



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA  
RAIMUNDO SANTOS FREITAS FILHO

## **ABORDAGEM TEÓRICA E APLICACIONAL DAS INTEGRAIS DUPLAS**

Macapá, abril de 2014

RAIMUNDO SANTOS FREITAS FILHO

## **ABORDAGEM TEÓRICA E APLICACIONAL DAS INTEGRAIS DUPLAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para obtenção do grau de licenciado em Matemática, do curso de Licenciatura Plena em Matemática, da Universidade Federal do Amapá.

Orientador: Prof. Esp. João Socorro Ferreira Pinheiro.

Macapá, abril de 2014

RAIMUNDO SANTOS FREITAS FILHO

## **ABORDAGEM TEÓRICA E APLICACIONAL DAS INTEGRAIS DUPLAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para a obtenção do grau de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

### **AVALIADORES**

---

Orientador: Prof. Espec. João Socorro Pinheiro Ferreira  
Unifap

---

Membro: Prof. Dr. Guzman Eulálio Isla Chamilco  
Unifap

---

Membro: Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil  
Unifap

Macapá, 15 de abril de 2014

Dedico este trabalho primeiramente a Deus por ser paciente e piedoso comigo, aos meus pais pela confiança e ao meu Professor orientador João Socorro Pinheiro Ferreira, pelo seu apoio e orientações que conduziram para a elaboração do trabalho.

## AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e forças para superar as dificuldades, pois essa meta alcançada que não foi apenas meu mérito, à minha namorada Patrícia da Silva Tolosa por estar comigo me apoiando, e também a todos que fizeram parte da minha formação.

“A matemática vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como da escultura.”

(Bertrand Russel)

## RESUMO

Desde a antiguidade os matemáticos procuraram ferramentas para resolver problemas de seu cotidiano, entre essas pode-se dar ênfase às Integrais Duplas. Com sua utilização, neste trabalho foram resolvidos variados problemas, como o cálculo de área, massa, centro de massa, volume e momento de inércia de um corpo. Para isto, tornou-se imprescindível à concepção de uma ferramenta e sua aplicação nas ciências exatas e suas tecnologias, como por exemplo: na Matemática, na Física, na Química, na Engenharia e nas demais ciências. Primeiramente, pesquisamos sobre alguns fatos relacionados à história do cálculo integral, dando ênfase aos principais matemáticos que iniciaram esses estudos. Também analisou-se as características das Integrais Duplas, as interpretações geométricas para melhorar a compreensão e a Soma de Riemann, que é um método para resolver um problema de determinação de área. Com um processo semelhante à soma de Riemann, determinou-se o volume de um sólido, isto é, com a definição de Integral Dupla. Em relação aos tipos de integrais duplas, aplicou-se o método de Integrais Iteradas concomitantemente ao teorema de Fubini, que é transformar o problema de encontrar uma integral dupla por um problema de calcular duas integrais repetidas, bem como as Integrais Duplas em Regiões Genéricas, que é a forma mais geral de se resolver esse tipo de integral. Com isso, foi possível mostrar a importância dos estudos de integrais duplas para os cursos de ciências da natureza, matemáticas e suas tecnologias alguns dos principais conceitos e aplicações das mesmas.

**Palavras Chaves:** Ferramentas. Integrais Duplas. Integrais Iteradas. Regiões Genéricas. Aplicações.

## RESÚMEN

Desde la antigüedad los matemáticos procuraron herramientas para resolver problemas de su día a día, entre esas herramientas puede dar énfases a las Integrales Duplas. Con su utilización, en éste trabajo fueron resueltos varios problemas, como el cálculo de área, masa, centro de masa, volumen y momento de inercia de un cuerpo. Para lo cual, se torno imprescindible la concepción de una herramienta y su aplicación en las ciencias exactas e sus tecnologías, como por ejemplo: en la Matemática, en la Física, en la Química, en la Engenharia y en las demás ciencias. Primeramente, averiguamos sobre algunos hechos relacionados a la historia del cálculo integral, dando énfases a los principales matemáticos que iniciaron esos estudios. También se analizo las características de las Integrales Duplas, as interpretaciones geométricas para mejorar la comprensión y la Suma de Riemann, que es um método para resolver un problema de determinación de área. Con un proceso semejante a la suma de Riemann, se determinó el volumen de un sólido, esto es, con la definición de Integral Dupla. En relación a los tipos de integrales duplas, se aplico el método de Integrales Iteradas relacionados al teorema de Fubini, que es transformar el problema de encontrar una integral dupla por un problema de calcular dos integrales repetidas, bien como las Integrales Duplas en Regiones Genéricas, que es la forma mas general de resolver ese tipo de integral. Con esto, fue posible mostrar la importancia de los estudios de integrales duplas para los cursos de ciencias de la naturaleza, matemáticas e sus tecnologías algunos de los principales conceptos y aplicaciones de las mismas.

**Palabras Claves:** Herramientas. Integrales duplas. Integrales Iteradas. Regiones Genéricas. Aplicaciones.

# Lista de Figuras

|      |                                                                             |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1  | Um retângulo $R$ definido no intervalo $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ . | 15 |
| 3.2  | Partição do retângulo $R$ .                                                 | 15 |
| 3.3  | Conjunto limitado $B$ .                                                     | 16 |
| 3.4  | Construção da integral dupla sobre o retângulo $R$ .                        | 17 |
| 3.5  | Subdivisão do quadrado $R$ em quatro quadrados iguais.                      | 18 |
| 3.6  | Interpretação geométrica do teorema de Fubini.                              | 21 |
| 3.7  | Retângulo $R_{xy}$ contendo a região $D$ .                                  | 23 |
| 3.8  | Região vertical simples                                                     | 24 |
| 3.9  | Região horizontal simples                                                   | 25 |
| 3.10 | Exemplo de retângulo horizontal                                             | 25 |
| 3.11 | Exemplo de retângulo vertical                                               | 26 |
| 3.12 | Exemplo 2 de retângulo vertical                                             | 29 |
| 3.13 | Semicírculo $B$                                                             | 30 |
| 3.14 | Representação geométrica de mudança de variáveis                            | 32 |
| 4.1  | Lâmina triangular                                                           | 36 |
| 4.2  | Lâmina triangular com resultados                                            | 37 |
| 4.3  | Uma região retangular $D$ com cargas puntiformes                            | 38 |
| 4.4  | Lâmina $D$ girando em torno de um eixo $L$                                  | 38 |

# Sumário

|          |                                                                    |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                  | <b>10</b> |
| <b>2</b> | <b>Fatos Históricos em Relação à Integral</b>                      | <b>11</b> |
| <b>3</b> | <b>Integrais Duplas</b>                                            | <b>14</b> |
| 3.1      | Interpretação geométrica . . . . .                                 | 14        |
| 3.2      | Integrais Iteradas . . . . .                                       | 19        |
| 3.2.1    | Teorema de Fubini . . . . .                                        | 19        |
| 3.3      | Integrais duplas em regiões genéricas . . . . .                    | 22        |
| 3.3.1    | Cálculo da integral dupla sobre regiões planas genéricas . . . . . | 23        |
| 3.4      | Mudança de variáveis nas integrais duplas . . . . .                | 30        |
| <b>4</b> | <b>Aplicações</b>                                                  | <b>35</b> |
| 4.1      | Massa e centro de massa de uma lâmina . . . . .                    | 35        |
| 4.2      | Carga . . . . .                                                    | 37        |
| 4.3      | Momento de inércia . . . . .                                       | 38        |
|          | <b>Conclusão</b>                                                   | <b>40</b> |
|          | <b>Referências</b>                                                 | <b>41</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

Neste trabalho, realizou-se um estudo sobre Integrais duplas, cujo objetivo geral seria desmistificar as dificuldades sobre os principais conceitos de integrais duplas, fazendo assim uma avaliação de qual seja o melhor meio para fazer interpretações algébricas e geométricas, mostrando em situações do cotidiano que as integrais duplas podem ser importantes e podem ser utilizadas de maneira prática e funcional.

Durante muito tempo, vários estudiosos buscaram diversos meios para desenvolver seus conhecimentos científicos, e uma das grandes descobertas foi a do Cálculo Diferencial e Integral, também chamado de cálculo infinitesimal, que é um ramo importante da matemática, que foi desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que foi criado por Newton e Leibniz. Com essa descoberta houve o surgimento de variadas ferramentas que colaboraram para solucionar os problemas do nosso cotidiano que não possuíam respostas concretas.

A Integral Dupla é uma dessas ferramentas que surgiu a partir da expansão dos conceitos e propriedades das integrais simples. Mas devido o grau de complexidade ser alto, há muitas dificuldades no entendimento, principalmente em relação aos acadêmicos de cursos de ciências exatas.

Vários problemas geométricos como problemas de áreas e volumes foram resolvidos através das Integrais Duplas, na física teve grande contribuição para a solução de problemas de massa, centro de massa, momento de inércia, entre outros.

Ao finalizar consegue-se alcançar os objetivos propostos neste trabalho, a partir das pesquisas e conceitos, de forma compreensível a todos. Serviu ainda para aplicar os conhecimentos adquiridos ao cursar a disciplina de Cálculo 3 e as demais da grade curricular de Matemática.

## Capítulo 2

# Fatos Históricos em Relação à Integral

Alguns dos primeiros problemas que apareceram na História relacionadas com as Integrais foram os problemas da Quadratura, que foi um dos problemas mais antigos que os gregos enfrentaram, pois estava relacionada à medição de áreas. Os antigos Geômetras quando começaram a estudar a medição de áreas de figuras planas, eles relacionavam com a área do quadrado, pelo fato de ser mais simples em relação às outras figuras planas. Desse jeito eles tentavam encontrar uma área na figura que tivesse uma área semelhante a do quadrado.

Um dos fatos históricos mais importantes para a Matemática, dando ênfase ao Cálculo, aconteceu na Grécia, que é o Teorema de Arquimedes para a quadratura da parábola, que surgiu por volta do ano 225a.C. Ele descobriu que uma área de uma região limitada por uma parábola cortada por uma corda qualquer, vai ser igual à quatro terços do triângulo que tem altura igual e corda é a base. Os métodos de Arquimedes anteciparam o cálculo integral, cerca de 2000 anos antes de ser inventado por Newton e Leibniz.

Na obra de Kepler, ele teve que encontrar as áreas de vários setores de uma região elíptica no trabalho sobre o movimento dos planetas, esse método insidia em ponderar na superfície como uma soma de linhas, mas era bastante impreciso. Da mesma forma, para o cálculo de volumes de sólidos, ele pensava em soma de fatias planas. Assim, ele fez o cálculo dos volumes de uma infinidade de sólidos tridimensionais formados pelo ciclo de uma região bidimensional ao redor de um eixo. Para fazer o cálculo de cada um desses volumes, Kepler subdividia o sólido em várias fatias, chamadas infinitésimos, e a soma desses infinitésimos se aproximava do volume desejado.

Dois dos grandes matemáticos que tiveram uma importante contribuição para o nascimento do Cálculo Integral foram Fermat e Cavalieri. Na obra de Cavaliere "Geometria indivisibilibus continuorum nova", foi desenvolvida a ideia de Kepler sobre as infinitas

quantidades pequenas. Claramente, Cavaliere pensou na área como a soma infinitas de segmentos indivisíveis. Atualmente é escrito da forma:  $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{(n+1)}$ .

Por sua vez, Fermat ampliou uma técnica para encontrar a área sob cada uma das, até então conhecidas como parábolas maiores, que são curvas do tipo  $y = kx^n$ , para  $k > 0$  e  $n = \dots, -4, -3, -2$ . Além de Fermat, outros grandes matemáticos conheciam a fórmula das parábolas maiores, como Descartes, Torricelli, Pascal, entre outros.

Tanto Torricelli como Barrow ponderaram o problema do movimento com velocidades variadas. A derivada da distância era a velocidade e a operação inversa, partindo da velocidade, levava à distância. A partir desse problema envolvendo movimento, a ideia de operação inversa da derivada desenvolveu-se naturalmente e a ideia de que a integral e a derivada eram processos inversos era familiar a Barrow. Embora Barrow nunca tenha enunciado formalmente o Teorema Fundamental do Cálculo, estava perto de alcançar essa meta; mas foi Newton quem, utilizando a mesma direção, formulou o teorema.

Newton continuou os trabalhos de Barrow e Galileu sobre o estudo do movimento dos corpos e desenvolveu o Cálculo aproximadamente dez anos antes de Leibniz. Ele desenvolveu os métodos das fluxions - derivação - e fluents - integração - e utilizou-os na construção da mecânica clássica. Para Newton, a integração incidia em achar fluents para um dado fluxion considerando, assim, a integração como inversa da derivação. Portanto, Newton sabia que a derivada da velocidade, por exemplo, era a aceleração e a integral da aceleração era a velocidade.

Um fato curioso era que, Newton representava a forma das integrais por um acento grave em cima da letra em questão, por exemplo, a integral de  $x$  era representada por  $'x$ , diferentemente de Leibniz que representava a integral de  $x$  como  $\int x dx$ , assim a notação de Leibniz se consolidou e é utilizada até hoje. Eles desenvolveram o Cálculo Integral separadamente, mas Newton enxergava o Cálculo como geométrico, enquanto Leibniz mais como analítico.

Como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo de Newton, as integrais foram simplesmente vistas como derivadas reversas. Na mesma época da publicação das tabelas de integrais de Newton, Johann Bernoulli descobriu processos sistemáticos para integrar todas as funções racionais, que é chamado método das frações parciais. Essas ideias foram resumidas por Leonard Euler, na sua obra sobre integrais.

Depois da consagração do Cálculo, Euler daria continuidade ao estudo de funções juntamente com Cauchy, Gauss e Riemann. Foi Euler, entretanto, quem reuniu todo o conhecimento até então desenvolvido e criou os fundamentos da Análise.

Nos dias de hoje o Cálculo Integral é amplamente utilizado em várias áreas do conhecimento humano e aplicado para a solução de problemas não só de Matemática, mas de

Física, Astronomia, Economia, Engenharia, Medicina, Química, enfim.

# Capítulo 3

## Integrais Duplas

A integral dupla é uma extensão do conceito de integral definida na reta para funções de duas variáveis reais, e podemos obter essa extensão se expandirmos a soma de Riemann de uma variável real, para duas variáveis reais. Quando fazemos essa expansão, mudamos o conjunto de integração, pois se integrarmos uma função de uma variável, utilizando o cálculo simples de uma integral, e que essa função seja definida em um intervalo fechado e que pertença ao conjunto dos números reais. Porém, quando integramos uma integral dupla, determinamos que ela fosse definida em uma região fechada no  $\mathbb{R}^2$ .

### 3.1 Interpretação geométrica

Sabendo que a Soma de Riemann é um método de aproximação da área total inferior à curva em um gráfico, então para resolvermos o problema de determinar áreas, chegamos à definição de integral definida. Assim aplicaremos um procedimento semelhante para calcular o volume de um sólido e, no processo, chegaremos à definição de integral dupla.

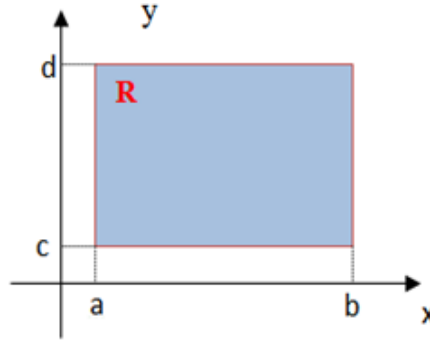
Podemos observar que através da Soma de Riemann chegaremos a uma interpretação geométrica do conceito de integral dupla, assim:

Primeiramente vamos considerar um retângulo na Figura 3.1.

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Continuando a demonstração, vamos obter partições desse retângulo definido anteriormente.

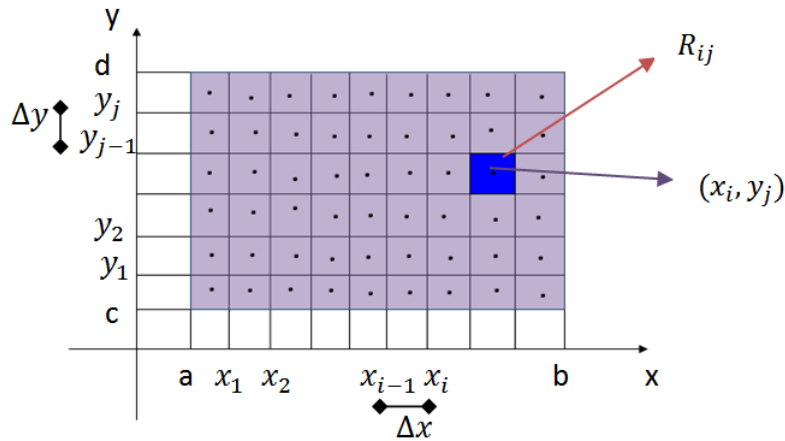
Obter partições de um retângulo consiste em dividi-lo em sub-retângulos. Seja o retângulo  $R$ , vamos dividir o intervalo  $[a, b]$  em  $m$  subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ , de mesmo comprimento  $\Delta x = x_i - x_{i-1} = (b-a)/m$ , e dividir também o intervalo  $[c, d]$  em  $n$  subintervalos  $[y_{j-1}, y_j]$ , de mesmo comprimento  $\Delta y = y_j - y_{j-1} = (d-c)/n$ . Então, traçando retas paralelas aos eixos coordenados, formamos as partições do retângulo  $R$ .

Figura 3.1: Um retângulo  $R$  definido no intervalo  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ .

Assim, podemos conceituar partição do retângulo  $R$  em uma linguagem formal. Observe a Figura 3.2:

**Definição 3.1.1.** *Sejam  $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  e  $P_2 = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d\}$ . Assim chamamos de partição do retângulo  $R$  o conjunto  $P = \{(x_i, y_j) : i = 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 1, 2, \dots, m\}$*

Uma partição determina  $mn$  de retângulos  $R_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ e } y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$ .

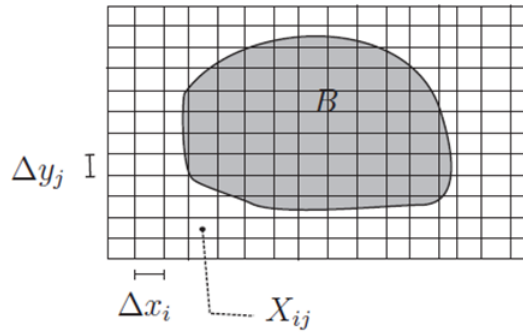
Figura 3.2: Partição do retângulo  $R$ .

Podemos observar no gráfico e ao longo do que foi demonstrado anteriormente que, quando  $m$  e  $n$  tornam-se arbitrariamente grandes ( $m \rightarrow \infty$  e  $n \rightarrow \infty$ ), então os lados do retângulo se aproximem de zero, isto é,  $\Delta x \rightarrow 0$  e  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Para dar continuidade à demonstração, vamos construir as somas de Riemann:

Seja  $B \subset \mathbb{R}^2$ . Suponhamos que  $B$  seja limitado, então existe um retângulo  $R$  com  $B \subset R$ . Vejamos a Figura 3.3.

**Definição 3.1.2.** *Sejam  $B$  um conjunto limitado,  $f : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, e  $R$  um retângulo com  $B \subset R$  e  $P = \{(x_i, y_j) : i = 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 1, 2, \dots, m\}$  uma partição. Para*

Figura 3.3: Conjunto limitado  $B$ 

cada  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, m$ , seja  $X_{ij} \in R_{ij}$  um ponto escolhido arbitrariamente. Então, o número  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$ , onde  $f(X_{ij}) = 0$ , se  $X_{ij} \notin B$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ , chama-se Soma de Riemann de  $f$  relacionada à partição  $P$  e aos  $X_{ij}$ .

Vamos supor que se  $f(X_{ij}) > 0$ , então  $f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$  é o volume do paralelepípedo de altura  $f(X_{ij})$  e base  $R_{ij}$ .

Mesmo se  $f$  não for uma função positiva podemos dar a seguinte definição:

**Definição 3.1.3.** A integral dupla de  $f$  sobre o retângulo  $R$  é a Integral Dupla de  $f$  sobre o retângulo  $R$  é

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

O elemento  $dA$  é a área infinitesimal ou área elementar usualmente representada por  $dx dy$ . No cálculo de integrais, quando for necessário enfatizar as variáveis de integração, usa-se a notação  $\iint_R f(x, y) dx dy$  a qual é mais adequado. A Figura 3.4 ilustra a construção da integral dupla sobre o retângulo  $R$ .

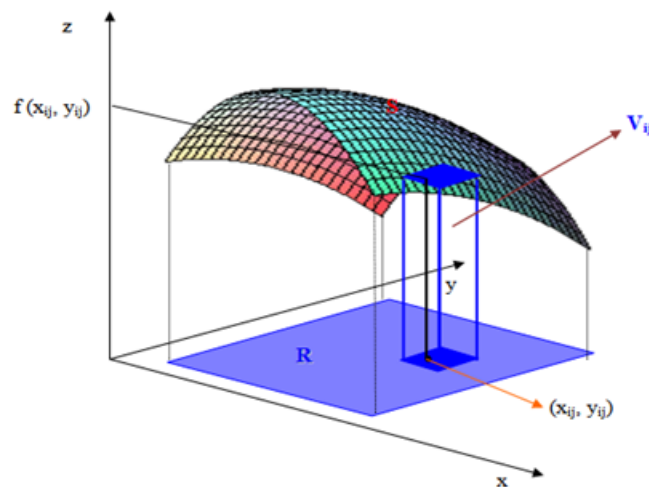
As propriedades básicas da Integral dupla são similares àsquelas para integral simples e o seguinte resultado admitindo sem demonstração, é na verdade consequências das propriedades do limite.

**Proposição 3.1.1.** Se  $f, g : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas no retângulo compacto  $R$  e  $\lambda$  é uma constante real, então:

$$1 \text{ Linearidade: } \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA.$$

2 Aditividade:

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$

Figura 3.4: Construção da integral dupla sobre o retângulo  $R$ 

3 Valor Médio: Existe pelo menos um ponto  $P(a, b)$  no retângulo  $R$ , tal que

$$\iint_R f(x, y) dA = f(a, b) A(R),$$

onde  $A(R)$  é a área da região de  $R$ .

**Exemplo 3.1.** Vamos explicar neste exemplo, como usar a definição para calcular a integral dupla da função  $f(x, y) = xy^2$  sob o retângulo  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$ .

**Solução:**

Utilizando o Método da Indução Finita demonstra-se:

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n K = \frac{n(n+1)}{2}$$

e

$$\sum_{k=1}^n K^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Consideremos a partição determinada pelos pontos

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$$

e

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m = 1,$$

Onde

$x_k = k\Delta x$  e  $y_k = k\Delta y$ , com  $k = 1, 2, \dots, n$

Sendo  $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{n}$

As Somas de Riemann, com  $u_i = x_i$  e  $v_j = y_j$  são

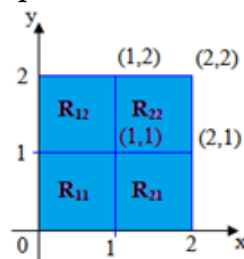
$$\begin{aligned} S_{n,n} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(u_i, v_j) \Delta x \Delta y = \\ &= \sum_{i=0}^n \left[ \sum_{j=0}^m i(\Delta x)^2 \right] j^2 (\Delta y)^3 \\ &= \frac{n+1}{2n} \left[ \sum_{j=0}^m j^2 (\Delta y)^3 \right] \\ &= \frac{[(n+1)^2(2n+1)]}{12n^3} \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$\iint_D xy^2 dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2(2n+1)}{12n^3} = \frac{1}{6}.$$

**Exemplo 3.2.** Calcule o volume do sólido que está acima do quadrado  $R = [0, 2] \times [0, 2]$  e abaixo do parabolóide elíptico  $z = 16 - x^2 - 2y^2$  pode ser aproximado pela subdivisão de  $R$  em quatro quadrados iguais.

Figura 3.5: Subdivisão do quadrado  $R$  em quatro quadrados iguais.



**Solução:**

Os quadrados são ilustrados na Figura 3.5, e a área de cada um vale 1. O Parabolóide é o gráfico de  $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ . Aproximando o volume pela Soma de Riemann  $m = n = 2$ , temos:

$$\begin{aligned}
V &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A = \\
&= f(1, 1) \Delta A + f(1, 2) \Delta A + f(2, 1) \Delta A + f(2, 2) \Delta A
\end{aligned}$$

$$13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34$$

## 3.2 Integrares Iteradas

Veremos nesta seção um teorema que será útil para o cálculo de Integrais Duplas. Transformaremos o problema de encontrar uma integral dupla por um problema de calcular duas integrais (de uma variável) repetidas.

### 3.2.1 Teorema de Fubini

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável no retângulo  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b \text{ e } c < y < d\}$ . Suponhamos que  $\int_a^b f(x, y) dx$  exista para todo  $y \in [c, d]$  e que  $\int_c^d f(x, y) dy$  exista para todo  $x \in [a, b]$ . Então

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Este resultado, conhecido como Teorema de Fubini, vale sempre que  $f$  for limitada em  $R$ , podendo ser descontínua em um número finito de pontos de  $R$ .

*Demonstração.* Sejam  $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  partição de  $[a, b]$  e  $P_2 = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d\}$  partição de  $[c, d]$ . Vamos chamar de

$$m_{ij} = \min \{f(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ e } y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

e de

$$M_{ij} = \max \{f(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ e } y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

Portanto, temos:

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}$$

para todo  $(x, y) \in R_{ij}$

logo

$$m_{ij}\Delta x_i \leq \int_{x_i}^{x_{i-1}} f(x, y)dx \leq M_{ij}\Delta x_i$$

Daí segue

$$\sum_{i=1}^n m_{ij}\Delta x_i \leq \int_a^b f(x, y)dx \leq \sum_{i=1}^n M_{ij}\Delta x_i$$

Ou seja,

$$\sum_{i=1}^n m_{ij}\Delta x_i \leq \alpha(y) \leq \sum_{i=1}^n M_{ij}\Delta x_i$$

Para qualquer  $\varepsilon_1 \in [y_{j-1}, y_j]$ , temos que,

$$\sum_{i=1}^n m_{ij}\Delta x_i \leq \alpha(\varepsilon_j)\Delta y_j \leq \sum_{i=1}^n M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$$

e portanto calculando as Somas de Riemann, vem

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij}\Delta x_i \leq \sum_{j=1}^m \alpha(\varepsilon_j)\Delta y_j \leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$$

agora tomando limite quando  $\Delta \rightarrow 0$ , temos

$$\iint_R f(x, y)dx dy \leq \int_c^d \alpha(y)dy \leq \iint_R f(x, y)dx dy$$

Assim provamos que

$$\iint_R f(x, y)dx dy = \int_c^d \alpha(y)dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y)dx \right] dy$$

A outra igualdade do enunciado prova-se de maneira análoga.

□

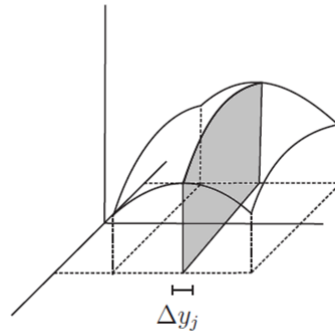
Podemos também fazer uma interpretação geométrica do Teorema de Fubini, assim:

Seja  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b \text{ e } c < y < d\}$  um retângulo e  $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $R$ . Para cada  $y$  fixo em  $[c, d]$  podemos considerar a função  $x \mapsto f(x, y)$ . Chamaremos de  $f_y(x) = f(x, y)$ . Se para cada  $y$  a função  $f_y$  é integrável em  $[a, b]$ , então podemos considerar a função

$$\alpha(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

Observe que se  $f(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y)$ , então  $\alpha(y)$  é a área hachurada na Figura 3.6.

Figura 3.6: **Interpretação geométrica do teorema de Fubini.**



Como foi enunciado no Teorema de Fubini

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

Portanto teremos:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \alpha(y) dy$$

Observe que se tomarmos uma partição  $P_2 = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d\}$  de  $[c, d]$ , então as Somas de Riemann da função  $\alpha$  são da forma

$$\sum_{j=1}^m \alpha(\varepsilon_j) \Delta y_j.$$

E  $\alpha(\varepsilon_j) \Delta y_j$  é o volume do sólido de base  $\alpha(\varepsilon_j)$  e altura  $\Delta y_j$ , ou seja, as Somas de Riemann de  $\alpha$  se aproximam das Somas de Riemann de  $f$ .

A partir de agora vamos fazer algumas aplicações das integrais duplas e do Teorema de Fubini.

**Exemplo 3.3.** Calcule o valor da integral  $\iint_R x^2 y dx dy$ , onde  $R = [0, 3] \times [1, 2]$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned}\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx &= \int_0^3 \left[ x^2 \int_1^2 y dy \right] dx = \\ \int_0^3 x^2 \left| \frac{y^2}{2} \right|_1^2 dx &= \int_0^3 x^2 \left( \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) dy = \\ \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 dx &= \frac{3}{2} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^3 = \frac{27}{2}\end{aligned}$$

Ou de modo análogo,

$$\begin{aligned}\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx &= \int_1^2 \left[ y \int_0^3 x^2 dx \right] dy = \\ \int_1^2 y \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^3 dy &= \int_1^2 y \left( \frac{27}{3} \right) dy = \\ \int_1^2 9y dy &= \left| \frac{9y^2}{2} \right|_1^2 = \frac{36}{2} - \frac{9}{2} = \frac{27}{2}.\end{aligned}$$

**Exemplo 3.4.** Calcule  $\iint_R y \operatorname{sen}(xy) dA$ , onde  $R = [1, 2] \times [0, \pi]$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned}\iint_R y \operatorname{sen}(xy) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 y \operatorname{sen}(xy) dx dy = \int_0^\pi \left[ -\cos(xy) \right]_1^2 dy = \\ \int_0^\pi [-\cos(2y) + \cos y] dy &= -\frac{1}{2} [\operatorname{sen}(2y) + \operatorname{sen}(y)]_0^\pi = \\ -\frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi) + \operatorname{sen}(\pi) &+ \frac{1}{2} \operatorname{sen}(0) - \operatorname{sen}(0) = 0\end{aligned}$$

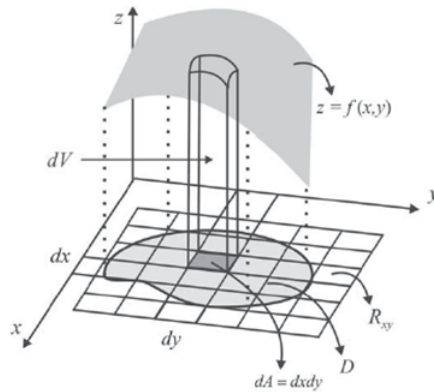
O valor obtido nesta integral representa a diferença do volume da parte do sólido que está acima do retângulo  $R$  e do volume da parte do sólido que está abaixo de  $R$ . Como o resultado foi zero, estes volumes são iguais.

**Observação 3.1.** Se mudarmos a ordem de integração, invertendo as integrais iteradas, a resolução das mesmas irá requerer a aplicação de técnicas de integração, tornando o trabalho mais complicado. Então é importante observar o tipo de função que iremos integrar e fazer uma boa escolha da ordem de integração.

### 3.3 Integrais duplas em regiões genéricas

Normalmente as Integrais Duplas são utilizadas para integrar funções retangulares. Mas, queremos ser capazes de integrar uma região  $D$  de forma mais geral, como mostra a Figura 3.7.

De fato, seja  $R_{xy} = [a, b] \times [c, d]$  um retângulo contendo a região  $D$  e consideremos a extensão  $\tilde{f}$  de  $f$  ao retângulo  $R_{xy}$  nula, fora de  $D$ , isto é,  $\tilde{f}: R_{xy} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por

Figura 3.7: Retângulo  $R_{xy}$  contendo a região  $D$ 

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } (x, y) \in D \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin D \end{cases}$$

Então, a Integral Dupla de  $f$  sobre  $D$  é, por definição a integral dupla da extensão  $\tilde{f}$  sobre o retângulo  $R_{xy}$ , isto é,

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R \tilde{f}(x, y) dA$$

A Figura 3.7 explana a situação geométrica, que mostra o volume elementar  $dV = f(x, y)dA$  e sugere que a Integral Dupla  $\iint_D f(x, y)dA$ , no caso em que a função  $f$  é não negativa, representam o volume do sólido com base  $D$  e limitado superiormente pelo gráfico de  $z = f(x, y)$ .

O cálculo da Integral dupla sobre regiões compactas  $D$  não retangulares é feito, também, por meio de integrais iteradas, mas com uma versão um pouco mais geral, desde que a região  $D$  tenha um formato simples.

### 3.3.1 Cálculo da integral dupla sobre regiões planas genéricas

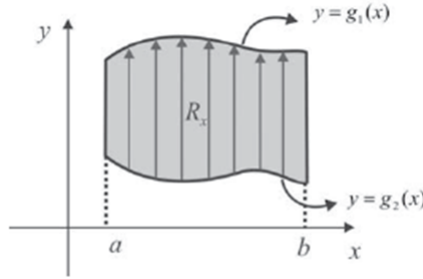
1. Regiões planas inscritas em faixas verticais:

Consideremos uma região

$$R_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Onde  $g_1$  e  $g_2$ :  $[a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas, é denominada região vertical simples.

Figura 3.8: Região vertical simples



Na Figura 3.8 exibe uma região vertical simples, onde observamos que as retas verticais (Paralelas ao eixo das ordenadas)  $x = k, a < k < b$ , intercepta a fronteira da região em exatamente 2 pontos. A integral Dupla de  $f$  sobre a região  $R_x$  é calculada pelo Teorema de Fubini para regiões não retangulares é:

$$\iint_{R_x} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

## 2. Regiões planas inscritas em faixas horizontais:

Consideremos uma região

$$R_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \text{ e } h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

Onde  $h_1$  e  $h_2: [c, d] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas, e denominada região horizontal simples. A integral Dupla sobre a região  $R_y$  é, utilizando o teorema de Fubini, dada por:

$$\iint_{R_y} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

A Figura 3.9 mostra uma região horizontal simples, em que as retas paralelas (paralelas ao eixo das abscissas)  $y = k, c < k < d$  intercepta a fronteira da região em exatamente 2 pontos.

**Exemplo 3.5.** Integre na ordem mais conveniente a integral dupla  $\iint_D \frac{y dx dy}{\sqrt{x+1}}$ , sendo  $R$  a região limitada pelas retas  $y = 0, x = 0$  e  $x + y - 3 = 0$ .

**Solução:**

Vamos representar graficamente a região  $D$  e determinar os limites de integração.

Figura 3.9: Região horizontal simples

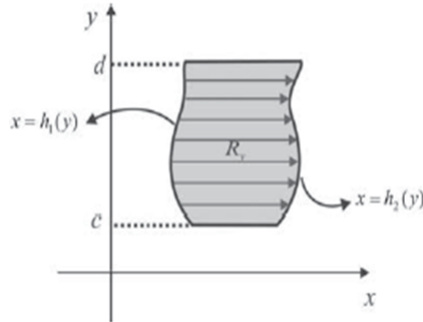
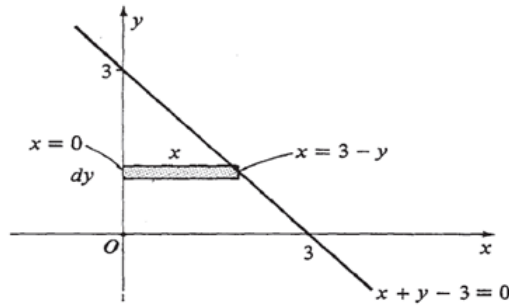


Figura 3.10: Exemplo de retângulo horizontal



Tomemos o retângulo da Figura 3.10.

Nesta posição os limites relativos a  $y$  são 0 e 3 e os relativos a  $x$  são 0 e  $(3 - y)$  ( de  $x + y - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 - y$ ).

Então,  $\iint_D \frac{y dx dy}{\sqrt{x+1}} = \int_0^3 \int_0^{3-y} \frac{y dx dy}{\sqrt{x+1}}$ , o  $dy$  exterior por ser a base do retângulo elementar.

Se tomássemos o retângulo elementar com base no eixo  $O_x$ , conforme a Figura 3.11, teríamos:

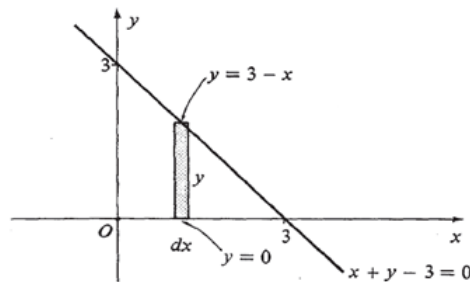
$$\iint_D \frac{y dx dy}{\sqrt{x+1}} = \int_0^3 \int_0^{3-x} \frac{y dy dx}{\sqrt{x+1}}$$

De modo análogo ao anterior, agora os limites relativo à  $x$  são 0 e 3 e à  $y$  são 0 e  $3 - x$  ( de  $x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 - x$ ).

Agora, resolvendo na ordem da primeira escolha, temos:

$$I = \int_0^3 \int_0^{3-y} \frac{y}{\sqrt{x+1}} dy dx = \int_0^3 y \left[ \int_0^{3-y} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \right] dy =$$

Figura 3.11: Exemplo de retângulo vertical



Como

$$\int_0^{3-y} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \int_0^{3-y} (x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \left| \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_0^{3-y} =$$

$$\left| 2\sqrt{x+1} \right|_0^{3-y} = 2\sqrt{4-y} - 2.$$

Assim

$$\int_0^3 (2\sqrt{4-y} - 2)y dy = 2 \int_0^3 y\sqrt{4-y} dy - 2 \int_0^3 y dy$$

Vamos resolver uma Integral por vez, assim vamos chamar de  $A = 2 \int_0^3 y\sqrt{4-y} dy$   
e  $B = -2 \int_0^3 y dy$   
Calculemos as Integrais  $A$  e  $B$ :

$$A = 2 \int_0^3 y\sqrt{4-y} dy$$

Façamos  $\sqrt{(4-y)} = t \Rightarrow 4-y = t^2 \Rightarrow y = 4-t^2$

De  $y = 4-t^2$ , teremos  $dy = -2t dt$

Os limites de integração para a nova variável são:

para  $y = 0 \Rightarrow t = \sqrt{(4-0)} \Rightarrow t = 2$

para  $y = 3 \Rightarrow t = \sqrt{(4-3)} \Rightarrow t = 1$

Substituindo na integral  $A$ , vem:

$$A = 2 \int_2^1 t(4 - t^2)(-2tdt) = -4 \int_2^1 (4t^2 - t^4)dt = -4 \left[ \frac{4t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_2^1 =$$

$$A = -4 \left[ \left( \frac{4}{3} - \frac{1}{5} \right) - \left( \frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) \right] \Rightarrow A = \frac{188}{15}.$$

$$B = -2 \int_0^3 ydy =$$

$$B = -2 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^3 \Rightarrow B = -9$$

Então

$$I = \int_0^3 \int_0^{3-y} \frac{y}{\sqrt{x+1}} dydx = \frac{188}{15} - 9 = \frac{188 - 135}{15} = \frac{53}{15}.$$

Agora vamos resolver na ordem da segunda escolha.

$$I = \int_0^3 \int_0^{3-x} \frac{y}{\sqrt{x+1}} dydx = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} \left[ \int_0^{3-x} ydy \right] dx =$$

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{3-x} dx = \int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{x+1}} (3-x)^2 dx =$$

$$\int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{x+1}} (9 - 6x + x^2) dx =$$

$$I = 9 \int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx - 3 \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx + \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx$$

Vamos resolver um integral por vez, assim vamos chamar de

$$A = 9 \int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx, \quad B = -3 \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \quad e \quad C = \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx$$

Calculemos as integrais  $A$ ,  $B$ , e  $C$ :

$$A = 9 \int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx = 9 \left[ \sqrt{x+1} \right]_0^3 = 9(\sqrt{4} - 1) = 9$$

$$B = -3 \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$$

Façamos  $\sqrt{(x+1)} = t \Rightarrow x+1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1$  e  $dx = 2t dt$ .

Os limites de integração para a nova variável são:

$$\text{para } x = 3 \Rightarrow t = \sqrt{(3+1)} \Rightarrow t = 2$$

$$\text{para } x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{(0+1)} \Rightarrow t = 1$$

Substituindo em  $B$ , vem:

$$-3 \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t} \cdot 2t dt = -6 \int_1^2 (t^2 - 1) dt =$$

$$-6 \left[ \frac{t^3}{3} - t \right]_1^2 = -6 \left[ \left( \frac{8}{3} - 2 \right) - \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \right] = -8$$

$$C = \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx$$

Façamos

$$\sqrt{(x+1)} = t \Rightarrow x+1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1 \text{ e } dx = 2t dt$$

Os novos limites de integração são 1 e 2:

$$C = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t^2 - 1)^2}{t} \cdot 2t dt = \int_1^2 (t^4 - 2t^2 + 1) dt =$$

$$\left[ \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t \right]_1^2 = \left( \frac{32}{5} - \frac{16}{3} + 2 \right) - \left( \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right)$$

$$\frac{96 - 80 + 30}{15} - \frac{3 - 19 + 15}{15} = \frac{38}{15}$$

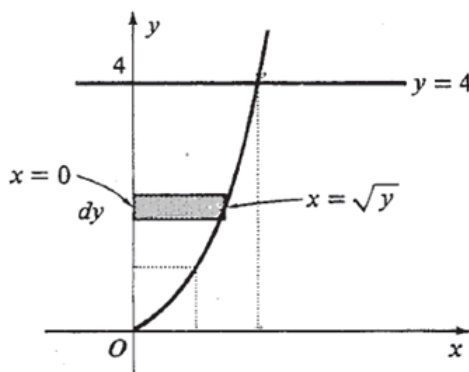
Então

$$I = \int_0^3 \int_0^{3-x} \frac{y}{\sqrt{x+1}} dy dx = 9 - 8 + \frac{38}{15} = \frac{53}{15}$$

**Exemplo 3.6.** Calcule a área da superfície limitada pela curva  $y = x^2$ , pelo eixo dos  $y$  e pela reta  $y = 4$ , no primeiro quadrante do plano cartesiano. Observe a Figura 3.12

**Solução:**

Figura 3.12: Exemplo 2 de retângulo vertical



A área da região D é

$$A = \iint_R dx dy$$

Como tomamos o retângulo elementar com base no eixo dos  $y$ , a ordem de integração será:

$A = \iint_R dx dy$  e os limites para  $y$  serão, 0 e 4 e para  $x$ , 0 e  $\sqrt{y}$ .

$$A_R = \int_0^4 \left[ \int_0^{\sqrt{y}} dx \right] dy = \int_0^4 |x|_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \sqrt{y} dy$$

$$\int_0^4 y^{\frac{1}{2}} dy = \left| \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} \right|_0^4 = \frac{2 \cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2 \cdot \sqrt{4^3}}{3} = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$$

Logo

$$A_R = \frac{16}{3} u^2$$

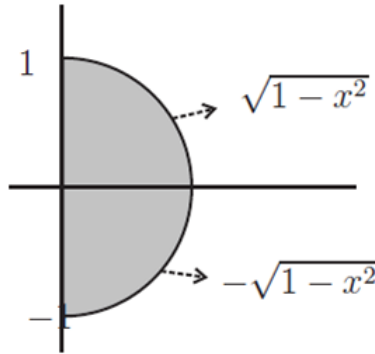
**Exemplo 3.7.** Calcule  $\iint_B (x - y) dx dy$  onde  $B$  é o semicírculo  $x^2 + y^2 \leq 1$  e  $x \geq 0$ . Veja a Figura 3.13:

**Solução:**

Os limites relativos à  $x$  são, 0 e 1, e os relativos à  $y$  são,  $-\sqrt{1-x^2}$  e  $\sqrt{1-x^2}$ , daí temos:

$$\int_0^1 \left[ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x - y) dy \right] dx = \int_0^1 \left| xy - \frac{y^2}{2} \right|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

Figura 3.13: Semicírculo B



$$\int_0^1 (x \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \sqrt{1-x^2}) dx = \int_0^1 (2x \cdot \sqrt{1-x^2}) dx$$

Fazendo  $u = 1 - x^2$ , logo  $du = -2x dx$ , então:

$$\int_0^1 \sqrt{u} du = \left| \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} \right|_0^1 = \left| \frac{2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} \right|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

De modo análogo, essa integral pode ser resolvida:

Os novos intervalos relativos a  $y$  serão,  $-1$  e  $1$ , e os relativos a  $x$  são,  $0$  e  $\sqrt{(1-y^2)}$ . Daí, temos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left[ \int_0^{\sqrt{(1-y^2)}} (x-y) dx \right] dy &= \int_{-1}^1 \left[ \frac{x^2}{2} - xy \right]_0^{\sqrt{(1-y^2)}} dy = \\ \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} - y\sqrt{(1-y^2)} \right) dy &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

### 3.4 Mudança de variáveis nas integrais duplas

Na integração de funções de uma variável real, usamos a mudança de variável para transformar uma integral dada em outra mais simples acompanhada por uma correspondente mudança nos limites de integração.

Quando calculamos ou efetuamos uma integral por substituição, na verdade efetuamos

uma mudança na variável para obtermos uma primitiva. Mais precisamente, se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável, com  $g'$  integrável, e  $g(c) = a$  e  $g(d) = b$ , então

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du.$$

**Exemplo 3.8.** *Vamos calcular uma integral simples por meio das mudanças de variáveis:*

**Solução:**

Se  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , então com a substituição  $x = g(u) = \text{senu}$ , obtemos

$f(g(u)) = \sqrt{1-\text{sen}^2 u} = \text{cosu}$  e  $g'(u) = \text{cosu}$ ,  $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ , e portanto

$$\int_0^1 (\sqrt{1-x^2})dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\text{cos}^2 u}du = \frac{\pi}{4}$$

Agora vamos deduzir uma fórmula para mudança de variável para Integrais Duplas, vamos considerar a transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T : \begin{cases} x(u, v) \\ y(u, v) \end{cases}$$

Onde as funções de coordenadas  $x(u, v)$  e  $y(u, v)$  têm derivadas parciais de primeira ordens contínuas em uma região  $R_{uv}$  do plano  $uv$  e suponhamos que o jacobiano

$$J(T) = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}, \text{ não se anula em } R_{uv}.$$

A transformação  $T$  é localmente invertível e, como estabelece o Teorema da função Inversa, as coordenadas da inversa  $u = u(x, y)$  e  $v = v(x, y)$  têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas na região  $R_{xy} = T(R_{uv})$ , imagem de  $R_{uv}$  pela transformação  $T$ .

Usaremos a Figura 3.14 como orientação para obtermos a fórmula. Se  $r \cdot (u, v) = x(u, v) \cdot i + y(u, v) \cdot j$  e o vetor posição do ponto  $Q(x, y)$  e a região  $R_{xy}$  for particionada pelas curvas de nível  $u = c_1$  e  $v = c_2$ , então a área dos elementos  $dxdy$  será aproximada pela área do paralelogramo de lados  $a = r_u \cdot dv = x_u \cdot i + y_u \cdot j$ , e, conseqüentemente,

$$axb = (r_u x r_v) dudv = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_u & x_v & 0 \\ y_u & y_v & 0 \end{bmatrix} dudv = [(x_u y_v - x_v y_u) dudv] k. \text{ Logo, as áreas}$$

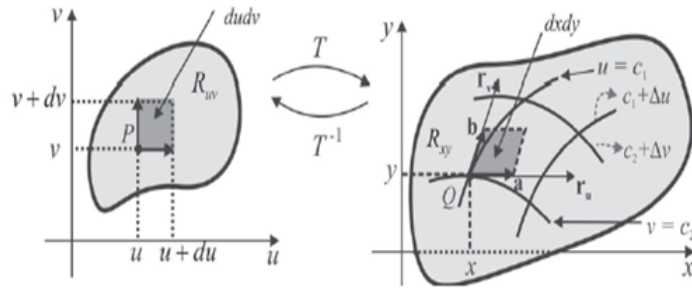
elementares  $dxdy$  e  $dudv$  estão relacionadas por:

$dxdy = |axb| = |J(T)|dudv$  E se  $f(x, y)$  é uma função integrável sobre a região  $R_{xy}$ , então a definição de Integral Dupla resulta

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y) dxdy \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) dxdy \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) |J(u_i, v_j)| dudv$$

$$\approx \iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) |J(u_i, v_j)| du dv$$

Figura 3.14: Representação geométrica de mudança de variáveis



**Teorema 3.1.** (*Mudança de variável*): Seja  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de derivadas parciais de primeira ordem contidas em um domínio  $D$  contendo a região  $R_{xy}$ . Se as funções  $x = x(u, v)$  têm derivadas parciais de primeira ordem contidas em  $R_{uv}$ , então,

$$\approx \iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) |J(u_i, v_j)| du dv$$

Se a transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $x(u, v) + y(u, v)$  for localmente invertível, então

$$J(u, v) \cdot J(x, y) = 1$$

E, se for adequado, podemos usar a fórmula da mudança de variável na ordem inversa. Se a transformação  $T$  tem o jacobiano  $J(T)$  constante (isso ocorre em transformações lineares) e a função  $f(x, y) \equiv 1$ , segue do teorema anterior que

$$A(R_{xy}) = A(T(R_{uv})) = |J| A(R_{uv})$$

e o jacobiano pode ser visto como fator de relação entre as áreas de  $R_{xy}$  e  $R_{uv}$ .

**Exemplo 3.9.** Calcule utilizando a Integral Dupla, a área da elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , com  $a, b > 0$ .

**Solução:**

Se representarmos por  $R_{xy}$  a região delimitada pela elipse, isto é,

$$R_{xy} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

então, a área da região  $R_{xy}$  é dada por  $A(R_{xy}) = \iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy$

O cálculo da integral dupla torna-se mais simples por meio de mudanças de variáveis que transforma a elipse em uma circunferência.

Consideremos, então, a transformação linear  $x = au$  e  $y = bu$ , com jacobiano,

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

que leva a região  $R_{xy}$  sobre o disco compacto

$$R_{uv} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$

e utilizemos a fórmula de mudança de variáveis. Temos

$$A(R_{xy}) = \iint_{R_{xy}} dx dy = ab \iint_{R_{uv}} du dv$$

A integral dupla que aparece do lado direito, nada mais é do que a área do círculo de raio  $r = 1$ , cujo valor é  $\pi$ . Logo

$$A(R_{xy}) = abx A(R_{uv}) = \pi ab.$$

**Exemplo 3.10.** *Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear  $T(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$  e suponhamos que  $ad - bc \neq 0$ . Se  $R$  é o paralelogramo gerado pelos vetores linearmente independentes  $a = ai + bj$  e  $b = 3i - j$ , então:  $A(T(R)) = |J(T)|A(R)$ . Como consequência, calcular a área do paralelogramo  $R$  com três vértices nos pontos  $O(0, 0)$ ,  $A(2, 1)$  e  $B(3, -1)$ .*

**Solução:**

se  $u = ax + cy$  e  $v = bx + dy$ , então

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc \neq 0$$

e

$$J(u, v) = \frac{1}{ad - bc}$$

O paralelogramo  $R$  é gerado pelos vetores  $a = ai + bj$  e  $b = 3i - j$  e se considerarmos a transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é definida por  $T(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$  com jacobiano  $J(x, y) = -5$ , teremos  $R = T(S)$ , onde  $S$  é o quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Portanto o paralelogramo  $R$  é igual a  $|J(T)| = |-5| = 5$ .

# Capítulo 4

## Aplicações

As Integrais Duplas possuem aplicações em diversas áreas do conhecimento, como é uma forte ferramenta matemática, que possibilitou a solução de problemas que não possuíam respostas, veremos algumas dessas aplicações neste capítulo.

### 4.1 Massa e centro de massa de uma lâmina

Suponha uma lâmina colocada em uma região  $D$  do plano  $xy$  e cuja densidade (em unidades de massa por unidade de área) no ponto  $(x, y)$  em  $D$  é dada por  $\rho(x, y)$ , onde  $\rho$  é uma função contínua sobre  $D$ . Então a massa total  $m$  da lâmina é dada por:

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA$$

Além disso, o centro de massa dessa lâmina é o ponto  $(X, Y)$ , onde  $X = \frac{M_y}{m}$  e  $Y = \frac{M_x}{m}$ , sendo  $M_x = \iint_D y\rho(x, y)dA$  e  $M_y = \iint_D x\rho(x, y)dA$  os momentos em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

**Exemplo 4.1.** *Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 2)$ , se a função densidade é  $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$ . Considere a Figura 4.1*

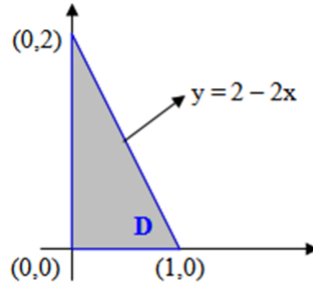
**Solução:**

O triângulo  $D$  está limitado pelas retas  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $y = 2 - 2x$ . Podemos expressar  $D$  por:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x\}$$

A massa da lâmina é:

Figura 4.1: Lâmina triangular



$$m = \iint_D \rho(x, y) dA = \iint_D 1 + 3x + y dA$$

Portanto:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y) dy dx = \int_0^1 \left| y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right|_0^{2-2x} dx = \\ &= \int_0^1 \left( 2 + 4x - 6x^2 + \frac{2-2x}{2} \right) dx = \int_0^1 (4 - 4x^2) dx = \left| 4x - \frac{4x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

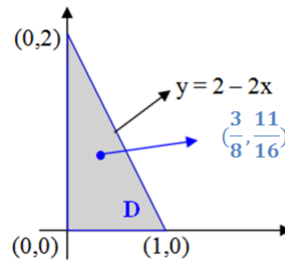
Os momentos são:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_x &= \iint_D y \rho(x, y) dA = \iint_D y + 3xy + y^2 dA = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (y + 3xy + y^2) dy dx = \int_0^1 \left| \frac{y^2}{2} + 3x \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right|_0^{2-2x} dx = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{(2-2x)^2}{2} + 3x \frac{(2-2x)^2}{2} + \frac{(2-2x)^3}{3} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{14}{3} - 6x - 2x^2 + \frac{10}{3}x^3 \right) dx = \left| \frac{14}{3}x - 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^4 \right|_0^1 = \\ &= \frac{14}{3} - 3 - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{11}{6} \\ \mathbf{M}_y &= \iint_D x \rho(x, y) dA = \iint_D x + 3x^2 + xy dA = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy) dy dx = \int_0^1 \left| xy + 3x^2y + x \frac{y^2}{2} \right|_0^{2-2x} dx = \\ &= \int_0^1 \left( 2x + 4x^2 - 6x^3 + x \frac{(2-2x)^2}{2} \right) dx = \\ &= \int_0^1 (4x - 4x^3) dx = \left| 2x^2 - x^4 \right|_0^1 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Então } X = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8}; Y = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{11}{6}}{\frac{8}{3}} = \frac{11}{16}$$

Logo, o centro de massa da lâmina é o ponto  $(\frac{3}{8}, \frac{11}{16})$ , indicado na Figura 4.2:

Figura 4.2: Lâmina triangular com resultados



## 4.2 Carga

Se uma carga elétrica está distribuída sobre uma região  $D$  e a densidade de carga (em unidades de carga por área) é dada por  $\delta(x, y)$  num ponto  $(x, y)$  em  $D$ , então a carga total  $q$  é

$$\iint_D \delta(x, y) dx dy.$$

**Exemplo 4.2.** A carga é distribuída sobre uma região  $D$  pelo retângulo de vértices  $(3, 2), (0, 2), (3, 0)$  e  $(0, 0)$  de modo que a densidade da carga em um ponto  $(x, y)$  seja  $\delta(x, y) = x^2 y$ , medida em coulomb por metro quadrado. Determine sua carga total.

**Solução:**

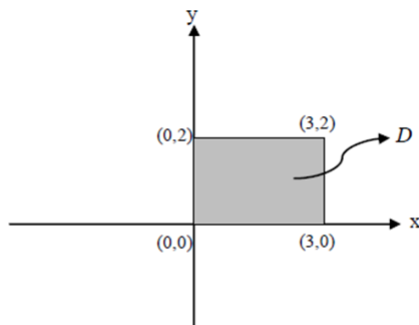
Para calcular a carga total, primeiramente temos que desenhar a região  $D$ , sabemos que ela é delimitada por um retângulo, observe a Figura 4.3:

Sendo assim temos que a região  $D$ , é dada por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\}$$

e a carga total é:

$$q = \iint_D \delta(x, y) dx dy = \iint_D x^2 y dx dy$$

Figura 4.3: Uma região retangular  $D$  com cargas puntiformes

$$q = \int_0^2 \left[ \int_0^3 x^2 y dx \right] dy = \int_0^2 \left[ y \int_0^3 x^2 dx \right] dy$$

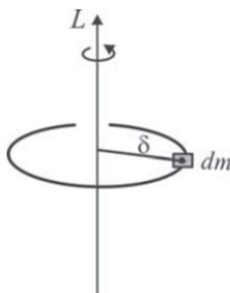
$$\int_0^2 y \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^3 dy = \int_0^2 9y dy =$$

$$\left| \frac{y^2}{2} \right|_0^2 = 9.2 = 18$$

Portanto, a carga total distribuída ao longo da região  $D$ , é de 18 coulombs.

### 4.3 Momento de inércia

Imaginemos uma lâmina  $D$  girando em torno de um eixo  $L$ , com velocidade angular constante igual a  $\omega$  e seja  $\delta(x, y)$  a distância da massa elementar (pontual)  $dm$  ao eixo  $L$ , como na Figura 4.4:

Figura 4.4: Lâmina  $D$  girando em torno de um eixo  $L$ 

Se  $dE$  representa a energia cinética da massa  $dm$ , então:

$$dE = \frac{1}{2}(\omega\delta)^2 dm = \frac{1}{2}(\omega\delta)^2 \sigma(x, y) dA$$

onde  $\omega\delta$  é a velocidade escalar do corpo. A energia cinética é, portanto

$$E = \iint_D dE = \frac{1}{2}\omega^2 \iint_D \delta^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \iint_D \delta^2 \sigma(x, y) dA$$

A integral que figura o lado direito é o momento inércia da placa  $D$  em relação ao eixo  $L$  e anota-se:

$$I_L = \iint_D \delta^2 \sigma(x, y) dA$$

Em relação aos eixos coordenados, os momentos inércia da placa  $D$  são:

$$I_x = \iint_D y^2 \sigma(x, y) dx dy \text{ e } I_y = \iint_D x^2 \sigma(x, y) dx dy$$

Enquanto o momento inércia polar em relação a origem é dado por

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2) \sigma(x, y) dx dy$$

O termo  $x^2 + y^2$  que aparece na expressão do movimento inércia polar é precisamente o quadrado da distância de um ponto  $P(x, y)$  da placa  $D$  à origem  $O(0, 0)$ .

Podemos interpretar o momento inércia como resistência ao movimento. Quanto maior o momento de inércia, maior deve ser a energia para colocar o corpo em movimento ou fazê-lo parar.

**Exemplo 4.3.** Uma lâmina tem o formato da região  $D : x^2 + y^2 \leq a^2$  no primeiro quadrante. Determine o momento de inércia  $I_x$  e  $I_y$  da lâmina  $D$ , se a densidade em um ponto  $p(x, y)$  da lâmina é  $\sigma(x, y) = xy$ .

**Solução:**

$$I_x = \iint_D y^2 \sigma(x, y) dx dy = \iint_D xy^3 dA =$$

$$\int_0^a x \left[ \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} y^3 dy \right] dx =$$

$$\frac{1}{4} \int_0^a x(a^2 - x^2)^2 dx$$

Com  $t = a^2 - x^2$ , temos:

$$\frac{1}{4} \int_0^{a^2} t^2 dt = \frac{a^6}{24}$$

O outro resultado resolve-se de modo análogo.

# Conclusão

No estudo ficou ratificado que as Integrais Duplas são, de fato, essenciais para diversas áreas do conhecimento, esta possibilitou o avanço e o desenvolvimento de várias ciências que careciam de uma ferramenta poderosa para encontrar soluções para problemas que até então persistiam sem respostas.

Ficou evidenciado que o estudo das Integrais Duplas pode nos capacitar a expandir os nossos conhecimentos não apenas matemáticos, mas também nas diversas áreas das ciências exatas e suas tecnologias. Portanto, a Integral Dupla não pode ser mais considerada uma ferramenta de difícil compreensão, pois vimos que mesmo com um grau de complexidade, facilita em algumas aplicações, que nem mesmo a álgebra ou a geometria conseguiram resolver.

Espera-se que este Trabalho de Conclusão de Curso tenha alcançado os seus objetivos e propósitos delineados no decorrer dos estudos realizados. E que possivelmente sirva de referencial teórico para educadores que se debruçam sobre o tema de melhoria da qualidade de ensino em sala de aula nas Universidades.

# Referências

- [1] ÁVILA, Geraldo Severo de Sousa. **Cálculo 3:** funções de várias variáveis. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1995.
- [2] BOYER, Carl B. **História da matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996, 4. reimpr., 2002.
- [3] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2004. ( Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues.)
- [4] GUIDORIZZI, Hamilton Luís. **Um curso de cálculo volume 3.** 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- [5] LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica volume 1.** 3. ed. São Paulo-SP: Harbra, 1994.
- [6] STEWART, James. **Cálculo volume 1.** 5. ed. São Paulo-SP: Thomson Learning, 2007.
- [7] STEWART, James. **Cálculo volume 2.** 5. ed. São Paulo-SP: Thomson Learning, 2007.