

$$x_{n_k} \longrightarrow x$$

Finalmente, mostraremos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x. Tomemos $\epsilon > 0$, então para $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n \in \mathbb{N}\text{e}$$

$$n > N \Rightarrow |x_n - x_N| < \frac{\epsilon}{2}$$

a segunda setença ocorre devido à sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser de cauchy. Temos que

$$n > N \Rightarrow |x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Assim temos, $x_n \longrightarrow x$, como queriamos demonstrar. Portanto $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ é um espaço métrico completo. $\square$

Exemplo 2.1.5. *O espaço métrico dado por $X = C([a,b])$, o espaço das funções contínuas sobre o intervalo $[a,b]$ com a métrica*

$$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

é um espaço métrico completo.

Demonstração. Seja f_n uma sequência de Cauchy em $X = C([a,b])$, então para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$m, n \geq N \Rightarrow d(f_n, f_m) < \epsilon$$

Assim, para $m, n > N$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \ \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| \ < \epsilon$$

Desta forma $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de cauchy em $\mathbb{R}$, para cada $x \in [a,b]$. Como $\mathbb{R}$ é completo, existe $y_x \in \mathbb{R}$ tal que

$$f_n(x) \longrightarrow y_x$$

Defina a função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = y_x = lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)$.
Para provar que $C([a,b])$ é competo, basta mostrar que f é uma função contínua e que $f_n \longrightarrow f$. Mostraremos que $f \in C([a,b])$. Sejam $x_1 \ e \ x_2 \in X$ quaisquer, dado $\epsilon > 0$ pela convergência existem $N_1 \ e \ N_2$ tais que

$$n > N_1 \Rightarrow |f_n(x_1) - f(x_1)| \ < \frac{\epsilon}{3} \quad (N_1 = N_1(\epsilon, x_1))$$

$$n > N_2 \Rightarrow |f_n(x_2) - f(x_2)| \ < \frac{\epsilon}{3} \quad (N_2 = N_2(\epsilon, x_2))$$

Denotemos por $N = \max\{N_1, N_2\}$. Por outro lado, pela contínuidade de f_n no compacto $[a,b]$ temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$|x_1 - x_2| \ < \delta \Rightarrow |f_n(x_1) - f_n(x_2)| \ < \frac{\epsilon}{3}$$

Da desigualdade triangular obtemos que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \ \leq |f(x_1) - f_n(x_1)| \ + |f_n(x_1) - f_n(x_2)| \ + \left|f_n(x_2) - f_(x_2)\right|$$

Tomando $n > N \ \ e \ \ |x_1 - x_2| \ < \delta$ concluímos que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \ < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

De onde segue a contínuidade de f. Logo $f \in C([a,b])$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C([a,b])$. Temos que para todo $x \in [a,b]$ e para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0, N = N(\epsilon)$ tal que para $m, n \geq N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \ \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| \ < \epsilon$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$ temos que para todo $x \in [a,b]$

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \ \leq \epsilon$$

Tomando o supremo,

$$n > N \Rightarrow d\left(f_n, f\right) = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \ \leq \epsilon$$

Donde concluímos que $f_n \longrightarrow f$ como queriamos demonstrar. Portanto o espaço métrico dado é completo. $\square$

2.2 Espaços normados

Definição 2.2.1. *Diremos que um espaço vetorial X, é um espaço normado, se existe uma função $\|\cdot\| : X \longmapsto \mathbb{R}$ satisfazendo às seguintes propriedades:*

1. $\|x\| \geq 0$ *para todo* $x \in X$ *e* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para quaisquer* $x, y \in X.$

3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e para todo* $x \in X.$

Todo espaço normado é um espaço métrico, com a métrica definida por $d(x,y) = \|x - y\|$, denominada métrica induzida pela norma.

Definição 2.2.2. *Um espaço que é completo com a métrica induzida pela norma é chamado de **Espaço de Banach.***

Exemplo 2.2.1. *Denotemos por $C([a,b])$ o conjunto de todas ás funções contínuas no intervalo $[a,b]$. Podemos dar a este espaço uma estrutura de um espaço normado, introduzindo a norma*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Demonstração. Vamos verificar se $\|\cdot\|_1$ satisfaz ás condições de norma:

1. Seja $f \in C([a,b])$ temos por definição de modulo que,

$$|f(x)| \geq 0, \ \ \forall x \in [a,b]$$

   tomando a integral em ambos os lados da desigualdade temos

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx \geq \int_a^b |0|\,dx = 0$$

   e ainda

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \ \ \forall x \in [a,b]$$

2. Para todo $f \in C([a,b])$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, segue das propriedades de modulo que:

$$|\alpha f(x)| = |\alpha|\,|f(x)|$$

   tomando a integral em ambos os lados e usando as propriedades de integral segue que,

$$\|\alpha f\|_1 = \int_a^b |\alpha f(x)|\,dx = |\alpha| \int_a^b |f(x)|\,dx = |\alpha|\,\|f\|_1$$

3. Dados $f, g \in C([a,b])$ segue das propriedades de modulo que:

$$|f+g| \leq |f| + |g|$$

   tomando a integral na desigualdade acima e usando propriedades de integral obtemos,

$$\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

   Portando a função $\|\cdot\|_1$ definida acima é uma norma.

□

Exemplo 2.2.2. *O espaço $C([0,1])$ munido da norma $\|\cdot\|_1$ não é um espaço completo.*

Demonstração. Consideremos a sequência de funções definidas por:

$$f_n : [0,1] \longmapsto \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$$

Mostraremos que essa sequência não converge em $C([0,1])$. Primeiramente vamos calcular o limite de f_n, para cada $x \in [0,1]$ tomemos o limite quando $n \longrightarrow \infty$, na sequência de funções definida acima

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} x^n$$

1. Se $x = 0$,

   $$f_n(0) = 0^n = 0$$

   logo

   $$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(0) = \lim_{n\longrightarrow\infty} 0 = 0$$

2. Se $0 < x < 1$,

   $$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} x^n = 0$$

3. Se $x = 1$,

   $$f_n(1) = 1^n = 1$$

   logo

   $$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_1(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} 1 = 1$$

Assim obtemos

$$f_n(x) \longrightarrow f(x), \quad onde \quad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Agora se a sequência dada acima convergisse em $C([0,1])$, existiria $g \in C([0,1])$ tal que $f_n \longrightarrow g$ uniformemente. Mas neste caso teríamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para g pontualmente, oque é um absurdo, pois o limite pontual de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a função:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

que por sua vez não pertence a $C([0,1])$, Portanto o espaço não é completo. $\square$

2.3 Operadores Lineares

São aplicações entre espaços vetoriais que possuem propriedades importantes e revelam características intrínsecas dos espaços em que estão definidas.

Definição 2.3.1. *Um **Operador Linear** entre espaços vetoriais $X \ \ e \ \ Y$ é uma aplicação $T : D(T) \subset X \longmapsto Y$, em que seu domínio $D(T)$ é subespaço de X e*

$$T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y); \forall x, y \in D(T) \ \ e \ \ \forall \alpha \in F$$

Note que $T(0_X) = 0_Y$ para todo operador linear.

Definição 2.3.2. *Definimos como **Núcleo** $\ de \ T$, denotado por $N(T)$, e a **Imagem** $\ de \ T$, denotada por $Im(T)$, os conjuntos:*

$$N(T) = \{x \in D(T) : T(x) = 0_Y\}$$

$$Im(T) = \{y \in Y : \exists x \in D(T) \ \ com \ \ T(x) = y\}$$

Definição 2.3.3. *Seja $T : D(T) \subset X \longmapsto Y$ um operador linear, definimos por T^{-1} o operador inverso de T, onde*

$$T : Im(T) \subset Y \longmapsto D(T)$$

Proposição 2.3.0.1. *Seja $T : D(T) \subset X \longmapsto Y$ um operador linear. Verifique os seguintes itens:*

1. *A imagem de $T, \ \ Im(T)$ e o núcleo de $T, \ \ N(T)$ são subespaços vetorias (ver [2]).*

2. *Se $dim\,(D(T)) = n < \infty$, então $dim\,(Im(T)) \leq n$.*

3. *O operador inverso de $T, \ \ T^{-1} : Im(T) \longmapsto D(T)$ existe se, e somente se,*

$$N(T) = \{0_X\}$$

   Caso exista, ele é linear.

4. *Se $T, \ \ S$ são operadores lineares invertíveis e $Im(S) \subseteq D(T)$, então*

$$(T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$$

Demonstração. 1. Note que os elementos neutros satisfazem: $0_X \in N(T)\ \ e\ \ 0_Y \in Im(T)$.

$$N(T) \subseteq D(T)$$

Sejam $u, v \in N(T)\ \ e\ \ \alpha \in \mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ é igual a $\mathbb{R}\ \ ou\ \ \mathbb{C}$), mostraremos que $(u+\alpha v) \in N(T)$. Observe que

$$T(u + \alpha v) = T(u) + \alpha T(v) = 0_Y$$

Portanto, $(u + \alpha v) \in N(T)$ e temos o resultado.

Agora sejam $w, z \in Im(T)\ \ e\ \ \alpha \in \mathbb{F}$, mostraremos que vale a relação $(w+\alpha z) \in Im(T)$. Notemos que existem $u, v \in D(T)$ satisfazendo $t(u) = w\ \ e\ \ T(v) = z$. Assim

$$w + \alpha z = T(u) + \alpha T(v) = T(u + \alpha v)$$

Segue que $w + \alpha z \in Im(T)$ e temos o resultado.

2. Para mostrarmos isso, mostraremos primeiramente que o conjunto $T(A)^{-1}$ é $L.I$ quando $A \subseteq Im(T)$ é $L.I.$ Considere o seguinte conjunto $L.I\ \ A = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq Im(T)$, logo existem $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ tais que $T(x_i) = v_i$. Seja a conbinação linear nula

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.x_i = 0_Y$$

Aplicando T em ambos os lados da igualdade, teremos que

$$0_Y = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.T(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.v_i$$

Segue que, por $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ser $L.I,\ \ \alpha_1 = \alpha_2, ..., \alpha_n = 0$. Portanto $T(A)^{-1}\ \ \ \ L.I.$ Agora tomando $A \subset Im(T)$ como sendo uma base, suponhamos que $card(A) > n$, então pelo que acabamos de mostrar o conjunto $T(A)^{-1}$ será $L.I$, com $card\,(T(A)^{-1}) > n$. Sabemos por definição que,

$$T(A)^{-1} \subset (D(T)$$

logo

$$n < dim\left(T(A)^{-1}\right) \leq dim\,(D(T))$$

Um absurdo, pois $dim\,(D(T)) = n < \infty$ logo $dim\,(T(A)^{-1}) \leq n$, ou seja nenhuma base de $Im(T)$ tem dimensão maior doque n, Portanto $dim\,(Im(T)) \leq n$.

3. Suponha que $T(x) = 0_Y \Rightarrow x = 0_X$, então segue que

$$T(x) = T(y) \Rightarrow x = y \;\; pois \;\; 0_Y = T(x) - T(y) = T(x - y)$$

Logo T é injetiva (ver [2]) e portanto existe $T^{-1} : Im(T) \longrightarrow D(T)$. Agora, se T^{-1} existe, então como $T^{-1}(0_Y) = 0_X$, se

$$T(x) = 0_Y$$

e, aplicando a inversa

$$x = T^{-1}\left(T(x)\right) = T^{-1}(0_Y) = 0_X \Rightarrow x = 0_X$$

4. Sejam $T : X \longmapsto Y \;\; e \;\; S : Y \longmapsto Z$ operadores lineares invertiveis. Temos que $(S \circ T) : X \longmapsto Z$, e existe $(S \circ T)^{-1}$. Assim

$$(S \circ T)(S \circ T)^{-1} = I_Z$$

Onde I_Z é o operador identidade em Z. Aplicando S^{-1} e usando $S^{-1} \circ S = I_Y$, nós obtemos

$$S^{-1} \circ (S \circ T)(S \circ T)^{-1} = T(S \circ T)^{-1}$$

$$S^{-1} \circ I_Z = T(S \circ T)^{-1}$$

$$S^{-1} = T(S \circ T)^{-1}$$

Agora aplicando T^{-1} e usando $T^{-1} \circ T = I_X$, nós obtemos o resultado desejado

$$T^{-1} \circ T(S \circ T)^{-1} = (S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$$

□

Lema 2.3.1. *Sejam X, Y espaços vetoriais e $B = \{x_n : n \in J \subset \mathbb{N}\}$ base de X (definição de base ver [2]). Então o operador linear $T : X \longmapsto Y$ estará totalmente determinado se soubermos as imagens por T de x_n.*

Demonstração. Seja $T : X \longmapsto Y$ um operador linear e $x \in X$. Sabendo que x pode ser representado de maneira única (ver [2]), como

$$x = \sum_{i \in L}^{L \subset J} \alpha_i . x_i$$

Com $L \subset J$ finito e usando a linearidade

$$T(x) = T\left(\sum_{i \in L}^{L \subset J} \alpha_i . x_i\right) = \sum_{i \in L}^{L \subset J} \alpha_i . T(x_i)$$

Como $x \in X$ arbitrario e B é uma base, concluímos que o operador está totalmente determinado. $\square$

Definição 2.3.4. *(Operador Linear Limitado). Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : D(T) \subset X \longmapsto Y$ um operador linear. O operador T é dito ser limitado se existe um número real C tal que*

$$\|T(x)\|_Y \leq C . \|x\|_X \quad \forall x \in D(T)$$

Teorema 2.3.1. *Seja $T : X \longmapsto Y$ um operador linear. Então as seguintes proposições são equivalentes:*

1. $\sup \{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\} < \infty$*, ou seja, a imagem da bola fechada unitária é limitada.*
2. $\exists$ *M satisfazendo* $\|T(x)\|_Y \leq M . \|x\|_X \,, \ \forall x \in X$.
3. *T é uniformemente contínuo.*
4. *T é contínuo.*
5. *T é contínuo no vetor 0_X.*

Demonstração. $(1. \Rightarrow 2.)$ Seja $M = \sup \{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$; se $0_X \neq x \in X$ então, tomando

$$y = \frac{x}{\|x\|_X} \ \text{ temos } \ \|y\|_X = \frac{1}{\|x\|_X} \|x\|_X = 1$$

Assim

$$\|T(y)\|_Y \leq M \Rightarrow \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y \leq M$$

Portanto

$$\|T(x)\|_Y \leq M . \|x\|_X \,, \ \forall x \in X$$

$(2. \Rightarrow 3.)$ Se $x, y \in X$, então

$$\|T(x) - T(y)\|_Y = \|T(x - y)\|_Y \leq M . \|x - y\|_X$$

mostrando que T é Lipschitziana, consequentemente T é uniformemente contínua em todo o seu domínio.

$(3. \Rightarrow 4.)$ Sabemos que toda aplicação uniformemente contínua também é contínua, portando T é contínua.

$(4. \Rightarrow 5.)$ Imediato.

$(5 \Rightarrow 1.)$ Seja 0_X, como T é contínua em 0_X, tomando $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(0)\|_Y = \|T(x)\|_Y \leq 1 \text{ se } \|x - 0\|_X = \|x\|_X \leq \delta$$

Assim, se $\|x\|_X \leq 1$, vem que $\|\delta x\|_X \leq \delta \;\; e \;\; \|T(\delta x)\|_Y \leq 1$. Portanto

$$\|T(x)\|_Y \leq \frac{1}{\delta}$$

e (1) vale. □

Definição 2.3.5. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Denotaremos por $B(X,Y)$ o conjunto dos operadores lineares limitados.*

Exemplo 2.3.1. *Se $T : X \longmapsto Y$ é linear e $\dim(X) < \infty$, mostre que T é limitado.*

Demonstração. Como $\dim(X) < \infty$, temos que $\dim(T(X)) < \infty$. Podemos tomar então uma base de X qualquer dada por $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ e, pela linearidade de T,

$$T\left(x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . T(e_i)$$

Assim,

$$\|T(x)\| = \left\|T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i . e_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i . T(e_i)\right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| . \|T(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| . \max\{\|T(e_i)\| : i = 1, ..., n\}$$

□

Exemplo 2.3.2. *Seja P_N o espaço normado das funções polinomiais $p : [-1,1] \longmapsto \mathbb{R}$ de grau menor ou igual a N com a norma da convergência uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Seja $D : P_N \longmapsto P_N$ o operador derivada $D(p(t)) = p'(t)$ para todo $t \in [-1,1]$. Mostre que D é limitado.*

Demonstração. Da teoria de funções, sabemos que o operador derivada D é linear. Usaremos o Teorema (2.3.1) para provar que D é limitada. Seja $(p_k) \subset P_N$, uma sequência convergindo para 0_{P_N}, o polinômio nulo. Usando a convergência uniforme, podemos escrever:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \ k_0 \in \mathbb{N} \ \text{ tal que se } \ k \geq k_0, \ \text{ então } \ \|p_k(t) - 0_{P_N}\|_\infty < \epsilon$$

Como

$$p_k(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^k . t^i, \ \text{ então } \ D(p_k(t)) = \sum_{i=1}^{N} i.\alpha_i^k . t^{i-1}$$

Além disso, note que $t \in [-1, 1]$ e a desigualdade triangular implicam que

$$\|p_k(t)\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{N} \left|\alpha_i^k\right| \quad e \quad \|D(p_k(t))\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{N} i. \left|\alpha_i^k\right| \leq N. \left(\sum_{i=1}^{N} \left|\alpha_i^k\right|\right)$$

De $(p_k) \longrightarrow 0_{P_N}$, temos que $(\alpha_i^k) \longrightarrow 0, \ \ i = 1, ..., N$. Segue que

$$(\left|\alpha_i^k\right|) \longrightarrow 0, \ \ i = 1, ..., N$$

e, assim,

$$\|D(p_k(t))\|_\infty \leq N. \left(\sum_{i=1}^{N} \left|\alpha_i^k\right|\right) \longrightarrow 0.$$

Portanto

$$D(p_k(t)) \longrightarrow 0_{P_N}$$

Mostrando que o operador derivada D é contínua no ponto 0_{P_N}. Logo pelo Teorema (2.3.1), concluímos que D é limitada. □

Definição 2.3.6. *Sejam X e Y espaços normados e $T \in B(X, Y)$. Definamos a seguinte norma*

$$\|T\| = \sup \left\{ \|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1, x \in X \right\}$$

Exemplo 2.3.3. *Seja X o espaço vetorial das funções polinomiais em $C([0, 1])$ e seja $D : X \longmapsto X$ o operador derivada. Este operador não pertence a $B(X, X)$*

Demonstração. Consideremos $p_n(t) = t^n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, segue que $D(p_n(t)) = n.t^{n-1}$. Note que

$$\|p_n(t)\|_\infty = 1 \ \ e \ \ \|D(p_n(t))\|_\infty = n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Como

$$\|D\| = \sup \left\{ \|D(p_n(t))\|_\infty : \|p_n(t)\|_\infty \leq 1, x \in X \right\}$$

Segue que

$$\|D\| \longrightarrow \infty$$

Portando o operador derivada D não pertence a $B(X)$. $\square$

Teorema 2.3.2. *Se X é um espaço normado e Y é de Banach, então $B(X, Y)$ é de Banach.*

Demonstração. Seja $(T_n) \subset B(X, Y)$ uma sequência de Cauchy. Então para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_n - T_m\|_{B(X,Y)} < \epsilon \text{ sempre que } m, n > N(\epsilon)$$

Note que para cada $x \in X$ tem-se

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_Y \leq \|T_n - T_m\| . \|x\| \leq \epsilon. \|x\|$$

$$\Rightarrow \|T_n(x) - T_m(x)\|_Y \leq \epsilon. \|x\|$$

Segue que $(T_n(x)) \subset Y$ é de Cauchy, como Y é Banach, temos $(T_n(x))$ converge para algum $y \in Y$. Defina $T : X \longmapsto Y$ por $T(x) = y = lim_{n \longrightarrow \infty} T_n(x)$, o qual é linear. Mostremos que $T \in B(X, Y)$. Segue da desigualdade acima e pela continuidade da norma que

$$\|T_n(x) - T(x)\|_Y = \lim_{m \longrightarrow \infty} \|T_n(x) - T_m(x)\|_Y \leq \epsilon. \|x\|, \ \ n > N(\epsilon)$$

Logo $(T_n - T) \in B(X, Y)$ com $\|T_n - T\| \leq \epsilon$. Por $B(X, Y)$ ser um espaço vetorial, e $T = T_n + (T - T_n)$, segue que $T \in B(X, Y)$. A desigualdade $\|T_n - T\| \leq \epsilon$ para todo $n > N(\epsilon)$ mostra que $T_n \longrightarrow T$ em $B(X, Y)$, concluindo a demonstração. $\square$

2.4 Espaço Dual

Definição 2.4.1. *Seja X um espaço normado sobre o corpo $\mathbb{F}$. Então um operador linear $f : X \longmapsto \mathbb{F}$ e denominado Funcional Linear.*

Definição 2.4.2. *Seja X um espaço normado, então o espaço de Banach $B(X, \mathbb{F})$ será denotado por X^* é chamado de* ***Espaço Dual*** de X. *O espaço de Banach $B(X^*, \mathbb{F})$ será denotado por X^{**} é chamado de* ***Segundo Espaço Dual*** de X.

Consideramos o X^{**} porque é fato conhecido um importante relação entre X e ele. Há uma forma natural de identificar elementos de X com elementos de X^{**}.

Definimos $g \in X^{**}$ da seguinte maneira: para cada $x \in X$ fixado consideremos $g_x(f) = f(x), \ \forall f \in X^*$, que é linear pois dados $f, h \in X^* \ e \ \alpha \in \mathbb{F}$ temos

$$g_x(f + \alpha h) = (f + \alpha h)(x) = f(x) + \alpha h(x) = g_x(f) + \alpha g_x(h)$$

Como para cada $x \in X$ temos o elemento $g_x \in X^{**}$, podemos definir a função

$$C : X \longmapsto X^{**}$$

$$x \longmapsto g_x$$

denominada de **Aplicação Canônica** de X em X^{**}.

Mostremos que C é linear. Sejam $x, y \in X, f \in X^* \ e \ \alpha \in \mathbb{F}$ temos

$$(C(x + \alpha y))(f) = g_{x+\alpha y}(f) = f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y) =$$

$$g_x(f) + \alpha g_y(f) = (C(x))(f) + \alpha (C(y))(f)$$

como $f \in X^*$ foi arbitrário, conluímos que a Aplicação canônica é linear.

Definição 2.4.3. *Seja X um espaço normado e X^{**} o segundo dual. Então se a aplicação canônica é sobrejetiva dizemos que X é um* ***Espaço Reflexivo.***

Capítulo 3

Teorema de Hahn Banach

Para entender a demonstração do teorema de Hahn-Banach, precisamos primeiramente revisar o enunciado do **Lema de Zorn**

3.1 Lema de Zorn.

Definição 3.1.1. *Um conjunto X é dito parcialmente ordenado se existe uma relação binária "$\prec$" em X, satisfazendo as seguintes condições.*

1. $x \prec x\,, \forall\, x\, \in X.$
2. *se* $x \prec y$ e $y \prec x$ *então* $x = y\, \forall\, x, y\, \in X.$
3. *se* $x \prec y$ e $y \prec z$ *então* $x \prec z.$

Observação 3.1.1. *O termo "parcial"aparece porque pode haver elementos que não são comparáveis de acordo com a relação "$\prec$" dada.*

Definição 3.1.2. *Um conjunto totalmente ordenado, é um conjunto parcialmente ordenado no qual quaisquer dois elementos são comparáveis de acordo com a relação binária dada.*

Definição 3.1.3. *Seja X um conjunto parcialmente ordenado, temos que $m \in X$ é um elemento maximal em X se para todo $a \in X$ com $m \leq a$ segue-se que $a = m$ .Um elemento $y \in X$ é uma cota superior de $W \subseteq X$, se $b \leq y$ para todo $b \in W$.*

Exemplo 3.1.1. *Seja X um conjunto e $P(X)$ as partes de X isto é. $P(X) = \{A; A \subseteq X\}$,observe que $P(X)$ é parcialmente ordenado com a seguinte relação binária $A \prec B \Leftrightarrow A \subseteq B$. Temos também que X é o único elemento maximal de $P(X)$.*

Lema 3.1.1. *(Lema de Zorn): Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto parcialmente ordenado. Suponhamos que todo subconjunto totalmente ordenado $Q \subseteq X$ tem uma cota superior, então X tem um elemento maximal.*

3.2 Hahn-Banach Analítico.

Teorema 3.2.1. *(Teorema de Hahn-Banach Real). Sejam X um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e $p : X \longmapsto \mathbb{R}$ um funcional sublinear, ou seja, que satisfaz:*

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x),\ \forall x \in X$ *e* $\lambda \geq 0$

2. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)\ \ para\ \ quaisquer\ \ x, y \in X$

Se $f : G \longmapsto \mathbb{R}$ é um funcional linear definido no subespaço $G \subset X$ que é dominado por p, ou seja, $f(y) \leq p(y)\ \forall y \in G$. Então existe um funcional linear $F : X \longmapsto \mathbb{R}$ que estende f, isto é $F(x) = f(x)\ \forall x \in G$, e que satisfaz $F(x) \leq p(x)\ \forall x \in X$.

Demonstração. Considere a seguinte familia P de funcionais lineares definidos em subespaços de X que contém G:

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{l} \phi : D(\phi) \subseteq X \longmapsto \mathbb{R} : D(\phi)\ \text{ é subespaço vetorial de X,} \\ \phi\ \text{ é linear,}\ \ G \subseteq D(\phi), \phi(y) = f(y)\ \text{ para todo }\ y \in G \\ \text{e }\ \phi(x) \leq p(x)\ \text{ para todo }\ x\ \ \in D(\phi) \end{array} \right\}.$$

Em $\mathcal{P}$, definimos a relação de ordem parcial:

$$\phi_1 \leq \phi_2 \Leftrightarrow D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2)\ \ e\ \ \phi_2\ \ estende\ \ \phi_1$$

$$\text{isto é } \phi_2(x) = \phi_1(x)\ \text{ para todo }\ x \in D(\phi_1)$$

Note que $\mathcal{P}$ é não-vazio pois $f \in \mathcal{P}$. Mostraremos agora que todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}$ admite uma cota superior.

Seja $Q \subseteq \mathcal{P}$ um conjunto totalmente ordenado, defina $\psi : D(\psi) \longmapsto \mathbb{R}$ por

$$D(\psi) = \bigcup_{\phi_i \in Q} D(\phi_i)\ \text{ e } \psi(x) = \phi_i(x)\ \text{ se } x \in D(\phi_i)$$

Afirmação 3.2.1. *$\psi \in \mathcal{P}$ e ψ é uma cota superior para o conjunto Q.*

Demonstração.

1. ψ está bem definida, pois dado $x \in D(\psi)$, se $x \in D(\phi_i)$ e $x \in D(\phi_j)$ com $i \neq j$ sendo Q totalmente ordenado devemos ter:

   $$\phi_i \leq \phi_j \ \ ou \ \ \phi_j \leq \phi_i$$

   vamos supor que $\phi_i \leq \phi_j$, neste caso $D(\phi_i) \subseteq D(\phi_j)$ e ϕ_j estende ϕ_i isto é

   $$\phi_j(x) = \phi_i(x) \ \ \forall x \in D(\phi_i)$$

   Assim a função ψ está bem definida.

2. $D(\psi)$ é subespaço vetorial de X pois dados $x, y \in D(\psi)$ devemos ter.

   $$x \in D(\phi_i) \ \ e \ \ y \in D(\phi_j) \ \text{ para algum } \ i, j$$

   Supondo que $\phi_i \leq \phi_j$, temos $D(\phi_i) \subseteq D(\phi_j)$ então x e $y \in D(\phi_j)$, pela definição do conjunto P, temos que cada $D(\phi_i)$ é um subespaço vetorial de X. Assim se $\lambda \in \mathbb{R}$,

   $$x + \lambda y \in D(\phi_j)$$

3. ψ é funcional linear. Sejam $x, y \in D(\psi)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então existe $\phi_i, \phi_j \in \mathcal{P}$ tal que $x \in D(\phi_i)$ e $y \in D(\phi_j)$, se $\phi_i \leq \phi_j$ temos

   $$\psi(x + \lambda y) = \phi_j(x + \lambda y) = \phi_j(x) + \lambda \phi_j(y)$$
   $$\Rightarrow \psi(x + \lambda y) = \psi(x) + \lambda \psi(y)$$

4. ψ é dominada por p. Observe que $G \subseteq D(\psi)$, se $x \in D(\psi)$, existe $\phi_i \in \mathcal{P}$ tal que $x \in D(\phi_i)$ e $\psi(x) = \phi_i(x)$.

   Logo

   $$\psi(x) = \phi_i(x) \leq p(x) \ \ \forall x \in D(\psi)$$

De 1), 2), 3) e 4) temos que $\psi \in P$ e temos também que $\phi_i \leq \psi \;\; \forall \phi_i \in Q$. Com isso encerramos a demonstração da Afirmação (3.2.1).

Usando o **Lema de Zorn** (3.1.1), conclúimos que o conjunto parcialente ordenado $\mathcal{P}$ tem um elemento maximal F. □

Para fechar a prova do Teorema de Hahn-Banach real, falta mostrar que o domínio de F é todo o espaço vetorial X.

Afirmação 3.2.2. $D(F) = X$.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $D(F) \neq X$, logo existe, $x_0 \in X \backslash D(F)$. Defina o funcional linear:

$$\phi : D(\phi) \to \mathbb{R}, \;\; \text{onde} \;\; D(\phi) = D(F) + \mathbb{R}x_0 \;\; e$$

$$\phi(x + tx_0) = F(x) + t\alpha, \;\; x \in D(F)$$

Com $t \in \mathbb{R}$ e α é uma constante a ser determinada a seguir de modo que $\phi \in \mathcal{P}$.

Mostraremos primeiramente que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} F(x) + \alpha \leq p(x + x_0), \;\; \forall x \in D(F) \\ F(x) - \alpha \leq p(x - x_0), \;\; \forall x \in D(F) \end{cases} \tag{3.1}$$

Note que,

$$F(x) + F(y) = F(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0)$$

Consequentemente

$$F(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - F(x) \;\; \forall x, y \in X$$

Portanto

$$\sup_{y \in X} \{F(y) - p(y - x_0)\} \leq \inf_{x \in X} \{p(x + x_0) - F(x)\}$$

Tomando α tal que,

$$\sup_{y \in X} \{F(y) - p(y - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x \in X} \{p(x + x_0) - F(x)\}$$

Tem-se que (3.1) ocorre. Segue de (3.1) que

$$F(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0) \;\; \forall x \in X \;\; e \;\; \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

Pois

- $Se \;\; t > 0,$

$$F(x) + t\alpha = t\left[F\left(\frac{x}{t}\right) + \alpha\right] \leq tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0)$$

- $Se \;\; t < 0,$

$$F(x) + t\alpha = -t\left[F\left(\frac{x}{-t}\right) - \alpha\right] \leq -tp\left(\frac{x}{-t} - x_0\right) = p(x + tx_0)$$

- $Se \;\; t = 0$

$$F(x) + t\alpha = F(x) \leq p(x) = p(x + tx_0)$$

Mostrando que (3.2) é verdadeira e portanto

$$\phi(y) \leq p(y) \;\; \forall y \in D(h)$$

Com ϕ estendendo F e $\phi \neq F$ o que é uma contradição com fato de F ser um elemento maximal, ficando demonstrado a Afirmação (3.2.1). □

Portanto de (3.2.1) e (3.2.2) concluímos a demonstração do teorema de **Hahn-Banach**(analítico).

□

Teorema 3.2.2. *(Teorema de Hahn-Banach para espaços normados). Seja f um funcional linear limitado em um subespaço Z de um espaço normado X. Então existe um funcional linear limitado $F \in X^*$ que é uma extensão de f para X e tem a mesma norma, ou seja:*

$$\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Z^*}$$

onde

$$\|F\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |F(x)| \;\;,\;\; \|f\|_{Z^*} = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

Demonstração. Se $Z = \{0\}$, então $f = 0$, e a extensão é $F = 0$. Seja $Z \neq \{0\}$, e $f : Z \to \mathbb{R}$, considere o seguinte funcional:

$$p : X \longmapsto \mathbb{R}$$

$$\text{onde } \; p(x) = \|f\|_{Z^*} \|x\|$$

Temos que p satisfaz as condições do teorema de Hahn-Banach real, pois dados quaisquer $x \;\; e \;\; y \in X \;\; e \;\; \lambda > 0$ segue que,

-
$$p(\lambda x) = \|f\|_{Z^*} \|\lambda x\| = |\lambda| \|f\|_{Z^*} \|x\| = \lambda \|f\|_{Z^*} \|x\| = \lambda p(x)$$

-
$$p(x+y) = \|f\|_{Z^*} \|x+y\| \leq \|f\|_{Z^*} (\|x\| + \|y\|) = \|f\|_{Z^*} \|x\| + \|f\|_{Z^*} \|y\| = p(x) + p(y)$$

e observe que

$$|f(x)| \leq \|f\|_{Z^*} \|x\| = p(x) \;\; \forall x \in Z$$

Dai podemos aplicar o teorema de Hahn-banach e concluir que existe um funcional linear F em X, que é uma extensão de f e satisfaz

$$|F(x)| \leq \|f\|_{Z^*} \|x\| = p(x) \;\; \forall x \in X$$

Tomando o supremo sobre todo $x \in X$ de norma 1 nós obtemos a desigualdade

$$\|F\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |F(x)| \leq \|f\|_{Z^*}$$

como F é uma extensão de f tem-se $\|F\|_{X^*} \geq \|f\|_{Z^*}$ e portanto $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Z^*}$

$\square$

Corolário 3.2.1. *Seja X um espaço normado, para cada x_0 existe um funcional linear limitado $F \in X^*$ tal que*

$$\|F\|_{X^*} = 1 \;\; e \;\; F(x_0) = \|x_0\|$$

Demonstração. Considere o subespaço Z de X, constituído por todos os elementos $x = \alpha x_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Em Z definimos o funcional linear f por:

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$$

observe que f é linear pois, se $x, y \in Z$ então $x = \alpha x_0, y = \alpha' x_0$ e

$$f(\lambda x + y) = f\left((\lambda\alpha + \alpha')x_0\right) = (\lambda\alpha + \alpha')\|x_0\| = \lambda(\alpha\|x_0\|) + \alpha'\|x_0\|$$

$$f(\lambda x + y) = f(\lambda x) + f(y)$$

temos que f é limitada e $\|f\| \,|_{Z^*} = 1$ pois

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha|\,\|x_0\| = \|x\|$$

tomando o supremo sobre todos os $x \in Z$ de norma 1 obtemos

$$\|f\|_{Z^*} = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} \|x\| = 1$$

$$\Rightarrow \|f\|_{Z^*} = 1$$

pelo Teorema (3.2.2) temos que f tem uma extensão linear F de Z $para$ X, de norma

$$\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Z^*} = 1$$

e temos também que $F(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$

□

Observação 3.2.1. .

1. *dado $x \in X$ se $f(x) = 0, \;\; \forall f \in X^*$ então $x = 0$.*

   Segue do corolário (3.2.1) que dado $x \in X$, exite $f \in X^*$ tal que $f(x) = \|x\|$, como $f(x) = 0 \Longrightarrow \|x\| = 0$ e portanto $x = 0$.

2. *O elemento F no corolário (3.2.1) não é único em geral. Sejam $X = \mathbb{R}^2$ e $\|(x, y)\| = |x| + |y|$. Tomemos $x_0 = (1, 0)$ e consideremos $f_\lambda : \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ para $0 \leq \lambda \leq 1$ definida*

por $f_\lambda = x + \lambda y$.

Note que f_λ é linear e

$$f_\lambda(x_0) = f_\lambda(1,0) = 1 = \|x_0\|$$

Temos também que

$$|f_\lambda(x,y)| = |x + \lambda y| \leq |x| + |\lambda||y| \leq |x| + |y| = \|(x,y)\|$$

Tomando o supremo sobre todos os $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ com norma menor ou igual a 1, segue que

$$\|f_\lambda(x,y)\| = \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ \|(x,y)\|\leq 1}} |f_\lambda(x,y)| \leq 1 = \|x_0\|$$

Note ainda que

$$\|f_\lambda(x,y)\| = \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ \|(x,y)\|\leq 1}} |f_\lambda(x,y)| \geq |f_\lambda(1,0)| = 1 = \|x_0\|$$

donde concluímos que

$$\|f_\lambda(x,y)\| = \|x_0\|$$

Neste caso temos infinitos funcionais lineares f_λ, pois temos infinitos $\lambda \ em \ [0,1]$ e por conseguinte, aplicando o corolário (3.2.1) temos infinitos F satisfazendo as condições dadas.

3. *O teorema de Hahn-Banach não garante a unicidade da extensão.*

Exemplo 3.2.1. *Dado $X = \mathbb{R}^2 \ e \ G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$. Consideremos $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$p(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

temos que p é sublinear. Seja $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,x) = x$, tem-se que f é linear, e $f(x,x) \leq p(x,x)$ para todo $x \in G$, pois

$$f(x,x) = x \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + x^2} = p(x,x)$$

Tomemos os funcionais lineares

$$F_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; F_1(x,y) = x$$

$$F_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; F_2(x,y) = y$$

Note que $F_1|G = f$ e $F_2|G = f$. Além disso temos,

$$F_1(x,y) = x \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = p(x,y)$$

$$F_2(x,y) = y \leq |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = p(x,y)$$

oque mostra que o funcional que estende f não é único.

A demonstração do Teorema de **Hahn-Banach** sobre espaços de Hilbert é mais "simples"tendo em vista o uso do **Teorema da Representação de Riesz.**

Definição 3.2.1. *Um espaço com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno é chamado de espaço de **Hilbert**. Note que, um espaço de Hilbert é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.*

Teorema 3.2.3. ***Teorema da Representação de Riesz.*** *Se H é um espaço de Hilbert e $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, então existe (e é unico) um elemento $y \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x,y \rangle \;\; \forall x \in H \;\; e \;\; \|f\|_{H^*} = \|y\|_H$$

Observação 3.2.2. . *No teorema $\langle , \rangle$ é o produto interno em H.*
A prova deste teorema é dada no apêndice.

Vamos demonstrar o teorema de Hahn-Banach em um espaço de Hilbert.

Demonstração. Sejam $L \subset H$ um subespaço de H "‘fechado"’ e $f : L \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo em L. Aplicando o teorema da Representação de Riesz existe $y \in L$ tal que

$$f(x) = \langle x,y \rangle \;\; , \;\; \forall x \in L \;\; e \;\; \|f\|_{L^*} = \|y\|_H$$

vamos definir $F : H \longrightarrow \mathbb{R}$ por,

$$F(x) = \langle x,y \rangle \;\; , \;\; \forall x \in H$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz obtemos,

$$|F(x)| = |\langle x,y \rangle| \leq \|x\|_H \, \|y\|_H$$

agora tomando o supremo em ambos os lados da desigualdade, sobre todos os $x \in H$ de norma menor ou igual a 1, temos

$$\|F(x)\|_{H^*} \leq \|y\|_H$$

logo $F \in H^*$, e como F é uma extenção de f tem-se

$$\|F(x)\|_{H^*} \geq \|f(x)\|_{L^*} = \|y\|_H$$

donde concluímos que $\|F(x)\|_{H^*} = \|y\|_H$. Portanto F extende f com $\|F(x)\|_{H^*} = \|f(x)\|_{L^*}$.

$\square$

3.3 Formas geométricas do teorema de Hahn-Banach Separação de conjuntos convexos

Seja X um espaço vetorial normado.

Definição 3.3.1. *Um hiperplano(afim) é um conjunto da forma*

$$H = \{x \in X; f(x) = \alpha\}$$

onde f é um funcional linear sobre X, não identicamente nulo e $\alpha \in \mathbb{R}$. Dizemos neste caso que H é um hiperplano de equação $[f = \alpha]$.

Proposição 3.3.0.2. *Um hiperplano de equação $[f = \alpha]$ é fechado se, e somente se, f é contínua.*

Definição 3.3.2. *Sejam $A, B \subseteq X$. Dizemos que um hiperplano de equação $[f = \alpha]$ separa os conjuntos A e B no sentido **forte** se*

$$f(x) \leq \alpha \ \ \forall x \in A \ \ e \ \ f(y) \geq \alpha \ \ \forall y \in B$$

*Dizemos que a separação é **estrita** se existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$f(x) \leq \alpha - \epsilon \ \ \forall x \in A \ \ e \ \ f(y) \geq \alpha + \epsilon \ \ \forall y \in B$$

Teorema 3.3.1. *(1º forma geométrica do teorema de Hahn-Banach) Sejam A, B dois subconjuntos convexos (ver [3]), não vazios e disjuntos de X. Se A é um conjunto aberto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido **forte**.*

Para entender a demonstração do teorema acima, precisamos de dois lemas que segue.

Lema 3.3.1. *Seja $C \subseteq X$ um conjunto convexo, aberto e que contém a origem do espaço normado X. A aplicação*

$$P_0 : X \longmapsto \mathbb{R} \ \textit{onde} \ P_0(x) = \inf\left\{\alpha > 0; \alpha^{-1}x \in C\right\}$$

é chamado o funcional de ***Minkowski****, e goza das seguintes propriedades:*

1. $P_0(\lambda x) = \lambda P_0(x) \ \ \forall\lambda > 0 \ \ e \ \ \forall x \in X$

2. $C = \{x \in X; P_0(x) < 1\}$

3. $\exists M > 0$ ***tal que*** $0 < P_0(x) \leq M\|x\| \ \ \forall x \in X$

4. $P_0(x + y) \leq P_0(x) + P_0(y)$ ***para quaisquer*** $x, y \in X$

Demonstração. (1) dados $\lambda > 0$ e $x \in X$ temos

$P_0(\lambda x) = \inf\{\alpha > 0; \alpha^{-1}(\lambda x) \in C\}$

$\Rightarrow P_0(\lambda x) = \inf\{\alpha\lambda^{-1}\lambda > 0; (\alpha^{-1}\lambda)x \in C\}$

$\Rightarrow P_0(\lambda x) = \inf\{\lambda(\alpha\lambda^{-1}) > 0; (\alpha^{-1}\lambda)x \in C\}$

$\Rightarrow P_0(\lambda x) = \lambda\inf\{(\alpha\lambda^{-1}) > 0; (\alpha^{-1}\lambda)x \in C\}$

$\Rightarrow P_0(\lambda x) = \lambda P_0(x)$

(2) Sendo C aberto, para todo $x \in C$, existe $\delta > 0$ tal que$B_\delta(x) \subseteq C$. Tomemos $\epsilon > 0$ de maneira que $(1 + \epsilon)x \in C$. observe que para $\alpha = 1$ temos

$$\alpha^{-1}(1 + \epsilon)x = (1)^{-1}(1 + \epsilon)x = (1 + \epsilon)x \in C$$

dai pela definição do funcional $P_0(x)$ devemos ter

$$P_0((1 + \epsilon)x) \leq 1 \Rightarrow (1 + \epsilon)P_0(x) \leq 1 \Rightarrow P_0(x) \leq \frac{1}{(1 + \epsilon)} < 1$$

o que implica

$$C \subseteq \{x \in X; P_0(x) < 1\} \tag{3.3}$$

Reciprocamente, se $x \in X$, verifica $P_0(x) < 1$, então existe $\alpha \in (0, 1)$ com $\alpha^{-1}x \in C$. Note que

$$x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1 - \alpha)0$$

logo pela convexidade de C, tem-se que $x \in C$ isto é

$$\{x \in X; P_0(x) < 1\} \subseteq C \tag{3.4}$$

Assim de (3.3) e (3.4) podemos concluir que

$$C = \{x \in X; P_0(x) < 1\}$$

(3) Seja δ >0 tal que $B_\delta(0) \subseteq C$, então para cada $0 \neq x \in X$ definimos

$$y = \frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|} \quad \in B_\delta(0) \subseteq C$$

segue de (2) que

$$P_0(y) < 1 \Rightarrow P_0(\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|}) < 1 \Rightarrow \frac{\delta}{2\,\|x\|}P_0(x) < 1 \Rightarrow P_0(x) < \frac{2\,\|x\|}{\delta}$$

considerando $M = \frac{2}{\delta}$ obtemos

$$P_0(x) < M\,\|x\| \quad \forall x \in X$$

(4) Seja $x, y \in X \;\; e \;\; \epsilon > 0$ dados, mostraremos que $\frac{x}{P_0(x)+\epsilon}, \frac{y}{P_0(y)+\epsilon} \in C$. Sabemos que $P_0(x) > 0$, então dado $\epsilon > 0$ e somando a ambos os lados dessa desigualdade obtemos que

$$0 < P_0(x) < P_0(x) + \epsilon \Rightarrow 0 < \frac{P_0(x)}{P_0(x)+\epsilon} < 1 \Rightarrow 0 < P_0\left(\frac{x}{P_0(x)+\epsilon}\right) < 1$$

logo por (2) concluímos que $\frac{x}{P_0(x)+\epsilon} \in C$ de maneira análoga mostramos que $\frac{y}{P_0(y)+\epsilon} \in C$. Como C é convexo, tomando $0 < t = \frac{P_0(x)+\epsilon}{P_0(x)+P_0(y)+\epsilon} < 1$ temos:

$$\frac{x+y}{P_0(x)+P_0(y)+2\epsilon} = \frac{tx}{P_0(x)+\epsilon} + \frac{(1-t)y}{P_0(y)+\epsilon} \in C$$

Assim de (1) e (2) concluímos que

$$\frac{P_0(x+y)}{P_0(x)+P_0(y)+2\epsilon} = P_0\left(\frac{x+y}{P_0(x)+P_0(y)+2\epsilon}\right) < 1$$
$$\Rightarrow P_0(x+y) < P_0(x)+P_0(y)+2\epsilon$$

para quaisquer $x, y \in X \;\; e \;\; \forall \epsilon > 0$, fazendo $\epsilon \to 0$, isso implica que

$$P_0(x+y) \leq P_0(x) + P_0(y)$$

□

Lema 3.3.2. *Seja $C \subseteq X$ um conjunto convexo, aberto e não-vazio, então para cada $x_0 \in X \backslash C$ existe um funcional linear F tal que.*

$$F(x) < F(x_0) \ \ \forall x \in C$$

Demonstração. Para o caso em que $0 \notin C$ (ver[4]), suponhamos que $0 \in C$.Seja P_0 o funcional de minkowski, consideremos $G = \mathbb{R}x_0$ e o funcional linear definido por:

$$\phi(tx_0) = t \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

observe que $\phi(x)$ satisfaz:

$$\phi(x) \leq P_0(x) \ \ \forall x \in G$$

pois

- $se \ \ t \leq 0.$

$$\phi(tx_0) = t \leq 0 < P_0(tx_0)$$

- $se \ \ t > 0.$

$$\phi(tx_0) = t \leq tP_0(x_0) = P_0(tx_0)$$

na ultima desigualdade usamos o fato de que

$$P_0(y) \geq 1 \ \ \forall y \in X \backslash C$$

Temos que $\phi(x)$ está nas condições do **Teorema de Hahn-Banach**, então aplicando o teorema, existe um funcional $F \in X$ satisfazendo

$$F(x) \leq P_0(x) \ \ \forall x \in X \ \ e \ \ F(x) = \phi(x) \ \ \forall x \in G$$

da definição de ϕ e do funcional de minkowski P_0 temos

$$F(x_0) = \phi(x_0) = 1 \;\; e \;\; P_0(x) < 1 \;\; \forall x \in C$$

dai,

$$F(x) \leq P_0(x) < 1 = F(x_0) \;\; \forall x \in C$$

portanto

$$F(x) < F(x_0) \;\; \forall x \in C$$

□

Demonstração. (teroema 3.3.1) Seja $C = \{x - y; x \in A \;\; e \;\; y \in B\}$, note que

1. C é aberto, pois é uma união de conjuntos abertos:

$$C = \bigcup_{y \in B} (\{x - y; x \in A\})$$

2. C é convexo: de fato, dados $x_1, x_2 \in A \;\; e \;\; y_1, y_2 \in B \;\; e \;\; 0 < t < 1$ da convexidade dos conjuntos $A \;\; e \;\; B$ temos

$$t(x_1 - y_1) + (1-t)(x_2 - y_2) = \underbrace{t(x_1) + (1-t)(x_2)}_{\in A} - \underbrace{t(y_1) + (1-t)(y_2)}_{\in B} \in C$$

3. Temos que o conjunto C é não-vazio e $C \neq X$, pois A, B são disjuntos e não-vazios

Observe que $0 \notin C$, pois $A \cap B = \emptyset$, pelo lema(3.3.2) existe $F \in X$ tal que

$$F(z) < F(0) = 0 \;\; \forall z \in C$$

ou seja

$$F(x) < F(y) \;\; \forall x \in A \;\; e \;\; \forall y \in B$$

de onde segue

$$\sup_{x\in A} F(x) \leq \inf_{y\in B} F(y)$$

escolhendo α de maneira que

$$\sup_{x\in A} F(x) \leq \alpha \leq \inf_{y\in B} F(y)$$

temos

$$F(x) \leq \alpha \leq F(y) \;\; \forall x \in A, \forall y \in B$$

Portanto o hiperplano de equação $[F = \alpha]$ separa os conjuntos $A \;\; e \;\; B$ no sentido **forte**. $\square$

Teorema 3.3.2. *(2 forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach) Sejam $A \;\; e \;\; B$ conjuntos convexos, disjuntos e não-vazios do espaço normado X. Se A é fechado e B é compacto, então existe um funcional $F \in X$ que separa $A \;\; e \;\; B$ no sentido* ***estrito.***

Demonstração. Vamos primeiramente mostra que é possível escolher $\epsilon > 0$ de modo que $A + B_\epsilon(0) \;\; e \;\; B + B_\epsilon(0)$ sejam abertos, convexos e disjuntos:

1. Para qualquer $\epsilon > 0,$ os conjuntos $A + B_\epsilon(0) \;\; e \;\; B + B_\epsilon(0)$ são abertos pois

   $$A + B_\epsilon(0) = \bigcup_{x\in A}(x + B_\epsilon(0)) = \bigcup_{x\in A} B_\epsilon(x)$$

   e o mesmo ocorre para $B + B_\epsilon(0)$.

2. dado $\epsilon > 0$, como $A, B \;\; e \;\; B_\epsilon(0)$ são convexos, e sabemos que a soma de conjuntos convexos é também um conjunto convexo, então $A + B_\epsilon(0) \;\; e \;\; B + B_\epsilon(0)$ são conjuntos convexos.

3. Basta agora provar que é possível escolher um $\epsilon > 0$ tal que $A + B_\epsilon(0) \;\; e \;\; B + B_\epsilon(0)$ sejam disjuntos. Suponhamos que isso não seja possível, então para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

   $$\left(A + B_{\frac{1}{n}}(0)\right) \cap \left(B + B_{\frac{1}{n}}(0)\right) \neq \emptyset$$

logo existem sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_{\frac{1}{n}}(0)$ tais que

$$x_n + z_n = y_n + w_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

assim

$$x_n - y_n = w_n - z_n \Rightarrow \|x_n - y_n\| = \|w_n - z_n\| =\leq \|w_n\| + \|z_n\| < \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} = \tfrac{2}{n}$$

$$\Rightarrow \|x_n - y_n\| < \frac{2}{n} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.5}$$

Como B é compacto, a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em B digamos $y_{n_k} \to y_0 \in B$. Segue de (3.5) que

$$\|x_{n_k} - y_{n_k}\| < \frac{2}{n_k}$$

fazendo $n_k \to \infty$,temos $y_{n_k} \to y_0 \;\; e \;\; \frac{2}{n_k} \to 0$

daí

$$\|x_{n_k} - y_0\| \to 0$$

logo $x_{n_k} \to y_0$, como A é fechado obtemos que $y_0 \in A$, donde segue que $y_0 \in A \cap B$ oque contradiz o fato de $A \;\; e \;\; B$ serem disjuntos. Portanto existe $\epsilon > 0$ tal que $A + B_\epsilon(0) \;\; e \;\; B + B_\epsilon(0)$ sejam disjuntos.

Agora fixemos $\epsilon > 0$ tal que $A + B_\epsilon(0) \;\; e \;\; B + B_\epsilon(0)$ sejam disjuntos, aplicando o teorema (3.3.1) existe um hiperplano $[F = \alpha]$ que separa $A + B_\epsilon(0) \;\; e \;\; B + B_\epsilon(0)$ logo

$$F(x_\epsilon) \leq \alpha \leq F(y_\epsilon) \;\; \forall x_\epsilon \in A + B_\epsilon(0), \; \forall y_\epsilon \in B + B_\epsilon(0)$$

Assim

$$F(x + \epsilon z) \leq \alpha \leq F(y + \epsilon z) \;\; \forall x \in A, \; \forall y \in B \;\; e \;\; \forall z \in B_1(0)$$

de onde segue

$$F(x) + \epsilon \sup_{\|z\|<1} |F(z)| \leq \alpha \leq F(y) + \epsilon \sup_{\|z\|<1} |F(z)|$$

$$F(x) + \epsilon \|F\| \leq \alpha \leq F(y) - \epsilon \|F\| \quad \forall x \in A, \, \forall y \in B$$

Portanto o hiperplano de equação $[F = \alpha]$ separa no sentindo **estrito** $A \;\; e \;\; B$, uma vez que $\|F\| \neq 0$. □

Corolário 3.3.1. *Seja $G \subset X$ um subespaço vetorial tal que $\overline{G} \neq X$. Então existe:*

$$F \in X^* \;\; e \;\; F \neq 0$$

tal que

$$F(x) = 0 \;\; \forall x \in G$$

Demonstração. Pela segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach, tomando $A = \overline{G} \;\; e \;\; B = \{x_0\}$, onde $x_0 \notin A$ ($x_0 \in X$). Então existe um hiperplano fechado de equação,

$$[F = \alpha] = \{x; F(x) = \alpha\}$$

que separa $\overline{G} \;\; e \;\; \{x_0\}$ no sentido estrito. Portanto, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$F(x) \leq \alpha - \epsilon \;\; , \;\; \forall x \in \overline{G} \;\; e \;\; F(x_0) \geq \alpha + \epsilon$$

Em particular $F(x) < \alpha \;\; \forall x \in G$, pois $G \subset \overline{G} \;\; e \;\; \alpha - \epsilon < \alpha$. Como G é um subespaço vetorial temos,

$$F(\lambda x) < \alpha \;\; \forall x \in G, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

implicando

$$\lambda F(x) < \alpha \Rightarrow F(x) < \frac{\alpha}{\lambda} \quad \forall x \in G, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}(\lambda \neq 0)$$

fazendo $\lambda \longrightarrow \infty$ vem que

$$F(x) \leq 0 \;\; \forall x \in G$$

Então

$$F(-x) \leq 0 \;\; \forall x \in G \Rightarrow -F(x) \leq 0 \Rightarrow F(x) \geq 0 \;\; \forall x \in G$$

Logo

$$F(x) = 0 \;\; \forall x \in G$$

□

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Apêndice A

Proposição 4.1.0.3. . *Seja H um espaço de Hilbert e $L \subset H$ um subespaço vetorial fechado proprio. Então existe $z \in (H \backslash L)$ tal que $\|z\| = 1$ e $z \perp L$.*

Teorema 4.1.1. ***Teorema de Riesz.*** *Se H é um espaço de Hilbert. Dado $f \in H^*$ existe um único $y \in H$ tal que:*

$$f(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in H$$

Além disso,

$$\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$$

Demonstração. Se f é um funcional identicamente nulo, basta tomar $y = 0$. Considerando agora o caso em que f não é identicamente nulo, neste caso o núcleo de f.

$$L = \{x \in H; f(x) = 0\}$$

é um subespaço fechado proprio de H. Note que $L^\perp \neq \{0\}$ e segue da proposição acima que existe $x_0 \in L$ de norma 1. Vamos verificar que $y = f(x_0)x_0$ é o vetor procurado. Dado $x \in H$, podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$x = \left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right) + \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0$$

Note que,

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(x_0)}f(x_0) = f(x) - f(x) = 0$$

assim, $\left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right) \in L$ e $\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0 \in L^{\perp}$. Aplicando o produto interno em $x \ e \ y$ temos,

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right) + \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0, y \right\rangle = \left\langle \left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right), y \right\rangle + \left\langle \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0, y \right\rangle$$

Como $\left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right) \in L \ e \ y \in L^{\perp}$, segue que

$$\left\langle x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0, y \right\rangle = 0$$

dai,

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0, y \right\rangle = \frac{f(x)}{f(x_0)} \langle x_0, y\rangle$$

Lembrando que $y = f(x_0)x_0$ temos

$$\langle x, y\rangle = \frac{f(x)}{f(x_0)} \langle x_0, f(x_0)x_0\rangle = \frac{f(x)}{f(x_0)} f(x_0) \langle x_0, x_0\rangle = f(x) \langle x_0, x_0\rangle$$

de $\|x_0\| = 1$ isso implica que $\langle x_0, x_0\rangle = 1$, logo

$$\langle x, y\rangle = f(x) \langle x_0, x_0\rangle = f(x)$$

Além disso pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

desse modo obtemos,

$$\|f\|_{H^*} \leq \|y\|_H$$

e observe que

$$\|f\|_{H^*} \geq f\left(\frac{y}{\|y\|_H}\right) = \frac{\langle y, y\rangle}{\|y\|_H} = \|y\|_H$$

portando $\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$

Unicidade. Suponhamos que existam $y_1 \ e \ y_2$ tais que

$$f(x) = \langle x, y_1\rangle \quad \forall x \in H$$

$$f(x) = \langle x, y_2 \rangle \quad \forall x \in H$$

então

$$\langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle \Rightarrow \langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$$

segue das propriedades do produto interno que

$$\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ (y_1 - y_2) = 0$$

como a primeira igualdade é valida para todo $x \in H \ e \ H \neq \{0\}$, tomemos $x \in H \ com \ x \neq 0$, então devemos ter $(y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$, mostrando a unicidade.

$\square$

Conclusão

O Teorema de Hahn-Banach é um importante resultado dentro da Análise Funcional, particularmente no que diz respeito a aplicações em problemas lineares.

Seu resultado garante a existência de extênsões lineares para todo o espaço, de funcionais lineares definidos em um subespaço.

Neste trabalho apresentamos o Teorema de Hahn-Banach em sua forma Analítica e geométrica e embora tenha sido exibida poucos aplicacões são varias as aplicações decorrente deste resultado.

Assim o Teorema de Hahn-Banach é de grande utilidade e um dos principais resultados da Análise Funcional.

Referências Bibliográficas

[1] Elon Lima, Elon Lages. **Analíse Real**. Rio de Janeiro, IMPA, 2011.

[2] Lima, Elon Lages. **Algebra Linear**. Rio de Janeiro, IMPA, 2011.

[3] Lima, Elon Lages.; **Espaços Métricos**, Projeto Euclides: CNPQ-IMPA, 1977.

[4] Geraldo Botellho, Daniel Pellegrino, Eduardo Teixeira, **Fundamentos de Análise Funcional**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[5] KREYSZIG, E.; **introductory functional Analysis with Applications**. John Wiley e Sons, New York, 1989.

[6] BREZIS, H.; **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, Springer, New York, 2010.

[7] César R. de Oliveira.; **Introdução à Análise Funcional**, IMPA (Coleção projeto Euclides), Rio de Janeiro, 2012.