



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ  
COLEGIADO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

# **Controle Ótimo aplicado ao sistema presa-predador**

*Jonas da Silva Batista*

**UNIFAP  
MACAPÁ - 2015**

**JONAS DA SILVA BATISTA**

**CONTROLE ÓTIMO APLICADO AO SISTEMA PRESA-PREDADOR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Matemática como requisito para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, sob a orientação da professora Simone de Almeida Delphim Leal .

**UNIFAP  
MACAPÁ - 2015**

**JONAS DA SILVA BATISTA**

**CONTROLE ÓTIMO APLICADO AO SISTEMA PRESA-PREDADOR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciatura (Plena) em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá, Campus Marco Zero, aprovado pela Comissão de professores:

---

Prof. Simone de Almeida Delphim  
Colegiado de Matemática, UNIFAP

---

Prof. Marcel Lucas Picanço Nascimento  
Colegiado de Matemática, UNIFAP

---

Prof. Naralina Viana Soares da Silva  
Colegiado de Matemática, UNIFAP

*Aos meus familiares pelo apoio e incentivo de cada dia.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por me dar sabedoria para meus ideais, paciência para os contratempos e a bênção diária que me faz está aqui hoje.

A minha mãe, Maria Batista que é meu tudo, por suas imensas batalhas na vida para me fazer chegar onde estou e me torna o homem que sou.

Aos meus queridos familiares que me apoiaram e incentivaram meu dia-a-dia, me ajudando de muitas formas principalmente financeiramente, agradeço especialmente as minhas irmãs Nazaré Batista, Marlete Batista. E minha mãe Mariza Batista, assim como meu pai José Luiz Pereira, por sempre terem lutado pelo meu sonho.

A professora Simone Leal, pela orientação, apoio e ter me guiado a esse caminho, assim como seu marido Edson Leal, pela ajuda no Latex.

A minha querida companheira Danielle Rodrigues, por está comigo nesse momento tão esperado e ao apoio que tem dado nesse tempo juntos.

Aos amigos que fiz durante o curso Greyce, Larissa, Reinaldo, Thiago e Willerson. Aos professores(as) e todos aqueles(as) que cruzaram em minha vida, participando de alguma forma na construção e realização deste tão desejado sonho de carregar o canudo de minha formatura.

# Lista de Figuras

1.1	Um extremo e duas curvas vizinhas . . . . .	5
1.2	Funcional de fronteiras fixas . . . . .	6
1.3	Funcional com $x(t_f)$ livre . . . . .	10
1.4	Extremo e uma curva admissível para o problema com $t_f$ e $x(t_f)$ livres . . . . .	12
1.5	$t_f$ e $x(t_f)$ livres, mas relacionados por uma curva $\theta(t)$ . . . . .	18
3.1	Simulação no intervalo de tempo $0 \leq T \leq 5$ . . . . .	40
3.2	Simulação no intervalo de tempo $5 < T \leq 10$ . . . . .	40

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Sumário</b>	<b>vii</b>
<b>Resumo</b>	<b>viii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Cálculo de Variações</b>	<b>2</b>
1.1 Preliminares . . . . .	2
1.2 Teorema Fundamental do Cálculo de Variações . . . . .	4
1.2.1 Teorema Fundamental do Cálculo de Variações . . . . .	4
1.3 Equação de Euler . . . . .	6
1.4 Problemas com Fronteiras Móveis. . . . .	10
1.4.1 Tempo final especificado e $x(t_f)$ livre. . . . .	10
1.4.2 Tempo final e $x(t_f)$ livres. . . . .	12
<b>2 Controle ótimo</b>	<b>19</b>
2.1 O que é Controle Ótimo . . . . .	19
2.2 Problema de Controle Ótimo . . . . .	20
<b>3 Aplicações</b>	<b>28</b>
3.1 Controle Singular . . . . .	28
3.2 Problemas de controle ótimo com Variável de controle limitada . . . . .	36
3.2.1 Condições necessárias . . . . .	37
<b>A Fórmula de Taylor</b>	<b>42</b>
<b>B Teorema do Valor Médio</b>	<b>44</b>
<b>C Teorema Fundamental do Cálculo</b>	<b>45</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>47</b>

# Resumo

As técnicas de otimização têm sido implementadas atualmente nas mais diversas áreas de conhecimento. Uma aplicação de otimização para sistemas dinâmicos é determinar uma lei de controle que faça com que o sistema atenda a certas especificações de desempenho. Fazendo um aporte da teoria de controle ótimo em ecologia, neste estudo emprega-se o modelo Lotka-Volterra (L-V). A escolha do modelo se justifica pelo uso simplificado que facilitará a exposição da teoria de controle ótimo em ecologia. A análise no sistema sugere a proposição de controlar as dinâmicas das presas e predadores por meio de um agente de controle que mata as espécies de forma proporcional.

**Palavras-chave:** Teoria Controle Ótimo, Presa-predador, Otimização.



# Introdução

O cálculo das variações nasceu no século dezessete com a contribuição de Bernoulli, Fermat, Leibniz e Newton. Alguns matemáticos como H.J. Sussmann e J.C. Willems defendem a origem do controle ótimo coincide com o nascimento do cálculo das variações, em 1697, data de publicação da solução do problema da braquistócrona pelo matemático Johann Bernoulli. Outros vão ainda mais longe, chamando a atenção para o fato do problema da resistência aerodinâmica de Newton, colocado e resolvido por Isaac Newton em 1686, no seu Principia Mathematica, ser um verdadeiro problema de Controle Ótimo [2].

E com passar dos anos e dos avanços tecnológicos, o uso de tais abordagens vêm ganhando ênfase, nas mais diversas áreas de atuação, assim se dá aplicação de controle ótimo em sistemas biológicos, buscando complementar ainda mais os estudos destas áreas referidas.

Do cálculo variacional destacamos a equação de Euler, onde a tomamos como ponto de referência para se determinar pontos extremos de funcionais e temos especial interesse no estudo de condições necessárias e/ou suficientes para caracterização das soluções com objetivos de determinar os pontos de máximo ou de mínimo destes problemas de otimização, tais como problemas com limitações nas condições de contorno, por exemplo, com fronteiras finais livres.

Deste modo, a Teoria de Controle ótimo analisa determinado comportamento, seja populacional, econômico, energético, entre outras, buscando as condições de controle pedidas. E com base nos resultados do Cálculo Variacional, têm-se, através da Função Hamiltoniana as condições necessárias ao controle ótimo.

Na aplicação destas abordagens em um sistema dinâmico biológico, como o Sistema presa-predador de Lotka-Volterra, com a finalidade de obter o equilíbrio populacional de tais espécies, veremos como se dará o comportamento do sistema ao aplicarmos um controle exógeno, e estudar o desempenho populacional de cada espécie.

# Capítulo 1

## Cálculo de Variações

### 1.1 Preliminares

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados importantes do Cálculo Variacional que serão utilizados durante o trabalho.

**Definição 1.1.1** *Um funcional  $J$  é uma regra de correspondência que associa a cada função  $x$  em certa classe  $\Omega$ , um único número real. O conjunto  $\Omega$  é chamado domínio de um funcional e o conjunto de números reais associados com funções em  $\Omega$  é chamado de conjunto imagem do funcional.*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

**Definição 1.1.2** *A norma de uma funcional é uma regra de correspondência que associa a cada função  $x \in \Omega$ , definida para  $t \in [t_0, t_f]$ , um número real, denotado por  $\|x\|$ , e que deve satisfazer as seguintes propriedades:*

1.  $\|x\| \geq 0$  e  $\|x\| = 0$  se e somente se  $x(t) = 0$  para todo  $t \in [t_0, t_f]$ .
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  para quaisquer  $x, y \in \Omega$ .

**Definição 1.1.3** *Se  $x$  e  $x + \delta x$  são funções para as quais o funcional  $J$  está definido então o incremento de  $J$ , denotado por  $\Delta J$  ou  $\Delta J(x, \delta x)$ , é dado por:*

$$\Delta J = J(x + \delta x) - J(x), \quad (1.1)$$

onde  $\delta x$  é chamado de variação da função  $x$ . A notação  $J(x)$  significa que  $J$  é um funcional da função  $x$ .

**Exemplo 1.1.1** *Seja o funcional  $J(x(t)) = \int_a^b x(t)x'(t)dt$ , definido em  $C^1[a, b]$ . Se  $x(t) = e^t$  e  $x_1(t) = 1$ , o incremento de  $J$  é dado por:*

$$\Delta J = J(x_1(t)) - J(x(t)) = \int_0^1 (1)(0)dt - \int_0^1 (e^x)(e^x)dt = \frac{-e^2 - 1}{2}. \quad (1.2)$$

De forma alternativa à (1.1.5), temos a seguinte definição

**Definição 1.1.4** O incremento de um funcional pode ser escrito como

$$\Delta J(x, \delta x) = \delta J(x, \delta x) + g(x, \delta x) \cdot \|\delta x\|, \quad (1.3)$$

sendo  $\delta J$  linear em  $\delta x$ .

**Definição 1.1.5 (Funcional diferenciável)** Se  $\lim_{\|\delta x\| \rightarrow 0} g(x, \delta x) = 0$  então  $J$  é dito ser diferenciável em  $x$  e  $\delta J$  é a variação de  $J$  calculada em  $x$ .

A variação de um funcional  $\delta J$  é a aproximação linear para as alterações no funcional  $J$  causada pela comparação de duas curvas, também desempenha papel similar em determinar extremos de funcionais, que a diferencial de uma função desempenha em encontrar os máximos ou mínimos de funções. Se as curvas comparadas são próximas, ou seja,  $\|\delta x\|$  pequena, então a variação deveria ser uma boa aproximação para o incremento do funcional ( $\Delta J$ ). No entanto,  $\delta J$  pode ser uma aproximação fraca para  $\Delta J$  se as curvas comparadas forem distantes.

**Exemplo 1.1.2** Considere o funcional  $J(x(t)) = \int_a^b \alpha [x(t)]^2 dt$ , definido em  $C[a, b]$ .

O incremento de  $J$  é dado por:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_a^b \alpha [x(t) + \delta x(t)]^2 dt \\ &= \int_a^b \alpha [x(t) + \delta x(t)]^2 dt - \int_a^b \alpha [x(t)]^2 dt \\ &= \int_a^b \alpha [(x(t))^2 + 2x(t)\delta x(t) + (\delta x(t))^2] dt - \int_a^b \alpha [x(t)]^2 dt \\ &= \int_a^b 2\alpha x(t)\delta x(t) dt + \int_a^b \alpha (\delta x(t))^2 dt. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Analisando o segundo membro da equação (1.4) e de acordo com a definição (1.1.2), temos

$$\int_a^b (\delta x(t))^2 dt = \int_a^b |\delta x(t)|^2 dt \leq \left[ \max_{a \leq t \leq b} |\delta x(t)| \right]^2 \int_a^b dt = (b-a) \|\delta x(t)\| \|\delta x(t)\|$$

onde  $\|\delta x(t)\| = \max |\delta x(t)|$ . Pela definição (1.1.5), fazendo  $\|\delta x(t)\| \rightarrow 0$ , temos  $(b-a) \|\delta x(t)\| \rightarrow 0$ , portanto o funcional é diferenciável em  $x$ .

Assim, o incremento  $\Delta J$  é representado como um termo linear em  $\delta x$  e um termo que é infinitésimo comparado a  $\delta x(t)$ . Então a variação  $\delta J$  é dado por

$$\delta J(x(t)) = 2\alpha \int_a^b x(t)\delta x(t) dt.$$

**Definição 1.1.6** Um funcional  $J$  com domínio  $\Omega$  tem um extremo relativo em  $x^*$  se existe um  $\epsilon > 0$  tal que, para todas as funções  $x \in \Omega$  que satisfaçam  $\|x - x^*\| < \epsilon$ , o incremento de  $J$  tem o mesmo sinal. Se  $\Delta J = J(x) - J(x^*) \geq 0$ ,  $x^*$  é um mínimo relativo,  $\Delta J = J(x) - J(x^*) \leq 0$ ,  $x^*$  é um máximo relativo

Se a desigualdade é satisfeita para todo  $\epsilon$  positivo, então  $J(x^*)$  é máximo ou mínimo absoluto ou global.

## 1.2 Teorema Fundamental do Cálculo de Variações

Nesta seção abordaremos o Teorema Fundamental do Cálculo Variacional, que tem como objetivo dar condições suficientes para determinar extremos de funcionais, Primeiramente

**Lema 1.2.1** Se uma função  $h(t)$  é contínua em  $[t_0, t_f]$ , e

$$\int_{t_0}^{t_f} h(t) \delta x(t) dt = 0$$

para toda função contínua no intervalo  $[t_0, t_f]$ , então  $h(t)$  deve ser nula em todo intervalo  $[t_0, t_f]$ .

**Demonstração:** Suponha que num ponto  $\bar{t} \in (t_0, t_f)$ ,  $h(\bar{t}) \neq 0$ . Como a função  $h(t)$  é contínua, ela mantém seu sinal em uma certa vizinhança de  $\bar{t}$  ( $t_1 \leq \bar{t} \leq t_2$ ). Assim escolhendo uma função  $\delta x(t)$  que mantém seu sinal neste intervalo e se anula fora dele temos:

$$\int_{t_0}^{t_f} h(t) \delta x(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} h(t) \delta x(t) dt \neq 0. \quad (1.5)$$

contradizendo a hipótese [7].

Portanto,  $h(t) \equiv 0 \forall t \in [t_0, t_f]$ .

### 1.2.1 Teorema Fundamental do Cálculo de Variações

Vamos encontrar extremos de um funcional, ao usarmos o Teorema Fundamental do Cálculo Variacional temos uma condição suficiente, ou seja, uma característica que as funções extremas admissíveis têm que desempenhar.

Seja  $x$  uma função em  $\Omega$  e  $J(x)$  um funcional diferenciável em  $x$ . Suponha que as funções em  $\Omega$  não sejam limitadas. Se  $x^*$  é um extremo, a variação de  $J$  deve se anular em  $x^*$ , isto é,  $\delta J(x^*, \delta x) = 0$  para todo  $\delta x$  admissível. [4]

**Demonstração:** Por contradição [6].

Vamos supor que  $x^*$  é um extremo de  $\delta J(x^*, \delta x) \neq 0$ . Mostraremos que  $\delta J(x^*, \delta x)$  muda de sinal numa vizinhança de  $x^*$ .

$$J(x^* + \delta x) - J(x^*) = \delta J(x^*, \delta x) + g(x^*, \delta x) \|\delta x\| \quad (1.6)$$

onde  $g(x^*, \delta x) \rightarrow 0$ .

Assim, existe uma vizinhança  $\|\delta x\| < \epsilon$  onde  $g(x^*, \delta x) \|\delta x\|$  é pequena o suficiente de tal modo que  $\delta J$  domine a expressão para  $\Delta J$ .

Vamos considerar a variação

$$\delta x = \alpha \delta \bar{x} \quad (1.7)$$

onde  $\alpha > 0$  e  $\|\delta x\| < \epsilon$ .

Suponha que  $\delta J(x^*, \delta x) < 0$ , para  $\delta x$  dado (1.7). Como  $\delta J$  é linear temos:

$$\delta J(x^*, \delta x) = \delta J(x^*, \alpha \delta \bar{x}) < 0. \quad (1.8)$$

Assim os sinais de  $\Delta J$  e  $\delta J$  são os mesmos para  $\|\alpha \delta \bar{x}\| < \epsilon$  e implicam que

$$\Delta J(x^*, \alpha \delta \bar{x}) < 0.$$

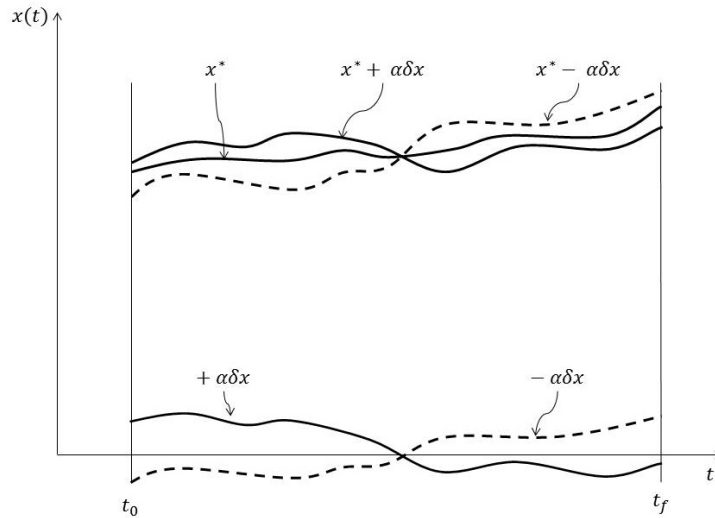


Figura 1.1: Um extremo e duas curvas vizinhas

Considere, agora  $\alpha < 0$ , e  $\delta x = -\alpha \delta \bar{x}$ , mostrada na figura (1.1).

Claramente  $\|\alpha \delta \bar{x}\| < \epsilon \rightarrow \|\alpha \delta \bar{x}\|$ . O sinal de  $\Delta J(x^*, -\alpha \delta \bar{x})$  é o mesmo de  $\delta J(x^*, -\alpha \delta \bar{x})$ .

Novamente,

$$\delta J(x^*, \delta x) = \delta J(x^*, -\alpha \delta \bar{x}) = -\alpha \delta J(x^*, \delta \bar{x}) > 0,$$

assim  $\delta J(x^*, -\alpha \delta \bar{x}) > 0$ .

Portanto se  $\delta J(x^*, \delta x) \neq 0$ , numa vizinhança de  $x^*$ ,  $\Delta J(x^*, \alpha \delta \bar{x}) < 0$  e  $\Delta J(x^*, \alpha \delta \bar{x}) > 0$ , contradizendo que  $x^*$  é um extremo. Logo  $\delta J(x^*, \delta x) = 0$  para todo  $\delta x$ .

### 1.3 Equação de Euler

Das seções (1.1), (1.2) e (1.2.1) temos ferramentas do Cálculo Variacional, que nos possibilita estabelecer condições a serem satisfeitas na busca por extremos de um funcional.

Nesta seção, através da introdução de um problema clássico do cálculo variacional apresentaremos a equação de Euler que estabelece uma condição necessária para que um funcional  $J(x)$  apresente extremo em  $x^*$ , para o caso de fronteiras fixas de  $J(x)$ , onde temos as condições iniciais e finais do funcional.

O problema consiste em encontrar a função  $x^*$  candidata a extremo do funcional:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt, \quad x \in C^1 \quad (1.9)$$

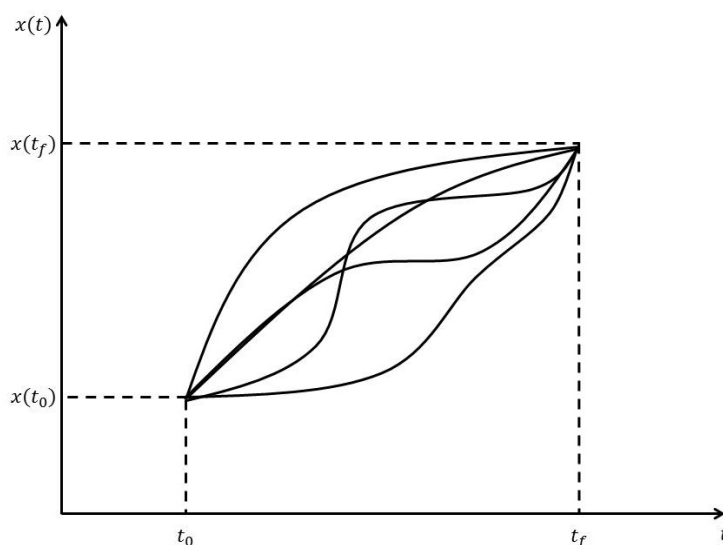


Figura 1.2: Funcional de fronteiras fixas

Considere  $g : C^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t_0$  e  $t_f$  fixos e  $x(t_0)$ ,  $x(t_f)$  representados por  $x_0$  e  $x_f$ , respectivamente, conforme a figura (1.2). As curvas na classe  $C^1$  que também satisfaçam o Teorema Fundamental do Cálculo de Variações. Assim, tomando  $x$  em  $\Omega$  temos:

$$\begin{aligned} \Delta J(x, \delta x) &= J(x + \delta x) - J(x) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} g(x(t) + \delta x(t), x'(t) + \delta x'(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt. \end{aligned} \quad (1.10)$$

onde:

$$x'(t) = \frac{d}{dt} [x(t)] \quad \text{e} \quad \delta x'(t) = \frac{d}{dt} [\delta x(t)].$$

Expandindo o primeiro integrando de (1.10) numa Série de Taylor (ver Apêndice A) em torno dos pontos  $(x(t), x'(t))$ , obtém-se:

$$\int_{t_0}^{t_f} g(x(t) + \delta x(t), x'(t) + \delta x'(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), x'(t), t) + \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) + \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x'(t) + R(x(t), x'(t), t, \delta x(t), \delta x'(t)) \right\} dt \quad (1.11)$$

onde o termo também denominado  $R(x(t), x'(t), t, \delta x(t), \delta x'(t))$  denota o termo complementar na expansão de Taylor, também denominado resto de Lagrange que nos dá o resto quando aproximamos a função por seu polinômio de Taylor.

Substituindo (1.11) em (1.10), temos:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), x'(t), t) + \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) + \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x'(t) + R(x(t), x'(t), t, \delta x(t), \delta x'(t)) \right\} dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt \\ \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), x'(t), t) + \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) + \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x'(t) + R(x(t), x'(t), t, \delta x(t), \delta x'(t)) - g(x(t), x'(t), t) \right\} dt \\ \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) + \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x'(t) \right\} dt + \int_{t_0}^{t_f} R(x(t), x'(t), t, \delta x(t), \delta x'(t)) dt, \end{aligned} \quad (1.12)$$

portanto temos da expressão (1.12) que :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} R(x(t), x'(t), t, \delta x(t), \delta x'(t)) &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x(t), x'(t), t) \right] (\delta x(t))^2 + 2 \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) \delta x'(t) + \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial x'^2}(x(t), x'(t), t) \right] (\delta x'(t))^2 + r(x(t), x'(t), t, \delta x(t), \delta x'(t)) \right\} dt, \end{aligned} \quad (1.13)$$

onde,  $r(x(t), x'(t), t, \delta x(t), \delta x'(t))$  é o resto da expansão, ou seja, onde encontra-se as demais derivadas da expansão.

Agora, como as derivadas parciais de segunda ordem de  $g(x(t), x'(t), t)$  são limitadas (em absoluto) por uma constante  $M > 0$ , onde  $\|\delta x\| = \max_{t_0 \leq x \leq t_f} (|\delta x|, |\delta x'|)$ , logo:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} |R(x(t), x'(t), t, \delta x(t), \delta x'(t))| dt &\leq \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{\partial g}{\partial x x} (x(t), x'(t), t) \right] (\delta x(t))^2 \right. \\ &+ 2 \left[ \frac{\partial g}{\partial x x'} (x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) \delta x'(t) + \left. \left[ \frac{\partial g}{\partial x' x'} (x(t), x'(t), t) \right] (\delta x'(t))^2 \right\} dt \\ &+ r(x(t), x'(t), t, \delta x(t), \delta x'(t)) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} [M \|\delta x\|^2 + 2M \|\delta x\| \|\delta x'\| + M \|\delta x'\|^2] dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} [4M \|\delta x\|^2] dt \\ &= 2M \int_{t_0}^{t_f} \|\delta x\|^2 dt = 2M(t_f - t_0) \|\delta x\|^2. \end{aligned}$$

Logo,  $\int_{t_0}^{t_f} R(x(t), x'(t), t, \delta x(t), \delta x'(t)) dt$  é um termo infinitésimo de segunda ordem como respeito  $\|\delta x\|$ . Desta forma o funcional  $J$  é diferenciável em  $C^1[a, b]$  e sua variação é dada por:

$$\begin{aligned} \delta J(x, \delta x) &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[ \frac{\partial g}{\partial x} (x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) + \left[ \frac{\partial g}{\partial x'} (x(t), x'(t), t) \right] \delta x'(t) \right\} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[ \frac{\partial g}{\partial x} (x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) \right\} dt + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[ \frac{\partial g}{\partial x'} (x(t), x'(t), t) \right] \delta x'(t) \right\} dt. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Temos do Teorema Fundamental do Cálculo (ver Apêndice C) que  $\delta x(t) = \int_{t_0}^{t_f} \delta x'(s) ds + \delta x(t_0)$ . Assim, escolhendo  $\delta x$ , o termo  $\delta x'$  é unicamente determinado. Portanto integrando por partes o termo  $\int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[ \frac{\partial g}{\partial x'} (x(t), x'(t), t) \right] \delta x'(t) \right\} dt$  da expressão (1.14), fazendo:

$$u = \frac{\partial g}{\partial x'} (x(t), x'(t), t) \Rightarrow du = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'} (x(t), x'(t), t) \right],$$

$$dv = \delta x'(t) dt \Rightarrow \int dv = \int \delta x'(t) dt \Rightarrow v = \delta x(t).$$

Então:

$$u.v - \int v du = \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x'} (x(t), x'(t), t) \right) \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'} (x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) dt.$$



Assim:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x'(t) = \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right) \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) dt.$$

Substituindo o resultado em (1.14), temos:

$$\begin{aligned} \delta J(x, \delta x) &= \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right) \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) dt \\ &= \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right) \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Como todas as curvas admissíveis devem passar pelos pontos  $x(t_0)$  e  $x(t_f)$  então  $\delta x(t_0) = 0 = \delta x(t_f)$ . Portanto

$$\delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt,$$

para toda curva admissível.

Considere agora uma curva extremal  $x^*$ , aplicando Teorema Fundamental do Cálculo de Variações, onde vamos buscar condições para que variação no extremo do funcional seja nula, desta forma:

$$\delta J(x^*, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x^*}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x^{*'}}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt. = 0 \tag{1.16}$$

Aplicando o Lema Fundamental do Cálculo de Variações em (1.16), segue que a condição necessária para  $x^*$  ser um extremo do funcional é:

$$\frac{\partial g}{\partial x^*}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x^{*'}}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] = 0. \tag{1.17}$$

A expressão (1.17) é chamada **Equação de Euler**. Tal equação é em geral, uma equação diferenciável não linear e não possui solução analítica e necessita de um tratamento numérico.

## 1.4 Problemas com Fronteiras Móveis.

Estudamos o caso de funcionais onde as condições de contorno eram determinadas, ou seja, as fronteiras eram fixas, entretanto há casos em que as condições de contorno são livres. Usando resultados da seção anterior podemos determinar condições necessárias e suficientes para funcionais com fronteiras livres.

Neste trabalho subdividiremos os problemas com fronteiras livres em duas seções, na primeira avaliaremos as condições necessárias para tempo final especificado e  $x(t_f)$  livre e na segunda consideraremos tanto o tempo quanto  $x(t_f)$  livres.

### 1.4.1 Tempo final especificado e $x(t_f)$ livre.

Considere o funcional:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt,$$

onde  $t_0, x(t_0)$  e  $t_f$  são especificados e  $x(t_f)$  é livre.

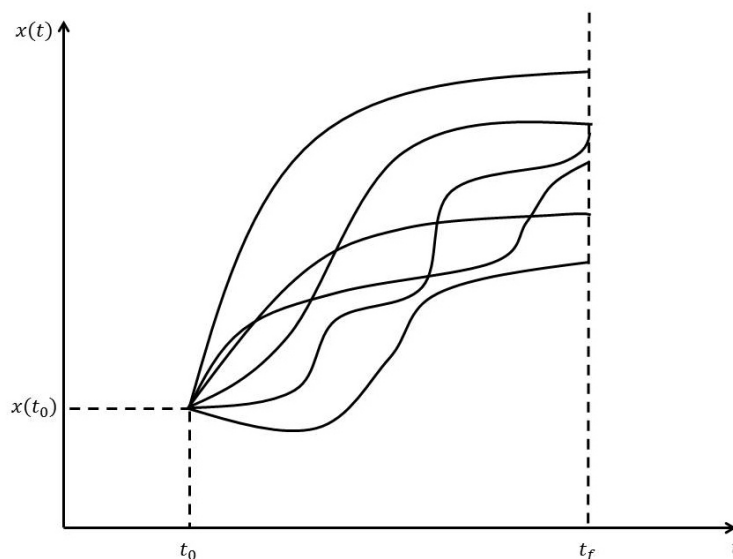


Figura 1.3: Funcional com  $x(t_f)$  livre

Da figura (1.3) podemos notar pelo gráfico que as curvas admissíveis começam no mesmo ponto  $(t_0, x(t_0))$  e terminam em uma linha vertical no ponto  $t_f$ . Temos da seção anterior de

(1.15) que a  $\delta J$ , pode ser dada por:

$$\begin{aligned}
\delta J(x, \delta x) &= \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right) \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} \\
&+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt \\
&= \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t_f), x'(t_f), t_f) \right] \delta x(t_f) - \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t_0), x'(t_0), t_0) \right] \delta x(t_0) \\
&+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Para toda curva admissível do funcional sabemos que a  $\delta x(t_0) = 0$  e  $\delta x(t_f)$  é arbitrário. Considerando  $x^*$  uma curva extrema para o funcional, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Variacional, temos a variação:

$$\begin{aligned}
\delta J(x^*, \delta x) &= \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \delta x(t_f) \\
&+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt = 0.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Um extremo para problema de fronteiras móvel é também extremo para problema com fronteira fixa com os mesmos pontos iniciais, finais e o funcional. Então, independente das condições de fronteiras, a Equação de Euler é uma condição necessária e deve ser satisfeita, ou seja:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] = 0,$$

para todo  $t \in [t_0, t_f]$ .

Como o segundo termo de (1.19) é nulo, então para que  $\delta J(x^*, \delta x) = 0$ :

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \delta x(t_f) = 0.$$

Como  $x(t_f)$  é livre e  $\delta x(t_f)$  é arbitrário, é necessário que:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) = 0. \tag{1.20}$$

Esta equação é conhecida como condição natural de contorno.

### 1.4.2 Tempo final e $x(t_f)$ livres.

Considere o funcional:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt,$$

onde  $t_0$  e  $x(t_0) = x_0$  são especificados e  $t_f$  e  $x(t_f)$  são livres. A figura (1.4) abaixo compara um extremo  $x^*$  com uma curva admissível  $x$  para este problema.

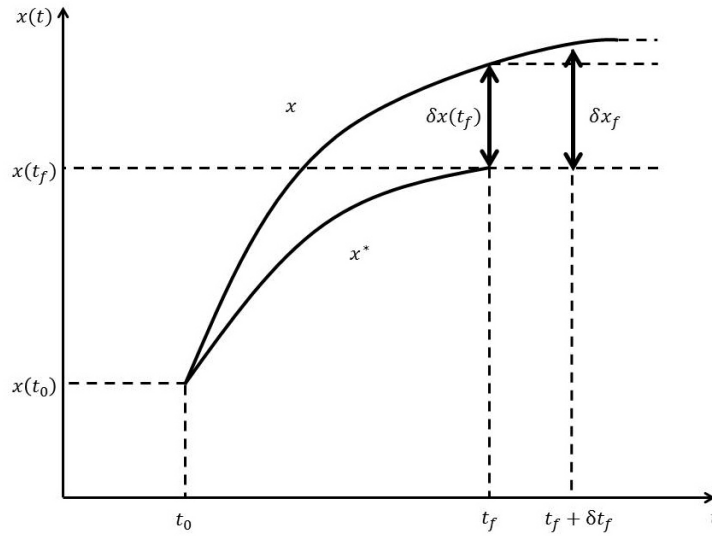


Figura 1.4: Extremo e uma curva admissível para o problema com  $t_f$  e  $x(t_f)$  livres

Observe que da figura (1.4) podemos tirar as seguintes relações:

$$\delta x(t_f) = x(t_f) - x^*(t_f) \quad (1.21)$$

$$\delta x_f = x(t_f + \delta t_f) - x^*(t_f) \quad (1.22)$$

$$\delta x_f = \delta x(t_f) + x'(t_f)\delta t_f \quad (1.23)$$

e que em geral  $\delta x(t_f) \neq \delta x_f$ .

Para determinarmos um extremo do funcional, primeiramente precisamos calcular seu incremento ( $\Delta J$ ) e então determinar a variação ( $\delta J$ ) do funcional, assim

$$\begin{aligned}
\Delta J &= J(x(t + \delta t)) - J(x^*(t)) \\
&= \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t), x'^*(t), t) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t), x'^*(t), t) dt + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt
\end{aligned} \tag{1.24}$$

De (1.21) temos,  $\delta x(t) = x(t) - x^*(t) \Rightarrow x(t) = x^*(t) + \delta x(t)$ , em (1.24):

$$\begin{aligned}
\Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} [g(x^*(t) + \delta x(t), x'^*(t) + \delta x'(t), t) - g(x^*(t), x'^*(t), t)] dt \\
&\quad + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Vamos expandir a função  $g(x^*(t) + \delta x(t), x'^*(t) + \delta x'(t), t)$  do primeiro integrando de (1.24) em uma série de Taylor em torno dos pontos  $(x^*(t), x'^*(t))$ , temos:

$$\begin{aligned}
g(x^*(t) + \delta x(t), x'^*(t) + \delta x'(t), t) &= g(x^*(t), x'^*(t), t) + \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x'^*(t), t) \right] \delta x(t) \\
&\quad + \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x'^*(t), t) \right] \delta x'(t) + O(\delta x(t), \delta x'(t))
\end{aligned}$$

Onde  $O(\delta x(t), \delta x'(t))$  denota os termos a partir da segunda ordem em  $(\delta x(t), \delta x'(t))$ .

Substituindo no  $\Delta J$  (1.24):

$$\begin{aligned}
\Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x^*(t), x'^*(t), t) + \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x'^*(t), t) \right] \delta x(t) \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x'^*(t), t) \right] \delta x'(t) + O(\delta x(t), \delta x'(t)) - g(x^*(t), x'^*(t), t) \right\} dt \\
&\quad + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Vamos indicar a integral de  $\int_{t_0}^{t_f} O(\delta x(t), \delta x'(t)) dt$  como  $O(\cdot)$ , arrumando a expressão (1.26), temos:

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t^*), x'(t), t) \right] \delta x(t) + \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x'(t), t) \right] \delta x'(t) \right\} dt \\ &+ \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt + O(\cdot)\end{aligned}\tag{1.27}$$

De (1.27) vamos estudar a segunda integral, para isso temos uma grande ferramenta matemática para aproximações de integrais, o Teorema do Valor Médio (ver Apêndice B). Aplicando-o na segunda integral de (1.27), então:

$$\begin{aligned}\int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt &= g(t_f + \theta \delta t_f)(t_f + \delta t_f - t_f) \\ &= g[x(t_f + \theta \delta t_f), x'(t_f + \theta \delta t_f), t_f + \theta \delta t_f](\delta t_f),\end{aligned}\tag{1.28}$$

onde  $0 < \theta < 1$ .

Como  $g$  é contínua em  $C^2$ , temos:

$$\lim_{t \rightarrow t_f} g(x(t), x'(t), t) = g(x(t_f), x'(t_f), t_f)$$

Então, podemos afirmar:

$$\lim_{t \rightarrow (t_f + \theta \delta t_f)} g(x(t), x'(t), t) = g(x(t_f + \theta \delta t_f), x'(t_f + \theta \delta t_f), t_f + \theta \delta t_f)$$

Se fizermos  $t_f + \theta \delta t_f \approx t_f$ , deste modo:

$$\lim_{t \rightarrow (t_f + \theta \delta t_f)} g(x(t), x'(t), t) = g(x(t_f), x'(t_f), t_f) + \epsilon\tag{1.29}$$

onde  $\epsilon \rightarrow 0$  quando  $\delta t_f \rightarrow 0$  e  $\delta x(t_f) \rightarrow 0$ .

Concluimos de (1.28) e (1.29) que:

$$\int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt = [g(x(t_f), x'(t_f), t_f) + \epsilon] \delta t_f = g(x(t_f), x'(t_f), t_f) \delta t_f + \epsilon \delta t_f.\tag{1.30}$$

Vamos substituir(1.30) no incremento do funcional (1.27):

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t^*), x'(t), t) \right] \delta x(t) + \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x'(t), t) \right] \delta x'(t) \right\} dt \\ &+ [g(x(t_f), x'(t_f), t_f)] \delta t_f + O(\cdot).\end{aligned}\tag{1.31}$$

Em (1.31) integrando por partes o termo envolvendo  $\delta x'(t)$ :

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \delta x'(t).$$

Por (1.15), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \delta x'(t) &= \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right) \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} \\ &- \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \delta x(t) dt. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Sabemos que  $\delta(x(t_0)) = 0$  e substituindo (1.32) em (1.31) e arrumando os termos:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \delta x(t_f) + [g(x(t_f), x'(t_f), t_f)] \delta t_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt + O(.). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Em (1.33) podemos reescrever  $g(x(t_f), x'(t_f), t_f)$  por meio da relação (1.21). Então  $g(x(t_f), x'(t_f), t_f) = g(x^*(t_f) + \delta x(t), x^{*'}(t_f) + \delta x'(t), t_f)$  e expandindo em torno de uma série de Taylor em torno dos pontos  $(x^*(t_f), x^{*'}(t_f))$ :

$$\begin{aligned} g(x(t_f), x'(t_f), t_f) &= g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) + \left[ \frac{\partial g}{\partial x} g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \delta x(t_f) \\ &+ \left[ \frac{\partial g}{\partial x'} g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \delta x'(t_f) + o(.). \end{aligned} \quad (1.34)$$

O nosso intuito é determinar o incremento do funcional, a fim de encontrar a variação  $\delta J$ . Como  $\delta J$  é a parte linear de  $\Delta J$ , Logo  $g(x(t_f), x'(t_f), t_f)$  em (1.34), será aproximado linearmente por  $g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f)$ , substituindo no incremento (1.33):

$$\begin{aligned} \Delta J &= \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \delta x(t_f) + [g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f)] \delta t_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt + O(.). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Em (1.23) temos que  $\delta x(t_f)$  relacionada com  $\delta t_f$  e  $\delta x_f$ , como a curva extremal  $x^*$  é também uma curva admissível, então:

$$\delta x_f = \delta x(t_f) + x'(t_f) \delta t_f \Rightarrow \delta x_f = \delta x(t_f) + x^{*'}(t_f) \delta t_f \Rightarrow \delta x(t_f) = \delta x_f - x^{*'}(t_f) \delta t_f \quad (1.36)$$

Substituindo (1.36) em (1.33):

$$\begin{aligned}
\Delta J &= \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] (\delta x_f - x^{*'}(t_f) \delta t_f) + [g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f)] \delta t_f \\
&+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt + O(\cdot) \\
&= \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \delta x_f - \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) \delta t_f \\
&+ [g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f)] \delta t_f \\
&+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt + O(\cdot) \\
&= \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \delta x_f \\
&+ \left\{ g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) \right\} \delta t_f \\
&+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt + O(\cdot). \quad (1.37)
\end{aligned}$$

Consideramos desde início do problema que  $x^*$  era uma curva admissível e possível extremo do funcional, então a variação do funcional  $\delta J$  é determinada por:

$$\begin{aligned}
\delta J(x^*, \delta x) &= \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \delta x_f \\
&+ \left\{ g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) \right\} \delta t_f \\
&+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt \quad (1.38)
\end{aligned}$$

Sabemos que independente das condições de fronteiras a equação de Euler deve ser satisfeita



e portanto a integral de (1.25) se anula. Assim:

$$\begin{aligned} \delta J(x^*, \delta x) &= \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x'^*(t_f), t_f) \right] \delta x_f \\ &+ \left\{ g(x^*(t_f), x'^*(t_f), t_f) - \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x'^*(t_f), t_f) \right] x'^*(t_f) \right\} \delta t_f \end{aligned} \quad (1.39)$$

Ao considerarmos que  $x^*$  é um extremo, logo  $\delta J(x^*, \delta x) = 0$ . Na prática, existem muitas possibilidades para  $t_f$  e  $x(t_f)$ . No entanto, iremos considerar, apenas dois casos:

1. Se  $t_f$  e  $x(t_f)$  não são relacionados, ou seja,  $\delta t_f$  e  $\delta x_f$  são independentes um do outro (arbitrários). Dessa forma, os termos envolvendo os coeficientes de  $\delta t_f$  e  $\delta x_f$  em (1.39) devem ser nulos, ou seja:

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x'^*(t_f), t_f) = 0 \quad (1.40)$$

e

$$(x^*(t_f), x'^*(t_f), t_f) - \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x'^*(t_f), t_f) \right] x'^*(t_f) = 0 \quad (1.41)$$

De (1.40) e (1.41), resulta

$$g(x^*(t_f), x'^*(t_f), t_f) = 0 \quad (1.42)$$

Note que (1.40) foi à condição encontrada na seção anterior, quando  $x(t_f)$  estava livre e  $t_f$  especificado. Se fosse considerado  $x(t_f)$  especificado e  $t_f$  livre (1.40) não valeria, logo a condição encontrada seria (1.41).

2. Se  $t_f$  e  $x(t_f)$  são relacionadas. Por exemplo o valor de  $x$  deve estar restrito a uma curva  $\theta(t)$ , isto é:

$$x^*(t_f) = \theta(t_f) \quad (1.43)$$

Da figura (1.5)

$$\frac{d\theta}{dt}(t_f) = \frac{a}{\delta t_f} \longrightarrow a = \frac{d\theta}{dt}(t_f) \delta t_f$$

À distância  $a$  é uma aproximação linear para  $\delta x_f$ , que então é relacionada com  $\delta t_f$  por:

$$\delta x_f \approx \frac{d\theta}{dt}(t_f) \delta t_f \quad (1.44)$$

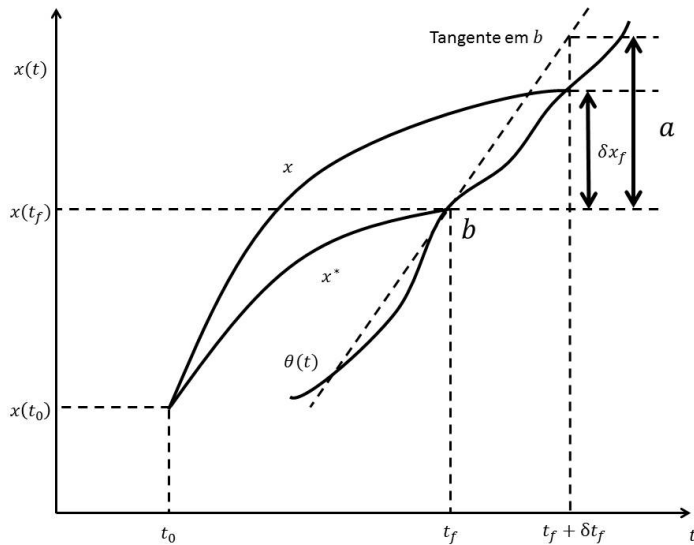


Figura 1.5:  $t_f$  e  $x(t_f)$  livres, mas relacionados por uma curva  $\theta(t)$

Substituindo (1.44) em (1.39):

$$\begin{aligned} \delta J(x^*, \delta x) &= \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \left[ \frac{d\theta}{dt}(t_f) \delta t_f \right] \\ &+ \left\{ g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) \right\} \delta t_f. \end{aligned}$$

Organizando os termos, temos:

$$\begin{aligned} \delta J(x^*, \delta x) &= \left\{ \left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \left[ \frac{d\theta}{dt}(t_f) - x^{*'}(t_f) \right] \right. \\ &\quad \left. + g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right\} \delta t_f = 0. \end{aligned}$$

Considerando que  $\delta t_f$  é arbitrário, tem-se:

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \left[ \frac{d\theta}{dt}(t_f) - x^{*'}(t_f) \right] + g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) = 0 \quad (1.45)$$

Essa equação é chamada Equação de Transversalidade.

Em ambos os casos considerados, através da Equação de Euler encontramos um candidato a extremo  $x^*(C_1, C_2, t)$  onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração. Se  $x(t_f)$  e  $t_f$  não são relacionadas, podemos determinar  $C_1$  e  $C_2$  e  $t_f$  através das equações (1.40) e (1.41). Se  $x(t_f)$  e  $t_f$  são relacionadas usamos as equações (1.43) e (1.45).

# Capítulo 2

## Controle ótimo

### 2.1 O que é Controle Ótimo

De um ponto de vista simples, hoje a sociedade vive em torno de controles dinâmicos, como por exemplo, controle de gastos, combustíveis, energia, entre outros, isso mostra o quanto à matemática pertence ao nosso dia a dia. Assim damos aporte para o controle ótimo, que de maneira singela podemos exemplificar como o melhor ou de menor custo, ou mais rápido, nada mais é que um controle dinâmico, entretanto que atenda certas especificações.

Seja uma variável de estado de  $x = x(t)$  que durante um determinado tempo sofre alterações, ou seja, temos um sistema dinâmico. E dado o sistema, queremos determinar uma lei de controle  $U(t)$  (conjunto de todos os controles admissíveis), que atue sobre esse sistema e atenda certas especificações de desempenho, isto é, encontrar uma estratégia de controle que leve o sistema do estado inicial a um estado final.[1]

A lei de controle busca condições para agir sobre sistema, com intuito de achar o melhor controle  $u^*(t)$  com características de especificações ou critérios de otimização, obtendo o melhor valor total no índice de performance, isto é, com base em critérios de otimização procura-se a lei de controle que age no sistema com finalidade de minimizar o funcional objetivo, chamado índice de performance [6], dado por:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt$$

## 2.2 Problema de Controle Ótimo

Em Problemas de Controle Ótimo, para desenvolvermos soluções, devemos encontrar condições necessárias onde o controle admissível  $u^*$  satisfaz o sistema de equações:

$$x'(t) = a(x(t), u(t), t), \quad (2.1)$$

bem como com um extremo  $x^*$  que minimiza o funcional

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} f(x(t), u(t), t) dt + \phi(x(t_f), t_f). \quad (2.2)$$

Vamos assumir que as restrições de estado (2.1) e de controle não são limitadas, ou seja, que não existem restrições ao uso do controle no sistema. E que as condições iniciais  $x(t_0) = x_0$  e o tempo inicial  $t_0$  são especificados.

No funcional (2.2) o termo  $\phi(x(t_f), t_f)$  é a curva que relaciona  $x(t_f)$  e  $t_f$ , estudada no segundo caso da seção (1.4.2), é o que o difere dos funcionais abordados nas seções anteriores, Se assumirmos que  $\phi$  é uma função diferenciável, podemos escrevê-la:

$$\phi(x(t_f), t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [\phi(x(t), t)] dt + \phi(x(t_0), t_0). \quad (2.3)$$

Substituindo o termo (2.3) em (2.2), podemos reescrever o funcional como:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ f(x(t), u(t), t) + \frac{d}{dt} [\phi(x(t), t)] \right\} dt + \phi(x(t_0), t_0), \quad (2.4)$$

aplicando a Regra da Cadeia [8] no termo  $\frac{d}{dt} [\phi(x(t), t)]$ :

$$\frac{d}{dt} [\phi(x(t), t)] = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x}(x(t), t) \right] x'(t) + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t}(x(t), t) \right]. \quad (2.5)$$

Então nosso funcional fica:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ f(x(t), u(t), t) + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x}(x(t), t) \right] x'(t) + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t}(x(t), t) \right] \right\} dt + \phi(x(t_0), t_0).$$

Como  $x(t_0)$  e  $t_0$  são fixos, a minimização do funcional não afeta  $\phi(x(t_0), t_0)$ , podemos considerar então apenas o funcional:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ f(x(t), u(t), t) + \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x(t), t) \right] x'(t) + \left[ \frac{\partial h}{\partial t}(x(t), t) \right] \right\} dt. \quad (2.6)$$

Normalmente as restrições são equações algébricas não lineares que tornam a resolução pelos métodos das seções anteriores inviável. Então usaremos o Método dos Multiplicadores de Lagrange [11], também conhecido como o Método dos Coeficientes Indeterminados, que oferece uma técnica mais eficiente para eliminar a dependência do funcional na função  $x(t)$ . Este método consiste em construir, a partir do problema, um novo funcional, a ser investigado.

Visto que as restrições devem ser satisfeitas para todo  $t \in [t_0, t_f]$ , os multiplicadores de Lagrange são funções de  $t$ . Desta forma, incluiremos as restrições e teremos um funcional aumentado:

$$\begin{aligned} \bar{J}(u) = & \int_{t_0}^{t_f} \left\{ f(x(t), u(t), t) + \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x(t), t) \right] x'(t) + \left[ \frac{\partial h}{\partial t}(x(t), t) \right] \right. \\ & \left. + \lambda(t) [a(x(t), u(t), t) - x'(t)] \right\} dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Definimos então a função aumentada  $\bar{f}$  como:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x(t), x'(t), u(t), \lambda(t), t) = & f(x(t), u(t), t) + \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x(t), t) \right] x'(t) + \left[ \frac{\partial h}{\partial t}(x(t), t) \right] \\ & + \lambda(t) [a(x(t), u(t), t) - x'(t)]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Deste modo simplificamos o funcional (2.7) por:

$$\bar{J}(u) = \int_{t_0}^{t_f} \bar{f}(x(t), x'(t), u(t), \lambda(t), t) dt. \quad (2.9)$$

Considerando que  $t_f$  pode ser fixo ou livre. Para determinar a variação de  $\bar{J}$  acrescentamos as variações  $\delta x$ ,  $\delta x'$ ,  $\delta u$  e  $\delta \lambda$ , pois  $\bar{f}$  depende de  $x$ ,  $x'$ ,  $u$ ,  $\lambda$  e  $t_f$ , onde  $t_f$  pode ser livre iremos acrescentar também  $\delta t_f$ . Então como variação no extremo é zero, o cálculo de  $\delta \bar{J}$  é feito na seção (1.4). Temos:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta \bar{J}(u^*) = \left[ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) \right] \delta x_f \\
&+ \left\{ \bar{f}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) - \left[ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) \right\} \delta t_f \\
&+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left\{ \left[ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \right] - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \right] \right\} \delta x(t) \right. \\
&\qquad\qquad\qquad (2.10) \\
&+ \left. \left[ \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(x^*(t), x^{*'}(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \right] \delta u(t) + \left[ \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(x^*(t), x^{*'}(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \right] \delta \lambda(t) \right\} dt.
\end{aligned}$$

Da expressão (2.10) vamos trabalhar primeiramente para anular os termos dentro da integral:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left\{ \left[ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \right] - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \right] \right\} \delta x(t) \right. \\
&\qquad\qquad\qquad (2.11) \\
&+ \left. \left[ \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(x^*(t), x^{*'}(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \right] \delta u(t) + \left[ \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda}(x^*(t), x^{*'}(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \right] \delta \lambda(t) \right\} dt = 0.
\end{aligned}$$

Substituindo o valor (2.8) de  $\bar{f}$  em (2.11)

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ f(x^*(t), u^*(t), t) + \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t), t) \right] x'(t) + \left[ \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t), t) \right] \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \lambda(t) [a(x^*(t), u^*(t), t) - x^{*'}(t)] \right\} \right\} \right. \\
& - \left. \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ f(x^*(t), u^*(t), t) + \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t), t) \right] x'(t) + \left[ \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t), t) \right] \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \lambda(t) [a(x^*(t), u^*(t), t) - x^{*'}(t)] \right\} \right\} \right\} \delta x(t) \\
& + \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left\{ f(x^*(t), u^*(t), t) + \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t), t) \right] x'(t) + \left[ \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t), t) \right] \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \lambda(t) [a(x^*(t), u^*(t), t) - x^{*'}(t)] \right\} \right\} \delta u(t) \\
& + \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ f(x^*(t), u^*(t), t) + \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t), t) \right] x'(t) + \left[ \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t), t) \right] \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \lambda(t) [a(x^*(t), u^*(t), t) - x^{*'}(t)] \right\} \right\} \delta \lambda(t) \right\} dt = 0.
\end{aligned}$$

Fazendo as derivações, simplificamos a expressão

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) + \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x^*(t), t) \right] x^{*'}(t) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t}(x^*(t), t) \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \lambda^*(t) \left[ \frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x}(x^*(t), t) \right] + \frac{d}{dt} \lambda^*(t) \right\} \delta x(t) \right. \\
& + \left. \left\{ \frac{\partial f}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda^*(t) \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] \right\} \delta u(t) \right. \\
& + \left. \left\{ a(x^*(t), u^*(t), t) - x^{*'}(t) \right\} \delta \lambda(t) \right\} dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Da expressão (2.12), usando a regra da cadeia no termo  $\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x}(x^*(t), t) \right]$ , temos:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x}(x^*(t), t) \right] = \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x^*(t), t) \right] x^{*'}(t) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t}(x^*(t), t). \tag{2.13}$$

Substituindo (2.13) em (2.12), temos:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) + \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x^*(t), t) \right] x^{*'}(t) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t}(x^*(t), t) \right. \right. \\
& + \lambda^*(t) \left[ \frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] - \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x^*(t), t) \right] x^{*'}(t) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t}(x^*(t), t) + \frac{d}{dt} \lambda^*(t) \left. \right\} \delta x(t) \\
& + \left\{ \frac{\partial f}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda^*(t) \left[ \frac{\partial a}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right] \right\} \delta u(t) \\
& + \left\{ a(x^*(t), u^*(t), t) - x^{*'}(t) \right\} \delta \lambda(t) \left. \right\} dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Assumindo que as segundas derivadas parciais sejam contínuas, os termos que envolvem  $\phi$  se anulam na integral, então:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda^*(t) \left[ \frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] + \frac{d}{dt} \lambda^*(t) \right\} \delta x(t) \right. \\
& + \left\{ \frac{\partial f}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda^*(t) \left[ \frac{\partial a}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right] \right\} \delta u(t) \\
& + \left\{ a(x^*(t), u^*(t), t) - x^{*'}(t) \right\} \delta \lambda(t) \left. \right\} dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Portanto a integral (2.15) deve ser nula no extremo e os termos envolvendo as variações  $\delta x(t)$ ,  $\delta u(t)$  e  $\delta \lambda(t)$  devem ser nulos, logo, primeiramente:

$$\{a(x^*(t), u^*(t), t) - x^{*'}(t)\} \delta \lambda(t) = 0.$$

Como as restrições devem ser satisfeitas pelo extremo, temos:

$$x^{*'}(t) = a(x^*(t), u^*(t), t) \tag{2.16}$$

e o coeficiente  $\delta \lambda(t) = 0$ .

Tomemos agora o termo que envolve  $\delta x(t)$ :

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda^*(t) \left[ \frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] + \frac{d}{dt} \lambda^*(t) \right\} \delta x(t)$$

Os multiplicadores de Lagrange são arbitrários, então podemos escolhê-los de forma a anular a expressão do coeficiente  $\delta x(t)$ . Assim

$$\lambda^{*'}(t) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) - \lambda^*(t) \left[ \frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] \tag{2.17}$$



Restou apenas o termo referente à  $\delta u(t)$ .

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda^*(t) \left[ \frac{\partial a}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right] \right\} \delta u(t)$$

Como  $\delta u(t)$  é arbitrário, seu coeficiente deve ser nulo, portanto

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda^*(t) \left[ \frac{\partial a}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right] = 0 \quad (2.18)$$

Desta forma, na expressão de  $\delta \bar{J}(u^*)$  a integral se anula, logo da expressão (2.10) resta apenas os termos fora da integral

$$\begin{aligned} \delta \bar{J}(u^*) &= \left[ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x'}(x^*(t_f), x'(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) \right] \delta x_f + \left\{ \bar{f}(x^*(t_f), x'(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x'}(x^*(t_f), x'(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) \right] x'(t_f) \right\} \delta t_f = 0. \end{aligned}$$

Substituindo a função aumentada  $\bar{f}$

$$\begin{aligned} \delta \bar{J}(u^*) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ f(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f) + \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) \right] x'(t_f) + \left[ \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda(t_f) [a(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f) - x'(t_f)] \right\} \right\} \delta x_f \\ &\quad + \left\{ f(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f) + \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) \right] x'(t_f) + \left[ \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \right. \\ &\quad \left. + \lambda(t_f) [a(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f) - x'(t_f)] \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ f(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f) + \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) \right] x'(t_f) + \left[ \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \lambda(t_f) [a(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f) - x'(t_f)] \right\} \right\} x'(t_f) \right\} \delta t_f \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}
\delta \bar{J}(u^*) &= \left\{ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f) \right\} \delta x_f \\
&+ \left\{ f(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f) + \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) \right] x'(t_f) + \left[ \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \right. \\
&+ \left. \lambda(t_f) [a(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f) - x^{*'}(t_f)] - \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f) \right] x^{*'}(t_f) \right\} \delta t_f = 0.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

No termo de coeficiente  $\delta t_f$  da expressão (2.19), fazendo as multiplicações, simplificamos os termos. Então como no extremo do funcional a variação é nula, logo:

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f) \right\} \delta x_f \\
&+ \left\{ f(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) + \lambda(t_f) [a(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f)] \right\} \delta t_f = 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

As equações (2.16), (2.17), (2.18) e (2.20) compõem o conjunto de condições necessárias para o problema de controle ótimo. Com observação a equação (2.20) é usada quando temos um problema em que  $t_f$  é livre.

A função Hamiltoniana é como se fosse uma função Lagrangeana de otimização não linear, onde são criados os multiplicadores de Lagrange para se expandir o funcional objetivo e encontrar o ótimo dessa função expandida. Então define-se a função Hamiltoniana como:

$$H = g + \lambda f, \tag{2.21}$$

onde  $g$  e  $f$  advém do índice de performance e da dinâmica, respectivamente.

E se reescrevermos o conjunto de condições necessárias utilizando uma função  $H$  conhecida como função Hamiltoniana, que é definida como:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = f(x(t), u(t), t) + \lambda(t) [a(x(t), u(t), t)] \tag{2.22}$$

Usando esta notação, escrevemos as condições necessárias (2.16), (2.17), (2.18) e (2.20) como:

$$x^{*'}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x(t), u(t), \lambda(t), t), \tag{2.23}$$

$$\lambda^{*'}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), u(t), \lambda(t), t), \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x(t), u(t), \lambda(t), t) = 0, \tag{2.25}$$

e

$$\left[ \frac{\partial \phi}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[ H(x(t_f), u(t_f), \lambda(t_f), t_f) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0. \quad (2.26)$$

# Capítulo 3

## Aplicações

As técnicas de otimização têm sido implementadas nas mais diversas áreas de conhecimento. Fazendo um aporte da teoria de controle ótimo em biologia, neste estudo emprega-se o modelo Lotka-Volterra (L-V). A escolha do modelo se justifica pelo uso simplificado que facilitará a exposição da teoria de controle ótimo no sistema biológico.

A análise no sistema presa-predador sugere a proposição de controlar as dinâmicas das presas e predadores por meio de um agente exógeno que mata as espécies de forma proporcional. A lógica biológica por trás desta proposição é que a variável de controle pode ser usada para evitar um colapso da população de predador ou um surto de pragas ou ambos. [3]

### 3.1 Controle Singular

Da física, de onde se origina o conceito, tem-se que singularidade designa um fenômeno tão extremo que as equações não são capazes de descrevê-lo. A partir daí matemáticos como Jon Newman o usaram para denominar pontos em que um objeto matemático, por exemplo funções, não é definido, ou um conjunto de pontos de pontos onde seu comportamento é de alguma forma particular e diferenciado.

Considerando que problemas de controle singular são problemas difíceis de serem resolvidos porque a aplicação direta dos princípios de Pontryagin não consegue produzir uma solução explícita levando-nos a um restrito número de problemas resolvidos. Nesta seção apresentaremos problemas nos quais técnicas numéricas foram usadas como que se segue.

Seja a variável de controle  $u(t)$  a taxa de aplicação de um inseticida que mata presas e predadores, se ele deixar um resíduo no sistema é necessário introduzir três equações diferenciais: uma para descrever os níveis de resíduos no ambiente, a população de pragas e uma para população

do predador, nas quais seriam  $R'(t)$ ,  $N_1(t)$  e  $N_2(t)$ , respectivamente. Sabemos que o inseticida mata as espécies de forma proporcional. Assim, a dinâmica do sistema presa-predador sujeito a um inseticida persistente é dada pela

$$N_1'(t) = (\alpha_1 - \beta_1 N_2(t)) N_1(t) - b_1 u(t) N_1(t) - e_1 R(t) N_1(t), \quad (3.1)$$

$$N_2'(t) = (\beta_2 N_1(t) - \alpha_2) N_2(t) - b_2 u(t) N_2(t) - e_2 R(t) N_2(t), \quad (3.2)$$

$$R'(t) = -kR + u(t), \quad (3.3)$$

onde  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $e_1$ ,  $e_2$  e  $k$  são parâmetros positivos. Surpreendentemente, uma grande pesquisa mostrou que este modelo matemático presa-predador, sujeito à inseticida persistente, não foi proposto antes [5]. Vamos supor que o inseticida não deixa resíduo. A dinâmica do sistema é dada por

$$N_1'(t) = (\alpha_1 - \beta_1 N_2(t)) N_1(t) - b_1 u(t) N_1(t) \quad (3.4)$$

$$N_2'(t) = (\beta_2 N_1(t) - \alpha_2) N_2(t) - b_2 u(t) N_2(t) \quad (3.5)$$

O tempo final  $t_f$  é indeterminado. Temos como condições de contorno:

$$N_1(t_0) = N_{10}; \quad N_2(t_0) = N_{20} \quad (3.6)$$

$$N_1(t_f) = \alpha_2/\beta_2; \quad N_2(t_f) = \alpha_1/\beta_1. \quad (3.7)$$

Ao implementar um controle em determinado sistema, temos que levar em consideração que controle seja não negativo, ou seja,  $u(t) \geq 0$ . E Para sermos realista há restrições econômicas e/ou ambientais que proíbem certos níveis de utilização, chamamos de  $u_{max}$ , logo consideramos

$$0 \leq u(t) \leq u_{max} \quad (3.8)$$

como uma restrição para o controle. Com a finalidade de resolver o problema onde o controle possui limitações, busca-se desenvolver condições necessárias alternativas para conduzir o sistema a partir do estado inicial  $(N_{10}, N_{20})$  para o estado de destino  $(N_1(t_f), N_2(t_f))$  de tal modo que a quantidade total de inseticida usado

$$J = \int_{t_f}^{t_0} u(t) dt, \quad (3.9)$$

seja minimizada, isto é, levar o sistema as condições pedidas, com o menor custo de desempenho, de forma a encontrar o equilíbrio necessário às populações estudadas.

Baseando-se nos capítulos anteriores, obtém-se a função Hamiltoniana para este problema, dada por:

$$\begin{aligned} H(N(t), u(t), \lambda(t), t) &= \lambda_0 u(t) + \lambda_1 [N_1(t) (\alpha_1 - \beta_1 N_2(t)) - b_1 u(t) N_1(t)] \\ &+ \lambda_2 [N_2(t) (\beta_2 N_1(t) - \alpha_2) - b_2 u(t) N_2(t)]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para um controle otimizado  $u = u^*(t)$  e trajetória  $N = N^*(t)$ , com  $t_0 \leq t \leq t_f^*$  onde  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ , são variáveis constantes (adjuntas), não nulas, que satisfazem  $\lambda_0 \geq 0$ . De (2.24) os multiplicadores de Lagrange são determinados por:

$$\lambda_1'(t) = -\frac{\partial H}{\partial N_1} = -\lambda_1(t) [\alpha_1 - \beta_1 N_2(t) - b_1 u(t)] - \lambda_2 \beta_2 N_2(t) \quad (3.11)$$

$$\lambda_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial N_2} = \lambda_1 \beta_1 N_1(t) - \lambda_2(t) [\beta_2 N_1(t) - \alpha_2 - b_2 u(t)] \quad (3.12)$$

Além disso  $H(N^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) = 0$ , ao longo de uma trajetória ótima. O controle  $u^*(t)$  minimiza  $H(N^*(t), u^*(t), \lambda^*(t))$ , no que diz respeito a todos os controles admissíveis. Assim:

$$\begin{cases} H_u > 0 \Rightarrow u^*(t) = 0 \\ H_u < 0 \Rightarrow u^*(t) = u_{max} \end{cases} \quad (3.13)$$

onde o subscrito indica a diferenciação parcial.

Uma vez que no intervalo  $[t_0, t_f]$ ,  $u(t)$  aparece de forma linear no Hamiltoniano e portanto o controle singular existe, assim de (2.25),

$$H_u = \lambda_0 - \lambda_1(t) b_1 N_1(t) - \lambda_2(t) b_2 N_2(t) = 0 \quad (3.14)$$

Diferenciando (3.14) em relação a  $t$ :

$$H'_u = -\lambda'_1(t)b_1N_1(t) - \lambda_1(t)b_1N'_1(t) - \lambda'_2(t)b_2N_2(t) - \lambda_2(t)b_2N'_2(t)$$

Queremos determinar o equilíbrio do sistema (L-V), assim  $N'_1(t) = 0 = N'_2(t)$ . Empregando (3.11), (3.12) e (3.14), temos:

$$\begin{aligned} H'_u &= - \left\{ [-\lambda_1(t)(\alpha_1 - \beta_1N_2(t) - b_1u(t)) - \lambda_2(t)\beta_2N_2(t)] b_1N_1(t) \right\} \\ &\quad - \left\{ [-\lambda_1\beta_1N_1(t) - \lambda_2(t)(\beta_2N_1(t) - \alpha_2 - b_2u(t))] b_2N_2(t) \right\} = 0 \\ &= - \left\{ -\lambda_1(t)b_1N_1(t) [\alpha_1 - \beta_1N_2(t) - b_1u(t)] - \lambda_2(t)\beta_2N_2(t)b_1N_1(t) \right\} \\ &\quad - \left\{ -\lambda_1\beta_1N_1(t)b_2N_2(t) - \lambda_2(t)b_2N_2(t) [\beta_2N_1(t) - \alpha_2 - b_2u(t)] \right\} = 0 \\ &= -\lambda_1\beta_1N_1(t)b_2N_2(t) + \lambda_2(t)\beta_2N_2(t)b_1N_1(t) \\ &\quad -\lambda_1(t)b_1N_1(t) [\alpha_1 - \beta_1N_2(t) - b_1u(t)] + \lambda_2(t)b_2N_2(t) [\beta_2N_1(t) - \alpha_2 - b_2u(t)] = 0 \\ &= N_1(t) \left[ -\lambda_1(t)\beta_1b_2N_2(t) + \lambda_2(t)\beta_2b_1N_2(t) \right] \\ &\quad + \left[ -\lambda_1(t)b_1N_1(t) [\alpha_1 - \beta_1N_2(t) - b_1u(t)] + \lambda_2(t)b_2N_2(t) [\beta_2N_1(t) - \alpha_2 - b_2u(t)] \right] = 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

A expressão (3.15) tem que ser nula, por se tratar de soma de parcelas, notemos que os termos do segundo termo são simétricos, assumindo que ambos tenham o mesmo valor, obtemos

$$H'_u = N_1(t) [-\lambda_1(t)\beta_1b_2N_2(t) + \lambda_2(t)\beta_2b_1N_2(t)] = 0 \tag{3.16}$$

Por se tratar de um sistema ecológico têm-se interesse em estados que satisfaçam,

$$N_1(t) > 0; \quad N_2(t) > 0 \tag{3.17}$$

Então:

$$-\lambda_1(t)\beta_1b_2N_2(t) + \lambda_2(t)\beta_2b_1N_2(t) = 0. \tag{3.18}$$

Desta forma, vamos determinar também  $H''$ , portanto diferenciando (3.16):

$$\begin{aligned}
H''_u &= N_1(t) \left\{ -\lambda'_1(t)b_2\beta_1N_2(t) - \lambda_1(t)b_2\beta_1N'_2(t) + \lambda'_2(t)b_1\beta_2N_2(t) + \lambda_2(t)b_1\beta_2N'_2(t) \right\} \\
&= N_1(t) \left\{ -\lambda'_1(t)b_2\beta_1N_2(t) + \lambda'_2(t)b_1\beta_2N_2(t) \right\} \\
&= N_1(t)N_2(t) \left\{ -\lambda'_1(t)b_2\beta_1 + \lambda'_2(t)b_1\beta_2 \right\}
\end{aligned}$$

Empregando (3.11), (3.12) e (3.14):

$$\begin{aligned}
H''_u &= N_1(t)N_2(t) \left\{ -\{[-\lambda_1(t)(\alpha_1 - \beta_1N_2(t) - b_1u(t)) - \lambda_2\beta_2N_2(t)]b_2\beta_1\} \right. \\
&\quad \left. + \{[\lambda_1\beta_1N_1(t) - \lambda_2(t)(\beta_2N_1(t) - \alpha_2 - b_2u(t))]\beta_1\beta_2\} \right\} = 0 \\
&= N_1(t)N_2(t) \left\{ \lambda_1(t)b_2\beta_1[\alpha_1 - \beta_1N_2(t) - b_1u(t)] + \lambda_2\beta_2N_2(t)b_2\beta_1 \right. \\
&\quad \left. + \lambda_1\beta_1N_1(t)b_1\beta_2 - \lambda_2(t)b_1\beta_2[\beta_2N_1(t) - \alpha_2 - b_2u(t)] \right\} = 0,
\end{aligned}$$

supondo que o produto

$$\lambda_1(t)\beta_1b_2 = \lambda_2(t)\beta_2b_1, \quad (3.19)$$

arrumando a expressão:

$$\begin{aligned}
H''_u &= N_1(t)N_2(t) \left\{ \lambda_1(t)\beta_1N_1(t)\beta_2b_1 + \lambda_2(t)\beta_2N_2(t)\beta_2b_2 \right. \\
&\quad \left. + \lambda_1(t)\beta_1b_2[\alpha_1 + \alpha_2 - (b_1 - b_2)u(t) - \beta_1N_2(t) - \beta_2N_1(t)] \right\} = 0. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Podemos resolver (3.14) e (3.18), para  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  em termos de  $\lambda_0$ . Isolando  $\lambda_1(t)$  em (3.14) temos:

$$-\lambda_1(t)b_1N_1(t) = -\lambda_0 + \lambda_2(t)b_2N_2(t)$$

$$\lambda_1(t) = \frac{\lambda_0 - \lambda_2(t)b_2N_2(t)}{b_1N_1(t)}. \quad (3.21)$$



Substituindo (3.21) em (3.18)

$$\frac{-(\lambda_0 - \lambda_2(t)b_2N_2(t))}{b_1N_1(t)}b_2\beta_1N_2(t) + \lambda_2(t)b_1\beta_2N_2(t) = 0$$

$$-\lambda_0b_2\beta_1N_2(t) + \lambda_2(t)b_2^2N_2^2(t)\beta_1 + \lambda_2(t)b_1^2\beta_2N_1(t)N_2(t) = 0$$

$$\lambda_2(t) [b_2^2N_2^2(t)\beta_1 + b_1^2\beta_2N_1(t)N_2(t)] = \lambda_0b_2\beta_1N_2(t)$$

$$\lambda_2(t) = \frac{\lambda_0b_2\beta_1}{[b_2^2N_2(t)\beta_1 + b_1^2\beta_2N_1(t)]}. \quad (3.22)$$

Analogamente de (3.18) isolando  $\lambda_2(t)$

$$-\lambda_1(t)b_2\beta_1N_2(t) + \lambda_2(t)b_1\beta_2N_2(t) = 0$$

$$\lambda_2(t)b_1\beta_2N_2(t) = \lambda_1(t)b_2\beta_1N_2(t)$$

$$\lambda_2(t) = \frac{\lambda_1(t)b_2\beta_1N_2(t)}{b_1\beta_2N_2(t)}. \quad (3.23)$$

Substituindo (3.23) em (3.14)

$$\lambda_0 - \lambda_1(t)b_1N_1(t) - \frac{\lambda_1(t)b_2\beta_1}{b_1\beta_2}b_2\beta_2N_2(t) = 0$$

$$\lambda_0b_1\beta_2 - \lambda_1(t)b_1^2N_1(t)\beta_2 - \lambda_1(t)b_2^2\beta_1\beta_2N_2(t) =$$

$$-\lambda_1(t) [b_1^2N_1(t)\beta_2 + b_2^2\beta_1\beta_2N_2(t)] = -\lambda_0b_1\beta_2$$

$$\lambda_1(t) = \frac{\lambda_0b_1\beta_2}{[b_1^2N_1(t)\beta_2 + b_2^2\beta_1\beta_2N_2(t)]} \quad (3.24)$$

Por definição um arco é anormal se satisfaz (3.4), (3.5), (3.11),(3.12) para (3.14), entretanto pode haver mais de um conjunto de variáveis constantes satisfazendo (3.4) a (3.14). Podemos ter dois tipos de arcos anormais. No primeiro tipo,  $\lambda_0 = 0$  para todos os conjuntos de variáveis constantes admissíveis. No segundo tipo, existe um conjunto de variáveis admissíveis com  $\lambda_0 = 1$ . O pretexto sobre a anormalidade é feito porque a teoria existente em condições de otimização, para o controle singular exige que a suposição do extremo de referência, seja normal [5]. Então

estamos interessando apenas em um conjunto de variáveis admissíveis, isto é, assumimos que  $\lambda_0 = 1$ .

Portanto de (3.22) e (3.24), resulta

$$\lambda_1(t) = \frac{b_1\beta_2}{(b_1^2\beta_2N_1(t) + b_2^2\beta_1N_2(t))} \quad (3.25)$$

$$\lambda_2(t) = \frac{b_2\beta_1}{(b_1^2\beta_2N_1(t) + b_2^2\beta_1N_2(t))} \quad (3.26)$$

Assim podemos ter a relação:

$$\lambda_2(t) = \lambda_1(t) (b_1\beta_2) / (b_2\beta_1) \quad (3.27)$$

A partir das condições busca-se determinar o sinal do extremo, nosso intuito é determinar mínimo. A partir de (3.20) obtemos

$$H''_{uu} = -\lambda_1(t)b_2N_1(t)N_2(t)(b_1 - b_2) \leq 0 \quad (3.28)$$

Como  $\lambda_1$ ,  $b_2$ ,  $\beta_1$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  são positivas. Isso implica  $(b_1 - b_2) \geq 0$ . Assim o controle singular não é possível se  $b_1 = b_2$ , para que o controle singular ocorra é necessário que  $b_1 > b_2 > 0$ , onde  $b_2$  é estritamente positiva por suposição. Com  $H_u = 0$ , a função (3.10) torna-se:

$$\lambda_1(t)N_1(t) [\alpha_1 - \beta_1N_2(t)] + \lambda_2(t)N_2(t) [\beta_2N_1(t) - \alpha_2] = 0 \quad (3.29)$$

E no uso de (3.20) assumimos que (3.19), vamos provar essa suposição. Em (3.29) substituímos (3.27) e observando que  $\lambda_1 \neq 0$ , temos:

$$b_1\beta_2N_1(t) (\alpha_1 - \beta_1N_2(t)) + b_2\beta_1N_1(t) (b_2N_1 - \alpha_2) = 0. \quad (3.30)$$

Assim, definimos todas as condições para o conjunto de variáveis admissíveis. Logo podemos determinar o extremo singular  $u^*(t)$ . Empregando (3.27) em (3.20):

$$\begin{aligned} 0 &= b_1\beta_1\beta_2\lambda_1(t)N_1(t) + \frac{b_2^2\beta_1^2\lambda_1(t)N_2(t)}{b_1} - b_2\beta_1\lambda_1(t) (b_1 - b_2) u(t) \\ &\quad + b_2\beta_1\lambda_1(t) (\alpha_1 - \beta_1N_2(t)) - b_2\beta_1\lambda_1(t) (\beta_2N_1(t) - \alpha_2) \\ &= \beta_1\lambda_1(t) \left\{ b_1\beta_2N_1(t) + \frac{b_2^2\beta_1N_2(t)}{b_1} - b_2(b_1 - b_2) u(t) + b_2(\alpha_1 - \beta_1N_2(t)) - b_2(\beta_2N_1(t) - \alpha_2) \right\} \\ &= b_1^2\beta_2N_1(t) + b_1b_2^2\beta_1N_2(t) - b_1b_2(b_1 - b_2) u(t) + b_1b_2(\alpha_1 - \beta_1N_2(t)) - b_2b_1(\beta_2N_1(t) - \alpha_2) \end{aligned}$$

Isolando  $u(t)$  e arrumando a expressão, temos:

$$u^*(t) = \frac{b_1^2\beta_2N_1(t) + b_2^2\beta_1N_2(t)}{b_1b_2(b_1 - b_2)} + \frac{(\alpha_1 - \beta_1N_2(t)) - (\beta_2N_1(t) - \alpha_2)}{(b_1 - b_2)} \quad (3.31)$$

Este controle (3.31) satisfaz as condições generalizadas de Lagrange se  $b_1 > b_2 > 0$ . De (3.29) podemos resolver para obter  $N_2(t)$ , desta forma:

$$N_2(t) = \frac{b_1\beta_2\alpha_1N_1(t)}{(b_1 - b_2)\beta_1\beta_2N_1(t) + b_2\beta_1\alpha_2} \quad (3.32)$$

Observe que, conforme a população de pragas cresce, a população de predadores tende a uma constante:

$$N_2(t) \rightarrow \frac{b_1\alpha_1}{(b_1 - b_2)\beta_1} \quad \text{com} \quad N_1(t) \rightarrow \infty, \quad (3.33)$$

está é uma assíntota do extremo singular quando tende  $N_1(t)$  para o infinito. A partir de (3.32), derivando explicitamente em relação a  $N_1(t)$ , obtemos uma razão entre as variações populacionais.

$$\frac{N_2'(t)}{N_1'} = \frac{b_1b_2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}{[(b_1 - b_2)\beta_1\beta_2N_1(t) + b_2\beta_1\alpha_2]^2} \quad (3.34)$$

o lado direito de (3.34) é positivo para  $N_1$  positivo, e maior que zero se  $N_1$  é igual a zero. E tende para infinito se  $N_1$  tende para o infinito.

Examinando substituição do controle singular no sistema, primeiramente em (3.4), então:

$$N_1'(t) = N_1(t) [(\alpha_1 - \beta_1N_2(t)) - b_1u(t)] \quad (3.35)$$

Analisando em (3.35) a expressão dentro dos colchetes, e substituindo (3.31), temos

$$\alpha_1 - \beta_1N_2(t) - b_1 \left[ \frac{b_1^2\beta_2N_1(t) + b_2^2\beta_1N_2(t)}{b_1b_2(b_1 - b_2)} + \frac{(\alpha_1 - \beta_1N_2(t)) - (\beta_2N_1(t) - \alpha_2)}{(b_1 - b_2)} \right]$$

organizando a expressão:

$$\frac{b_2(b_1 - b_2)(\alpha_1 - \beta_1N_2(t)) - b_1^2\beta_2N_1(t) - b_2^2\beta_1N_2(t) - b_1b_2(\alpha_1 - \beta_1N_2(t)) + b_1b_2(\beta_2N_1(t) - \alpha_2)}{b_2(b_1 - b_2)}$$

Resolvendo e arrumando:

$$\frac{-b_2^2\alpha_1 - b_1^2\beta_2N_1(t) - b_1b_2\beta_2N_1(t) - b_1b_2\alpha_2}{b_2(b_1 - b_2)} \quad (3.36)$$

Substituindo (3.36) em (3.35), obtém-se:

$$N_1'(t) = -N_1(t) \left[ \frac{b_2(\alpha_1 b_2 + \alpha_2 b_1) + b_1(b_1 - b_2)\beta_2 N_1(t)}{b_2(b_1 - b_2)} \right] \quad (3.37)$$

Notamos que o lado direito de (3.37) é negativo, portanto  $N_1(t)$  diminui com o aumento de  $t$ .

De forma análoga, substituindo (3.31) em (3.5), obtém-se :

$$N_2'(t) = \frac{N_2(t)}{(b_1 - b_2)} [-b_1^2 \alpha_2 - b_1 b_2 \alpha_1 + b_2(b_1 - b_2)\beta_1 N_2(t)] \quad (3.38)$$

Ao aplicarmos controle singular para  $N_1(t)$  finito podemos deduzir de (3.33) e (3.34) que:

$$N_2 < \frac{b_1 \alpha_1}{(b_1 - b_2) \beta_1} \quad (3.39)$$

Portanto,  $N_2(t)$  diminui com  $t$ , porque (3.38) e (3.39) implicam:

$$N_2'(t) = -\frac{N_2(t) b_1^2 \alpha_2}{(b_1 - b_2)} < 0 \quad (3.40)$$

De forma analítica percebemos que aplicação de controle singular é extremamente útil, pois com a formação da assíntota (3.33), temos basicamente um "interruptor" na variável de controle, onde o sistema fora dessa assíntota fica livre, ou seja, o controle é nulo. Entretanto, quando o sistema chega a assíntota o controle é aplicado singularmente, isto é, no máximo, para levar o sistema ao equilíbrio.

## 3.2 Problemas de controle ótimo com Variável de controle limitada

Uma aplicação na recém-observada invasão biológica do *Oreochromis niloticus* (tilápia-do-nylo) originária do rio Nilo (África) na bacia do Igarapé da Fortaleza em Macapá/AP, pois há uma preocupação sobre os possíveis impactos que esse peixe poderá causar à ictiofauna nativa. Porém, os impactos ambientais da introdução desse peixe nesse ecossistema aquático estuarino são ainda desconhecidos. Portanto, assume-se que a dinâmica das espécies pode ser descrita pelo modelo padrão Lotka-Volterra, e que a presa atua como praga e que temos um predador natural.

$$N_1'(t) = (\alpha_1 - \beta_1 N_2(t)) N_1(t) \quad (3.41)$$

$$N_2'(t) = (\beta_2 N_1(t) - \alpha_1) N_2(t) \quad (3.42)$$

Onde,  $N_1(t)$ ,  $N_2(t)$  representam a população no tempo  $t$  de presas e predadores, respectivamente. Com populações iniciais,  $N_1(t_0) = N_{10}$  e  $N_2(t_0) = N_{20}$ .

Busca-se através da introdução de uma agente de controle representado por  $u(t)$ , reduzir a população da praga a um nível desejável em um tempo  $t$ . Considera-se que o controle atua tanto na população de presas quanto na de predadores com intensidades  $d_1 > 0$  e  $d_2 > 0$ , respectivamente. E por simplicidade assumimos que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$ . Então o sistema é descrito por:

$$N_1'(t) = (1 - N_2(t)) N_1(t) - d_1 N_1(t) u(t) \quad (3.43)$$

$$N_2'(t) = (N_1(t) - 1) N_2(t) - d_2 N_2(t) u(t) \quad (3.44)$$

com condições iniciais:  $N_1(0) = N_{10}$ ;  $N_2(0) = N_{20}$ .

Ao implementar um controle na população de uma determinada espécie, temos que levar em consideração as restrições ao este deve conter, como citado na seção (3.1), entretanto, nesta aplicação devemos assumir que  $M$  é o índice máximo do controle no sistema, ou seja, a quantidade de inseticida para todo o sistema. Desta forma a cada intervalo de tempo aplica-se um taxa de controle, chamamos de  $B$ , para controlar os níveis populacionais das espécies, então as restrições ao controle são:

$$0 \leq u(t) \leq M \quad \int_0^T u(t) dt = B. \quad (3.45)$$

Busca-se minimizar a população de presas, com a seguinte índice de desempenho:

$$J(u(t)) = N_1(T) + \frac{A}{2} \int_0^T [u(t)]^2 dt. \quad (3.46)$$

Observe que no funcional a taxa de aplicação do controle é  $[u(t)]^2$ . Isso se dá por duas razões, primeiro porque tem-se uma restrição fixa ao controle, desta forma penalizamos índices excessivamente altos e incentivamos índices menores a taxa de controle. A segunda razão é porque a entrada deste termo torna a taxa de controle linear, assim nossas técnicas usuais podem ser aplicadas. Contudo, não estamos interessados nos índices elevados de controle, logo tomamos o parâmetro de peso  $A$  restritamente pequeno para limitar o efeito deste termo.

### 3.2.1 Condições necessárias

Vamos determinar as condições necessárias para a otimalidade do funcional. Observe que assim como no problema de controle ótimo do capítulo 2. Usando a função Hamiltoniana (2.21),

teremos assim:

$$\begin{aligned}
H(N_1(t), N_2(t), u(t), \lambda(t), t) &= N_1(t_f) + \left\{ \frac{A}{2} [u(t)]^2 + \right\} \\
&+ \lambda_1(t) [(1 - N_2(t)) N_1(t) - d_1 N_1(t) u(t)] \\
&+ \lambda_2(t) [(N_1(t) - 1) N_2(t) - d_2 N_2(t) u(t)]
\end{aligned} \tag{3.47}$$

De (2.23), têm-se as condições para variação populacional de cada espécie:

$$N'_1(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = (1 - N_2(t)) N_1(t) - d_1 N_1(t) u(t) \tag{3.48}$$

$$N'_2(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = (N_1(t) - 1) N_2(t) - d_2 N_2(t) u(t) \tag{3.49}$$

Da mesma forma, de (2.24) podemos determinar as condições das equações adjuntas

$$\lambda'_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial N_1} = -\lambda_1 (1 - N_2(t) - d_1 u(t)) - \lambda_2 N_2 \tag{3.50}$$

$$\lambda'_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial N_2} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 (N_1(t) - 1 - d_1 u(t)) \tag{3.51}$$

assim também de (2.26), onde  $t_f$  é especificado, obtem-se a condição de transversalidade, com a finalidade de determinar os pontos de contorno do sistema, portanto  $\lambda_1(T) = 1$  e  $\lambda_2(T) = 0$ .

Então de (2.25) propem-se as condições ao controle:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = Au(t) - d_1 N_1(t) \lambda_1(t) - d_2 N_2(t) \lambda_2(t) \tag{3.52}$$

Isolando  $u(t)$  em (3.52):

$$u^*(t) = \frac{d_1 N_1(t) \lambda_1(t) - d_2 N_2(t) \lambda_2(t)}{A} \tag{3.53}$$

Compreendendo como dever ser o comportamento do controle durante o intervalo de tempo proposto com  $0 < u^* < M$ , assim

Para  $\frac{\partial H}{\partial u} < 0$  em  $t$ , então  $u^*(t) = 0$  e

$$\frac{d_1 N_1(t) \lambda_1(t) - d_2 N_2(t) \lambda_2(t)}{A} < 0 \tag{3.54}$$

Para  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$  em  $t$ , então  $0 < u^*(t) = B < M$  e

$$\frac{d_1 N_1(t) \lambda_1(t) - d_2 N_2(t) \lambda_2(t)}{A} = B \quad (3.55)$$

Para  $\frac{\partial H}{\partial u} > 0$  em  $t$ , então  $u^*(t) = M$  e

$$\frac{d_1 N_1(t) \lambda_1(t) - d_2 N_2(t) \lambda_2(t)}{A} < M \quad (3.56)$$

Portanto o Controle Ótimo terá características

$$u^*(t) = \min \left\{ M, \max \left\{ \frac{d_1 N_1(t) \lambda_1(t) - d_2 N_2(t) \lambda_2(t)}{A}, 0 \right\} \right\} \quad (3.57)$$

O controle ótimo pode ser calculado numericamente sob vários conjuntos de parâmetros usando um método de adaptado com salto pra frente a pra trás em Lotka-Volterra para resolver os sistemas de equações (3.48), (3.49), (3.50) e (3.51), por meio da linguagem de programação MATLAB. Este método faz uma estimativa inicial para  $u(t)$  e, em seguida, resolve as equações de estado do sistema (3.48) e (3.49) fazendo os estados avançarem com tempo, a partir das condições iniciais  $(N_{10}, N_{20})$ .

Em seguida, utilizando os valores de estado, as equações adjuntas (3.50) e (3.51) são resolvidos voltando no tempo utilizando as condições de transversalidade  $\lambda_1(t_f) = 1$  e  $\lambda_2(t_f) = 0$ . Neste ponto, o controle ótimo é atualizado usando a caracterização para o controle ótimo (3.57) e os valores para as variáveis de estado e adjuntas. Este controle atualizado substitui o controle inicial e o processo é repetido até que as interações sucessivas da variável de controle seja suficientemente perto. [10]

Temos a tabela (3.2.1) segue como uma suposição a aplicação do modelo, e assim que posamos observar como se dará o controle e as populações de presa e predador nas figuras (3.1) e (3.2).

$d_1 = 0.1;$	$d_2 = 0.01;$	$N_{10} = 5;$	$N_{20} = 2;$	$M = 1;$
$A = 1;$	$B = 1;$	$a = -0.2;$	$b = -0.18;$	

Analisando a figura (3.1). Note o comportamento da taxa de controle, que ao início do sistema é menor, entanto, em seguida se eleva, justamente para diminuir a população de presas, que estão em maior quantidade, após isso, se mantém constante, pois o sistema será controlado pela população de predadores, até que não haja mais presas aos predadores, com isso as populações as taxas populacionais são bem menores que no início do sistema.

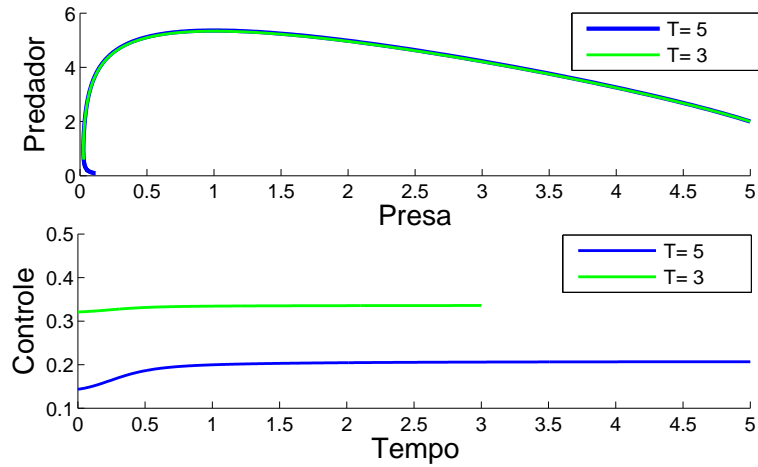


Figura 3.1: Simulação no intervalo de tempo  $0 \leq T \leq 5$

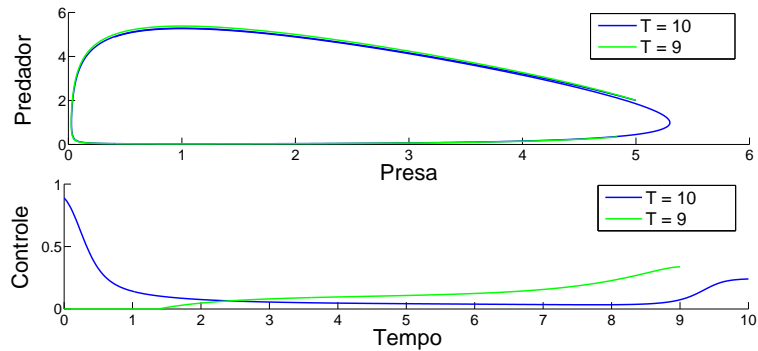


Figura 3.2: Simulação no intervalo de tempo  $5 < T \leq 10$

Já na figura (3.2), temos que  $5 < T \leq 10$ , nesse intervalo o controle se torna altamente dinâmico, pois é obrigado a cumprir a mesma restrição  $M$  durante um intervalo de tempo maior, isto leva um aumento gradual na população da praga na segunda parte. Contudo com o crescimento da população de predadores e o aumento da intensidade do controle, perto do fim, a população da praga regride novamente. Entretanto as populações terminam maiores se comparado ao sistema anterior.



# Considerações Finais

Por intermédio da teoria de controle ótimo, juntamente com o cálculo variacional, e através de aplicações desses estudos na biologia, especificamente na ecologia, buscamos condições para controlar um sistema altamente dinâmico como Lotka-Volterra, com intuito ora de tornar o sistema equilibrado, ora controlar um espécie específica, no nosso caso uma presa que atuava como praga, levando em consideração vários fatores, como restrições a taxa de controle, assim como o forma de introduzi-lo no sistema, além também das restrições populacionais de cada espécie, tendo como finalidade menor custo econômico.

Através da solução analítica (3.1), observa-se que a aplicação do controle singular no sistema (L-V) é economicamente viável, pois o sistema age livremente até o exato momento que a taxa de controle deve ser iniciada, onde é aplicada ao máximo singular, conduzindo o sistema ao equilíbrio. Entretanto na solução numérica (3.2), o sistema é totalmente diferente do caso anterior, dado que há restrições mais específicas ao controle, onde o mesmo tem que se adequar durante todo o sistema. E o que observamos nas figuras (3.1) e (3.2) que em intervalo de tempo reduzido o controle age constantemente, por outro lado com um intervalo em intervalo de tempo maior se torna altamente dinâmico, justamente pela restrição imposta. Destacamos também os níveis populacionais que em ambos intervalos de tempo terminam diferentes.

O trabalho demonstra como a teoria de controle ótimo é abordada na biologia, sendo uma grande ferramenta para estudos dinâmicos, podendo ser implementada nas mais diversas áreas científicas, com intuito de minimizar ou maximar um índice de desempenho proposto. Demonstramos um pequeno aporte dessa teoria, na qual pode ter avanços científicos significativos e muitas contribuições.

# Apêndice A

## Fórmula de Taylor

**Teorema A.0.1** [9] *Se a série de potências  $\sum c_n (x - a)^n$  tiver um raio de convergência  $R > 0$ , então a função  $f$  definida por*

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n \quad (\text{A.1})$$

Supondo que  $f$  seja uma função, onde possa ser representada por uma série de potências:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots \quad |x - a| < R \quad (\text{A.2})$$

Vamos tentar determinar quais os coeficientes  $C_n$  devem aparecer em termos de  $f$ . Para começar observe que, se  $x = a$  na equação (A.2), então todos os termos após o primeiro são 0 e obtemos

$$f(a) = c_0$$

Vamos derivar a série (A.2) termo a termo:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + 4c_4(x - a)^3 + \dots \quad |x - a| < R \quad (\text{A.3})$$

e a substituição de  $x = a$  em (A.3) fornece

$$f'(a) = c_1 \quad (\text{A.4})$$

Agora derivamos ambos os lados de (A.3) e obtemos

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \dots \quad |x - a| < R \quad (\text{A.5})$$

Novamente colocamos  $x = a$  em (A.5). O resultado é

$$f''(a) = 2c_2 \quad (\text{A.6})$$

Vamos aplicar o procedimento mais uma vez. A derivação da serie em (A.5)

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x - a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x - a)^2 + \dots \quad |x - a| < R \quad (\text{A.7})$$

e a substituição de  $x = a$  em (A.10) fornece

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3 \quad (\text{A.8})$$

Vemos um padrão. Se continuarmos a derivar e substituir  $x = a$ , obteremos

$$f^n(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot nc_n = n!c_n \quad (\text{A.9})$$

Isolando o  $n$ -ésimo coeficiente  $c_n$  nesta equação, obteremos

$$c_n = \frac{f^n(a)}{n!} \quad (\text{A.10})$$

Essa fórmula permanecerá válida mesmo para  $n = 0$  se adotarmos as convenções de que  $0! = 1$  e  $f^0 = f$ . Assim demonstramos o teorema a seguir

**Teorema A.0.2** *Se  $f$  tiver uma representação (expansão) em série de potências em  $a$ , isto é se*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \quad |x - a| < R$$

*então seus coeficientes são dados pela fórmula*

$$c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Substituindo essa fórmula para  $c_n$  de volta na série, vemos que, se  $f$  tiver uma expansão em série de potência no ponto  $a$ , então ela deve ser da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x - a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x - a)^3 + \dots \quad (\text{A.11})$$

A série em (A.11) é chamada série de Taylor da função  $f$  em  $a$  (ou em torno de  $a$  ou centrada em  $a$ ).

# Apêndice B

## Teorema do Valor Médio

**Teorema B.0.3** *Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , então em algum ponto  $c \in [a, b]$ :*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

**Demonstração:**

Como a função  $f$  é contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ .

- $\exists x_1 \in [a, b]$  tal que  $f(x_1)$  é o valor mínimo da  $f$  em  $[a, b]$ .
- $\exists x_2 \in [a, b]$  tal que  $f(x_2)$  é o valor máximo da  $f$  em  $[a, b]$ .

Portanto temos que  $f(x_1) \leq f(t) \leq f(x_2)$ , para todo  $t \in [a, b]$

Como  $f(x_1)$  é mínimo e  $f(x_2)$  é máximo, temos:

$$f(x_1)(b-a) = \int_a^b f(x_1) dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b f(x_2) dt = f(x_2)(b-a).$$

Então:

$$f(x_1) \leq \frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a} \leq f(x_2)$$

Logo para todo  $f(c)$  entre  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$ , existe um  $c \in [a, b]$  tal que:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

# Apêndice C

## Teorema Fundamental do Cálculo

**Teorema C.0.4 (Teorema fundamental do Cálculo [8], Parte 1)** Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , então a função  $g$  definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$  e  $g'(x) = f(x)$ .

**Demonstração [8] :** Se  $x$  e  $x + h$  estão  $(a, b)$ , então

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \left( \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt \right) - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt \end{aligned}$$

logo, para  $h \neq 0$ ,

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \quad (\text{C.1})$$

Como  $f$  é contínua, pelo Teorema do valor médio para integrais, sabemos que existe um número  $c$  (que depende de  $h$ ) no intervalo  $(x, x+h)$ , tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)h$$

e portanto

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(c)$$

Como  $x < c < x+h$ , segue que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(c) = \lim_{c \rightarrow x^+} f(c) = f(x)$  e daí, por (C.2), temos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

De maneira análoga se demonstra que para  $h < 0$ . Assim concluímos que:

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x) \quad (\text{C.2})$$

o que queríamos demonstrar.

**Teorema C.0.5 (Teorema fundamental do Cálculo, Parte 2)** *Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (\text{C.3})$$

onde  $F$  é qualquer primitiva de  $f$ , isto é, uma função tal que  $F' = f$ .

**Demonstração:** Seja  $g(x) = \int_a^x f(t)$ . Sabemos de (C.0.4) que  $g'(x) = f(x)$ ; isto é,  $g$  é uma primitiva de  $f$ . Se  $F$  for qualquer outra primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ , então pelo Corolário do Teorema do Teorema do valor médio, temos que  $F$  e  $g$  diferem por uma constante:

$$F(x) = g(x) + C \quad (\text{C.4})$$

para  $z < x < b$ . No entanto, tanto  $F$  quanto  $g$  são contínuas em  $[a, b]$  e, portanto, tomando limites em ambos os lados da (C.4) (quando  $x \rightarrow a^+$  e  $x \rightarrow b^-$ , vemos que isto também é válido quando  $x = a$  e  $x = b$ ).

Se fizermos  $x = a$  na fórmula de  $g(x)$ , obteremos

$$g(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

Portanto, usando (C.4) com  $x = b$  e  $x = a$ , temos

$$F(b) - F(a) = [g(b) + C] - [g(a) + C] = g(b) - g(a) = g(b) = \int_a^b f(t)dt \quad (\text{C.5})$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Johann Baumeister and AntonioLeitão. *Introdução à teoria de controle e programação dinâmica*. Rio de Janeiro, 2014.
- [2] Carl B. Boyer and Uta C. Merzbach. *História da matemática*. Blucher, 2012.
- [3] Vinícius Vivaldino Pires de Almeida. *Controle Ótimo aplicado a problemas biológicos*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Viçosa, 2010.
- [4] Ana Paula Ximenes Flores. *Cálculo variacional: aspectos teóricos e aplicações*. Dissertação (mestrado), Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas., 2011.
- [5] Bean San Goh, George Leitmann, and Thomas L. Vincent. *Optimal control of a prey-predator system*. *Mathematical Biosciences*, pages 263–286, 1974.
- [6] Donald E. Kirk. *Optimal control theory: an introduction*. New York, 1998.
- [7] M. L. Krasnov; G.I Makarenko; A.I Kiseliyov. *Cálculo Variacional*. 1992.
- [8] James Stewart. *Cálculo*, volume V.1. São Paulo, 7<sup>a</sup> ed. edition, 2013.
- [9] James Stewart. *Cálculo*, volume V.2. São Paulo, 7<sup>a</sup> ed. edition, 2013.
- [10] John T. Workman and Susane Lenhart. *Optimal control applied to biological models*. Chapman & Hall/CRC, 2007.
- [11] Dennis G. Zill. *Equações diferenciais - com aplicações em modelagem*. 2 ed. edition, 2011.