



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ  
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

*MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM SISTEMA PRESA  
PREDADOR.*

ANGÉLICA FIGUEIREDO VILHENA

MACAPÁ-AP

2014



*ANGÉLICA FIGUEIREDO VILHENA*

**MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM SISTEMA PRESA PREDADOR**

Trabalho de conclusão de Curso apresentado ao corpo docente do Curso de Licenciatura em matemática - UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção da Graduação em Licenciatura em Matemática

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Orientador: **Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco**

MACAPÁ-AP

2014

**ANGÉLICA FIGUEIREDO VILHENA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

---

**Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco**

UNIFAP

Orientador

---

**Prof. Dr. Jose Walter Cárdenas Sótil**

UNIFAP

---

**Prof. Dr. Erasmo Senger**

UNIFAP

Avaliado em: \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / 2014

MACAPÁ-AP

2014

*Dedicatória*

A minha família, verdadeira fonte de amor, professores, incentivo e paciência que tiveram comigo.

(Angélica F. Villhena)

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, por todas as bênçãos que me concedeu;

Ao professor Prof<sup>o</sup>. Dr. Guzman pela paciência, amizade, apoio e compreensão durante todo o período que me orientou.

Aos professores Dr. José Walter e Dr. Erasmo por aceitarem me avaliar, fazendo parte da minha banca.

A minha mãe Angela Maria da Gama Figueiredo por incontável número de ajuda.

A meus irmãos pela compreensão e apoio, por tudo que fizeram.

Aos professores do Curso de Matemática da Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, pela contribuição à minha formação Acadêmica.

Ao meu namorado, Leidecley Maciel, pela compreensão apoio e paciência que teve.

Enfim, agradeço a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

“Três verbos importantes existem que, bem conjugados, serão lâmpadas luminosas em nosso caminho: aprender, servir , cooperar”

(Chico Xavier)

# Resumo

Falaremos sobre três modelos da dinâmica populacional, o primeiro é Crescimento Exponencial ou Modelo de Malthus seu modelo assume que o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante, e desta forma a população humana deveria crescer sem nenhuma inibição. A modelagem matemática para descrever o crescimento populacional evoluiu, passando por várias modificações após Malthus - Um dos modelos mais importante e conhecido é do sociólogo belga P. F. Verhulst (1838) que supõe que toda população é predisposta a sofrer inibições naturais em seu crescimento, devendo tender a um valor limite constante quando o tempo cresce. É um modelo de crescimento mais significativo, do ponto de vista biológico. E por último estudaremos o modelo presa-predador também conhecido por modelo Lotka-Volterra, esse modelo trata da interação entre duas espécies, onde uma delas (presa) dispõe de alimentos em abundância e a segunda espécie (predador) tem como suprimento alimentar exclusivamente a população de presas. Esse modelo é dado por um sistema não-linear, pode ser analisado qualitativamente no plano de fase. Esta análise qualitativa é baseada, essencialmente, na variação dos sinais das derivadas do sistema e conseqüentemente no estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio que é realizado através de uma linearização do sistema. Falaremos sobre o Controle Biológico da Broca na Cana-de-Açúcar, a broca- *Diatraea saccharalis* é uma das pragas que atacam a cana-de-açúcar, ela é a de difícil controle, pois se trata de um inseto que passa a maior parte de sua vida no interior da cana, tornando-se difícil seu combate por meio de agentes químicos. Ultimamente a forma mais eficiente de combate da broca tem sido o controle biológico. No Brasil o controle da broca vem sendo efetuado principalmente pela utilização da vespa indiana "Apanteles flavipes". O modelo descreve a interação entre duas espécies, onde uma delas - a presa (neste caso a broca) dispõe de alimento em abundância (cana de açúcar) e a segunda espécie - o predador (neste caso, a vespa), alimenta-se exclusivamente da primeira. Na nossa modelagem matemática, utili-

zaremos o Modelo do tipo Lotka-Volterra: vespa xbroca, determinaremos os coeficientes do nosso sistema: Coeficiente de crescimento interespecífico da broca ( $a$ ); Coeficiente de ataque ( $b$ ); Coeficiente de mortalidade das vespas (na ausência de alimento) ( $\alpha$ ); Taxa de crescimento das vespas ( $\beta$ ), como já sabemos que nem sempre é possível encontrar a solução analítica de uma EDO, temos outra solução que é fazer um cálculo aproximado, apresentaremos dois métodos numéricos para solução de aproximação: Método de Euler e Método de Runge-Kutta com exemplos do modelo de Malthus, o crescimento populacional na forma exponencial.

**Palavras-chave:** Um sistema presa predador, dinâmica das populações, Modelo de Lotka-Volterra.

# Resumen

Hablaremos sobre tres modelos de dinámica poblacional, el primero es Crecimiento Exponencial o Modelo de Malthus, este modelo asume que el crecimiento de una población es proporcional a la población en cada instante, y de esta forma a población humana debería crecer sin ninguna inhibición. El modelo matemático para describir el crecimiento poblacional evolucionó, pasando por varias modificaciones después de Malthus - Uno de los modelos más importante y conocido es del sociólogo belga P. F. Verhulst (1838) que supone que toda población es predispuesta a sufrir inhibiciones naturales en su crecimiento, debiendo tender a un valor límite constante cuando el tiempo crece. Es un modelo de crecimiento más significativo, del punto de vista biológico. E por último estudiaremos el modelo presa-predador también conocido por modelo Lotka-Volterra, ese modelo trata de la interacción entre dos especies, onde una de ellas (presa) dispone de alimentos en abundancia y la segunda especie (predador) tiene como alimentos exclusivamente a poblaciones de presas. Este modelo es dado por un sistema no-lineal, puede ser analizado cualitativamente en el plano de fase. Este análisis cualitativo es basado, esencialmente, en la variación de los signos de las derivadas del sistema y consecuentemente en el estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio que es realizado a través de una linealización del sistema. Hablaremos sobre el Control Biológico de la Broca na Cana-de-Açúcar, la broca- *Diatraea saccharalis* es una de las plagas que atacan a la caña de azúcar, ella es de difícil control, pues se trata de un insecto que pasa la mayor parte de su vida en el interior de la caña, siendo difícil su combate por medio de agentes químicos. Ultimamente la forma más eficiente de combate de la broca a sido el control biológico. En el Brasil el control de la broca viene siendo efectuado principalmente por la utilización de "Avispa indiana" "Apanteles flavipes". El modelo describe la interacción entre dos especies, onde una de ellas - a presa (en este caso a broca) dispone de alimento en abundancia (caña de azúcar) y la segunda especie - el predador (en este caso, la avispa), se alimenta

exclusivamente de la primera. Em nuestro modelo matemático, utilizaremos el Modelo del tipo Lotka-Volterra: Avispa xbroca, determinaremos los coeficientes de nuestro sistema: Coeficiente de crecimiento interespecífico de la broca (a); Coeficiente de ataque (b); Coeficiente de mortalidad de las avispas (en la ausencia de alimento) (ALFA); Taxa de crecimiento de las avispas (BETA), como ya sabemos que no siempre es posible encontrar la solución analítica de una EDO, tenemos otra solución que es fazer un cálculo aproximado, presentaremos dos métodos numéricos para soluciones de aproximación: Método de Euler e Método de Runge-Kutta con exemplos del modelo de Malthus, el crecimiento poblacional en la forma exponencial.

**Palabras clave:** Un sistema depredador-presa, dinámica de poblaciones, el modelo de Lotka-Volterra.

# Lista de Figuras

2.1	Gráfico criado por Angélica F. Vilhena no winplot . . . . .	20
2.2	Gráfico criado por Angélica F. Vilhena no winplot . . . . .	23
3.1	Rodney C. Bassanezi . . . . .	27
3.2	Rodney C. Bassanezi . . . . .	28
3.3	Rodney C. Bassanezi . . . . .	28
3.4	Rodney C. Bassanezi . . . . .	31
3.5	Rodney C. Bassanezi . . . . .	32
4.1	Renato S. Silva, Regina C. Almeida . . . . .	41
4.2	Renato S. Silva, Regina C. Almeida . . . . .	41
4.3	Renato S. Silva, Regina C. Almeida . . . . .	42
4.4	Renato S. Silva, Regina C. Almeida . . . . .	43
4.5	Renato S. Silva, Regina C. Almeida . . . . .	46

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>15</b>
2.1	Autovetores . . . . .	16
2.2	Autovalores . . . . .	17
2.2.1	Autovalores Reais e distintos . . . . .	17
2.2.2	Autovalores reais iguais . . . . .	17
2.2.3	Autovalores complexos . . . . .	18
2.3	Ponto de equilíbrio . . . . .	18
2.3.1	Classificação quanto à estabilidade dos pontos de equilíbrio . . . . .	18
2.3.1.1	Estável . . . . .	18
2.3.1.2	Instável . . . . .	18
2.4	Equações diferenciais não lineares . . . . .	19
2.4.1	Cálculo das trajetórias de um sistema autônomo . . . . .	19
2.4.2	Linearização de um sistema não linear em torno do ponto de equilíbrio	20
<b>3</b>	<b>Modelos de Dinâmica Populacional: Malthus e Verhulst</b>	<b>24</b>
3.1	Crescimento Exponencial ou Modelo de Malthus . . . . .	24
3.2	Crescimento Logístico ou Verhulst . . . . .	24
3.3	Modelo de Lotka-Volterra . . . . .	25
3.4	Controle Biológico da Broca Cana-de-Açúcar . . . . .	30
3.5	Modelo do tipo Lotka-Volterra: vespa xbroca . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Métodos numéricos para solução aproximada de EDOs</b>	<b>39</b>
4.1	Método de Euler . . . . .	39
4.2	Método de Runge-Kutta . . . . .	43

4.3	Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem . . . . .	44
-----	--	----

# Capítulo 1

## Introdução

A Biomatemática é uma interface entre a Biologia e a Matemática, caracterizada por uma grande extensão de contato que experimenta atualmente um processo de aprofundamento acelerado. Deste processo de mão dupla, tanto questões básicas de Biologia tem sido resolvidas, como novas linhas de pesquisa em Matemática emergiram e adquirem vida própria. A Biomatemática contemporânea pode ser classificada em três ramos distintos quanto aos métodos e abordagem: a tradicional interface oferecida por problemas biofísicos e biomecânicos, a mais recente dedicada à análise genômica e uma terceira que denominaremos de Dinâmica de Populações. Neste trabalho trataremos de Dinâmica populacional, falaremos sobre os modelos de Malthus e Verhulst e nosso tema principal, o modelo de Lotka-Volterra. O modelo de Malthus é conhecido como Crescimento Exponencial, é um modelo que diz que a taxa de crescimento populacional é diretamente proporcional ao tamanho da população, biologicamente, isso nos diz que haverá explosão demográfica caso não haja controle. Já o modelo de Verhulst, é parecido com o modelo de Malthus, com a diferença que a taxa de crescimento populacional é um fator limitante, isto é, não haverá explosão demográfica. E finalmente passaremos para o modelo de Lotka-Volterra, conhecido como o modelo presa-predador, esse modelo trata-se da interação entre duas espécies, onde uma delas (presa) dispõe de alimento em abundância e a segunda espécie (predador) tem como suprimento alimentar exclusivamente a população de presas. Vamos admitir que o meio não deva mudar favorecendo alguma das espécies e que qualquer adaptação seja suficientemente lenta. Simplificadamente, o modelo de Lotka-Volterra supõe que as presas crescem exponencialmente na ausência dos predadores (Modelo de Malthus) e que o fator limitante seja o ataque que as presas sofrem

quando ocorre encontro entre as espécies, neste modelo considera-se que sempre há morte das presas quando ocorre encontro. Para compreensão do modelo de Lotka-Volterra serão necessárias algumas definições de matemática, tais como: Classificação quanto à estabilidade dos pontos de equilíbrio, Equações diferenciais não lineares, Cálculo das trajetórias de um sistema autônomo, Linearização de um sistema não linear em torno do ponto de equilíbrio. E ainda, serão abordados aqui Métodos numéricos para solução aproximada de EDO's.

# Capítulo 2

## Preliminares

Definiremos conceitos básicos de uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$ , e daremos algumas noções de Álgebra Linear, que serão fundamentais para o estudo da estabilidade dentro da análise qualitativa das soluções de EDO's.

**Definição 1:** Dizemos que uma equação diferencial é ordinária se a função incógnita depende de uma única variável independente, isto é,

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x', x'', \dots, x^{n-1}) \quad (2.1)$$

A ordem da equação é estabelecida pelo maior grau da derivada que aparece na equação. Uma equação diferencial ordinária (EDO) de ordem  $n$  é linear se é da forma.

$$a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n x = g(t) \quad (2.2)$$

onde  $a_j, j = 1, \dots, n$  e  $g(t)$  são contínuas e dependem apenas da variável  $t$ . As EDO'S que não podem ser escritas como (2.2) são ditas não lineares.

Uma equação diferencial é dita homogênea se  $g(t) = 0$ . A solução geral de uma EDO é a família de todas as curvas que satisfazem (2.1), onde  $x^0(t_0) = x_0, x^1(t_0) = x_1, \dots, x^{n-1}(t_0) = x_{n-1}$  é a condição inicial,  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ .

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad (2.3)$$

com condições iniciais:

$$\begin{array}{l} x_1(t_0) = x_1^0; \\ x_2(t_0) = x_2^0; \\ \dots\dots\dots; \\ x_n(t_0) = x_n^0 \end{array}$$

**Teorema 2:**(Existência e Unicidade.) Sejam as funções  $F_1, F_2, \dots, F_n$  e as derivadas parciais  $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$  contínuas na região  $R$  do espaço  $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  definido por  $\alpha < t < \beta, \alpha_1 < t_1 < \beta_1, \dots, \alpha_n < t_n < \beta_n$ , e seja  $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  um ponto em  $R$ . Então há um intervalo  $|t - t_0| < h$  no qual só existe uma única solução  $x_1 = \phi(t), \dots, x_n = \phi(t)$  do sistema de equações diferenciais (2.3), que também obedecem às condições iniciais.

## 2.1 Autovetores

**Definição 3:** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  sobre o corpo  $R$ , um autovalor de  $A$  em  $R$  é um escalar  $\lambda$  em  $R$  tal que  $Ax = \lambda x$ , para algum vetor  $x \neq 0$  tal que  $x \in R^n$ . Dizemos que  $x$  é um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$ , onde os autovetores formam uma base para o auto espaço de  $A$ . Além disso, de  $Ax = \lambda x$ , temos:

$$(A - \lambda I)x = 0; \quad (2.4)$$

onde  $I$  é a matriz identidade.

## 2.2 Autovalores

**Definição 4:** Dado (2.4) definimos o polinômio característico de  $A$  da seguinte forma:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} a_1 + \dots + a_n = 0$$

onde os autovalores de  $A$  em  $R$  são as raízes de  $p(\lambda)$ .

**Definição 5:** Um sistema de  $n$  equações diferenciais lineares de primeira ordem é um sistema:

$$X' = Ax;$$

onde  $A$  é a matriz de ordem  $n$ , cujas entradas representam os coeficientes constantes do sistema de EDO'S e  $x \in R^n$  é um vetor. Por exemplo, se  $n = 2$  na definição (5), temos:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

onde  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  e  $a_{22}$  são números reais dados. Assim a matriz dos coeficientes associada ao sistema de equações diferenciais acima é dada por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Encontrado os autovalores através do polinômio característico, temos que estes podem ser: reais e distintos; reais e iguais; complexos e distintos.

### 2.2.1 Autovalores Reais e distintos

Sejam  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Neste caso a solução é  $y_i = c_i e^{\lambda_i t}$ , para  $i = 1, 2, \dots$

(a) se os autovalores tem sinais iguais, isto é, se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são ambos positivos ou negativos, então o equilíbrio é um nó estável;

(b) se os autovalores tem sinais opostos, isto é,  $\lambda_1$  é negativo e  $\lambda_2$  é positivo ou vice versa, então o ponto de equilíbrio é um ponto de sela.

### 2.2.2 Autovalores reais iguais

Logo as soluções são dadas por  $y_1 = c_1 e^{\lambda t}$  e  $y_2 = (c_2 + c_1 \gamma t) e^{\lambda t}$ .

(a) Para  $\lambda < 0$ , a trajetória passa no ponto  $(c_1; c_2)$  e  $t = 0$  e tende a zero para o tempo variando. Temos aqui nó impróprio estável;

- (b) Para  $\lambda > 0$ , a trajetória vai para o infinito para o tempo variando. Temos aqui nó impróprio instável;
- (c) Para  $\lambda = 0$ , temos a estrela com trajetórias tendendo para a origem ou se afastando conforme o sinal negativo ou positivo dos autovalores.

### 2.2.3 Autovalores complexos

sejam  $\lambda = \alpha \pm \beta i$ . Se  $\alpha \neq 0$  e  $\beta \neq 0$ , temos que a solução em coordenadas polares  $(r; \theta)$  é dada por:  $r(t) = r_0 e^{\alpha t}$ , e  $\theta(t) = \theta_0 - \beta t$ . Logo, se:

- (a)  $\alpha < 0 < \beta$ , o raio  $r$  decresce com o tempo, fazendo com que as trajetórias tendam para a origem no sentido horário, pois o ângulo  $\theta$  decresce com o tempo. A origem então é um foco estável ou um ponto espiral. Se tanto  $\alpha$  quanto  $\beta$  forem negativos temos apenas o sentido anti-horário.
- (b) Se  $\alpha$  e  $\beta$  forem positivos, temos que as trajetórias estarão espiralando para fora no sentido anti-horário. Então a origem será estável.
- (c) Se  $\alpha = 0$  e  $\beta > 0$ , temos que  $r$  permanece constante quando  $\theta$  decresce e a trajetória estará se movendo sobre um círculo fechado em sentido horário e se  $\beta < 0$ , temos o sentido anti-horário. Aqui a origem é um centro.

## 2.3 Ponto de equilíbrio

**Definição 6:** Dado um sistema de equações diferenciais  $x' = f(x)$ , dizemos que  $(x_e, y_e)$  é ponto de equilíbrio de  $f$  se  $f(x_e, y_e) = 0$ .

### 2.3.1 Classificação quanto à estabilidade dos pontos de equilíbrio

#### 2.3.1.1 Estável

É estável quando para qualquer valor inicial a trajetória permanece próximo do ponto de equilíbrio.

#### 2.3.1.2 Instável

Caso não seja estável.

## 2.4 Equações diferenciais não lineares

Consideremos o seguinte sistema de duas EDOs não lineares de primeira ordem:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}$$

Um sistema deste tipo, em que as funções  $P$  e  $Q$  não dependem explicitamente da variável independente  $t$ , é chamado um sistema autônomo.

Um ponto de equilíbrio do sistema é um ponto  $(x_e, y_e)$  para o qual  $x'$  e  $y'$  se anulam:

$$\begin{cases} P(x_e, y_e) = 0 \\ Q(x_e, y_e) = 0 \end{cases}$$

Pontos que não são pontos de equilíbrio são chamados pontos regulares. O sistema acima pode não ser resolúvel analiticamente. Poderemos, no entanto, tentar analisar não o comportamento de  $x$  e  $y$  em função de  $t$ , mas simplesmente o comportamento de  $y$  em função de  $x$ , ou seja, as trajetórias que os pontos  $(x, y)$  descrevem ao longo do tempo no plano de fases  $xy$  (plano de fases: não representamos graficamente  $x$  e  $y$  em função de  $t$ , mas sim  $y$  em função  $x$ ).

### 2.4.1 Cálculo das trajetórias de um sistema autônomo

Consideremos o sistema autônomo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}$$

dividindo a segunda equação pela primeira, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

Se conseguirmos resolver esta equação diferencial, obtemos  $y$  em função de  $x$ , ou seja, a equação geral das trajetórias no plano de fases.

**Exemplo:** de cálculo da trajetória de um sistema autônomo:

Considere o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(x^2 + 1) \\ \frac{dy}{dt} = 2xy^2 \end{cases}$$

as trajetórias podem ser obtidas resolvendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2}{y(x^2 + 1)} = \frac{2xy}{x^2 + 1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

$$\ln y = \ln(x^2 + 1) + \ln c$$

de onde se obtém:

$$y = c(x^2 + 1)$$

Algumas trajetórias são representadas na figura seguinte:

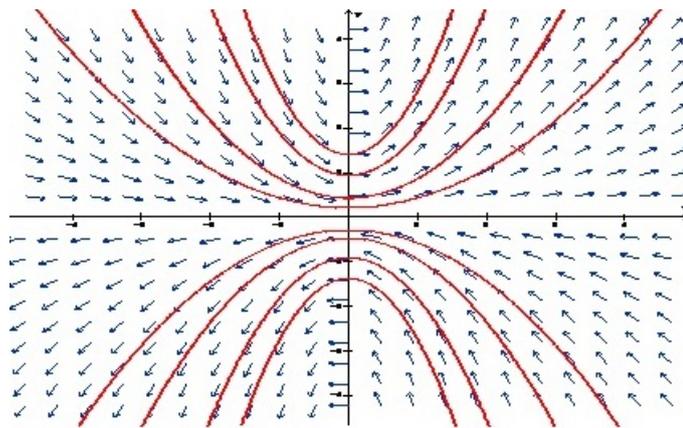


Figura 2.1: Gráfico criado por Angélica F. Vilhena no winplot

## 2.4.2 Linearização de um sistema não linear em torno do ponto de equilíbrio

Quando não conseguimos obter uma equação analítica para as trajetórias de um problema não linear, resta-nos recorrer à linearização. Consideremos um sistema não linear autônomo, cujo ponto de equilíbrio é  $(0, 0)$ :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}$$

A linearização em torno do ponto de equilíbrio é baseada na expansão em série de Taylor de  $P(x, y)$  e de  $Q(x, y)$  em torno do ponto  $(0, 0)$  ( Recorde que  $P(0, 0) = 0$  e  $Q(0, 0) = 0$ ):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(0, 0) + \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(0,0)} x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(0,0)} y + R_P(x, y) \approx \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(0,0)} x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(0,0)} y \\ \frac{dy}{dt} = Q(0, 0) + \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(0,0)} x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(0,0)} y + R_Q(x, y) \approx \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(0,0)} x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(0,0)} y \end{cases}$$

$R_P(x, y)$  e  $R_Q(x, y)$  são termos desprezáveis desde que  $(x, y)$  esteja suficientemente próximo de  $(0, 0)$ . Ou, mais rigorosamente,  $R_P(x, y)$  e  $R_Q(x, y)$  satisfazem a condição:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{R_P(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ou seja, se estivermos apenas interessados em analisar o que se passa na proximidade do ponto de equilíbrio, então o nosso sistema não linear pode ser “substituído” pelo chamado sistema linear associado, dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(0, 0) + \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(0,0)} x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(0,0)} y \\ \frac{dy}{dt} = Q(0, 0) + \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(0,0)} x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(0,0)} y \end{cases}$$

Este sistema é homogéneo, logo nós sabemos como obter as suas trajectórias em torno de  $(0, 0)$ . No entanto, é importante salientar que a solução geral do sistema associado não é a mesma que a solução geral do sistema não linear original! Existe apenas uma semelhança qualitativa no comportamento de ambas as soluções na vizinhança do ponto de equilíbrio. Por outras palavras, o comportamento das trajectórias do sistema linear associado vai-nos dar informação qualitativa sobre o comportamento das trajectórias do sistema não linear.

**Exemplo:** de sistema não linear

Consideremos o seguinte sistema não linear:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 0.25x^2 \end{cases}$$

quais os pontos de equilíbrio?

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -x + 0.25x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(-1 + 0.25x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \text{ ou } x = 4 \end{cases}$$

ou seja, o sistema tem dois pontos de equilíbrio:  $(0, 0)$  e  $(4, 0)$ . Começemos pela

análise do ponto  $(0, 0)$ . Linearizando em torno desse ponto:

$$\begin{cases} \left. \frac{dx}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(0,0)} x + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(0,0)} y = 0 \cdot x + 1 \cdot y = y \\ \left. \frac{dy}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(0,0)} x + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(0,0)} y = (-1 + 2 \cdot 0) \cdot x + 0 \cdot y = -x \end{cases}$$

o sistema linear associado é assim:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

segue da definição 5:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Através do polinômio característico encontramos os autovalores:  $\lambda_1 = i$  e  $\lambda_2 = -i$ . Assim,  $(0, 0)$  é um foco do sistema linear associado e um centro ou um foco do sistema não linear original. Nada podemos dizer quanto à sua estabilidade. Analisemos agora o ponto de equilíbrio  $(4, 0)$ . Primeiro, temos que fazer uma mudança de variável, de forma a obter um novo sistema, cujo ponto de equilíbrio seja  $(0, 0)$ :

$$\begin{aligned} u = x - x_e &\Rightarrow u = x - 4 &\Rightarrow x = u + 4 \\ v = y - y_e &v = y &y = v \end{aligned}$$

o sistema fica:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -(u + 4) + 0.25(u + 4)^2 = u + \frac{1}{4}u^2 \end{cases}$$

este novo sistema tem como ponto de equilíbrio o ponto  $(0, 0)$ . Linearizando:

$$\begin{cases} u' = \frac{\partial P}{\partial u} \Big|_{(0,0)} \cdot u + \frac{\partial P}{\partial v} \Big|_{(0,0)} \cdot v = 0 \cdot u + 1 \cdot v = v \\ v' = \frac{\partial Q}{\partial u} \Big|_{(0,0)} \cdot u + \frac{\partial Q}{\partial v} \Big|_{(0,0)} \cdot v = (1 + 0, 25 \cdot 0) \cdot u + 0 \cdot v = u \end{cases}$$

obtemos:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = u \end{cases}$$

a matriz dos coeficientes é agora:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a qual tem autovalores reais distintos:  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 1$ , logo o ponto de equilíbrio  $(4, 0)$  é um ponto de sela instável.

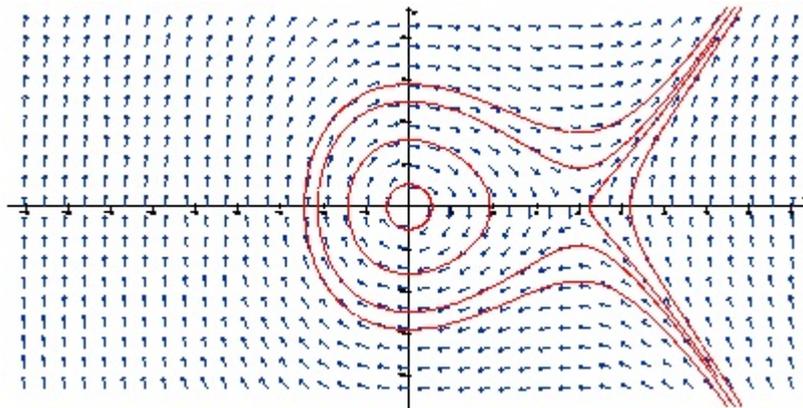


Figura 2.2: Gráfico criado por Angélica F. Vilhena no winplot

A figura anterior representa as trajetórias do sistema não linear original traçadas rigorosamente. É notório que o comportamento na vizinhança de  $(0,0)$  e  $(4,0)$  é de fato característico de, respectivamente, um centro e um ponto de sela.

# Capítulo 3

## Modelos de Dinâmica Populacional: Malthus e Verhulst

Antes de iniciarmos o estudo do Modelo Lotka-Volterra, consideraremos os modelos unidimensionais de Malthus e Verhulst.

### 3.1 Crescimento Exponencial ou Modelo de Malthus

Seja  $y = y(t)$  a população da espécie dada no instante  $t$ . A hipótese mais simples sobre o crescimento populacional é que a taxa de variação de  $y$  é proporcional ao tamanho da população  $y$ , isto é,

$$\frac{dy}{dt} = ry \tag{3.1}$$

onde  $r$  é a constante de proporcionalidade.

resolvendo a equação (3.1) com a condição inicial  $y(0) = y_0$ , obtemos

$$y = y_0 e^{rt}$$

biologicamente nos diz que haverá explosão demográfica, caso não haja controle.

### 3.2 Crescimento Logístico ou Verhulst

Aqui existe um fator limitante em (3.1) o qual pode ser representado por uma função  $h(y)$  e assim obtemos:

$$\frac{dy}{dt} = h(y)y \quad (3.2)$$

onde  $h(y) > 0$  quando  $y$  for pequeno e  $h(y) < 0$  quando  $y$  for grande. Uma função que tem essa propriedade é  $h(y) = r - ay$ , onde  $a$  é constante positiva. Substituindo essa função em (3.2), obtemos

$$\frac{dy}{dt} = (r - ay)y \quad (3.3)$$

Denominada Equação de Verhulst.

Finalmente, podemos estudar o modelo Lotka-Volterra que é um modelo predador presa em que uma das espécies se alimenta da outra. Aqui não podemos aplicar a Linearização, pois o equilíbrio não nulo, que é o objeto principal de nosso estudo, não é hiperbólico.

### 3.3 Modelo de Lotka-Volterra

Dentre os modelos de interação entre espécies vamos estudar o clássico modelo presa-predador que, por sua simplicidade e beleza, cativou grande número de pesquisadores que passaram a utilizá-lo como paradigma de seus modelos modificados.

A analogia pode ser facilmente observada nos modelos epidemiológicos, biodigestores, crescimento de tumores, aplicações quimioterápicas, uso de herbicidas etc. O modelo presa-predador também conhecido por modelo Lotka-Volterra tem sido também ponto de partida para o desenvolvimento de novas técnicas e teorias matemáticas.

O modelo presa-predador trata da interação entre duas espécies, onde uma delas (presa) dispõe de alimentos em abundância e a segunda espécie (predador) tem como suprimento alimentar exclusivamente a população de presas. Vamos admitir também que durante o processo, num intervalo de tempo  $t$ , o meio não deve mudar favorecendo alguma das espécies e que qualquer adaptação genética é suficientemente lenta.

As variações são dadas pelas seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} \text{variação do n}^\circ \\ \text{de presas} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{aumento} \\ \text{natural} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{destruição} \\ \text{pelos predadores} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{l} \text{variação do} \\ \text{n}^\circ \text{ de predadores} \end{array} \right) = - \left( \begin{array}{l} \text{morte na} \\ \text{ausência de presas} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{aumento causado pela} \\ \text{alimentação disponível} \end{array} \right) \end{array} \right.$$

$x = x(t)$  a densidade populacional das presas, e

$y = y(t)$  a densidade da população dos predadores destas presas, em cada instante  $t$ .

Simplificadamente, o modelo de Lotka-Volterra supõe que as presas crescem exponencialmente na ausência dos predadores (modelo de Malthus) e que a taxa de mortalidade dos predadores, na ausência das presas, é proporcional a sua população  $y(t)$  em cada instante  $t$  (morte por falta de alimento).

Admitindo que o encontro das duas espécies seja ao acaso, então quanto maior o número de presas, mais fácil será encontrá-las e quanto mais predadores, mais alimento será necessário. É razoável supor que a taxa de destruição das presas deve ser proporcional ao número de encontros possíveis entre as duas espécies!

A taxa de nascimento dos predadores depende exclusivamente, neste modelo, da quantidade de presas devoradas em cada encontro.

Se modelarmos os encontros possíveis pelo termo bilinear  $xy$ , então o sistema presa-predador, simplificado pelas imposições à cima, é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -\alpha y + \beta xy, \end{array} \right. \quad (3.4)$$

O sistema (3.4) apesar de ser não-linear, pode ser analisado qualitativamente no plano de fase, eliminando a variável independente  $t$ , através da regra da cadeia:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{dx}{dy}$$

a equação autônoma, correspondente a (3.4) é dada por

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(a - by)}{y(-\alpha + \beta x)} \quad (3.5)$$

que pode ser resolvida analiticamente por integração das formas diferenciais com variáveis separáveis

$$\int \frac{-\alpha + \beta x}{x} dx = \int \frac{a - by}{y} dy$$

ou

$$-\alpha \ln x + \beta x = a \ln y + by + k \quad (3.6)$$

onde  $k$  é uma constante de integração.

Na equação (3.6) nem  $x$  ou  $y$  podem ser explicitados em termos de funções elementares.

As trajetórias representadas pela equação (3.6) podem ser traçadas por meio do método gráfico de Volterra:

Consideramos as funções auxiliares

$$\begin{cases} z = f(x) = -\alpha \ln x + \beta x \\ w = g(y) = a \ln y + by \\ z = w + k \end{cases} \quad (3.7)$$

As partes positivas das três funções de (3.7) podem ser esboçadas separadamente em cada quadrante de um plano, conforme Figura 2.1, e suas inter-relações fornecem pontos da trajetória no 1º quadrante  $xy$ :

Método gráfico de Volterra- Plano de fase do sistema presa-predador

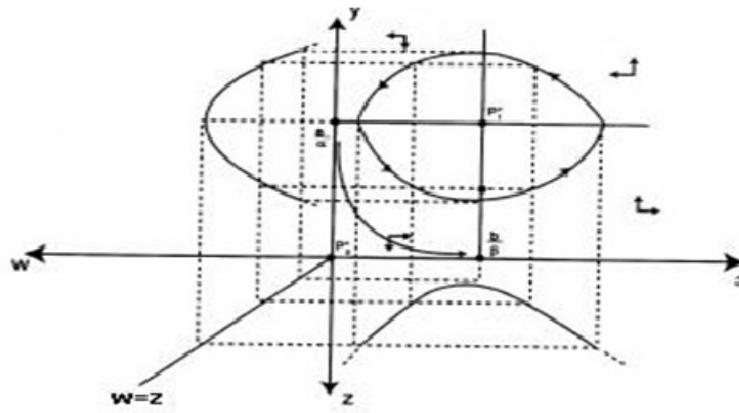


Figura 3.1: Rodney C. Bassanezi

A curva obtida pelo método gráfico de Volterra é fechada no plano  $xy$  ( $x > 0$  e  $y > 0$ ), indicando que as soluções de (3.4),  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ , são periódicas (Fig.3.3).

(a) Plano de fase

(b) soluções do modelo presa-predador

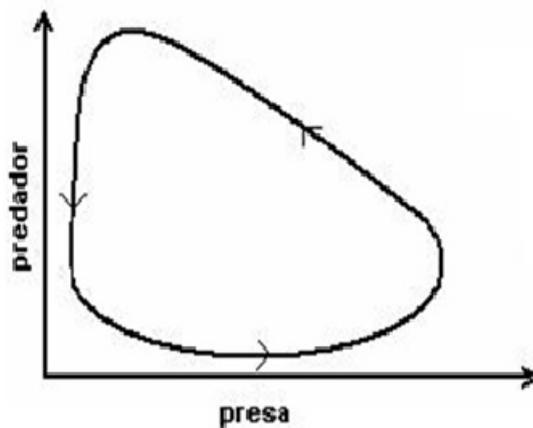


Figura 3.2: Rodney C. Bassanezi

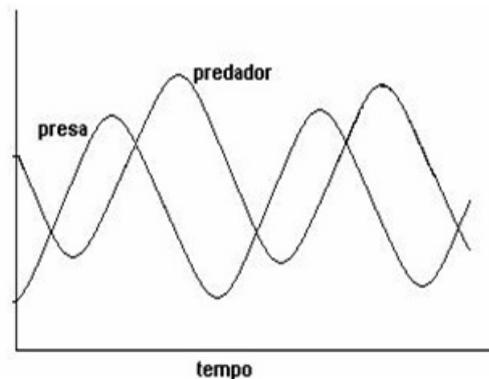


Figura 3.3: Rodney C. Bassanezi

**Observação:** As curvas representadas pelas figuras 3.1, 3.2 e 3.3 proporcionam interpretações do fenômeno presa-predador apesar de não termos as soluções explicitadas analiticamente.

- O comportamento das trajetórias pode ser analisado, considerando diferentes regiões do plano de fase:

Região I - ( $dx/dt > 0$  e  $dy/dt > 0$ ) Quando a população de presas aumenta em tamanho, as espécies predadoras se tornarão também mais numerosas por ter uma base alimentar maior com certo atraso no tempo;

Região II- ( $dx/dt < 0$  e  $dy/dt > 0$ ). A crescente demanda por alimento reduz a população das presas e as espécies predadoras têm seu crescimento inibido;

Região III- ( $dx/dt < 0$  e  $dy/dt < 0$ ). O alimento se escasseia para as espécies predadoras e como consequência apresenta uma redução em tamanho;

Região IV- ( $dx/dt > 0$  e  $dy/dt < 0$ ). A redução dos predadores favorece a população das

presas que, lentamente, começam a crescer.

O padrão nas variações dos tamanhos das populações pode se repetir quando as condições permanecem constantes - O processo continua em ciclos, denominados ciclos ecológicos.

Esta análise qualitativa é baseada, essencialmente, na variação dos sinais das derivadas do sistema (3.4) e conseqüentemente no estudo dos pontos de equilíbrio.

Como já vimos, um sistema está em equilíbrio quando sua variação é nula, isto é, quando  $\frac{dx}{dt} = 0$  e  $\frac{dy}{dt} = 0$ . No caso do sistema presa-predador (3.4) temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \leftrightarrow ax - bxy = 0 \leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = \frac{a}{b} \\ \frac{dy}{dt} = 0 \leftrightarrow -\alpha y + \beta xy = 0 \leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ e } y = 0 \\ x = \frac{\alpha}{\beta} \text{ e } y = \frac{a}{b} \end{cases}$$

O estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio  $p_0 = (0; 0)$  e  $p_1 = \left(\frac{\alpha}{\beta}; \frac{a}{b}\right)$ . É realizado através de uma linearização do sistema (3.4) - Por exemplo: o sistema linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = -\alpha y \end{cases} \quad (3.8)$$

corresponde à linearização de (3.4) em torno do ponto  $p_0 = (0; 0)$ .

a solução geral de (3.8) é dada por

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} \text{ e } y(t) = y_0 e^{-\alpha t}$$

Então, se a condição inicial  $(x_0; y_0)$  é tal que  $x_0 > 0$  e  $y_0 > 0$ , a trajetória  $p(t) = (x(t); y(t))$  se afasta de  $p_0$ . Neste caso  $p_0$  é dito se instável.

Salientamos que a única trajetória de (3.8) que se aproxima do ponto de equilíbrio  $p_0$  é aquela que parte do ponto inicial  $(0; y_0)$  com  $y_0 > 0$ , isto é, na ausência de presas, a população dos predadores será extinta.

Agora, se considerarmos o ponto  $p_1 = \left(\frac{\alpha}{\beta}; \frac{a}{b}\right)$ , através da mudança de variáveis em (3.4):

$$u = x - \frac{\alpha}{\beta} \text{ e } v = y - \frac{a}{b}$$

$p_1$  é transportado para a origem, isto é, obtemos o sistema (3.4) trasladado

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{b\alpha}{\beta}v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\beta a}{b}u \end{cases} \quad (3.9)$$

Os auto-valores de (3.9) são complexos conjugados puros  $\lambda = \pm i\sqrt{a\alpha}$ , obtidos do polinômio característico  $Q(\lambda)$ .

$$Q(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{b\alpha}{\beta} \\ -\frac{\beta a}{b} & -\lambda \end{pmatrix}$$

logo, as soluções reais de (3.9) são periódicas de período  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{a\alpha}}$

$$\begin{cases} u(t) = k\frac{\alpha}{\beta} \cos \sqrt{a\alpha}t \\ v(t) = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} \sin \sqrt{a\alpha}t \end{cases} \quad (3.10)$$

#### Observação:

Usando a regra-da-cadeia em (3.9) podemos escrever

$$\frac{u^2}{2} = -\frac{\alpha b^2}{2\beta^2} \frac{v^2}{2} + k \quad (3.11)$$

ou

$$\alpha\beta^2 u^2 + \alpha b^2 v^2 = k \Leftrightarrow \frac{u^2}{\frac{k}{\alpha\beta^2}} + \frac{v^2}{\frac{k}{\alpha b^2}} = 1$$

Portanto, o ponto  $p^* = (0; 0)$  é um centro de todas as trajetórias (elipses), se  $k > 0$ . Neste caso, o ponto de equilíbrio  $p_1$  de (3.9) é dito ser estável.

A transferência das características dos pontos de equilíbrio dos sistemas linearizados (3.8) e (3.9), correspondentes aos pontos de equilíbrio do sistema quase linear (3.4) é dada através da Linearização.

As trajetórias fechadas em (3.6), em torno do ponto  $p_1 = \left(\frac{\alpha}{\beta}; \frac{a}{b}\right)$  descrevem o que se convencionou chamar de ciclo ecológico.

### 3.4 Controle Biológico da Broca Cana-de-Açúcar

Das inúmeras pragas que atacam a cana-de-açúcar, a broca- *Diatraea saccharalis* é a de mais difícil controle, pois se trata de um inseto que passa a maior parte de sua vida no

interior da cana (mais especificamente dentro do colmo), tornando-se difícil seu combate por meio de agentes químicos.

Ultimamente a forma mais eficiente de combate da broca tem sido o controle biológico, utilizando-se propositadamente outras espécies de insetos predadores, que são espalhados no canavial.

No Brasil o controle da broca vem sendo efetuado principalmente pela utilização da vespa indiana "Apanteles flavipes", aqui introduzidas em 1974.

Canavial



Figura 3.4: Rodney C. Bassanezi

O parasitismo se inicia por uma picada da vespa, ocasião em que um lote de ovos é depositado no corpo da lagarta (broca). Desses ovos eclodem as larvas que se desenvolvem à custa dos tecidos da lagarta hospedeira, pondo termo ao ciclo da broca.

O modelo descreve a interação entre duas espécies, onde uma delas - a presa (neste caso a broca) dispõe de alimento em abundância e a segunda espécie - o predador (neste caso, a vespa), alimenta-se exclusivamente da primeira.

### **Informações Básicas**

O adulto da *Diatraea saccharalis* é uma mariposa de cor amarelo-palha, com cerca de 25 mm de envergadura, que após o acasalamento faz as posturas, de preferência na face dorsal das folhas da cana, depositando de 5 a 50 ovos. Dependendo das condições climáticas, como no caso do Estado de São Paulo, depois de decorridos 4 a 9 dias estes ovos eclodem, surgindo as larvas que, inicialmente alimentam-se do parênquima das folhas, dirigindo-se posteriormente para a bainha.

Uma broca sendo parasitada por uma vespa

Depois da primeira troca de pele, penetram na parte mais mole do colmo, que é a gema e abrem galerias, na sua maior parte longitudinais, de baixo para cima e aí permanecem



Figura 3.5: Rodney C. Bassanezi

alimentando-se por cerca de 40 dias até atingir seu desenvolvimento completo. No final deste período as lagartas, já com 22 a 25 mm de comprimento, abrem um orifício para o exterior e imediatamente o fecham com seda e restos de bagaço, por onde emergirão as mariposas adultas.

Passam, então, para a fase de crisálida, de coloração castanha, com as mesmas dimensões, permanecendo neste estado por mais 9 a 14 dias. Metamorfoseiam-se em mariposas que saem do interior do colmo para completar seu ciclo de vida com duração de 53 a 63 dias.

Na cana adulta, ocorre perda de peso, brotação lateral, enraizamento aéreo, colmos quebrados e entrenós atrofiados. Além disto, nos orifícios praticados pelas lagartas da broca penetram fungos (*Fusarium moniliforme* e *Colletotrichum falcatum*) que ocasionam a "podridão vermelha", causando perdas industriais consideráveis.

Durante a germinação do tolete infectado por estes fungos ocorre a morte da gema e a redução da germinação. Quando as plantas crescem, entre 3 e 4 meses, surgem as primeiras lesões nas folhas, que culminam com a morte prematura das mesmas.

Os prejuízos mais graves são os causados pela inversão de cerca de 50 a 70 % da sacarose dos colmos atacados. Além disso, os fungos produzem invertases nestes colmos que, se industrializados, irão inverter a sacarose do caldo normal nos processos iniciais de fermentação.

O controle biológico visa interromper o ciclo evolutivo, a médio e longo prazo, em qualquer uma de suas fases. Atualmente se consegue o controle nas fases de ovo e de lagarta.

Os principais parasitos dos ovos da *Diatraea saccharalis* são o *Telenomus alecto* e o *Trichogram maminitum*, sendo o último não tão eficiente porque a espécie é inespecífica.

Já a espécie *T. alecto* tem uma eficiência de 80 a 90%. Porém, no Estado de São Paulo a sua utilização sofre de continuidade, pois a *Diatraea* não faz posturas em determinadas épocas do ano (Julho - Setembro).

Os principais parasitos da lagarta são os dípteros (moscas larvíparas) *Metagonistya luminosa* ou "Mosca do Amazonas", a *Lixophaga diatraeae* ("Mosca Cubana") e a *Paratheresia claripalpis* ("Mosca Africana"); e o himenóptero *Apanteles flavipes* ("Vespa Indiana").

Após sua gestação, as larvas das moscas penetram na entrada do orifício provocado pela broca e encontram a lagarta (da broca), perfuram-lhe a pele e dela se alimentam.

Em seguida as larvas, passam à forma de pupa no interior da galeria, próxima ao orifício de entrada, afim de, garantir a saída do adulto. Em São Paulo o seu parasitismo natural oscila entre 15 a 20%.

O himenóptero *Apanteles flavipes*, proveniente da Índia e do Paquistão, vem se adaptando às várias regiões de nosso país. Apresenta vantagens em relação aos outros predadores naturais por ter maior índice de multiplicação, por ser específico (somente parasita esta broca) e pode ser produzido em laboratório com relativa facilidade.

O parasitismo se inicia quando a fêmea da vespa adulta, preta com 2 a 3 mm de comprimento, entra pelo orifício praticado pela broca, ocasião em que encontra a lagarta e através de uma picada deposita no interior do corpo do hospedeiro cerca de 50 ovos. Estes permanecerão no interior da lagarta hospedeira alimentando-se de seus tecidos de reserva por cerca de 10 a 12 dias. Ao final deste período as larvas do *Apanteles* migram para fora do corpo da lagarta, que exaurida morre, e formam casulos (pupas), ficando neste estado de 3 a 5 dias quando tornam-se vespas adultas, completando então o seu ciclo vital.

No parasitismo pelas moscas, cada uma dá origem a duas outras, no máximo. Já com as vespas esta relação é de 1 para 50.

Como já observamos, existem várias espécies de predadores da broca - Aqui, por simplicidade, consideramos um único predador - a vespa. Com esta simplificação obtemos modelos mais didáticos que práticos, onde a ênfase maior está na obtenção dos parâmetros e no estudo de sistemas de equações diferenciais e de diferenças.

### 3.5 Modelo do tipo Lotka-Volterra: vespa xbroca

Sejam:

$B = B(t)$ : A população de brocas numa região limitada de um canavial, num instante  $t$ ;

$V = V(t)$ : A população de vespas que convivem com as brocas no mesmo canavial, num instante  $t$ .

Hipóteses:

- a) A quantidade de alimento (cana-de-açúcar) para a broca (presa) é bastante grande, não existindo uma auto - regulação de seu crescimento específico;
- b) A vespa tem na broca sua alimentação básica e na ausência desta a vespa morre;
- c) A broca só é predada pela vespa (hipótese altamente simplificadora).

Com estas considerações, podemos formular o modelo presa-predador discreto:

$$\begin{cases} B_{t+1} - B_t = pB_t - qB_tV_t \\ V_{t+1} - V_t = rB_tV_t - sV_t \end{cases} \quad (3.12)$$

onde  $p$ ;  $q$ ;  $r$ ;  $s$  são constantes positivas;

O seu modelo análogo contínuo é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = aB - bBV \\ \frac{dV}{dt} = \beta BV - \alpha V \end{cases} \quad (3.13)$$

Neste texto vamos analisar apenas o modelo contínuo (3.13).

A determinação dos coeficientes está condicionada à unidade de tempo (dias). Para efeito de cálculos consideramos período de 1 ano para o plantio e colheita da cana.

Vimos que o ciclo da broca varia entre 53 a 63 dias (desprezaremos a última geração, considerando apenas 4 gerações num ano) e o ciclo das vespas é de 13 a 17 dias.

Admitiremos os crescimentos e interações, como funções contínuas do tempo.

**(a) Coeficiente de crescimento interespecífico da broca: a**

Temos que:

$T_1 = \frac{53 + 63}{2} = 58$  dias; é o período médio de um ciclo de vida da broca;

$R$ : (razão de crescimento) =  $\frac{5}{1} = 5$  (cada adulto dá origem a 5 indivíduos adultos).

Supondo que, na ausência de vespas, a população de brocas aumenta sem inibição, temos:

$$\frac{dB}{dt} = aB \Rightarrow \int \frac{dB}{B} = a \int dt \Rightarrow B(t) = B_0 e^{at}$$

$$B(T_1) = B_0 e^{aT_1} \Rightarrow RB_0 = B_0 e^{aT_1} \Rightarrow a = \frac{\ln R}{T_1}$$

Portanto,  $a = \frac{\ln 5}{58} = 0,02774893$

Nota: Em condições de laboratório,  $R = \frac{36}{1}$  em cada geração.

### b) Coeficiente de ataque: $b$

O coeficiente  $b$  é calculado através da taxa de eficiência do controle broca pela vespa. Temos que apenas as fêmeas das vespas causam prejuízo para as brocas - então, podemos admitir uma taxa de controle de 50%, isto é,

$B(T_2) = 0,5B_0$ , onde  $T_2 = \frac{13 + 17}{2} = 15$  dias é o período médio do ciclo da vespa.

Atualmente, recomenda-se a liberação de 5000 vespas quando forem encontradas 10 brocas (10 furos na cana), por uma pessoa em 1 hora, em 1 hectare (neste caso, uma projeção estatística daria aproximadamente 2000 brocas na área).

Usando a equação das presas de (3.13), temos:

$$\frac{dB}{dt} = aB - 5000bB = B(a - 5000b)$$

ou

$$\frac{dB}{B} = (a - 5000b)dt$$

integrando, vem

$$\int_{B_0}^{B(t)} \frac{dB}{B} = (a - 5000b) \int dt$$

$$\ln(B(t)) - \ln B_0 = (a - 5000b)t$$

$$\ln \left( \frac{B(t)}{B_0} \right) = (a - 5000b)t$$

$$\ln \left( \frac{B(T_2)}{B_0} \right) = (a - 5000b)T_2$$

tomando os valores  $T_2 = 15$ ,  $a = 0,02774893$  e  $\ln\left(\frac{B(T_2)}{B_0}\right) = \ln 0,5 = 0,69314718$ ; obtemos  $b = 0,00001479$ .

**c) Coeficiente de mortalidade das vespas (na ausência de alimento):  $\alpha$**

Na verdade, somente a fêmea da vespa busca a broca para efetuar a postura de ovos. Contudo, as vespas duram de 48 a 72 horas, após a liberação dos ovos. Admitiremos, a partir destes dados, que a população das vespas seja reduzida a 5% em cerca de 60 horas.

Então, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= -\alpha V \\ \int \frac{dV}{V} &= -\alpha \int dt \\ V &= V_0 e^{-\alpha t}\end{aligned}$$

tomando  $60hs = 2,5$  dias, obtemos:

$$0,05V_0 = V_0 e^{-2,5\alpha}$$

ou seja

$$\alpha = -\frac{\ln 0,05}{2,5} = 1,198293$$

**d) Taxa de crescimento das vespas:  $\beta$**

O coeficiente  $\beta$  representa a taxa de natalidade das vespas, que obviamente depende da quantidade de hospedeiros (brocas) durante a postura. Sabemos que cada vespa fêmea dá origem a 50 outras, das quais apenas 15 completam o ciclo de vida.

Da equação diferencial das vespas (3.13), temos

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha V + \beta B_0 V$$

onde  $B_0 \cong 2000$  brocas (valor inicial estimado por hectare pesquisado). Então,

$$\frac{dV}{V} = (-\alpha + 2000\beta)dt$$

integrando, temos

$$V = V_0 \exp[-\alpha + 2000\beta]t$$

usando os valores  $V_0 = 5000$ ,  $\alpha = 1,198293$ ,  $t = T_2 = 15$ ,  $V(T_2) = 5000 \times 15$ , Obtemos:  
 $\beta = 0,0006894$

### Análise do Modelo presa predador: vespa x broca.

As trajetórias no plano de fase  $BV$ , do sistema presa predador satisfazem a relação implícita geral (veja equação (3.6)):

$$-\alpha \ln B + \beta B = a \ln V - bV + K$$

onde  $K$  é a constante de integração, a ser determinada com as condições iniciais  $B_0 = 2000$  e  $V_0 = 5000$

Usando os valores estimados dos parâmetros, obtemos:

$$K = -7,89167$$

O ponto de equilíbrio do sistema,  $P_1 = (B^*, V^*)$  é tal que

$$B^* = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1,198293}{0,0006894} \cong 1738 \text{ brocas;}$$

$$V^* = \frac{a}{b} = \frac{0,02774893}{0,00001479} \cong 1876 \text{ vespas}$$

Sabemos que, para o modelo de Lotka - Volterra, as trajetórias são curvas fechadas no plano  $BV$  e portanto existe um período  $t = T > 0$  onde

$$B(T) = B_0 \text{ e } V(T) = V_0$$

no sistema (3.13), colocamos o  $B$  e o  $V$  em evidência, podemos escrever na forma

$$\begin{cases} \frac{1}{B} \cdot \frac{dB}{dt} = a - bV \\ \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} = -\alpha + \beta B \end{cases} \quad (3.14)$$

integrando as equações de (3.14) entre 0 e  $T$ , obtemos

$$\begin{cases} \ln B(T) - \ln B(0) = \int_0^T (a - bV) dt \\ \ln V(T) - \ln V(0) = \int_0^T (-\alpha + \beta B) dt \end{cases}$$

como  $B(T) = B_0$  e  $V(T) = V_0$ , obtemos

$$aT = b \int_0^T V dt \quad e \quad \alpha T = \beta \int_0^T B dt$$

portanto,

$\frac{a}{b} = \frac{1}{T} \int_0^T V dt$  é valor médio da população das vespas ao longo do período  $T$ ;

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{T} \int_0^T B dt$  é valor médio da população das brocas ao longo de  $T$ .

Este resultado indica que para diminuir a quantidade de brocas não adianta aumentarmos a quantidade de vespas, pois tal fato somente alteraria a magnitude da oscilação do ciclo.

# Capítulo 4

## Métodos numéricos para solução aproximada de EDOs

Nem sempre é possível encontrar a solução analítica

$$y(x)$$

Solução: aproximar!

Estudaremos aqui dois métodos:

- Método de Euler;
- Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem.

### 4.1 Método de Euler

Equação diferencial de primeira ordem:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

- parte do princípio que alguma coisa sobre a função é conhecida próximo ao ponto  $x_0$ ;
- o valor da função no ponto inicial:  $y(x_0) = y_0$ ;
- o valor da sua derivada:  $\frac{dy}{dx}|_{x_0} = f(x_0, y_0)$ .

Considera-se o ponto  $x_1$  suficientemente próximo de  $x_0$  tal que:

$$y(x_1) \sim y(x_0) + y'(x_0)[x_1 - x_0]$$

A série de Taylor até o primeiro termo aproxima suficientemente bem a função chamando

$$x_1 - x_0 = h \Rightarrow y(x_0 + h) \sim y(x_0) + hy'(x_0)$$

valores conhecidos:  $x_0, y_0, y'(x_0) = f(x_0, y_0)$

Note que;

conhecidos

aproximados

$$k = 1, x_0, y_0, y'_0 = f(x_0, y_0) \rightarrow y(x_1) \sim y_1 = y_0 + hy'_0$$

$$k = 2, x_1, y_1, y'_1 = f(x_1, y_1) \rightarrow y(x_2) \sim y_2 = y_1 + hy'_1$$

$$k = 3, x_2, y_2, y'_2 = f(x_2, y_2) \rightarrow y(x_3) \sim y_3 = y_2 + hy'_2$$

...

Se toma uma aproximação linear para  $y$  até o próximo ponto e aí se reavalia

- algoritmo simples
- geometricamente ...

Visão geométrica (gráfico 4.1), gráfico de aproximação pelo método de Euler;

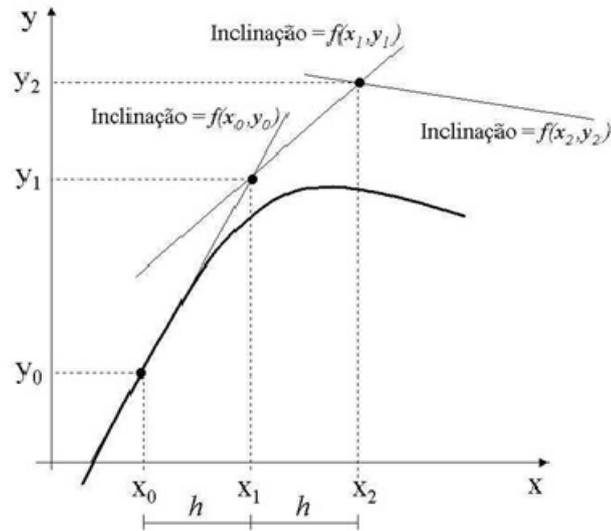


Figura 4.1: Renato S. Silva, Regina C. Almeida

Reduzinho h temos (gráfico 4.2); Gráfico de aproximação reduzinho h- método de Euler

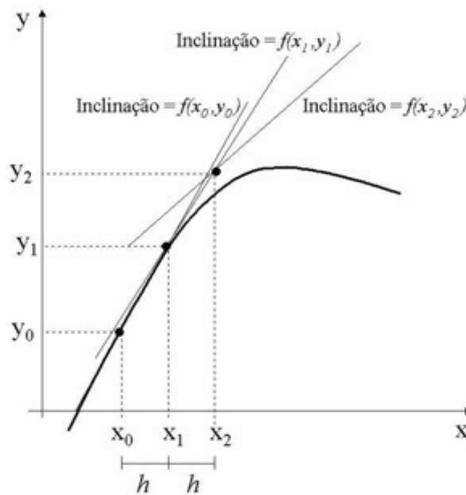


Figura 4.2: Renato S. Silva, Regina C. Almeida

Quando a derivada segunda (curvatura) é grande (gráfico 4.3); Gráfico curvatura grande- método de Euler

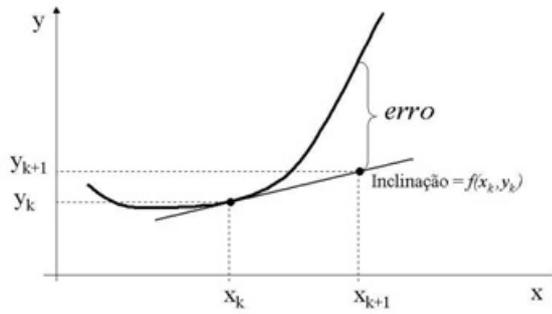


Figura 4.3: Renato S. Silva, Regina C. Almeida

### Método de Euler - Exemplo

Considere o crescimento populacional na forma exponencial:

$$\frac{dN}{dt} = f(N) = rN \text{ com } N_0 = N(o) = 10 \text{ e } r = 0.15$$

onde

$N$  é a densidade populacional

$r$  é a taxa de crescimento

$t$  é o tempo

adotaremos  $h=1.0$

$$y(x_k + h) \sim y(x_k) + hy'(x_k) = y(x_k) + hf(x_k, y_k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \leftrightarrow N \\ x \leftrightarrow t \end{cases} \quad f(t_i, N_i) = rN_i$$

$$N_1 = N_0 + hf(t_0, N_0) = 10 + 1.0 \times (0.15 \times 10) = 11.5 \quad t = 1.0$$

$$N_2 = N_1 + hf(t_1, N_1) = 11.5 + 1.0 \times (0.15 \times 11.5) = 13.225 \quad t = 2.0$$

$$N_3 = N_2 + hf(t_2, N_2) = 13.225 + 1.0 \times (0.15 \times 13.225) = 15.209 \quad t = 3.0$$

$$N_4 = N_3 + hf(t_3, N_3) = 15.209 + 1.0 \times (0.15 \times 15.209) = 17.490 \quad t = 4.0$$

$$N_5 = N_4 + hf(t_4, N_4) = 17.490 + 1.0 \times (0.15 \times 17.490) = 20.1135 \quad t = 5$$

Aproximação do método de Euler

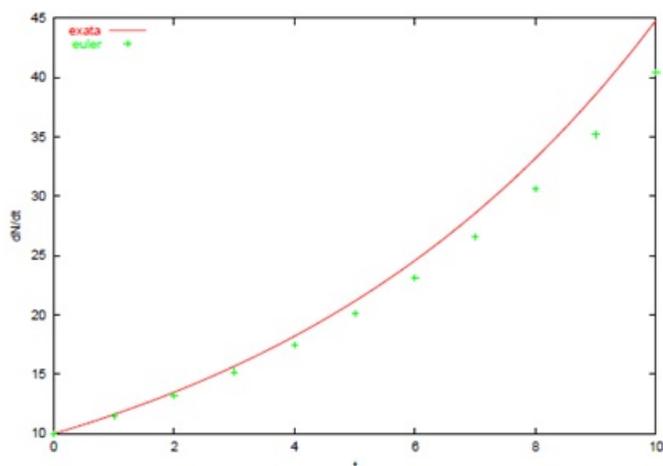


Figura 4.4: Renato S. Silva, Regina C. Almeida

### Método de Euler - Erro

- Se  $y$  tiver derivada segunda limitada, então a aproximação pelo método de Euler converge para a solução exata quando  $h \rightarrow 0$  e o erro global depende tanto de  $h$  quanto da derivada segunda.
- Convergência lenta!

## 4.2 Método de Runge-Kutta

- obtidos pela Série de Taylor;
- cancelando-se os termos que contêm potências de  $h$  maiores que  $p$ , então o método é de ordem  $p$ ;
- o Método de Euler é um método de Runge-Kutta de primeira ordem.

Expandindo  $y(x_{k+1})$  em Série de Taylor

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \frac{h^3}{6}y'''(x_k) + \dots$$

$\Rightarrow y(x)$  tem que ser continuamente diferenciável

### 4.3 Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem

- $y(x)$  tem que ser três vezes continuamente diferenciável

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \frac{h^3}{6}y'''(\xi), \xi \in [x_k, x_{k+1}]$$

- Denotando  $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$

- Obtemos

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{df(x_k, y(x_k))}{dx} \right]_{x=x_k} + 0(\xi) \quad (4.1)$$

- Como calcular  $\frac{df(x_k, y(x_k))}{dx}$ ?

Polinômio interpolador de grau um

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_1) \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ \Rightarrow p'(x) &= f(x_1) \frac{1}{x_1 - x_2} + f(x_2) \frac{1}{x_2 - x_1} \\ &= -f(x_1) \frac{1}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1}{h} [f(x_2) - f(x_1)] \end{aligned}$$

Aplicando o polinômio interpolador em  $\frac{df(x_k, y(x_k))}{dx}$  temos:

$$\frac{df(x_k, y(x_k))}{dx} \sim \frac{1}{h} [f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) - f(x_k, y(x_k))] \quad (4.2)$$

substituindo (4.2) em (4.1):

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) - f(x_k, y(x_k))}{h} \right] + 0(\xi)$$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + 2 \cdot \frac{h}{2} f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2} [f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) - f(x_k, y(x_k))]$$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \frac{h}{2} [f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) - f(x_k, y(x_k)) + 2 \cdot f(x_k, y(x_k))]$$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \frac{h}{2} [f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) + f(x_k, y(x_k))]$$

ou ainda:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_{k+1}, y_{k+1}) + f(x_k, y_k)] \quad (4.3)$$

### Fórmula implícita

Vamos usar Método de Euler para aproximar  $y_{k+1}$  do lado direito:

$$y_{k+1} = y_k + hy'(x_k)$$

Substituindo em  $f(x_{k+1}, y_{k+1})$ :

$$f(x_{k+1}, y_{k+1}) \sim f(x_{k+1}, y_k + hy'(x_k))$$

(4.3) fica assim:

$$\Rightarrow y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))]$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} \underbrace{hf(x_k, y_k)}_{k_1} + \underbrace{hf(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))}_{k_2}$$

Logo podemos reescrever a fórmula como:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{k_1 + k_2}{2} \text{ onde } k_1 = hf(x_k, y_k) \text{ e } k_2 = hf(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))$$

Método de segunda ordem sem ter que determinar derivada!

### Método de Runge-Kutta (2)- Exemplo

Considere o crescimento populacional na forma exponencial

$$\frac{dN}{dt} = f(N) = rN, \quad \text{com} \quad N_0 = N(o) = 10 \quad e \quad r = 0.15$$

Considere:  $h = 1.0$

$$\begin{cases} y \leftrightarrow N \\ x \leftrightarrow t \end{cases} \quad f(t_i, N_i) = rN_i$$

$$k_1 = hf(x_k, y_k); \quad k_2 = hf(x_{k+1}, y_k + k_1) \quad \Rightarrow \quad k_1 = hf(t_k, N_k); \quad k_2 = hf(t, N_k + k_1)$$

$k$	$t_k$	$N_k$	$k_1 = hf(t_k, N_k)$	$k_2 = hf(t, N_k + k_1)$	$N_{k+1} = N_k + \frac{k_1+k_2}{2}$
0	0	10	1.5	1.725	11.613
1	1.0	11.613	1.742	2.003	13.485
2	2.0	13.485	2.023	2.326	15.66
3	3.0	15.66	2.349	2.701	18.185

Aproximação de Runge-Kutta

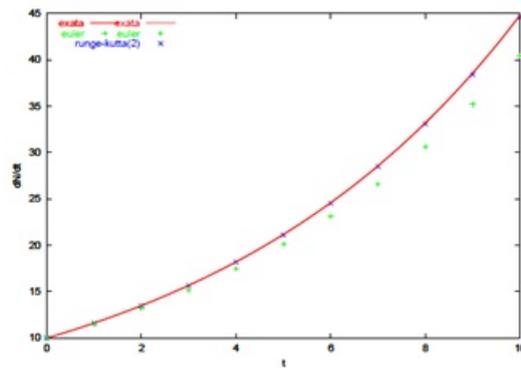


Figura 4.5: Renato S. Silva, Regina C. Almeida

# Conclusão

No decorrer deste trabalho, evidenciou-se o Estudo do modelo de Lotka - Volterra. Embora exista uma variedade de modelos da dinâmica das populações, nos restringimos ao modelo presa-predador, que trata da interação entre duas espécies, onde uma delas (presa) dispõe de alimento em abundância e a segunda espécie (predador) tem como suprimento alimentar exclusivamente a população de presas, este modelo é representado por um sistema de EDO's não-lineares, onde uma equação representa a variação no número de presas e a outra representa a variação no número de predadores, utilizando um dos pontos de equilíbrio desse sistema e aplicando a mudança de variáveis, percebemos que as soluções são funções trigonométricas, e portanto as curvas são periódicas e as trajetórias são curvas fechadas, por isso se convencionou chamar de ciclo ecológico. Vimos também que o controle da broca na cana-de-açúcar é feito biologicamente utilizando um predador da broca "Apanteles Flavipes" e com alguns dados sobre o canavial foi possível modelarmos com o modelo de Lotka-Volterra, e fazendo a análise do modelo podemos verificar que realmente as variações no número de presas e predadores permanecem em ciclos ecológicos e se por acaso aumentarmos o número de vespa indiana para tentarmos eliminar as brocas isso não seria possível, pois só aumentarmos o tamanho da oscilação do ciclo. Para finalizar, gostaríamos de salientar, que não existe modelo definitivo ou perfeito quando se quer representar matematicamente um fenômeno da realidade - Todo modelo sempre poderá vir a ser modificado e melhorado, basta que se pergunte: e se...? Neste sentido, a Natureza é uma fonte inesgotável de problemas e a Matemática ocupará sempre uma posição de destaque aos desafios de novos conhecimentos.

# Referências Bibliográficas

- [1] BARROS, L.C. TONELLI, P. *Notas e exemplos de complexidade e estabilidade em dinâmica populacional*, Biomatemática III, Campinas, 1993.
- [2] BASSANEZI, R. C. e FERREIRA Jr, W. C. *Equações Diferenciais com aplicações*, São Paulo: Harbra, 1988.
- [3] BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*, São Paulo: Edit. Contexto, 2002.
- [4] BOYCE, W. E. e DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Rio de Janeiro, 1968.
- [5] COLEMAN, C.S. DREW, D.A. *Differential Equations Models*, Edits. Braun, M.; Modules in Applied Mathematics, vol. 1. Springer-Verlag, 1983.
- [6] CUNHA, M. CRISTINA C. *Métodos Numéricos*, São Paulo: Editora da Unicamp, 2003.
- [7] EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical Models in Biology*, The Random House Ed., Toronto, 1988.
- [8] FIGUEREDO, D. G. e NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas* IMPA, Rio de Janeiro (1997) Rio de Janeiro 1983
- [9] HOFFMAN, e KUNZE. *Algebra Linear* São Paulo: LTC, 1993.
- [10] LOTKA, A. J. *Elements of Physical Biology*, Baltimore, Williams e Wilkins, 1925.
- [11] *Manual de Entomologia Agrícola*, Ed. Ceres Ltda., SP, 1988.
- [12] VOLTERRA, V. *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Paris, Gauthier-Villars, 1931.

- [13] ZOTIN, R. *Efeitos abióticos e a periodicidade em dinâmica populacional*, Dissertação de Mestrado, IMECC - UNICAMP, 1993.