Universidade Federal do Amapá
Curso Licenciatura em Matemática

Welber Aires de Oliveira

Tópicos de Análise Funcional e uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Macapá-AP
2014

Welber Aires de Oliveira

Tópicos de Análise Funcional e uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para obtenção do grau de licenciado em Matemática, do curso de Licenciatura Plena em Matemática, da Universidade Federal do Amapá.
Orientador: Prof. Ms.Kelmen Cruz Barroso

Macapá, setembro de 2014

Welber Aires de Oliveira

Tópicos de Análise Funcional
e uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática,do curso Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

AVALIADORES

Orientador: Prof.Ms.
Kelmem da Cruz Barroso
Unifap

Membro: Prof. Ms.
Marcel Lucas Picanço Nascimento
Unifap

Membro: Prof. Dr.
Guzmán Eulálio Isla Chamilco
Unifap

Macapá, 2014

DEDICATÓRIA

A minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente ,agradeço a Deus por ter me dado a oportunidade de estar aqui neste dia,a minha família e a todos que me apoiaram e oraram pelo meu sucesso neste trabalho e em todo curso.Agradeço também a compreensão e paciência de minha noiva Patrícia Campos e ao meu orientador Kelmen Cruz Barroso pela sua profunda participação nos meus estudos e excelente orientação.

"Se as leis da Matemática referem-se à realidade, elas não estão corretas; e, se estiverem corretas, não se referem à realidade"

(Albert Einstein)

RESUMO

Neste trabalho apresentaremos importantes definições e resultados que envolvem o estudo de Análise Funcional,introduziremos Espaços Normados e Espaços de Banach e também Espaços de Hilbert,bem como alguns exemplos e outras definições.Além disso, apresentaremos o famoso Teorema do Ponto Fixo de Banach e sua demonstração e uma de suas importantes aplicações no estudo de equações diferenciais.

Palavras Chaves:Análise Funcional.Espaços de Banach.Espaços de Hilbert.Teorema do Ponto Fixo de Banach.Teorema de Existência e unicidade .

ABSTRACT

In this paper we present definitions and important results involving the study of functional analysis, we introduce normed spaces and Banach spaces and Hilbert spaces too, as well as some examples and other definitions.Beyond addition, we will present the famous theorem of Banach Fixed Point and its demonstration and one of its important applications in the study of differential equations.

Keys words: Functional Analysis.Banach Spaces.Hilbert Spaces .Theorem of the Fixed Point of Banach.Theorem Existence and uniqueness.

SUMÁRIO

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A princípio,no primeiro capítulo do desenvolvimento deste trabalho apresentaremos um estudo significativo de Espaço de Banach,bem como alguns exemplos importantes. Faremos também um estudo importante de operadores lineares,funcionais lineares e o espaço normado de operadores:o espaço Dual,onde diferentemente da Álgebra Elementar,os espaços vetoriais descritos na definição de operadores e funcionais aqui apresentados são de dimensão infinita. Alguns Teoremas importantes que fazem parte do estudo de espaços métricos também foram descritos,assim como também em alguns casos veremos resultados importantes em espaços de dimensão finita.No capítulo seguinte apresentamos um estudo de espaços de Hilbert,bem como alguns exemplos deste espaço que são completos.Algumas definições e resultados importantes no estudo deste espaços foram descritos para que possamos de modo completo e minuncioso saber como é importante o estudo do mesmo.Posteriormente descreveremos o resultado que também faz parte do principal objetivo deste trabalho : Teorema do Ponto Fixo de Banach e sua demonstração,onde iremos usá-lo como principal ferramenta para demonstrar um teorema que dá condições suficientes para mostrar a existência e unicidade da equação diferencial

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

com algumas condições estabelecidas.

Capítulo 2

Espaços Normados e Espaços de Banach

2.1 Espaços Normados e Espaços de Banach

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados e definiçoes de fundamental importância na análise funcional.Introduziremos, a princípio,conceitos como: definição de espaço métrico completo,definição de espaço normado e espaço de Banach, e também exemplos de espaço de Banach.Posteriormente nesta mesma parte do trabalho abordaremos algumas propriedades dos Espaços métricos e definições de operadores lineares,funcionais lineares e algumas peculiaridades dos mesmos assim como alguns exemplos.Colocamos também a definição de espaço normado de operadores.O espaço Dual.

Definição 2.1.1. *Um espaço métrico X é completo se toda sequência de Cauchy de X converge em X.*

Definição 2.1.2. *Um espaço normado X é um espaço vetorial real com uma norma definida sobre ele. Um espaço de Banach é um espaço normado completo(completo na métrica induzida pela norma). Aqui uma norma num espaço vetorial X é uma função $|.| : X \to \mathbb{R}$ definida em X a valores reais $\|x\|$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

N1) $\|x\| \geq 0$;

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$;

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; *(Desigualdade Triangular)*

Aqui x e y são vetores arbitrários em X e α um escalar qualquer .

Uma norma em X define uma métrica d em X (definição (5.1.1) do Apêndice) que é dado por

$$d(x, y) = \|x - y\| . \tag{2.1}$$

Com efeito

- $d(x,\ y) = \|x - y\| = 0 \Longleftrightarrow x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

- $d(x,\ y) = \|x - y\| > 0$, o que verifica-se, pois uma norma é sempre positiva para $x \neq y$;
- $d(x,\ y) = \|x - y\| = \|(-1).(y - x)\| = |-1|.\ \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$;
- $d(x,\ y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$;

e é chamado a métrica induzida pela norma.Iremos representar um espaço normado como sendo $(X, \|.\|)$ ou simplesmente por X ao longo do trabalho.

Os espaços normados dos exemplos seguintes estão definidos no Apêndice .

2.1.1 Completeza do Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$

Seja $X = \mathbb{R}^n$, onde $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ e $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ com a norma euclidiana definida por

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 \right)^{1/2} \tag{2.2}$$

$\mathbb{R}^n$ ém espaço de Banach com a norma $\|x\|_1$.

Demonstração. Consideremos uma sequência arbitrária de Cauchy (x_m) em $\mathbb{R}^n$ de modo que para cada $m \in \mathbb{N}$ teremos $x_m = (\xi_1^{(m)}, ..., \xi_n^{(m)}) \in \mathbb{R}^n$. Como (x_m) é de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existe um n_0 tal que

$$d(x_m, x_r) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)} \right|^2 \right)^{1/2} < \epsilon \tag{2.3}$$

com $m, r > n_0$.

Elevando ao quadrado temos

$$(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2 < \epsilon^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2} < \sqrt{\epsilon^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left| \xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)} \right| < \epsilon.$$

Isto mostra que para cada j fixo, $(1 \leq j \leq n)$, a sequência $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, ...)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Logo é convergente pelo teorema (5.1.1) do Apêndice, digamos, $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ quando $m \to \infty$. Usando esses n limites definimos $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ assim temos que

$$(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)}) \to (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$$

onde claramente x por ter n coordenadas pertencerá a $\mathbb{R}^n$. De (2.3) com $r \to \infty$ temos

$$d(x_m, x) \leq \epsilon \tag{2.4}$$

com $m > n_0$.

Isso mostra que x é limite de (x_m) provando a completeza de $\mathbb{R}^n$.

Portanto, $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach.

□

2.1.2 Completeza do espaço l^p

O espaço l^p, com p fixo e $1 \leq p < +\infty$, é completo com norma

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p}$$

Demonstração. Seja (x_n) um sequência arbitrária de Cauchy no espaço l^p, onde $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, ...)$. Então para cada $\epsilon > 0$ existe um n_0 tal que para todo $m, n > n_0$,

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right|^p\right)^{1/p} < \epsilon \tag{2.5}$$

segue-se que para todo $j = 1, 2, ...$ temos

$$\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right| < \epsilon \tag{2.6}$$

com $m, n > n_0$.

Escolhendo um j fixo. De (2.6) vemos que $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, ...)$ é um sequência de Cauchy de números reais. Logo, é convergente pelo teorema (5.1.1), digamos que $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ quando $m \to \infty$. Usando esta infinidades de limites, definimos $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ e mostraremos que $x \in l^p$ e $x_m \to x$.

De (2.5) temos para todo $m, n > n_0$

$$\sum_{j=1}^{k} \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right|^p < \epsilon^p$$

com $k = 1, 2, ...$

Considerando $n \to \infty$, obtemos para $m > n_0$

$$\sum_{j=1}^{k} \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right|^p \leq \epsilon^p$$

com $k = 1, 2, ...$

Considerando $k \to \infty$, obtemos para $m > n_0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right|^p \leq \epsilon^p \tag{2.7}$$

Isto mostra que

$$x_m - x = (\xi_j^m - \xi_j) \in l^p$$

Desde que $x_m \in l^p$, segue da desigualdade de Minkowski (5.7), que

$$\left(\sum |x_m + (x - x_m)|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum |x_m|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |x - x_m|^p\right)^{1/p}$$

onde

$$\left(\sum |x_m|^p\right)^{1/p} < \infty \quad \text{e} \quad \left(\sum |x - x_m|^p\right)^{1/p} < \infty$$

logo,

$$\left(\sum |x_m + (x - x_m)|^p\right)^{1/p} < \infty$$

ou seja,

$$x = x_m + (x - x_m) \in l^p.$$

Portanto l^p é um espaço de Banach.

$\square$

2.1.3 Completeza do espaço l^∞

O espaço l^∞ é um espaço de Banach com a norma definida por

$$\|x\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j|$$

Demonstração. Seja (x_m) uma sequência de Cauchy arbitrária no espaço l^∞ onde $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, ...)$.Onde a métrica é dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j|$$

e $x = (\xi_j), y = (\eta_j) \in l^\infty$, daí para todo $\epsilon > 0$ existe um n_0 tal que para todo $m, n > n_0$,

$$d(x_m, x_n) = \|x_m - y_n\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} \left|\xi_j^{(m)} - \eta_j^{(n)}\right| < \epsilon.$$

Para cada j fixo,

$$\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}\right| < \epsilon \tag{2.8}$$

com $(m, n > n_0)$.

Portanto,a sequência $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, ...)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Logo, converge pelo teorema (5.1.1) do Apêndice,assim, $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ quando $m \to \infty$. Usando a infinidade de limites $\xi_1, \xi_2, ...$, definimos $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ e mostraremos que $x \in l^\infty$ e $x_m \to x$.

De (2.8), quando $n \to \infty$ temos,

$$\xi_j^{(n)} \to \xi_j \quad \Rightarrow \quad \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right| \leq \epsilon \tag{2.9}$$

com $m > n_0$.

Uma vez que $x_m \in l^\infty$, existe um número real k_m tal que $\left|\xi_j^m\right| \leq k_m$ qualquer que seja j. Daí, pela desigualdade triangular, temos

$$|\xi_j| = \left|\xi_j - \xi_j^{(m)} + \xi_j^{(m)}\right| \leq \left|\xi_j - \xi_j^{(m)}\right| + \left|\xi_j^{(m)}\right|$$

com $m > n_0$.

Sabemos que

$$\left|\xi_j - \xi_j^{(m)}\right| = \left|(-1).(\xi_j^{(m)} - \xi_j)\right| = \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right|$$

Desta forma de (2.9)

$$\left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right| + \left|\xi_j^{(m)}\right| \leq \epsilon + k_m$$

com $m > n_0$. Esta desigualdade vale para todo j. Assim (ξ_j) é uma sequência limitada de números reais. Isto Implica que $x = (\xi_j) \in l^\infty$. Também, de (2.9) obtemos

$$d(x_m, x) = \|x_m - x\| = \sup_j \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right| \leq \epsilon$$

com $m > n_0$. O que mostra que $x_m \to x$.

Portanto, l^∞ é um espaço de Banach.

□

2.1.4 Completeza do espaço $C[a, b]$

O espaço $C[a, b]$ é um espaço de Banach com a norma definida por

$$\|\psi\| = \max_{t \in J} |\psi(t)| \tag{2.10}$$

onde $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ com $t \in [a, b]$.

Demonstração. Seja (ψ_m) uma sequência arbitraria de Cauchy em $C[a, b]$.Assim, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um n_0, tal que para todos $m, n > n_0$, temos

$$d(\psi_m, \psi_n) = \max_{t \in J} |\psi_m(t) - \psi_n(t)| < \epsilon \tag{2.11}$$

com $t \in [a, b]$. Daí com qualquer t fixo, $t = t_0 \in J$, temos

$$|\psi_m(t_0) - \psi_n(t_0)| < \epsilon \tag{2.12}$$

com $(m, n > n_0)$. Isto mostra que $(\psi_1(t_0), \psi_2(t_0), ...)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Daí a sequência converge pelo Teorema (5.1.1) do apêndice, digamos $\psi_m(t_0) \to \psi(t_0)$, se $m \to \infty$. Desta forma, podemos associar a cada $t \in J$ um único número real $\psi(t)$. Isto define uma convergência pontual da função ψ em J. Vamos mostrar agora que $\psi \in C[a, b]$ e que $\psi_m \to \psi$.

Fazendo $n \to \infty$ em (2.11), obtemos

$$\max_{t \in J} |\psi_m(t) - \psi(t)| \leq \epsilon \tag{2.13}$$

Com $(m > n_0)$ e $t \in J$.

$$|\psi_m(t) - \psi(t)| \leq \epsilon \tag{2.14}$$

com $m > n_0$.

De (2.14) vemos que $\psi_m \to \psi$ uniformemente.Como as ψ_m são contínuas em J,o teorema (5.6.9) do Apêndice garante a continuidade de ψ para todo $t \in J$,daí $\psi \in C[a, b]$. Portanto $C[a, b]$ é um espaço de Banach.

□

2.1.5 Exemplo de espaço incompleto

O espaço normado $C[a,b]$ com

$$\|u\|_{L^p[a,b]} = \left(\int_a^b |u(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \quad \forall u \in C[a,b]$$

não é um espaço de Banach.

Demonstração. Para facilitar suponhamos $a = 0$ e $b = 1$, e consideremos a sequência de funções $f_n \in C[a,b]$ $(n \geq 2)$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{, se } \; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \dfrac{-n}{2}x + \dfrac{n+2}{4} & \text{, se } \; \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{, se } \; \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Afirmação:(f_n) é uma sequência de Cauchy. De fato, dado $\epsilon > o$,considere o gráfico

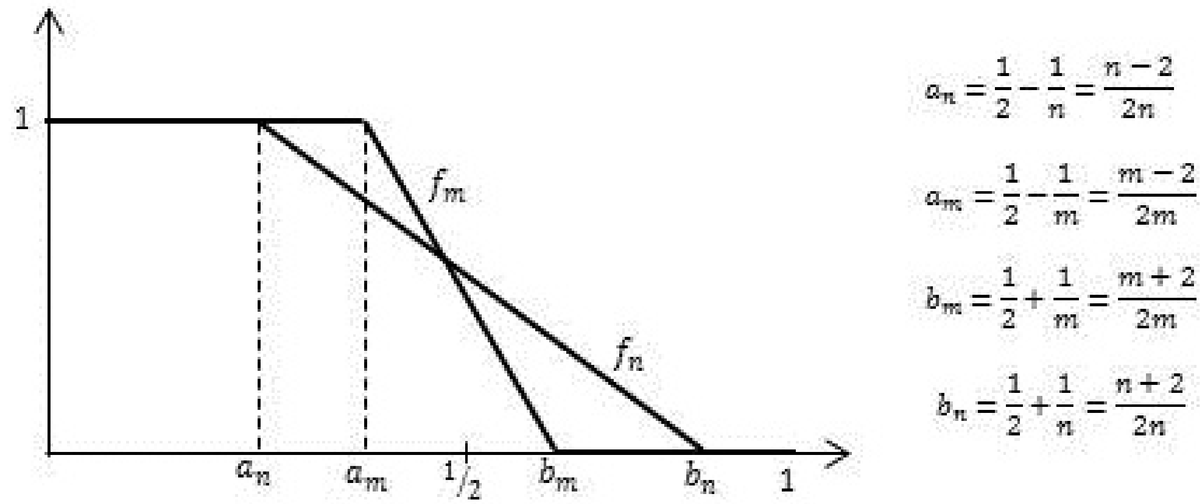

Figura 2.1:

Temos

$$\|f_n - f_m\|_{L^p([0,1])} = \left(\int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|^p \, dt \right)^{1/p} = \left(\int_0^{a_n} |1-1|^p \, dt \right)^{1/p} + \left(\int_{a_n}^{a_m} |f_n(t) - 1|^p \, dt \right)^{1/p}$$

$$+ \left(\int_{a_m}^{b_m} |f_n(t) - f_m(t)|^p \, dt \right)^{1/p} + \left(\int_{b_m}^{b_n} |f_n(t) - 0|^p \, dt \right)^{1/p} + \left(\int_{b_n}^{1} |0-0|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Notemos que $0 \leq f_k(t) \leq 1, \forall k$ .Logo $-1 \leq f_k(t) - 1 \leq 0 < 1$

$$\Rightarrow |f_k(t) - 1| \leq 1 \, |f_n(t) - f_m(t)| \leq 1;$$

Daí,usando o Corolário (2) do Apêndice

$$\|f_n - f_m\|_{L^p([0,1])} \leq 0+\left(\frac{m-2}{2m} - \frac{n-2}{2n}\right)^{1/p} + \left(\frac{m+2}{2m} - \frac{m-2}{2m}\right)^{1/p} + \left(\frac{n+2}{2n} - \frac{m-2}{2m}\right)^{1/p} + 0$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)^{1/p} + \left(\frac{2}{m}\right)^{1/p} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)^{1/p} \to 0$$

quando $m, n \to \infty$ portanto (f_n) é de Cauchy. Se $m = n+1$, na espressão acima,então $\|f_n - f_{n+1}\|_{L^p[0,1]} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Afirmação: A sequência (f_n) acima, não converge em $C[a,b]$. De fato,suponhamos que exista $f \in C[0,1]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p([0,1])} = 0.$$

Neste caso temos

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^p \, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} |f_n(t) - f(t)|^p \, dt + \lim_{n\to\infty} \int_{1/2}^1 |f_n(t) - f(t)|^p \, dt.$$

Daí,sendo $\int_a^b |g(t)|^p \, dt \geq 0$,temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} |f_n(t) - f(t)|^p \, dt = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_{1/2}^1 |f_n(t) - f(t)|^p \, dt.$$

Por outro lado,sendo $f_n(t) = 1$ se $0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$,temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} |f_n(t) - f(t)|^p \, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |1 - f(t)|^p \, dt + \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{1/2} |f(t) - f_n(t)|^p \, dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} |f_n(t) - 1|^p \, dt.$$

Pois

$$0 \leq \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{1/2} |f(t) - f_n(t)|^p \, dt \leq \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{1/2} (|f(t)| - |f_n(t)|)^p \, dt$$

$$\leq \left(\sup_{0\leq t\leq\frac{1}{2}} |f(t)| + 1\right)^p \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \to 0.$$

Sendo f contínua ,$f \equiv 1$ em $[0, \frac{1}{2}]$.Analogamente,usando

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 |f_n(t) - f(t)|^p \, dt.$$

Concluimos que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(t) - f(t)|^p \, dt + \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |f(t)|^p \, dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{\frac{1}{2}\leq t\leq 1} |f(t)| + 0\right)^p \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) + \int_{1/2}^1 |f(t)|^p \, dt.$$

Logo $f \equiv 0$ em $[\frac{1}{2}, 1]$ e f não é contínua em $[0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, se } \ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{, se } \ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

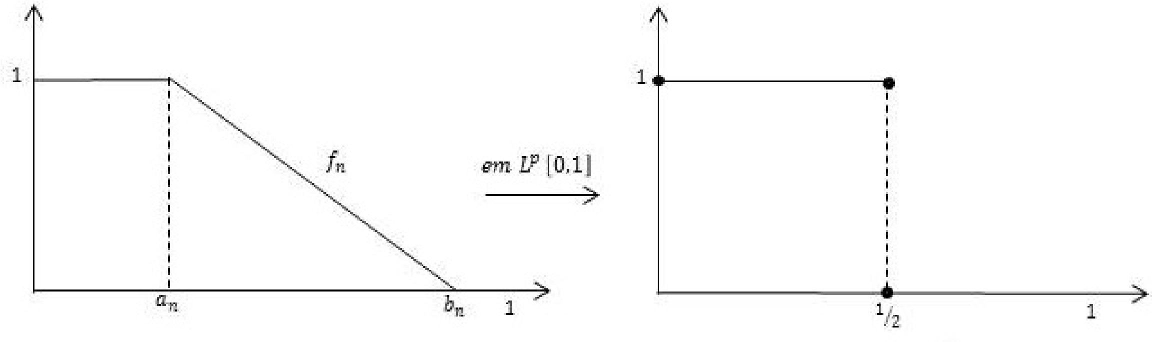

Figura 2.2:

Portanto ,C[a,b] não é um espaço completo com $\|f\|_{L^p[a,b]}$.

□

2.2 Propriedades Adicionais de Espaços Métricos

Por definição, um subespaço Y de um espaço normado X é um subespaço de X considerado como um espaço vetorial, com a norma obtida através da restrição da norma em X para o subespaço Y. Esta norma em Y é dita ser induzida pela norma em X. Se Y é fechado em X, então Y é chamado subespaço fechado em X.

Por definição, um subespaço Y de um espaço de Banach X, é um subespaço de X. Considerado como um espaço normado. Daí, Y não necessita ser completo.

Teorema 2.2.1. *Um subespaço Y de um espaço de Banach X é completo se, e somente se, Y é fechado em X.*

Demonstração. Se Y é fechado então $Y = \overline{Y}$, logo, seja $a \in \overline{Y}$ então $a \in Y$. Daí, $a = \lim x_n$ onde a sequência (x_n) está em Y.Logo a sequência (x_n) é de Cauchy pelo teorema (5.1.2) do apêndice e portanto Y é um espaço de Banach. Reciprocamente,suponha que Y é Banach e tome $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em Y tal que $x_n \to x \in X$.Então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em Y, e portanto convergente pois Y é completo por hipótese.Existe então $y \in Y$ tal que $x_n \to y$.Da unicidade do limite temos $x = y \in Y$, provando que Y é fechado em X.

□

Definição 2.2.1. ***(Base de Schalder)*** *Se um espaço normado X contem uma sequência (e_n) tal que para todo $x \in X$ existe uma única sequência de escalares (α_n) tal que*

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n)\| \to 0 \quad \textit{quando } n \to \infty \tag{2.15}$$

então (e_n) é chamada uma Base de Schalder para X.As séries $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ que tem a soma x é então chamada de espansão de x em relação a (e_n) e escrevemos

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

2.3 Operadores lineares

Definição 2.3.1. *Um operador linear entre espaços vetoriais X e Y é uma aplicação $T : D(T) \subset X \to Y$, em que seu domínio $D(T)$ é um subespaço vetorial e é satisfeita a condição*

$$T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y), \quad \forall \quad x, y \in D(T) \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

2.3.1 Exemplos de operadores lineares

Exemplo 2.1. *O operador identidade $I_X : X \to X$ é definido por $I_X x = x \quad \forall x \in X$.*

Basta notar que

$$T(x + \alpha y) = x + \alpha y = Tx + \alpha Ty \ \ \forall \ x, \ y \in X \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.2. *O operador zero $0 : X \to Y$ é definido por $0x = 0 \quad \forall x \in X$.*

de fato,

$$T(x + \alpha y) = 0(x + \alpha y) = 0 = 0x + \alpha 0y \quad \forall \ x, \ y \in X \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.3. *Diferenciação: Seja X o espaço vetorial de todos os polinômios sobre $[a, b]$. Podemos definir um operador linear T em X por*

$$Tx(t) = x'(t)$$

para cada $x \in X$, onde denota a diferenciação em relação a t. O operador T é aplicado de X em X.

Com efeito

$$T(x + \alpha y) = x' + \alpha y' = Tx + \alpha Ty \quad \forall \ x, \ y \in X \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.4. *Integração: Um operador linear $T : C[a, b] \to C[a, b]$, é definido por*

$$Tx(t) = \int_a^t x(\tau) d\tau$$

onde $t \in [a, b]$.

De fato

$$T(x + \alpha y) = \int_a^t (x + \alpha y) d\tau = \int_a^t x d\tau + \alpha \int_a^t y d\tau = Tx + \alpha Ty \quad \forall \ x, \ y \in X \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

2.4 Operadores lineares limitados

Definição 2.4.1. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : D(T) \to Y$ um operador linear, onde $D(T) \subset X$. O operador T é dito ser limitado se existe um número real c tal que*

$$\|Tx\| \leq c\,\|x\| \quad \forall \quad x \in D(T).$$

Vamos denotar por $\|T\|$ o seguinte número real associado ao operador linear limitado T:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \tag{2.16}$$

Note que a desigualdade abaixo

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\| \quad \forall x \in D(T) \tag{2.17}$$

é válida. De fato,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

De (2.16)

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|$$

logo

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$$

com isso verifica-se a desigualdade (2.17).

2.4.1 Exemplo de operador limitado

Exemplo 2.5. *Seja* $E = C([0,1];\mathbb{R})$ *com*

$$\|f\| = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

tal que

$$T : E \to \mathbb{R}; \quad \forall f \in E \quad \textit{temos} \quad T(f) = f(1) \tag{2.18}$$

Note que o operador T é limitado.

Demonstração. Se $f \in E$ e $\|f\| = 1$, temos

$$|f(1)| \leq \max_{t \in [0,1]} |f(t)| = \|f\|.$$

Desta forma,

$$|T(f)| \leq 1$$

assim

$$\frac{|T(f)|}{\|f\|} \leq 1 \quad \forall f \in E - \{0\}$$

isto é,

$$|T(f)| \leq \|f\| \quad \forall f \in E$$

isto prova a limitação do operador.

□

Teorema 2.4.1. *(Dimensão Finita) Se um espaço normado X é de dimensão finita, então todo operador linear em X é limitado.*

Demonstração. Seja X um espaço normado tal que $dim\ X = n$ e $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base para X (definição (5.6.3) Apêndice). Considerando qualquer $x = \sum \xi_j e_j$ (definição (5.6.3) Apêndice), e qualquer operador T em X. De modo que T seja linear, segue-se que:

$$\|Tx\| = \left\|T \sum \xi_j e_j\right\| = \left\|\sum \xi_j T e_j\right\| \leq \sum |\xi_j|\ \|Te_j\|.$$

Como $1 \leq j \leq n$ daí

$$\sum |\xi_j|\ \|Te_j\| = |\xi_1|\|Te_1\| + ... + |\xi_n|\|Te_n\|$$

e considerado $max\, \|Te_j\|$, teremos

$$\sum |\xi_j|\|Te_j\| \leq \max_k \|Te_j\| \sum |\xi_j| \tag{2.19}$$

Em $\sum |\xi_j|$, sabemos da desigualdade (5.8) do Apêndice que

$$\|\xi_1 e_1 + ... + \xi_n e_n\| \geq c(|\xi_1| + ... + |\xi_n|)$$

onde $c > 0$. Isto é,

$$\|x\| = \left\|\sum \xi_j e_j\right\| \geq c \sum |\xi_j|$$

assim,

$$\frac{\|x\|}{c} \geq \sum |\xi_j|.$$

Daí, de (2.19), obtemos

$$\|Tx\| \leq \gamma \|x\|$$

com $\gamma = \frac{1}{c}\max_k \|Te_j\|$ logo $\gamma > 0$

Portanto, T é limitado.

$\square$

Operadores são aplicações,daí, aplica-se a definição de continuidade. Isto é fundamental para operadores lineares, continuidade e limitação tornam-se conceitos equivalentes.

Os detalhes são os que seguem:

Definição 2.4.2. *Seja $T : D(T) \to Y$ um operador, não necessariamente linear, onde $D(T) \subset X$ e X e Y são espaços normados. Por definição, o operador T é contínuo em $x_0 \in D(T)$ se para cada $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$\|Tx - Tx_0\| < \epsilon \textit{ para todo } x \in D(T) \textit{ satisfazendo } \|x - x_0\| < \delta.$$

T é contínuo, se T é contínuo em cada $x \in D(T)$.

Teorema 2.4.2. ***(Continuidade e limitação)*** *Seja $T : D(T) \subset X \to Y$ um operador linear e X, Y espaços normados. Então*

a) *T é contínuo se, e somente se, T é limitado.*

b) *Se T é contínuo em um ponto, então T é contínuo.*

Demonstração. Se T é limitado, existe $c > 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in D(T)$$

logo,

$$\|Tx - Ty\| \leq c\|x - y\|$$

Isto mostra que T é lipschitziana, daí T é contínua. Vamos provar agora que se T é contínua em um ponto digamos em x_0, então T é limitada.

Seja $x_0 \in D(T)$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\|Tx - Tx_0\| < \epsilon \quad \forall x \in D(T),\ satisfazendo\ \|x - x_0\| < \delta$$

$\forall x \in D(T)$

Considerando $x_y = x_0 + \delta\frac{y}{2}\|y\| \quad \forall y \in D(T), y \neq 0$, segue-se que

$$x_y - x_0 = \delta\frac{y}{2\|y\|} \quad \forall y \in D(T), y \neq 0$$

e aplicando o operador, e depois a norma, obtemos

$$\|Tx_y - Tx_0\| = \left\| \frac{\delta}{2\|y\|} Ty \right\| < \epsilon$$

pois

$$\|x_y - x_0\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

e portanto,

$$\|Ty\| < \frac{2\epsilon}{\delta} \|y\| = M \|y\| \quad \forall y \in D(T),$$

onde $M = 2\epsilon/\delta > 0$,

com isso provamos a limitação de T. Se T é contínuo em um ponto então T é limitado, como já provamos, portanto T é continuo pelo primeiro item de deste teorema (2.4.2). Isto conclui a demonstração do teorema.

□

Corolário 1. ***(Continuidade e Espaço Nulo)*** *Seja T um operador linear limitado. Então:*

a) $x_n \to x$ *implica* $T(x_n) \to T(x)$, *onde* $x_n, x \in D(T)$.

b) *O espaço nulo $N(T)$ é fechado.*

Demonstração. a) Como T é linear e limitado, de (2.17),

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\| \|x_n - x\|$$

Daí quando $n \to \infty$, $\quad \|x_n - x\| \to 0$.

Logo,

$$\|Tx_n - Tx\| \to 0$$

Isto é

$$T(x_n) \to T(x).$$

b) Para cada $x \in \overline{N(T)}$ existe uma sequência x_n em $N(T)$ tal que $x_n \to x$. Assim, $Tx_n \to Tx$ pelo primeiro item do corolário (1).Como $Tx_n = 0$,também $Tx = 0$, daí $x \in N(T)$.

Então,como $x \in \overline{N(T)}$ é arbitrário, $N(T)$ é fechado.

□

2.5 Funcionais Lineares

Um funcional é um operador cuja imagem encontra-se na reta real $\mathbb{R}$. Denotemos funcionais por letras minúsculas $f, g, h, ...$, o domínio de f por $D(f)$, a imagem por $R(f)$, e o valor de f em um elemento $x \in D$, por $f(x)$. Funcionais são operadores, com as definições anteriores aplicadas.

Definição 2.5.1. *Um funcional linear f é um operador linear com domínio no espaço vetorial X e imagem no corpo escalar K de X, assim*

$$f : D(f) \to K$$

onde $K = \mathbb{R}$.

2.5.1 Funcional Linear Limitado

Definição 2.5.2. *Um funcional linear limitado f é um operador linear limitado com imagem em um corpo escalar do espaço normado X em que domínio $D(f)$ se encontra. Assim, existe um número real c tal que para todo $x \in D(f)$*

$$|f(x)| \leq c\,\|x\| \tag{2.20}$$

Além disso, a norma de f é

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{2.21}$$

ou

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)| \tag{2.22}$$

e por (2.17)

$$|f(x)| \leq \|f\|\,\|x\| \tag{2.23}$$

*e um caso especial do **Teorema** 2.4.2 é*

Teorema 2.5.1. ***(Continuidade e Limitação)*** *Um funcional linear f com domínio $D(f)$ em um espaço normado é contínuo se e somente se f é limitado. As linhas da demonstração deste teorema é a mesma da demonstração do **Teorema** (2.4.2). Basta considerar o operador como um funcional linear.*

2.5.2 Exemplos de Funcionais Lineares

Exemplo 2.6. *Produto escalar: O produto escalar com um fator mantido fixo define um funcional* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *por meio de*

$$f(x) = x.a = \xi_1.a_1 + \xi_2.a_2 + \xi_3.a_3$$

onde, $a = (\alpha_j) \in \mathbb{R}^3$ *é fixado,* f *é linear com as operações usuais em* $\mathbb{R}$*.Além disso,*f *também é limitado,de fato*

$$|f(x)| = |x.a| \leq \|x\| \|a\|$$

Para que $|f(x)| \leq \|a\|$ *segue de (2.22). Por outro lado, tendo* $x = a$ *e usando (2.23), obtemos:*

$$\|f\| \geq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|$$

assim,a norma de f *é* $\|f\| = \|a\|$.

Exemplo 2.7. *(Integral Definida): A integral é um funcional no espaço* $C[a, b]$*. Então escolhemos f definida por*

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt,$$

f *é linear de (2.4) e limitado,com a norma* $\|f\| = b - a$*.De fato,escrevendo* $J = [a, b]$ *e relembrando a norma do máximo em* $C[a, b]$ *obtemos*

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)dt\right| \leq (b - a) \max_{t \in J} |x(t)| = (b - a) \|x\| .$$

Tomando o supremo sobre todo o x *de norma 1, obtemos* $\|f\| \leq b - a$*. Para obter* $\|f\| \geq b - a$*, escolhemos em particular* $x = x_0 = 1$*, note que* $\|x\| = 1$ *e usando (2.23)*

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \int_a^b dt = b - a.$$

Exemplo 2.8. *(O espaço* $C[a, b]$*): Outro importante funcional no espaço* $C[a, b]$ *é obtido se escolhermos* t_0 *fixo em* $J = [a, b]$ *e pondo*

$$f_1(x) = x(t_0)$$

com $x \in C[a, b]$*.*

f_1 *é linear pelas operações usuais entre funções e limitado com norma* $\|f_1\| = 1$*.De fato,temos*

$$|f_1(x)| = |x(t_0)| \leq \|x\| .$$

Isso implica que $\|f_1\| \leq 1$ *por (2.22).Por outro lado, para a* $x_0 = 1$ *temos* $\|x_0\| = 1$ *e obtemos de (2.23)*

$$\|f_1\| \geq |f_1(x_0)| = 1$$

2.6 Espaço Normado de Operadores. Espaço Dual

Definição 2.6.1. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Denotamos por $B(X,Y)$ o conjunto de todos os operadores lineares limitados de X em Y.*

Teorema 2.6.1. ***(O espaço** $B(X,Y)$**)**.O espaço vetorial $B(X,Y)$ de todos os operadores lineares limitados de um espaço normado X em um espaço normado Y é em si um espaço normado e sua norma é definida por*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\| \tag{2.24}$$

Teorema 2.6.2. ***(Completeza)**. Se Y é um espaço de Banach, então $B(X,Y)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Consideramos uma sequência de Cauchy arbitrária (T_n) em $B(X,Y)$ e mostraremos que converge para um operador $T \in B(X,Y)$. Como (T_n) é de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existe um N tal que

$$\|T_n - T_m\| < \epsilon$$

com $m, n > N$.

Para todo $x \in X$ e $m, n > N$ podemos obter de

$$\|Tx\| \leq \|T\| . \|x\|$$

.

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| < \epsilon \|x\| \tag{2.25}$$

Agora para qualquer x fixo e dado ϵ' podemos escolher $\epsilon = \epsilon_x$ de modo que $\epsilon_x \|x\| < \epsilon'$. Então, a partir de (2.25) temos $\|T_n x - T_m x\| < \epsilon'$ e vemos que $(T_n x)$ é de Cauchy em Y. Uma vez que Y é completo,$T_n x$ converge,digamos que $T_n x \to y$.Claramente, o limite $y \in Y$ depende da escolha de $x \in X$.Isto define um operador $T : X \to Y$, onde $y = Tx$. O operador T é linear ja que

$$\lim T_n(\alpha x + \beta z) = \lim(\alpha T_n x + \beta T_n z) = \alpha \lim T_n x + \beta \lim T_n z$$

Provaremos que T é limitado e $T_n \to T$, ou seja,$\|T_n - T\| \to 0$.Como (2.25) é válida para todo $m > N$ podemos deixar $m \to \infty$.Usando a continuidade da norma, obtemos a partir de (2.25) para todo $n > N$ e $x \in X$

$$\|T_n x - Tx\| = \left\| T_n x - \lim_{m\to\infty} T_m x \right\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n x - T_m x\| \leq \epsilon \|x\| . \tag{2.26}$$

Isso mostra que $(Tn - T)$, com $n > N$ é um operador linear limitado. Uma vez que T_n é limitada, $T = Tn - (Tn - T)$ é limitada, isto é, $T \in B(X,Y)$. Além disso, se em (2.26) tomarmos o supremo sobre todo x de norma 1, obtemos

$$\|T_n - T\| \leq \epsilon \qquad n > N$$

Assim $\|T_n - T\| \to 0$

como queríamos.

$\square$

Definição 2.6.2. ***(Espaço Dual*** *X'**)*** *Seja X um espaço normado.Daí o conjunto de todos os funcionais lineares limitados em X constitui um espaço normado com a norma definida por*

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |f(x)| \tag{2.27}$$

que é chamado de espaço dual de X e é denotado por X'

Teorema 2.6.3. ***(Espaço Dual).*** *O espaço dual X' de um espaço normado X é um espaço de Banach.*

Definição 2.6.3. *(Isomorfismo) Um isomorfismo de um espaço normado X em um espaço normado Y é um operador linear bijetivo $T : X \to Y$ que preserva a norma,isto é, para todo $x \in X$*

$$\|Tx\| = \|x\|$$

(Assim ,T é uma isometria)X é dito isomorfo a Y,e ainda, X e Y são chamados espaços normados isomorfos.

2.6.1 Exemplos de Espaço Dual

Exemplo 2.9. *O Espaço Dual de $\mathbb{R}^n$ é $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ uma base para $\mathbb{R}^n$ com $\|e_i\| = 1$,$i = 1, \cdots, n$. Seja $\phi \in (\mathbb{R}^n)'$ e façamos $\phi(e_i) = y_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$. Definamos

$$y = y_i = (\phi(e_1), \phi(e_2), \cdots, \phi(e_n)) \in \mathbb{R}^n$$

e definamos agora o seguinte operador

$$T : (\mathbb{R}^n)' \to \mathbb{R}^n$$

$$\phi \to T\phi = (\phi(e_1), \phi(e_2), \cdots, \phi(e_n))$$

onde $y = (\phi(e_1), \phi(e_2), \cdots, \phi(e_n))$.Temos que

i) T está bem definido,pois é definido nos elementos da base de $\mathbb{R}^n$;

ii) T é linear, com efeito, sejam $\phi, \varphi \in (\mathbb{R}^n)'$ tal que $\phi(e_i) = y_i$ e $\varphi(e_i) = z_i,\ i = 1, \cdots, n$. Assim

$$\begin{aligned}
T(\phi + \lambda\varphi) &= ((\phi + \lambda\varphi)(e_1), (\phi + \lambda\varphi)(e_2), \cdots, (\phi + \lambda\varphi)(e_n)) \\
&= (\phi(e_1) + \lambda\varphi(e_1), \phi(e_2) + \lambda\varphi(e_2), \cdots, \phi(e_n) + \lambda\varphi(e_n)) \\
&= (\phi(e_1), \phi(e_2), \cdots, \phi(e_n)) + \lambda(\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n)) \\
&= T\phi + \lambda T\varphi
\end{aligned}$$

iii) T é sobrejetor, com efeito, dado $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos ϕ tal que

$$\phi(e_1) = z_1,\ \phi(e_2) = z_2, \cdots,\ \phi(e_n) = z_n.$$

Como $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então $\phi \in \mathbb{R}^n$ e

$$\begin{aligned} T\phi &= (\phi(e_1), \phi(e_2), \cdots, \phi(e_n)) \\ &= (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

iv) T preserva a norma $\left(\|T\phi\|_{\mathbb{R}^n} = \left\|\phi_{(\mathbb{R}^n)'}\right\|\right)$. Note que

$$\begin{aligned} \|T\phi\| = \|y\| &= \|(\phi(e_1), \phi(e_2), \cdots, \phi(e_n))\| \\ &= \sup_{1\leq j\leq n} \|\phi(e_j)\| \\ &\leq \sup_{1\leq j\leq n} \|\phi\| \,\|(e_j)\| = \sup_{1\leq j\leq n} \|\phi\| = \|\phi\|\,, \text{pois } \|e_j\| = 1. \end{aligned}$$

Assim

$$\|T\phi\| \leq \|\phi\|\,. \tag{2.28}$$

Agora seja $x \in \mathbb{R}^n$, então

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j.$$

Assim

$$\begin{aligned} |\phi(x)| &= \left|\phi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} x_j \phi(e_j)\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|\, |\phi(e_j)| \leq \|x\|\, \|y\| = \|x\|\, \|T\phi\| \end{aligned}$$

logo $\frac{|\phi(x)|}{\|x\|} \leq \|T\phi\|$ assim, $\sup_{x\neq 0} \frac{|\phi(x)|}{\|x\|} \leq \|T\phi\|$ implicando que

$$\|T\phi\| \geq \|\phi\|\,. \tag{2.29}$$

De (2.28) e (2.29) temos

$$\|T\phi\| = \|\phi\|$$

Portanto $(\mathbb{R}^n)' \cong \mathbb{R}^n$

□

Exemplo 2.10. *O Espaço Dual de l^1 é l^∞*

Demonstração. Uma base de Schawder (definição 2.2.1) para ℓ^1 é $(e_k) = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$; onde cada $x \in \ell^1$ tem uma única representação

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k. \tag{2.30}$$

Vamos considerar $f \in \ell^{1'}$, onde $\ell^{1'}$ é o espaço dual de ℓ^1 .Uma vez que f é linear e limitada,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k,\ \text{com } \gamma_k = f(e_k), \tag{2.31}$$

onde os numeros $\gamma_k = f(e_k)$ são determinados unicamente por f. Também $\|e_k\| = 1$ e

$$|\gamma_k| = |f(e_k)| \leq \|f\| \cdot \|e_k\| = \|f\|, \qquad \sup_k |\gamma_k| \leq \|f\| \tag{2.32}$$

Assim $(\gamma_k) \in \ell^\infty$.

Por outro lado, para cada $b = (\beta_k) \in \ell^\infty$ podemos obter um funcional linear limitado correspodente g de ℓ^1. De fato,Podemos definir g de ℓ^1 por,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k \tag{2.33}$$

onde $x = (\xi_k) \in \ell^1$.Então g é linear e a limitação segue de

$$|g(x)| \leq \sum |\xi_k \beta_k| \leq \sup |\beta_j| \sum |\xi_k| = \|x\| \cdot \sup |\beta_j| \tag{2.34}$$

Daí $g \in \ell^{1'}$.

Mostraremos agora que a norma de f é a norma no espaço ℓ^∞, de (2.31) temos,

$$|f(x)| = \left| \sum \xi_k \gamma_k \right| \leq \sup_j |\gamma_j| \cdot \sum |\xi_k| = \|x\| \cdot \sup_j |\gamma_j| \tag{2.35}$$

considerando o supremo sobre todo x de norma 1, temos

$$\|f\| \leq \sup_j (\gamma_j)$$

daí de (2.32)

$$\|f\| = \sup_j (\gamma_j)$$

que é a norma em ℓ^∞. Assim, está formula pode ser escrita $\|f\| = \|c\|_\infty$ onde $c = (\gamma_j) \in \ell^\infty$, isso mostra que a aplicação linear bijetiva de ℓ^1 em ℓ^∞ definida por $f \mapsto c = (\gamma_j)$ é um isomorfismo.

Capítulo 3

Espaços com Produto Interno.Espaços de Hilbert

3.1 Espaços com Produto Interno. Espaços de Hilbert

Definição 3.1.1. *Um espaço com produto interno(ou pré-espaço de Hilbert) é um espaço vetorial X com um produto interno definido em X. Um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno completo(completo na métrica definida pelo produto interno). Aqui um produto interno em X é uma aplicação de $X \times X$ no corpo escalar K de X, isto é, para cada par de vetores x e y associamos um escalar que é escrito como*

$$\langle x, y \rangle$$

e é chamado o produto interno de x com y tal que para todos x, y, z e escalares α teremos

IP1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

IP2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;

IP3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

IP4) $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

Um produto interno em X define uma norma em X denotada por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, y \rangle} \tag{3.1}$$

e uma métrica em X denotada por

$$d(x,\ y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}\ . \tag{3.2}$$

Assim, espaços com produto interno são espaços normados e espaços de Hilbert são espaços de Banach. A prova de (3.1) satisfaz os axiomas (N1) a (N4) de uma norma, e será dada no início da seção (3.4). De (IP1) a (IP3) obtemos as fórmulas

a) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;

b) $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;

c) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$;

Demonstração. **a)** Utilizando as ropriedades (IP1) e (IP2) sucessivamente obtemos

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \langle \alpha x, z \rangle + \langle \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle .$$

b) Usando as propriedades (IP3), (IP2) e novamente a propriedade (IP3) nesta mesma ordem obtemos

$$\langle x, \alpha y \rangle = \langle \alpha y, x \rangle = \alpha \langle y, x \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

completando a prova .

c) De modo semelhante,porém com as propriedades (IP3), (IP1), (IP2) e (IP3) obtemos $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \langle \alpha y + \beta z, x \rangle = \langle \alpha y, x \rangle + \langle \beta z, x \rangle = \alpha \langle y, x \rangle + \beta \langle z, x \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$

completando a prova.

Essas fórmulas são fundamentais e vamos utilizar com bastante frequência. a) mostra que o produto é linear no primeiro fator.Mostraremos agora atravez de um cálculo simples com o uso das propriedades aqui apresentadas,que a norma proveniente de um produto interno satisfaz a importante igualdade do paralelogramo

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{3.3}$$

De (3.1)

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle$$

aplicando as propriedades (IP1) ,(IP2)e (IP3) no segundo membro da igualdade anterior obtemos

$$\langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle + \langle x, x - y \rangle - \langle y, x - y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle - (\langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle)$$

novamente de (3.1) e (IP3) vamos ter

$$= \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$= 2 \|x\|^2 + 2 \|y\|^2$$

$$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

completando a prova. □

3.1.1 Ortogonalidade

Definição 3.1.2. *Um elemento x de um espaço com produto interno X é dito ortogonal a um elemento $y \in X$ se*

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Se x e y são ortogonais escrevemos $x \perp y$. Similarmente, para $A, B \subset X$ escrevemos $x \perp A$ se $x \perp a$ para todo $a \in A$ e $A \perp B$ se $a \perp b$ para todo $a \in A$ e para todo $b \in B$.

3.2 Exemplos de espaços de Hilbert

3.2.1 Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$

Demonstração. O espaço $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Hilbert e escrevemos o produto interno por

$$\langle x, y\rangle = \xi_1.\eta_1 + \xi_2.\eta_2 \ldots, \xi_n.\eta_n \tag{3.4}$$

onde $x = (\xi_j) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ e $y = (\eta_j) = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$,

de fato, de (3.4) obtemos

$$\|x\|_1 = \langle x, x\rangle^{1/2} = ({\xi_1}^2 + \ldots + {\xi_n}^2)^{1/2}$$

e a métrica euclidiana é definida por

$$d(x,\ y) = \|x - y\| = \langle x - y, x - y\rangle^{1/2} = \left[(\xi_1 - \eta_1)^2 + \ldots + (\xi_n - \eta_n)^2\right]^{1/2}.$$

A completeza de $\mathbb{R}^n$ foi provada na seção (2.1.1). □

3.2.2 Espaço sequência ℓ^2

Demonstração. O espaço ℓ^2 é um espaço de Hilbert com o produto interno denotado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j \tag{3.5}$$

a convergencia desta série segue apartir da desigualdade de Cauchy Schwarz (5.5) do Apêndice.Provar que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j < \infty$$

é dizer que $f : \ell^2 \times \ell^2 \to K$ está bem definida,onde K é um corpo escalar de X. Assim,pela desigualdade de Cauchy Schwarz (5.5) do apêndice

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2}\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2}$$

uma vez que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty$$

e

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2 < \infty$$

onde $\xi_j, \eta_j \in \ell^2$ concluimos que

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j.\eta_j| < \infty$$

isto é, a série é absolutamente convergente, portanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j < \infty \ .$$

A norma está definida por

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = (\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2)^{1/2} \ .$$

A completeza deste espaço se observa a partir da completesa de l^p que está na seção (2.1.2), basta considerar o caso $p = 2$.

□

3.3 Exemplos de espaços que não são de Hilbert

3.3.1 Espaço ℓ^p com $p \neq 2$

Demonstração. O espaço l^p com $p \neq 2$ não é um espaço com produto interno,portanto não é um espaço de Hilbert. Nossa afirmação se dá pelo fato de que a norma de ℓ^p com $p \neq 2$ não pode ser obtida apartir de um produto interno. Provamos isto mostrando que a norma não satisfaz a igualdade do paralelogramo (3.3).De fato,considerando

$x = (1, 1, 0, 0, 0, \cdots) \in \ell^p$ e $y = (1, -1, 0, 0, 0, \dots) \in \ell^p$ e calculando

$$\|x\| = (|1|^p + |1|^p)^{1/p} = 2^{1/p}$$

e

$$\|y\| = (|1|^p + |-1|^p)^{1/p} = 2^{1/p}.$$

De onde temos

$$\|x + y\| = (|1 + 1|^p + |1 - 1|^p)^{1/p} = (2^p)^{1/p} = 2$$
$$\|x - y\| = (|1 - 1|^p + |1 - (-1)|^p)^{1/p} = (2^p)^{1/p} = 2$$

observando que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 8$$

e

$$2(\|x|^2 + \|y\|^2) = 2[(2^{1/p})^2 + (2^{1/p})^2] = 2(2^{2/p} + 2^{2/p}) = 2(2.2^{2/p}) = 2(2^{(2/p)+1}) = 2^{(2/p)+2}$$
$$= 2^{(2+2p)/p}$$

Logo para $p \neq 2$, ℓ^p é um espaço de Banach ,mas não é um espaço de Hilbert. O mesmo é válido para o espaço do próximo exemplo.

□

3.3.2 Espaço $C[a,b]$

Demonstração. O espaço $C[a,b]$ não é um espaço com produto interno, portanto não é um espaço de Hilbert. Mostraremos que a norma definida por

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| \quad J = [a,b]$$

não pode ser obtida a partir de um produto interno, uma vez que esta norma não satisfaz a igualdade do paralelogramo (3.3).De fato, se considerarmos

$$x(t) = 1$$

e

$$y(t) = (t-a)/(b-a)$$

como

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{(t-a)}{(b-a)} = \frac{(b+t-2a)}{(b-a)}$$

$$x(t) - y(t) = 1 - \frac{(t-a)}{(b-a)} = \frac{(b-t)}{(b-a)}$$

logo

$$\|x+y\| = \max_{t \in J} \left| \frac{(b+t-2a)}{(b-a)} \right| = \max_{t \in J} \left| \frac{(2b-2a)}{(b-a)} \right| = \max_{t \in J} \left| \frac{(2(b-a))}{(b-a)} \right|$$

$$= \max_{t \in J} |2| = 2$$

$$\|x-y\| = \max_{t \in J} \left| \frac{(b-t)}{(b-a)} \right| = \max_{t \in J} \left| \frac{(b-a)}{(b-a)} \right|$$
$$= \max_{t \in J} |1| = 1$$

$$\|x\| = \max_{t \in J} |1| = 1$$

$$\|y\| = \max_{t \in J} \left| \frac{(t-a)}{(b-a)} \right| = \max_{t \in J} \left| \frac{(b-a)}{(b-a)} \right| = 1$$

temos

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4 + 1 = 5$$

e

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2(1+1) = 4 \neq 5$$

completando a prova.

□

3.4 Propriedades adicionais de espaços com produto interno

Antes de tudo devemos verificar que (3.1) define uma norma. As propriedades (N1) e (N2) seguem de (IP4). De fato,

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle \geq 0 \ e \ \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Além disso, (N3), é obtido através da ultilização de (IP2) e (IP3). De fato,

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x\rangle = \alpha \langle x, \alpha x\rangle = \alpha\alpha \langle x, x\rangle = |\alpha|^2 . \|x\|^2 .$$

Finalmente,(N4) está incluido no

Lema 3.4.1. ***Desigualdade de Schwarz e Desigualdade triangular***. *Um produto interno e sua correspondente norma satisfaz as desigualdades seguintes:*

a)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| . \|y\| \quad (\textit{Desigualdade de Schwarz}) \tag{3.6}$$

onde o sinal de igualdade vale se, e somente se o conjunto $\{x, y\}$ é Linarmente Dependente.

b)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| .(\textit{Desigualdade triangular}) \tag{3.7}$$

onde o sinal de igualdade vale se e somente se $y = 0$ ou $x = c.y$ com $c \geq 0$ e $c \in R$.

Demonstração.

a) Se $y = 0$, então (3.6) vale pois $\langle x, 0\rangle = 0$. Seja $y \neq 0$. Para um escalar α temos

$$0 \leq \|x - \alpha y\|^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle$$

$$= \langle x, x - \alpha y\rangle + \langle -\alpha y, x - \alpha y\rangle$$

e usando as propriedades do produto interno obtemos

$$= \langle x, x\rangle + \langle -\alpha y, x\rangle - \alpha \langle x, y\rangle + \alpha^2 \langle y, y\rangle$$

Logo

$$= \langle x, x\rangle - \alpha \langle y, x\rangle - \alpha[\langle y, x\rangle - \alpha \langle y, y\rangle]$$

Vemos que a ultima espressão entre colchetes é zero se escollhermos

$$\alpha = \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

A desigualdade restante é

$$0 \leq \langle x, x\rangle \ - \frac{\langle y, x\rangle . \langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

Aqui utilizou-se $\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle$. Multiplicando por $\|y\|^2$, e transferindo o último termo para o primeiro membro e tomando a raiz quadrada obtemos:

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 . \|y\|^2 \Rightarrow |\langle x,y\rangle| \leq \|x\| . \|y\|.$$

A igualdade vale se, e somete se $y = 0$ ou $0 = \|x - \alpha y\|^2$, daí $x - \alpha y = 0 \Rightarrow x = \alpha y$ que mostra a dependência linear.

b) Temos:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle x,y\rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Schwarz

$$|\langle x,y\rangle| = |\langle y,x\rangle| \leq \|x\| . \|y\| .$$

Assim

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

considerando a raiz quadrada em ambos os membros temos

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

□

Lema 3.4.2. ***(Continuidade do produto interno)***

Se em um espaço com produto interno tivermos $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$

Demonstração. Temos que

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x,y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x,y\rangle|$$

proseguindo temos pela desigualdade triangular que

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x,y\rangle| \leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| .$$

Finalmente pela desigualdade de Schwarz (3.6) obtemos,

$$|\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\| \to 0$$

pois $y_n - y \to 0$ e $x_n - x \to 0$ quando $n \to \infty$ e x_n e y_n são limitadas. Portanto,

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x,y\rangle| \to 0$$

quando $n \to \infty$, isto é, $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$ como queríamos.

□

3.4.1 Representação de funcionais em espaços de Hilbert

Teorema 3.4.1. ***(Teorema da Representação de Riesz em Hilbert)*** *Todo funcional linear limitado f definido em um espaço de Hilbert H pode ser representado da forma*

$$f(x) = \langle x,\ z\rangle \ \ \forall\ x \in H. \tag{3.8}$$

onde z é único e depende de f,e ainda

$$\|z\| = \|f\|\,. \tag{3.9}$$

Iremos dividir a demonstração em três etapas:

1ª Etapa: ***Representação do funcional.***

Se $f = 0$, de (3.8) e (3.9) temos $z = 0$.
Se $f \neq 0$, como $N(f)$ é um subespaço vetorial (pelo teorema (5.6.2)) e fechado (pelo corolário 1) de H, $f \neq 0$ implica $N(f) \neq H$. Daí pelo teorema (5.6.1)

$$H = N(f) \oplus N(f)^{\perp}$$

e $N(f)^{\perp} \neq \{0\}$; pois se $N(f)^{\perp} = \{0\}$ teriamos $H = N(f)$ absurdo, logo existe $z_0 \neq 0$ com $z_0 \in N(f)^{\perp}$ fixando um $x \in H$, considere,

$$v = f(x)\cdot z_0 - f(z_0)\cdot x. \tag{3.10}$$

Aplicando f obtemos,

$$\begin{aligned} f(v) &= f(f(x)\cdot z_0 - f(z_0)\cdot x) \\ &= f(f(x)\cdot z_0) - f(f(z_0)\cdot x) \end{aligned}$$

como $f(x)$ é constante pois x é fixo, temos

$$f(v) = f(x)\cdot f(z_0) - f(z_0)\cdot f(x) = 0 \tag{3.11}$$

isto mostra que $v \in N(f)$, e temos que $v \perp z_0$, pois $v \in N(f)$ e $z_0 \perp N(f)$, devido $z_0 \in N(f)^{\perp}$ isto implica que $\langle v,\ z_0\rangle = 0$, com isso temos,

$$\begin{aligned} 0 = \langle v,\ z_0\rangle &= \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0\rangle \\ &= \langle f(x)\cdot z_0,\ z_0\rangle - \langle f(z_0)x,\ z_0\rangle \\ &= f(x)\langle z_0,\ z_0\rangle - f(z_0)\langle x,\ z_0\rangle \\ &= f(x)||z_0||^2 - f(z_0)\langle x,\ z_0\rangle \end{aligned}$$

e como $z_0 \neq 0$ podemos concluir

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}\cdot\langle x,\ z_0\rangle \tag{3.12}$$

e temos,

$$
\begin{aligned}
\frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2} \cdot \langle x,\ z_0 \rangle &= \frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2} \cdot \langle z_0,\ x \rangle \\
&= \left\langle \frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2} \cdot z_0,\ x \right\rangle \\
&= \left\langle x,\ \frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2} \cdot z_0 \right\rangle
\end{aligned}
$$

e podemos escrever apartir de (3.8)

$$z = \frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2} \cdot z_0. \tag{3.13}$$

Como $x \in H$, e é arbitrário, (3.8) está provado, isto é, temos a igualdade,

$$f(x) = \langle x,\ z \rangle \ \ \forall\ x \in H. \tag{3.14}$$

Observação 3.1. *Note que o vetor em (3.13) não depende de x.*

2ª Etapa: *Unicidade do vetor* z.

Suponhamos que existam z_1 e z_2 vetores em H tal que

$$f(x) = \langle x,\ z_1 \rangle = \langle x,\ z_2 \rangle \ \ \forall\ x \in H \tag{3.15}$$

daí

$$\langle x,\ z_1 \rangle - \langle x,\ z_2 \rangle = 0\ \forall\ x \in H. \tag{3.16}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\langle x,\ z_1 \rangle - \langle z_2,\ x \rangle &= \langle x,\ z_1 \rangle + \langle -z_2,\ x \rangle \\
&= \langle z_1,\ x \rangle + \langle -z_2,\ x \rangle \\
&= \langle z_1 - z_2,\ x \rangle \\
&= \langle x,\ z_1 - z_2 \rangle = 0\ \forall\ x \in H.
\end{aligned}
$$

Em partcular para $x = z_1 - z_2$ temos

$$\langle z_1 - z_2, z_1 - z_2 \rangle = \|z_1 - z_2\|^2 = 0.$$

Portanto,

$$z_1 = z_2,$$

isto prova a unicidade de z.

3ª Etapa: *Igualdade das Normas.*

Se $f = 0$ então $z = 0$ e 3.9 vale. Seja $f \neq 0$ então $z \neq 0$ .De (3.8) com $x = z$ e da limitação de f segue,

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = f(z) \leq \|f\| \cdot \|z\|. \tag{3.17}$$

dividindo por $\|z\| \neq 0$ segue

$$\|z\| \leq \|f\| \tag{3.18}$$

Vamos mostrar agora $\|f\| \leq \|z\|$, de (3.8) e da desigualdade de Schwarz (3.6), temos

$$|f(x)| = |\langle x,\ z\rangle| \leq \|x\| \cdot \|z\|\,, \tag{3.19}$$

isto implica

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x,\ z\rangle| \leq \|z\| \tag{3.20}$$

de (3.18) e (3.20) concluímos

$$\|f\| = \|z\|\,.$$

□

Lema 3.4.3. *Se $\langle v_1,\ w\rangle = \langle v_2,\ w\rangle$ para todo w no espaço com produto interno X, então $v_1 = v_2$, em particular, $\langle v_1,\ w\rangle = 0$ para todo $w \in X$ implica $v_1 = 0$.*

Demonstração. Para todo $w \in X$,

$$\langle v_1 - v_2,\ w\rangle = 0. \tag{3.21}$$

para $w = v_1 - v_2$ segue

$$\|v_1 - v_2\|^2 = 0.$$

Assim $v_1 - v_2 = 0$, então $v_1 = v_2$. Em particular, $\langle v_1,\ w\rangle = 0$ com $w = v_1$, daí

$$\|v_1\|^2 = 0,$$

então $v_1 = 0$.

□

Capítulo 4

Teorema do Ponto Fixo de Banach

Um teorema de ponto fixo é um resultado que estabelece condições para que exista um elemento x do domínio de T, tal que $T(x) = x$.Na aplicação a ser apresentada ele nos ajudará a mostrar a existência e unicidade da solução de uma equação diferencial.

Definição 4.0.1. *Um ponto fixo de uma aplicação $T : X \to X$ é um ponto $x \in X$ tal que $Tx = x$.*

Definição 4.0.2. *Seja (X, d) um espaço métrico.Uma aplicação $T : X \to X$ é chamada uma contração sobre X se existe $0 < \alpha < 1$ tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha\ d(x, y) \tag{4.1}$$

Teorema 4.0.2. ***(Ponto Fixo de Banach)**. Seja (X, d) um espaço métrico completo.Se a aplicação $T : X \to X$ é uma contração, então T possui um, e somente um, ponto fixo em X.*

Demonstração. Construiremos uma sequência (x_n) e mostraremos que é de Cauchy, logo convergente pela definição (2.1.1) e então provaremos que seu limite é um ponto fixo de T. Escolhendo $x_0 \in X$ e definindo a "sequência iterativa"(x_n) por

$$x_0,\ x_1 = T(x_0),\ x_2 = T(x_1),\ \ldots, x_n = T(x_{n-1}),\ \ldots,\ x_{n+1} = T(x_n),\ \ldots \tag{4.2}$$

Usando o fato de T ser contração temos

$$d(x_{m+1}, x_m) = \ d(Tx_m, Tx_{m-1})$$

$$\leq \alpha\ d(x_m, x_{m-1}) = \alpha\ d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2})$$

Usando sucessivamente (4.1) encontramos

$$\leq \alpha^2\ d(x_{m-1}, x_{m-2})$$

$$\ldots \leq \alpha^m\ d(x_1, x_0) \tag{4.3}$$

Usando agora a desigualdade triangular temos para $n > m$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n)$$

$$\leq \alpha^m d(x_1, x_0) + \alpha^{m+1} d(x_1, x_0) + \ldots \alpha^{n-1} d(x_1, x_0)$$

De (4.3)

$$\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots \alpha^{n-1}) d(x_1, x_0)$$

e usando a fórmula para a soma da progressão geométrica temos

$$= \alpha^m \cdot \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} d(x_1, x_0)$$

Como $(1 - \alpha^{n-m}) \leq 1$

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_1, x_0)$$

e como $\alpha^n \to 0$ quando $n \to \infty$, segue que (x_n) é de Cauchy.

Como o espaço métrico é completo segue que (x_n) é convergente, digamos $x_n \to x$.Vejamos que este limite é um ponto fixo de T. Da desigualdade triangular e por (4.1)

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_n) + d(x_n, Tx)$$

$$\leq d(x, x_n) + \alpha d(x_{n-1}, x) \to 0$$

quando $n \to \infty$.Implicando que

$$d(x, Tx) = 0$$

logo $x = Tx$. Para provar a unicidade vamos supor que existam $x = Tx$ e $y = Ty$ tais que $x \neq y$ daí

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \Rightarrow d(x, y)(1 - \alpha) \leq 0$$

como $\alpha < 1$ temos $d(x, y) = 0$,isto é, $x = y$. como queríamos.

□

4.1 Aplicação do Teorema do Ponto fixo de Banach:Teorema de Existência e Unicidade

Neste capítulo demonstraremos um Teorema que dá condições suficientes para a existência e unicidade de solução do problema de valor inicial .Um resultado dessa natureza é importante para podermos afirmar que,mediante certas condições,a região está coberta por curvas integrais.Antes,vamos demonstrar alguns resultados preliminares como seguem.

Lema 4.1.1. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto Ω do plano (x,y).Então,uma função diferenciavel $\phi : I \to \mathbb{R}$, é uma solução do problema de valor inicial*

$$y' = f(x, y) \tag{4.4}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{4.5}$$

se e somente se for solução da equação integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s)) ds, \quad x \in I \tag{4.6}$$

Demonstração. Se ϕ é solução do problema de valor inicial,(4.4)-(4.5),então pelo teorema(5.6.3)

$$\int_{x_0}^{x} \phi' dx = \int_{x_0}^{x} f(x,\phi)dx = \phi(x) - \phi(x_0)$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \phi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s,\phi(s))ds \quad x \in \ I$$

isto é, ϕ é solução da equação integral (4.6).Reciprocamente se $\phi : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que é solução da equação integral (4.6),então,pelo teorema (5.6.3)do apêndice, ϕ é diferenciavel e

$$\phi(x) = \phi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s,\phi(s))ds \Rightarrow \phi'(x) = f(x,\phi(x))$$

e portanto, ϕ é solução de (4.4)-(4.5).

□

Lema 4.1.2. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um aberto Ω do plano (x,y) tal que a derivada parcial $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ seja contínua também.Dado um subconjunto limitado $\Omega_0 \subset \overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ existe uma constante $k > 0$ tal que*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k\,|y_1 - y_2| \ \ para\ todos\ (x,y_1)\ (x,y_2) \in \overline{\Omega}_0. \tag{4.7}$$

Demonstração. Seja $\delta \leq dist(\overline{\Omega}_0, \partial\Omega)$, designemos por $\Omega_\delta = \left\{(x,y) \in \Omega : dist((x,y), \overline{\Omega}_0) < \frac{\delta}{2}\right\}$ uma $(\delta/2)$-vizinhança de $\overline{\Omega}_0$. Dados $(x,y_1),(x,y_2) \in \overline{\Omega}_0$ com $|y_1 - y_2| < \delta$, temos que o segmento $[x, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2]$, $0 \leq y \leq 1$, está contido em Ω_δ.Aplicando o teorema (5.6.8) do apêndice,obtemos

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = f_y(x,\xi)(y_1 - y_2) \qquad y_1 > y_2 \tag{4.8}$$

Onde ξ está no segmento descrito acima.Usando

$$M_1 = \max\left\{|f_y(x,y)| : (x,y) \in \overline{\Omega}_\delta\right\}$$

obtemos de (4.8)

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq M_1\,|y_1 - y_2|$$

que é válida para $(x,y_1),(x,y_2) \in \overline{\Omega}_0$ com $|y_1 - y_2| < \delta$.Para os pontos com $|y_1 - y_2| \geq \delta$, a estimativa abaixo se verifica

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq 2M \leq \frac{2M}{\delta}\,|y_1 - y_2|\,,$$

onde M é o $\max|f(x,y)|$ para $(x,y) \in \overline{\Omega}_0$. Logo,para obter (4.7) basta tomar $K = \max\left\{M_1, \frac{2M}{\delta}\right\}$.

□

Teorema 4.1.1. ***Teorema de Existência e Unicidade*** *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto Ω do plano (x,y).Suponhamos que a derivada parcial com relação a segunda variavel, $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$, seja contínua também.Então,para cada (x,y) $\in \Omega$,existem um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função diferenciavel $\phi : I \to \mathbb{R}$ com $(x,\phi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$, que é solução do problema de valor inicial (P.V.I.) (4.4)-(4.5).*

Demonstração. O primeiro passo da demonstração deste teorema é a transformação do problema de valor inicial no problema de resolução de uma equação integral,o que se faz no lema (4.1.1)

Concentremos agora na resolução da equação integral (4.6) .Dado $(x_0, y_0) \in \Omega$,tomemos a e b positivos tais que o retângulo

$$B = \{(x, y); |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \tag{4.9}$$

esteja contido em Ω. Como f é contínua e B é compacto,temos que f é limitada em B;seja

$$M = \max\{|f(x, y)| : \ (x, y) \in B\}$$

Sejam

$$0 < \bar{a} \leq \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

e

$$J_{\bar{a}} = [x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a}] .$$

Seja C o conjunto de todas as funções contínuas $g : J_{\bar{a}} \to \mathbb{R}$ tais que $g(x_0) = y_0$ e $|g(x) - y_0| \leq b$.Graficamente queremos em C as funções contínuas cujos gráficos passem pelo ponto (x_0, y_0) e que estejam contidas no retangulo B. Segue da álgebra das funções contínuas ,que podemos definir a seguinte métrica em C

$$d(g_1, g_2) = \max\{|g_1(x) - g_2(x)| : x \in J_{\bar{a}}\}$$

Já vimos que C é um espaço métrico completo em (2.1.3).Assim, voltemos à consideração da equação integral (4.6).Consideremos a função ϕ definida em C em que cada $y \in C$ associa a função

$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y\,(s))ds.$$

Observe que $g(x)$ é uma função contínua para $x \in J_{\bar{a}}$,que $g(x_0) = y_0$ e que

$$|g(x) - y_0| = \left|y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds - y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds\right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y(s))|\,ds$$
$$\leq M(x - x_0) \leq M\,|x - x_0| \leq M\overline{a} \leq b$$

e consequentemente $g \in C$ .Logo ϕ é definida de C em C.

A equação integral (4.6) pode ser escrita na forma funcional

$$y = \phi(y).$$

Portanto as soluções de (4.6) são os pontos fixos de ϕ.A ideia agora é usar o teorema do ponto fixo de Banach.Afim de aplicar este teorema ao problema que estamos estudando,resta apenas verificar se ϕ é uma contração.Para tal escrevemos:

$$|\phi(g_1(x)) - \phi(g_2(x))| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))]ds\right| \tag{4.10}$$

Para estimar o integrando no segundo membro de (4.10),usamos Lema (4.1.2) e a desigualdade (5.9) do Apêndice ,obtendo

$$|\phi(g_1(x)) - \phi(g_2(x))| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))]ds\right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))|\,ds$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} K\,|g_1(s) - g_2(s)|\,ds = K \int_{x_0}^{x} |g_1(s) - g_2(s)|\,ds \leq K\,|x - x_0|\max|g_1(s) - g_2(s)|$$

$$\leq K\bar{a}\ d(g_1, g_2)$$

e portanto

$$d(\phi(g_1), \phi(g_2)) \leq K\bar{a}\ d(g_1, g_2).$$

Concluimos que ϕ é uma contração se $K\bar{a} < 1$.Logo basta tomar $\bar{a} < \frac{1}{K}$.E o teorema fica demonstrado com $I = (x - \bar{a}, x + \bar{a})$.

$\square$

Capítulo 5

Apêndice

5.1 Espaços Métricos

Definição 5.1.1. ***Espaços Métricos**:*

Uma métrica num conjunto X é uma função d: $X \times X \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in X$:

d1) $d(x, x) = 0$;

d2) *Se* $x \neq y$, *então* $d(x, y) \geq 0$;

d3) $d(x, y) = d(y, x)$;

d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Os postulados d1) e d2) dizem que $d(x, y) \geq 0$ e que $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. O postulado d3) afirma que a distância $d(x, y)$ é uma função simétrica das variáveis x, y. A condição d4) chama-se desigualdade triangular. Ela tem origem no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulos não excede a soma dos outros dois.

Um espaço métrico é uma par (X, d), onde X é um conjunto e d é uma métrica em X, ou simplesmente denotamos por X.

Definição 5.1.2. ***Sequência em espaços métricos.***

Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M.Diz-se que o ponto $a \in M$ é limite da sequência (x_n) quando,para todo número $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente,pode-se obter $n_0 \in N$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$.Escreve-se então $a = \lim x_n$.Diz-se também que x_n tende para a e escreve-se ainda $x_n \to a$

Definição 5.1.3. ***Sequências de Cauchy.*** *Uma sequência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma sequência de Cauchy,quando,para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in N$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$.*

Teorema 5.1.1. *Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.*

Teorema 5.1.2. *Toda sequência convergente em um espaço métrico é de cauchy.*

Teorema 5.1.3. *Toda sequência convergente é limitada.*

5.2 O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$

Definição 5.2.1. ***O Espaço Euclidiano*** $\mathbb{R}^n$

Este espaço é obtido se considerarmos o conjunto X de todas as n-úplas de números reais, escrito

$$x = (\xi_j), \qquad y = (\eta_j)$$

com $1 \leq j \leq n$ e as normas definidas por

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} {\xi_i}^2 \right)^{1/2} = \sqrt{(\xi_1)^2 + ... + (\xi_n)^2}. \tag{5.1}$$

$$\|x\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\xi_i|\}. \tag{5.2}$$

$$\|x\|_3 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \,. \tag{5.3}$$

5.3 O espaço l^∞

Definição 5.3.1. ***O Espaço*** l^∞

Este é o Espaço de todas as sequências limitadas de números reais, isto é, cada elemento de l^∞ é uma sequência de números reais

$$x = (\xi_j)$$

tal que para todo $j = 1, 2, ...$ temos

$$\|\xi_j\| \leq c_x$$

onde c_x é um número real que pode depender de x, mas não depende de j.

5.4 O espaço l^p

Definição 5.4.1. *Seja $p \geq 1$ um número real fixado.Por definição,cada elemento do espaço l^p é uma sequência $x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, ...)$ tal que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty \tag{5.4}$$

5.5 O espaço de funções $C[a, b]$

Definição 5.5.1. *Este é o espaço de funções reais contínuas no compacto $J = [a, b]$.*

5.6 Alguns resultados importantes

D1) *Desigualdade de Cauchy-Schwarz;*

Sejam $(\xi_j) \in l^2$ *e* $(\eta_j) \in l^2$, *temos*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2} \tag{5.5}$$

D2) *Desigualdade de Hölder;*

Sejam $(\xi_j) \in l^p$ *e* $(\eta_j) \in l^p$, *com* $p > 1$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *temos*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^q \right)^{1/q} \tag{5.6}$$

D3) *Desigualdade de Minkowski.*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j| \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^p \right)^{1/p} \tag{5.7}$$

com $(\xi_j) \in l^p$ *e* $(\eta_j) \in l^p$, *e* $p \geq 1$

Definição 5.6.1. ***(Independencia linear)*** *Dizemos que um conjunto* $L = \{e_1, \cdots, e_n\}$ *de vetores em um espaço vetorial* X *é linearmente independente se e somente se a igualdade do tipo*

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *escalares só for possível se* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Definição 5.6.2. ***(Dependência linear)*** *Dizemos que um conjunto* $L = \{e_1, \cdots, e_n\}$ *de vetores em um espaço vetorial* X *é linearmente dependente se e somente se* L *não é Linearmente independente ,ou seja, é possível uma igualdade do tipo*

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$$

sem que todos α_j *sejam iguais a zero.*

Definição 5.6.3. *Seja* X *um espaço veorial tal que* $dimX = n$. *Uma independencia linear de n-uplas de vetores de* X *chamada de uma base para* X. *Se* $\{e_1, ..., e_n\}$ *é uma base para* X*,então todo elemento* $x \in X$ *possui uma única representação*

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Lema 5.6.1. ***(Combinações lineares)*** *Seja* $\{x_l, \cdots, x_n\}$ *um conjunto linearmente independente de vetores em um espaço normado* X *(de dimensão n).Então existe um número* $c > 0$ *tal que*

$$\|\xi_1 e_1 + ... + \xi_n e_n\| \geq c(|\xi_1| + ... + |\xi_n|) \tag{5.8}$$

Definição 5.6.4. ***(Soma Direta)*** *Um espaço vetorial H é dito ser uma soma direta dos subespaços Y e Z de H e escrevemos*

$$H = Y \oplus Z$$

se cada $x \in H$ tem uma única representação da forma

$$x = y + z$$

com $y \in Y$ E $z \in Z$.

Definição 5.6.5. *O* ***Complemento ortogonal*** *de um subespaço Y de H,denotado por $Y^{\perp}$ é o conjunto*

$$Y^{\perp} = \{z \in H; z \perp Y\}$$

Teorema 5.6.1. ***(Soma Direta)*** *Seja Y um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H.Então*

$$H = Y \oplus Y^{\perp}$$

Teorema 5.6.2. ***(Núcleo e espaço nulo)*** *Seja T um operador. Então:*

a) *A imagem $R(T)$ é um espaço vetorial;*

b) *Se $dimD(T) = n < \infty$, $dimR(T) \leq n$;*

c) *O espaço nulo $N(T)$ é um espaço vetorial;*

Teorema 5.6.3. ***(Teorema fundamental do cálculo)*** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo I.As seguintes afirmações a respeito de uma função $F : I \to \mathbb{R}$ são equivalentes:*

(1) *F é uma integral indefinida de f, isto é, existe $a \in I$ tal que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$, para todo $x \in I$.*

(2) *F é uma primitiva de f, isto é,$F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

Teorema 5.6.4. ***(Weiertrass)*** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$.Existem x_0 e $x_1 \in X$ tais que*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

para todo $x \in X$.

Teorema 5.6.5. ***(Composição de funções contínuas)*** *Dada $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$,$g : y \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $b = f(a) \in Y$ e $f(X) \subset Y$, de modo que a composta $g \circ f$ esteja bem definida.Então $g \circ f$ é contínua no ponto a.*

Corolário 2. *.Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável e $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$ então $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq K(b-a)$*

Teorema 5.6.6. ***Se*** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ***é integrável então*** $|f|$ ***é integravel e***

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \tag{5.9}$$

Teorema 5.6.7. ***Toda função contínua*** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ***é integrável***

Teorema 5.6.8. ***(Teorema do Valor Médio de lagrange)*** *Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *contínua.Se f é derivável em (a,b),existe* $c\in(a,b)$ *tal que*

$$f'(c)(b-a)=[f(b)-f(a)]$$

Definição 5.6.6. *Uma uma sequência de funções* $f_n : X\to\mathbb{R}$ *converge uniformemente para* $f:X\to\mathbb{R}$ *quando para todo* $\epsilon >$ *o dado,existe* $n_0\in N$*(dependendo apenas de* ϵ*) tal que* $n>n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\epsilon$ *seja qual for* $x\in X$.

Teorema 5.6.9. *Se uma sequência de funções* $f_n : X\to\mathbb{R}$ *converge uniformemente para* $f:X\to\mathbb{R}$ *e cada* f_n *é contínua no ponto* $a\in X$ *então* f *é contínua no ponto* a.

CONCLUSÃO

Como foi visto,estudamos neste trabalho alguns tópicos fundamentais de Análise Funcional,como espaços normados e espaços de Banach e alguns exemplos importantes.Além disso,vimos algumas propriedades de espaços métricos e outros importantes conceitos como operadores lineares,em particular, funcionais lineares,explorando também exemplos fundamentais de seu estudo.Além de termos estudado também o conceito de Espaço Dual,fizemos um estudo significativo de outro importante espaço da Análise Funcional:o espaço de Hilbert,explorando algumas de suas principais propriedades que envolvem produto interno e,é claro citando alguns de seus exemplos.Na parte final do trabalho estudamos o o Teorema do Ponto Fixo de Banach onde foi ultilizado como principal ferramenta para demonstrar o Teorema de existência e unicidade de equações diferênciais proposto.Mas antes de usa-lo,nos preocupamos em transformar o problema de valor inicial no problema de resolução da equação integral (4.6) onde mostramos que suas soluções são os pontos fixos de uma aplicação $\phi : C \to C$ *onde* C *é um espaço métrico completo.Assim,o procedimento realizado teve como principal objetivo chegar nas condições do Teorema do Ponto Fixo de Banach para então aplica-lo,isto é,mostrar que a aplicação* ϕ *é uma contração.Assim,devemos levar em consideração que os resultados aqui apresentados na parte inicial do trabalho,assim como o procedimento realizado para se chegar nas condições do Teorema para aplica-lo tiveram crucial importância,sendo então indispênsáveis para um bom entendimento desta rica disciplina que é a Análise Funcional.*

Referências Bibliográficas

[1] *Kreyszig, Erwin.* ***Introductory functional analysis with applications*** *John Wiley and Sons,United States of America, 1989.*

[2] *Figueiredo, Djairo,.****Equações diferenciais e aplicadas****. 3. ed. Rio de Janeiro,L.T.C 2014.*

[3] *Lima,Elon Lages .* ***Análise Real, Volume 1****. 3. ed. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada,1997.*

[4] *Lima,Elon Lages .****Análise Real, Volume 2****. 2. ed. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada,1981.*

[5] *Lima,Elon Lages .****Espaços Métricos****.4. ed. Rio de Janeiro, Projeto Euclides,IMPA 2005.*