JAKSON FERREIRA DE ARAÚJO
WILLIAN DO MONTE MEIRELES

CÔNICAS: :
CALCULO DIRETO DA EXCENTRICIDADE EM TERMOS DOS COEFICIENTES DA QUADRÁTICA

MACAPÁ-AP

2010

JAKSON FERREIRA DE ARAÚJO
WILLIAN DO MONTE MEIRELES

Cônicas:

Calculo direto da excentricidade em termos dos coeficientes da quadrática

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil.

MACAPÁ-AP
2010

JAKSON FERREIRA DE ARAÚJO
WILLIAN DO MONTE MEIRELES

***Cônicas*:**

Cálculo direto da excentricidade em termos dos coeficientes da quadrática

AVALIADORES

Prof. Dr.José Walter Cárdenas Sotil
Universidade Federal do Amapá

Prof. Dr.Guzman Isla Chamilco
Universidade Federal do Amapá

Prof. Esp. Steve Wanderson Calheiros de Araújo
Universidade Federal do Amapá

Avaliado em: 10/12/2010

MACAPÁ-AP
2010

Agradecimentos

A Deus, pois é Ele quem tem nos sustentado e nos encorajado neste curso;

Aos nossos pais que têm contribuído diretamente com a nossa formação;

Aos nossos irmãos e amigos pelo incentivo de continuarmos firmes no propósito de vida dado por Deus;

Aos nossos colegas de curso pela amizade e companheirismo;

Aos professores, aos quais devemos parte de nossa formação, em particular o nosso orientador.

Dedicamos esse trabalho a todos que contribuíram direta ou indiretamente para que nossos esforços não estivessem sidos em vão, em particular ao nosso Professor Orientador José Walter Cárdenas Sotil, que em todo tempo esteve sempre disposto a nos auxiliar quando preciso. Desde já nossos sinceros agradecimentos.

"Não temas, porque eu sou contigo; não te assombres, porque sou teu Deus; eu te esforço, e te ajudo, e te sustento com a destra da minha justiça."(Is 41.10)

A riqueza da Matemática reside
em conjugar, numa única forma,
beleza e utilidade, força e sutileza,
intuição e rigor.

Santiago Medrano

Resumo

Apresenta-se, neste Trabalho de Conclusão de Curso, um estudo abordando o cálculo direto da excentricidade das cônicas a partir dos coeficientes de sua equação quadrática. Usualmente a excentricidade de uma cônica definida por sua equação quadrática é calculada transformando a equação na sua forma reduzida ou equação padrão. A redução à forma padrão precisa em geral, executar uma translação seguida de uma rotação, e logo identificar corretamente as constantes para o cálculo da excentricidade. Neste trabalho desenvolvemos o cálculo da excentricidade por translações e rotações, e apresentamos um método para avaliar diretamente a excentricidade a partir dos coeficientes da equação quadrática. Quando comparado os dois métodos, o método do cálculo direto é mais eficiente em termos de números de operações. Também é apresentado neste trabalho a definição comum para as cônicas, como o lugar geométrico dos pontos cuja razão entre suas distancias ao foco e à diretriz é uma constante igual à excentricidade. Esta definição unificada das cônicas confere ainda maior importância ao cálculo eficiente da excentricidade. Observa-se que os softwares em geometria dinâmica evitam o cálculo da excentricidade ou calculam elas incorretamente, este método direto pode ser implementado com facilidade nestes tipos de softwares para o cálculo correto da excentricidade das cônicas.

Palavras-Chave: Cônicas, Excentricidade, Equação padrão, Equação quadrática e Rotação.

Resumen

Se presenta en este Trabajo de Final de curso, un cálculo directo de la excentricidad de las cónicas conociendo los coeficientes de la ecuación de segundo grado. Por lo general, la excentricidad de una cónica se calcula mediante la transformación de la ecuación cuadrática en su forma reducida o ecuación padron. Para reduzir a la forma padron se debe realizar una traslación seguida por una rotación, y luego identificar correctamente las constantes para el cálculo de la excentricidad. En este trabajo, se desarrolla el cálculo de la excentricidad por medio de traslaciones y rotaciones, ademas se presenta un método para evaluar directamente la excentricidad conocidos los coeficientes de la ecuación de segundo grado. Al comparar los dos métodos, el método de cálculo directo es más eficiente en términos del número de operaciones. También se presenta en este trabajo una definición común a todas las conicas, como siendo el lugar geométrico de puntos cuya razón de sus distancias al foco y a la directriz es una constante igual a la excentricidad. Esta definición unificada de conicas realza la importancia del cálculo de la excentricidad. Observamos que los softwares de geometría dinámica comúnmente evitan el cálculo de la excentricidad, o calculan esta de forma incorrecta. Este método directo puede ser implementado facilmente en este tipo de software para calcular correctamente la excentricidad de la cónica.

Palabras clave: Cónica, excentricidad, ecuación padron, ecuación de segundo grado, rotación.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

1.1 A história das cônicas

Tratados sobre as seções cônicas são conhecidos antes da época de Euclides (325 - 265 a.C.). E, associado à história dessas curvas, temos Apolônio que nasceu na cidade de Perga, região da Panfília (atualmente Turquia) por volta de 262 a.C. e viveu, aproximadamente, até 190 a.C. Apolônio foi contemporâneo e rival de Arquimedes que viveu, aproximadamente, entre 287 a.C. e 212 a.C. e, juntamente com Euclides, formam a tríade considerada como sendo a dos maiores matemáticos gregos da antigüidade.
Apolônio estudou com os discípulos de Euclides em Alexandria e foi astrônomo notável, talvez ele, e não Euclides mereceu dos antigos o adjetivo de "o grande Geômetra". A maior parte das obras de Apolônio desapareceu. O que se sabe dessas obras perdidas deve-se a Pappus de Alexandria (séc. IV a.C.). Sua obra prima é Seções Cônicas composta por oito volumes (aproximadamente 400 proposições!). Os precursores de Apolônio no estudo das cônicas foram Manaecmo, Aristeu e o próprio Euclides. Nesse período, elas eram obtidas seccionando um cone circular reto de uma folha com um plano perpendicular a uma geratriz do cone, obtendo três tipos distintos de curvas, conforme a seção meridiana do cone fosse um ângulo agudo, um ângulo reto ou um ângulo obtuso (ver Figura 1.1).

Apolônio foi o matemático que mais estudou e desenvolveu as seções cônicas na antiguidade. Suas contribuições foram:

a) Ter conseguido gerar todas as cônicas de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de interseção (ver Figura 1.2)

b) Ter introduzido os nomes elipse e hipérbole e ter estudado as retas tangentes e normais a uma cônica.

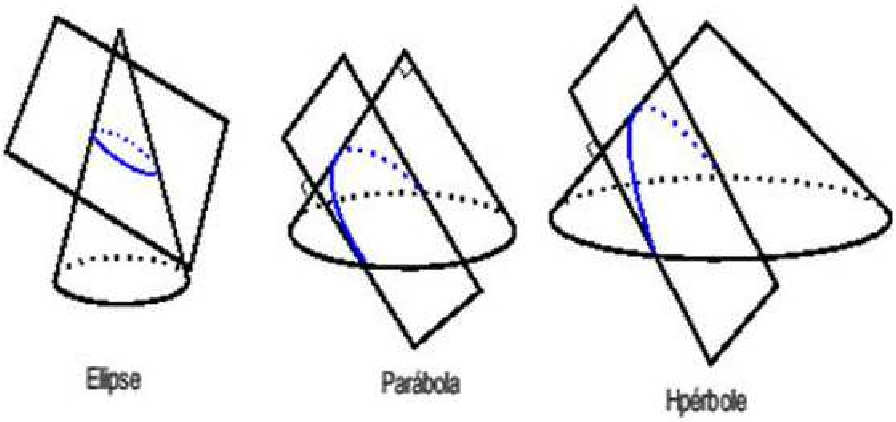


Figura 1.1: Seções cônicas

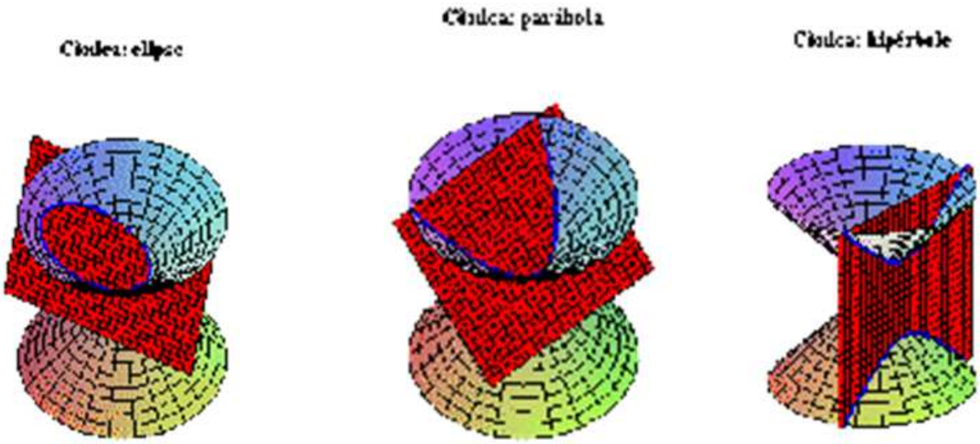


Figura 1.2: Geração das cônicas a partir de um cone de duas folhas

A importância do estudo de Apolônio sobre as cônicas dificilmente pode ser questionada. Porém coube a Pierre de Fermat (1.601-1.665) o enfoque analítico das cônicas, uma vez que os matemáticos gregos não possuíam uma notação algébrica adequada [6, 7, 8, 9].

Credita-se a Fermat:

a) O estabelecimento do princípio fundamental de que uma equação do 1º grau, no plano, representa uma reta e uma equação do 2º grau, no plano, representa uma cônica

b) A determinação das equações mais simples da reta, da circunferência, da elipse, da parábola e da hipérbole

c) A aplicação da rotação de eixos para reduzir uma equação do 2º grau a sua forma mais simples.

1.2 Algumas aplicações das cônicas

O interesse pelo estudo das cônicas remonta a épocas muito recuadas. De fato, estas curvas desempenham um papel importante em vários domínios da física, incluindo a astronomia, na economia, na engenharia e em muitas outras situações, pelo que não é de estranhar que o interesse pelo seu estudo seja tão antigo. A seguir apresentamos algumas de suas aplicações:

Suponhamos que temos uma lanterna direcionada para uma parede, então o feixe de luz emitido desenhará nessa parede uma curva cônica, conforme a figura. Dependendo da inclinação da lanterna relativamente à parede, assim se obtém uma circunferência, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole (ver Figura 1.3). Na astronomia, Kepler mostrou

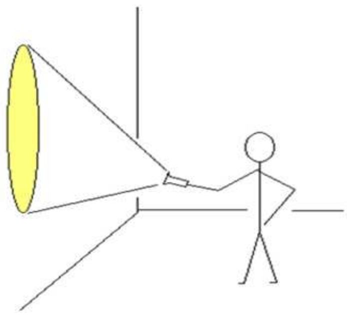


Figura 1.3: Feixe de luz

que os planetas do sistema solar descrevem órbitas elípticas, as quais têm o sol num dos focos. Também os satélites artificiais enviados para o espaço percorrem trajetórias elípticas (ver Figura 1.4). Fazendo uso da propriedade refletora da parábola, Arquimedes construiu espelhos parabólicos, os quais por refletirem a luz solar para um só ponto, foram usados para incendiar os barcos romanos quando das invasões de Siracusa (ver Figura 1.5). Os arcos de cônicas podem ser utilizados na arquitetura e engenharia. Um exemplo de utilização da hipérbole em construções pode ser vista em Brasília. O hiperbolóide de uma folha é utilizado na construção de centrais de energia (ver figura 1.6) [6, 7, 10].

Figura 1.4: Sistema Solar

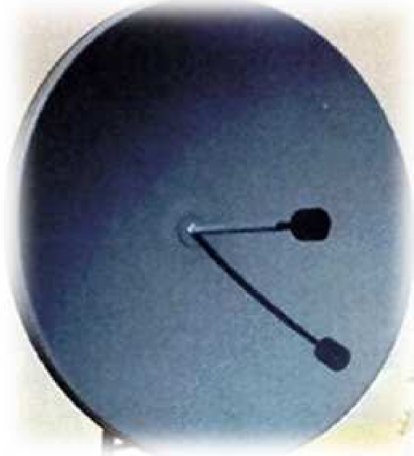


Figura 1.5: Antena Parabólica

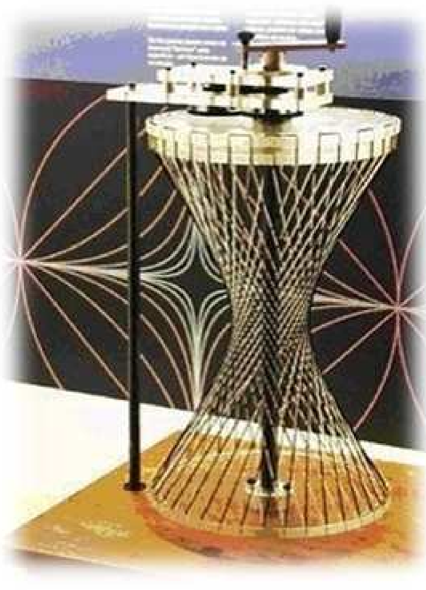


Figura 1.6: Hiperbolóide de uma Folha

Capítulo 2

Equações canônicas

Considerando um cone circular reto de duas folhas e vértice V e eixo (t), o termo seção cônica procede do fato de tal curva ser obtida por meio do corte de um plano α sobre o cone circular reto. Assim sendo, se o plano α for secante ao cone e não contiver o vértice, teremos como seção cônica uma Elipse, Hipérbole ou Parábola.

2.1 Equação canônica da elipse

Uma elipse de focos F e F' é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F e F' é igual a uma constante, que indicaremos por 2a. Portanto, P pertence à elipse se, e somente se,

$$d(P,F) + d(P,F') = 2a$$

Mostraremos a seguir que, se escolhermos convenientemente o sistema de eixos, a elipse pode ser representada por uma equação bastante simples.

Dada a elipse E, tomamos no plano um sistema de coordenadas tal que $F = (c,0)$ e $F^{'} = (-c,0)$, $c > 0$, sejam as coordenadas dos focos.

Observe que $c < a$, pois no triângulo $PFF^{'}$ (ver Figura 2.1), o lado $FF^{'}$ é menor do que a soma $PF + PF^{'} = 2a$. Se fosse $c = a$, a elipse se reduziria ao segmento $FF^{'}$.

De acordo com a definição, o ponto P pertence á elipse se, e somente se,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a,$$

isolando um termo do lado direito, temos

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos os membros desta equação ao quadrado, obtemos:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Simplificando:

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Tomando novamente o quadrado de ambos os membros, vem:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

logo

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Pondo $a^2 - c^2 = b^2$, esta equação se escreve:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros por a^2b^2 resulta:

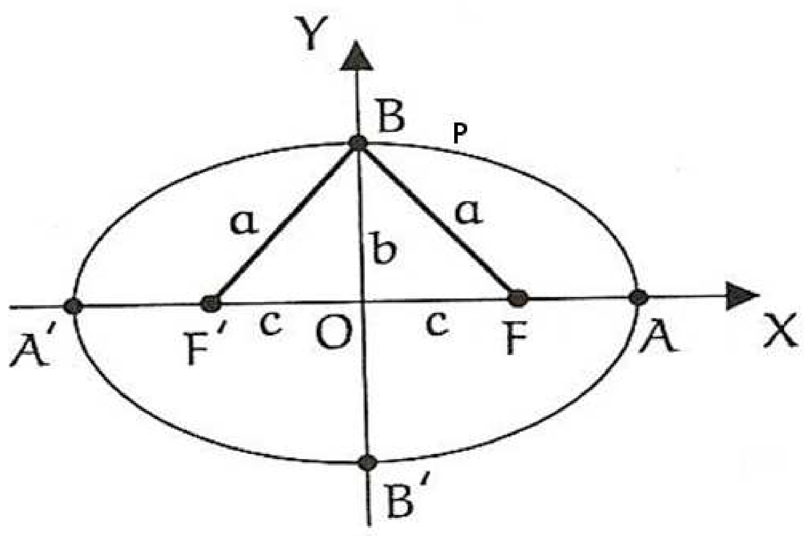


Figura 2.1: Vértices e eixos de uma elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.1}$$

Resumindo: Se tomarmos um sistema de coordenadas tal que os focos F e F' estão sobre o eixo $0X$ e a origem 0 é o ponto médio do segmento FF', então as coordenadas de um ponto qualquer $P = (x, y)$ da elipse satisfazem a equação 2.1, na qual $a = \frac{1}{2}[d(P,F) + d(P,F')]$

e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, sendo $2c = d(F, F^{'})$ a distância focal.

Os pontos $A = (a, 0)$, $A^{'} = (-a, 0)$, $B = (0, b)$ e $B^{'} = (0, -b)$ pertencem à elipse; eles são chamados os vértices. Os segmentos $AA^{'}$ e $BB^{'}$ chamam-se os eixos. O eixo $AA^{'}$, que contém os focos, é o eixo maior e $BB^{'}$ é o eixo menor. Note que, sendo $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se $a \geq b$, onde $d(A, A^{'}) = 2a$ e $d(B, B^{'}) = 2b$.

Resultado similar se obtém se o eixo focal estiver sobre o eixo das ordenadas, neste caso temos a equação

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{2.2}$$

onde $2a$ é a distância focal [5, 3].

2.1.1 Excentricidade da elipse

Uma importante característica da elipse é sua excentricidade, que é definida pela relação:

$$e = \frac{c}{a}$$

onde, $2c$ é a distância focal e $2a$ é a distância entre os vértices do eixo maior. Como $c < a$, tem-se que $0 < e < 1$. Quanto mais próximo de zero for o valor da excentricidade e, mais a elipse se aproxima de uma circunferência. Por outro lado, quanto mais achatada for à elipse, mais o valor da excentricidade e se aproxima de 1. É fácil concluir quanto os valores extremos do domínio de e: Se $e = 0$, tem-se uma circunferência de diâmetro 2a e os focos F e F' coincidem com o centro da circunferência. Se $e = 1$, tem-se um segmento retilíneo $FF^{'}$.

2.2 Equação da hipérbole

Sejam F e $F^{'}$ dois pontos do plano e a um número real positivo. Chama-se hipérbole de focos F e $F^{'}$ ao conjunto dos pontos P do plano cuja diferença das distancias aos pontos F e $F^{'}$ é, em valor absoluto, igual a $2a$. Assim, o ponto P pertence a essa hipérbole H se, e somente se

$$|d(P, F^{'}) - d(P, F)| = 2a.$$

A hipérbole H possui dois ramos, um formado pelos pontos P para os quais a diferença $d(P, F) - d(P, F^{'})$ é positiva, igual a $2a$, e outro pelos pontos em que esta diferença é negativa, igual a $-2a$.

Para obter equação da hipérbole em sua forma mais simples, tomamos no plano um sistema de eixos ortogonais relativamente aos quais as coordenadas dos focos sejam $F = (c, 0)$ e $F' = (-c, 0)$, com $c > 0$.

Se $d(P, F') - d(P, F) = 2a$, diremos que o ponto P está no ramo direito da hipérbole. Quando $d(P, F') - d(P, F) = -2a$, diz-se que P pertence ao ramo esquerdo de H. No sistema de coordenadas que acabamos de escolher, se $P = (x, y)$ está no ramo direito de H, o ponto $P' = (-x, y)$, simétrico de P relativamente ao eixo OY, está no ramo esquerdo, e vice-versa. Portanto os dois ramos da hipérbole são linhas simétricas em relação ao eixo OY [5, 3].

A fim de determinar a equação da hipérbole, escrevemos a equação $d(P, F') = d(P, F) \pm 2a$ em termos de coordenada,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Simplificando:

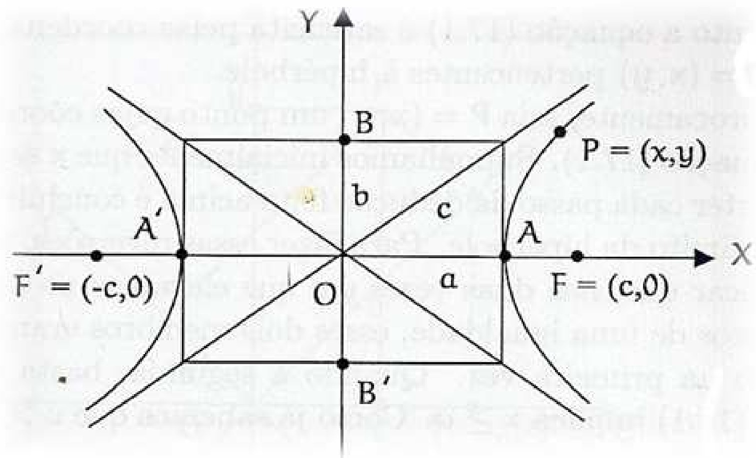


Figura 2.2: Uma hipérbole. Tem-se $|d(P, F') - d(P, F)| = 2a$ e $b^2 = c^2 - a^2$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Como, no triângulo PFF', o lado FF' é maior do que a diferença dos outros dois, temos $2c > 2a$, logo $c^2 > a^2$. Assim, a diferença $c^2 - a^2$ é um número positivo, cuja raiz quadrada chamamos de b, de modo que $c^2 - a^2 = b^2$. Logo,

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.3}$$

A hipérbole corta o eixo OX nos pontos $A = (a, 0)$ e $A' = (-a, 0)$ que são chamados os vértices da hipérbole. O segmento de reta AA' chama-se o eixo enquanto o segmento BB', com $B = (0, b)$ e $B' = (0, -b)$, chama-se o eixo conjugado da hipérbole. Os pontos B e B' não pertencem à hipérbole. As retas $y = \dfrac{bx}{a}$ e $y = -\frac{bx}{a}$ chamam-se assíntotas da hipérbole. Para valores muito grandes de $|x|$ a hipérbole torna-se quase indistinguível de suas assíntotas.

2.2.1 Excentricidade da hipérbole

Uma importante característica da hipérbole é sua excentricidade, que é definida pela relação:

$$e = \frac{c}{a}$$

Como $c > a$, temos que $e > 1$.

2.3 Equação da parábola

Sejam d uma reta e F um ponto fora dela. No plano determinado por d e F, chama-se parábola de foco F e diretriz d ao conjunto dos pontos eqüidistantes de d e F. Lembramos que a distância do ponto P à reta d é a distancia de P ao ponto P_0, pé da perpendicular baixada de P sobre d. Seja F_0 é o pé da perpendicular baixada de F sobre d, a reta FF_0 é um eixo de simetria da parábola. Se P está sobre a parábola e P' é o seu simétrico em relação á reta FF_0, então P' também pertence à parábola, como se vê pela Figura 2.3. Sejam p o comprimento e A o ponto médio do segmento FF_0. A distância de A a reta d é igual a $p/2$, o mesmo que o comprimento de AF. Logo A pertence à parábola e chama-se o seu vértice. Qualquer outro ponto P da parábola está a uma distância de d superior a $p/2$.

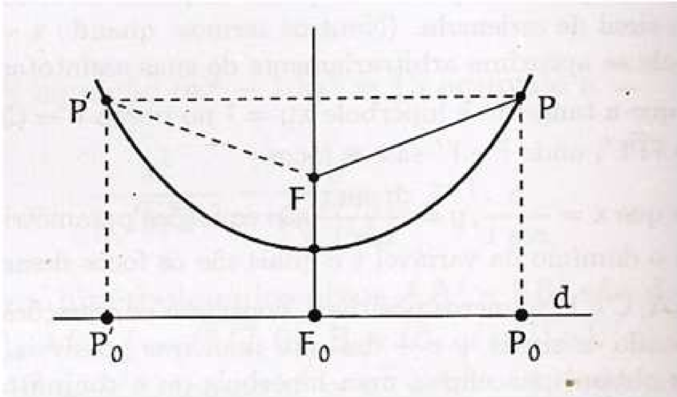


Figura 2.3: P pertence à parábola de foco F e diretriz d por que $d(P,F) = d(P,P_0)$ com $PP_0 \perp d$. A perpendicular FF_0, baixada do foco sobre a diretriz, é um eixo de simetria.

Com efeito, chamemos de P_0 o pé da perpendicular baixada de P sobre d. Como a oblíqua FP_0 é maior do que a perpendicular FF_0, temos

$$p < \overline{FP_0} < \overline{FP} + \overline{PP_0} = 2\overline{PP_0}$$

Como $\overline{PP_0}$ é igual a distancia de P a reta d, concluímos que essa distância é maior do que $p/2$.

Em seguida, vamos deduzir a equação da parábola de foco F e diretriz d, com $p > 0$

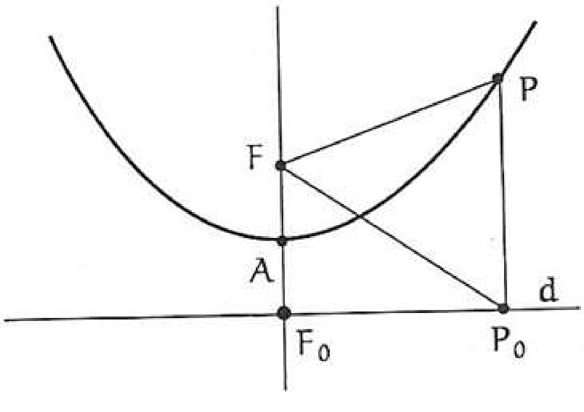


Figura 2.4: O vértice A é o ponto da parábola mais próximo da diretriz d

representando a distância de F a d. Para isso, tomaremos um sistema de eixos cuja origem é o vértice da parábola e cujo eixo vertical é a reta FF_0, eixo de simetria da parábola. Neste sistema, temos $F = (0, p/2)$ e a equação da diretriz d é $y = -p/2$. Se $P = (x,y)$ pertence a parábola, então $y \geq 0$, na verdade $y > 0$ salvo quando $P = (0,0) = A$. Como

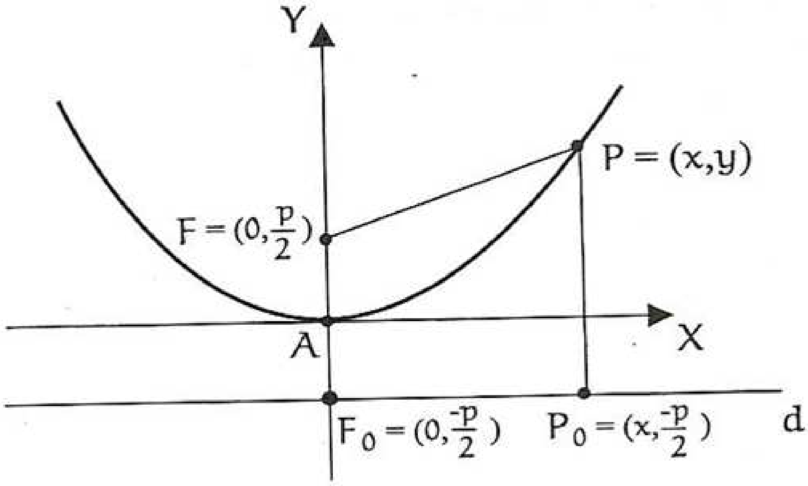


Figura 2.5: Deduzindo a equação da parábola

o eixo vertical é eixo de simetria, se $P = (x, y)$ pertence a parábola então $P' = (-x, y)$ também pertence.

Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola. A distancia de P a diretriz d é igual a $y + p/2$, enquanto a distância de P ao foco F é $\sqrt{x^2 + (y - p/2)^2}$. Como P pertence à parábola, devemos ter

$$y + \frac{p}{2} = \sqrt{x^2 + (y - \frac{p}{2})^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$(y + \frac{p}{2})^2 = x^2 + (y - p/2)^2.$$

Desenvolvendo:

$$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}.$$

Simplificando:

$$2py = x^2$$

Logo:

$$y = \frac{x^2}{2p} \tag{2.4}$$

Reciprocamente, se as coordenadas do ponto $P = (x, y)$ satisfazem a equação 2.4, com $p > 0$, então $y \geq 0$. Logo $y + \dfrac{p}{2} \geq 0$ e todos os passos da dedução acima podem ser revertidos, o que mostra que P pertence à parábola de foco $F = (0, p/2)$ e diretriz d, dada pela equação $y = -p/2$.

Parábolas ocorrem freqüentemente como gráficos de funções quadráticas. Uma função quadrática de uma variável tem a forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c constantes, sendo $a \neq 0$. O gráfico de f é o conjunto G, formado pelos pontos $P = (x, y) \in R^2$ tais que $y = ax^2 + bx + c$.

Para mostrar que G é, de fato, uma parábola introduziremos novas coordenadas s, t mediante uma translação dos eixos, ou seja, tais que $x = s + h, \quad y = t + k$, onde h e k serão escolhidos convenientemente. Em termos das novas coordenadas, o ponto $P = (x, y) = (s + h, t + k)$ pertence ao conjunto G se, e somente se,

$$t + k = a(s + h)^2 + b(s + h) + c = as^2 + (2ah + b)s + (ah^2 + bh + c).$$

Tomando $h = -b/2a$ e $k = ah^2 + bh + c$, a igualdade acima se reduz $at = as^2$.

Assim, em termos das novas coordenadas o ponto (s, t) pertence ao gráfico G se, e somente se, $t = as^2$. Isto mostra que G é uma parábola, cujo foco é o ponto $(0, 1/4a)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $t = -1/4a$ (nas coordenadas $s,\ t$) [5, 3].

Em termos das coordenadas originais $x,\ y$, o foco da parábola $y = ax^2 + bx + c$ é o ponto

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$$

e a diretriz é a reta horizontal

$$y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}.$$

2.4 Cônicas degeneradas

As cônicas degeneradas são obtidas quando em particular o plano corta o cone em seu vértice V. No caso dessas cônicas o cálculo da excentricidade não está definido. Pois a excentricidade determina o grau de achatamento de uma seção cônica [5, 3]. Logo percebemos que não há achatamento em um ponto, um par de retas, uma reta e um par de retas paralelas. Temos as seguintes cônicas degeneradas:

a) O ponto: Quando o plano α tiver em comum com o cone apenas o vértice V. Trata-se de uma elipse degenerada.

b) Um par de retas concorrentes: Quando o plano α contiver o vértice e duas geratrizes do cone. É uma hipérbole degenerada.

c) Uma reta: Quando o plano contiver o vértice e uma geratriz do cone, o plano α tangencia o cone. Figura-se como parábola degenerada.

d) Um par de retas paralelas: Num caso particular obter-se a duas retas paralelas quando da interseção de uma superfície cilíndrica circular (considerada uma superfície cônica de vértice impróprio) por um plano α paralelo ao seu eixo.

Capítulo 3

Transformação da equação quadrática geral na forma padrão

Considere a equação quadrática geral de uma seção cônica [4]:

$$f(x, y) = ax^2 + 2nxy + by^2 + 2hx + 2ky + c = 0 \tag{3.1}$$

Primeiro vamos obter o centro ao usar o fato de que este é o ponto médio de qualquer diâmetro que passe através dele.

3.1 Equação dos diâmetros paralelos aos eixos coordenados

Se o centro da cônica é o ponto (x_0, y_0), consideremos o diâmetro paralelo ao eixo X de equação $y = y_0$. Ao substituir $y = y_0$ na equação 3.1, obtemos:

$$f(x, y_0) = ax^2 + 2nxy_0 + by_0^2 + 2hx + 2ky_0 + c = 0;$$

Fatorando em x temos:

$$f(x, y_0) = ax^2 + (2ny_0 + 2h)x + by_0^2 + 2ky_0 + c = 0.$$

Sendo $x^{'}$ e $x^{''}$ as raízes desta equação, então a abscissa x_0 do centro é dado por:

$$x_0 = \frac{1}{2} \cdot (x^{'} + x^{''}) = \frac{-(2ny_0 + 2h)}{2a} = \frac{-ny_0 - h}{a}$$

Multiplicando por a, obtém-se a equação do diâmetro paralelo a $y = y_0$

$$ax_0 + ny_0 + h = 0 \tag{3.2}$$

A equação 3.2 pode ser obtida derivando 3.1 em relação a x no ponto (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = ax_0 + ny_0 + h = 0 = 0.$$

Note que se (x_0, y_0) fosse um ponto médio de qualquer corda paralela ao eixo X, ele também iria satisfazer a equação $ax + ny + h = 0$. Portanto essa equação representa o diâmetro divisor de todos as cordas paralelas ao eixo X. Os pontos finais deste diâmetro, sendo o limite das cordas, são os pontos onde as tangentes paralelas ao eixo X tocam a cônica, isso explica porque estes pontos satisfazem a condição $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. [4, 1]

Similarmente, se usarmos o diâmetro $x = x_0$ e substituímos na equação 3.1 obtemos:

$$f(x_0, y) = ax_0^2 + 2nx_0y + by^2 + 2hx_0 + 2ky + c = 0$$

Fatorando em y temos:

$$f(x_0, y) = by^2 + (2nx_0 + 2k)y + ax_0^2 + 2hx_0 + c = 0.$$

Sendo y' e y'' as raízes desta equação, então a ordenada y_0 do centro é dado por:

$$y_0 = \frac{1}{2} \cdot (y' + y'') = \frac{-(2nx_0 + 2k)}{2b} = \frac{-nx_0 - k}{b}$$

Multiplicando por b, obtém-se a equação do diâmetro paralelo a $x = x_0$

$$by_0 + nx_0 + k = 0 \tag{3.3}$$

A equação 3.3 pode ser obtida derivando 3.1 em relação a y no ponto (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = by_0 + nx_0 + k = 0.$$

Note que se (x_0, y_0) fosse um ponto médio de qualquer corda paralela ao eixo Y, ele também iria satisfazer a equação $by + nx + k = 0$. Portanto essa equação representa o diâmetro divisor de todos as cordas paralelas ao eixo y. Os pontos finais deste diâmetro, sendo o limite das cordas, são os pontos onde as tangentes paralelas ao eixo Y tocam a cônica, isso explica porque estes pontos satisfazem a condição $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

3.2 Determinação do centro da cônica

As equações 3.2 e 3.3 determinam o sistema algébrico

$$\begin{cases} ax_0 + ny_0 + h &= 0 \\ nx_0 + by_0 + k &= 0 \end{cases}$$

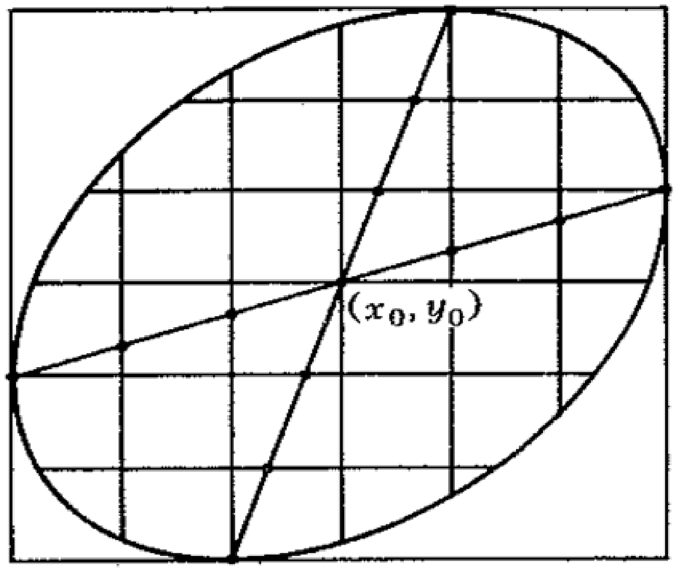


Figura 3.1: Elipse com centro (x_0, y_0)

onde, (x_0, y_0) é o centro da equação quadrática (ver Figura 3.1).
Resolvendo o sistema algébrico obtém-se:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{nk - hb}{ab - n^2}, \qquad ab - n^2 \neq 0 \\ y_0 &= \frac{-ak + nh}{ab - n^2}, \qquad ab - n^2 \neq 0 \end{aligned}$$

A condição $ab - n^2 \neq 0$ determinam as cônicas centrais e não centrais.

Definição 3.1 *A equação 3.1 determina uma cônica central se* $ab - n^2 \neq 0$. *Em particular, temos uma elipse se* $ab - n^2 > 0$, *e uma hipérbole se* $ab - n^2 < 0$.
A equação 3.1 determina uma cônica não central se $ab - n^2 = 0$, *neste caso temos uma parábola.*

Associamos à equação quadrática 3.1 a matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & n & h \\ n & b & k \\ h & k & c \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Consideremos os determinantes da matriz M e os determinantes dos menores da terceira coluna de M:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} a & n & h \\ n & b & k \\ h & k & c \end{vmatrix} \\
\Delta_{1,3} &= \begin{vmatrix} n & b \\ h & k \end{vmatrix} = nk - hb = H \\
\Delta_{2,3} &= -\begin{vmatrix} a & n \\ h & k \end{vmatrix} = nh - ak = K \\
\Delta_{3,3} &= \begin{vmatrix} a & n \\ n & b \end{vmatrix} = ab - n^2 = C
\end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas do centro podem-se escrever como:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{nk - hb}{ab - n^2} = \frac{H}{C}, \qquad C \neq 0 \\
y_0 &= \frac{-ak + nh}{ab - n^2} = \frac{K}{C}, \qquad C \neq 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Alem mais, se verifica que

$$\Delta = hH + kK + cC \tag{3.6}$$

3.3 Redução da equação quadrática por translação

Consideremos um novo sistema de coordenadas $O'X'Y'$ obtido por translação do sistema original OXY, de modo que o centro (x_0, y_0) no sistema OXY corresponda agora à origem de coordenadas O' do sistema $O'X'Y'$. Para um ponto P do plano, a relação entre as coordenadas $P(x, y)$ e $P(x', y')$ é dada por:

$$\begin{aligned}
x &= x' + x_0 \\
y &= y' + y_0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Substituindo 3.7 na equação quadrática 3.1 resulta,

$$a(x_0 + x')^2 + 2n(x_0 + x')(y_0 + y') + b(y_0 + y')^2 + 2h(x_0 + x') + 2k(y_0 + y') + c = 0$$

Elevando ao quadrado e agrupando termos, temos

$$\begin{aligned}
ax'^2 + 2nx'y' + by'^2 + x_0(ny_0 + ax_0 + h) + y_0(nx_0 + by_0 + k) + \\
+hx_0 + ky_0 + c + 2x'(ax_0 + ny_0 + h) + 2y'(nx_0 + by_0 + k) &= 0
\end{aligned}$$

Como $ax_0 + ny_0 + h = 0$ e $nx_0 + by_0 + k = 0$, resulta

$$ax^{'2} + 2nx^{'}y^{'} + by^{'2} + hx_0 + ky_0 + c = 0$$

Substituindo 3.5 , temos que

$$ax^{'2} + 2nx^{'}y^{'} + by^{'2} + \frac{hH}{C} + \frac{kK}{C} + c = 0.$$

De 3.6 verificamos que

$$\frac{hH}{C} + \frac{kK}{C} + c = \frac{\Delta}{C}.$$

Portanto,

$$ax^{'2} + 2nx^{'}y^{'} + by^{'2} + \frac{\Delta}{C} = 0. \tag{3.8}$$

Observamos que na equação 3.8 não existem termos de translação, mas que ainda existe um termo $x^{'}y^{'}$ que indica rotação do sistema. Este termo tem que ser eliminado para chegar à forma padrão da equação da cônica.

3.4 Redução da equação quadrática por rotação

Para eliminar o termo de rotação $x^{'}y^{'}$ em 3.8, introduzimos as coordenadas polares (r, θ) cuja relação com as coordenadas $(x^{'}, y^{'})$ é dada por:

$$\begin{aligned} x^{'} &= rcos(\theta) \\ y^{'} &= rsen(\theta) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Neste caso o ângulo θ indica a rotação do sistema $OX^{'}Y^{'}$. Substituindo 3.9 em 3.8 obtém-se,

$$r^2(acos^2(\theta) + 2nsen(\theta)cos(\theta) + bsen^2(\theta) + \frac{\Delta}{ab - n^2} = 0$$

Como o termo $\dfrac{\Delta}{ab - n^2}$ é constante, então r é máximo ou mínimo se

$$f(\theta) = acos^2(\theta) + 2nsen(\theta)cos(\theta) + bsen^2(\theta)$$

é mínimo ou máximo respectivamente, e isto ocorre quando sua derivada em relação a θ for igual a zero:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\theta} &= -2acos(\theta)sen(\theta) + 2ncos^2(\theta) - 2nsen^2(\theta) + 2bsen(\theta)cos(\theta) \\ &= (b - a)sen(2\theta) + 2ncos(2\theta) \end{aligned}$$

Como $\dfrac{df}{d\theta} = 0$, obtém-se:

$$tan(2\theta) = \frac{2n}{a-b}, \qquad \text{se} \quad a \neq b.$$

Se $a = b$ então $cos(2\theta) = 0$, portanto $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.
A seguinte proposição tem sido provada,

Proposição 3.1 *O ângulo de rotação θ da seção cônica descrita pela equação quadrática*

$$f(x, y) = ax^2 + 2nxy + by^2 + 2hx + 2ky + c = 0$$

é dado por

$$\begin{cases} tan(2\theta) & = & \dfrac{2n}{a-b}, & \quad se \quad a \neq b \\ \theta & = & \dfrac{\pi}{4}, & \quad se \quad a = b \end{cases} \tag{3.10}$$

Fazendo $m = tan(\theta)$, temos que:

$$tan(2\theta) = \frac{2tan(\theta)}{1 - tan^2(\theta)} = \frac{2m}{1 - m^2}$$

substituindo em 3.10 temos

$$\frac{2m}{1 - m^2} = \frac{2n}{a - b}$$

do qual resulta a equação em m,

$$nm^2 + (a - b)m - n = 0.$$

Multiplicando por n,

$$n^2m^2 + (a - b)nm - n^2 = 0.$$

o qual pose ser agrupado como

$$nm\ (nm + a) - b\ nm - n^2 = 0. \tag{3.11}$$

Para fatorar esta expressão, consideremos λ definido por,

$$\lambda = nm + a. \tag{3.12}$$

Substituindo 3.11 em 3.12 resulta,

$$(\lambda - a)\lambda - b\ (\lambda - a) - n^2 = 0,$$

ou,

$$(\lambda - a)\,(\lambda - b) - n^2 = 0. \tag{3.13}$$

A equação 3.13 pode ser representada como:

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & n \\ n & \lambda - b \end{vmatrix} = 0.$$

Isto significa que as raízes λ_1 e λ_2 em 3.13 são autovalores da matriz:

$$B = \begin{pmatrix} a & n \\ n & b \end{pmatrix}.$$

Logo, existe uma matriz P tal que $B = P^t DP$, onde P^t indica a transposta de P e D é a matriz diagonal formada pelos autovalores de B,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Voltando ao objetivo de eliminar o termo $x^{'}y^{'}$, escrevemos a equação 3.8 como,

$$(x^{'} \quad y^{'}) \begin{pmatrix} a & n \\ n & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} + \frac{\Delta}{C}. = 0$$

Ou,

$$X^{'}BX^{'t} + \frac{\Delta}{C} = 0,$$

onde, $X^{'} = (x^{'}, y^{'})$.

Fazendo a substituição:

$$X^{'} = X^{''}P,$$

resulta

$$X^{''}(PBP^t)X^{''t} + \frac{\Delta}{C} = 0.$$

Como $D = PBP^t$, obtemos

$$X^{''}DX^{''t} + \frac{\Delta}{C} = 0,$$

ou em termos de componentes,

$$(x^{''} \quad y^{''}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{''} \\ y^{''} \end{pmatrix} + \frac{\Delta}{C}. = 0$$

Considerando que $C = ab - n^2 = \lambda_1\lambda_2$, o sistema acima pode-se escrever como:

$$\lambda_1 x^{''2} + \lambda_2 y^{''2} + \frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2} = 0,$$

isto prova a seguinte proposição,

Proposição 3.2 *A cônica central representada pela equação 3.8 pode ser escrita na forma*

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2} = 0, \tag{3.14}$$

por meio de um ângulo de rotação θ, definida por 3.10.
Se $\dfrac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2} < 0$ e $\lambda_1\lambda_2 > 0$, a equação 3.14 define uma elipse.
Se $\dfrac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2} > 0$ e $\lambda_1\lambda_2 < 0$ a equação 3.14 define uma hipérbole.
Se $\dfrac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2} \geq 0$, a equação 3.14 define uma cônica central degenerada.

De 3.12 temos que existem dois valores para o coeficiente angular $m = tan(\theta)$ dos eixos principais da cônica,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\lambda_1 - a}{n} \\ m_2 &= \frac{\lambda_2 - a}{n}. \end{aligned}$$

Logo, a cônica 3.1 com centro (x_0, y_0) tem como eixos principais as retas de equações,

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m_1(x - x_0) \\ y - y_0 &= m_2(x - x_0) \end{aligned} \tag{3.15}$$

.

Exemplo 3.1 *Considere a equação*

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 12x - 16y - 12 = 0. \tag{3.16}$$

Associamos à equação quadrática a seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -6 & 6 \\ -6 & 8 & -8 \\ 6 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

da qual calculamos os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 17 & -6 & 6 \\ -6 & 8 & -8 \\ 6 & -8 & -12 \end{vmatrix} = -2000 \\ C &= \begin{vmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 100 \end{aligned}$$

Como $C = ab - n^2 > 0$, temos que a quadrática representa uma elipse.

Para o cálculo dos autovalores resolvemos a seguinte equação,

$$\begin{vmatrix} \lambda - 17 & -6 \\ -6 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = 0,$$

a qual resulta na equação,

$$\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0$$

com raízes $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 20$.

Substituindo estes valores em 3.14, obtemos a forma canônica,

$$5x''^2 + 20y''^2 + \frac{-2000}{100} = 0,$$

ou

$$\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{1} = 1.$$

Para calcular o centro derivamos 3.16 em relação a x e y:

$$\begin{aligned} 17x - 6y + 6 &= 0 \\ -6x + 8y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução é o centro $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Os coeficientes angulares dos eixos principais são calculados por,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\lambda_1 - a}{n} = \frac{5 - 17}{-6} = 2 \\ m_2 &= \frac{\lambda_2 - a}{n} = \frac{20 - 17}{-6} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como conhecemos o centro $(x_0, y_0) = (0, 1)$ e os coeficientes angulares $m_1 = 2$ e $m_2 = \frac{1}{2}$, determinamos a equação dos eixos principais por,

$$\begin{aligned} y - 1 &= 2 \cdot (x - 0) \\ y - 1 &= -\frac{1}{2} \cdot (x - 0). \end{aligned}$$

Como temos uma elipse, temos

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 1 \\ c &= \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Logo, a excentricidade é:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sim 0,8660,$$

verificando que $0 < e < 1$ pois temos uma elipse. Na Figura 3.2 se mostra a elipse, o centro e seus eixos principais [4].

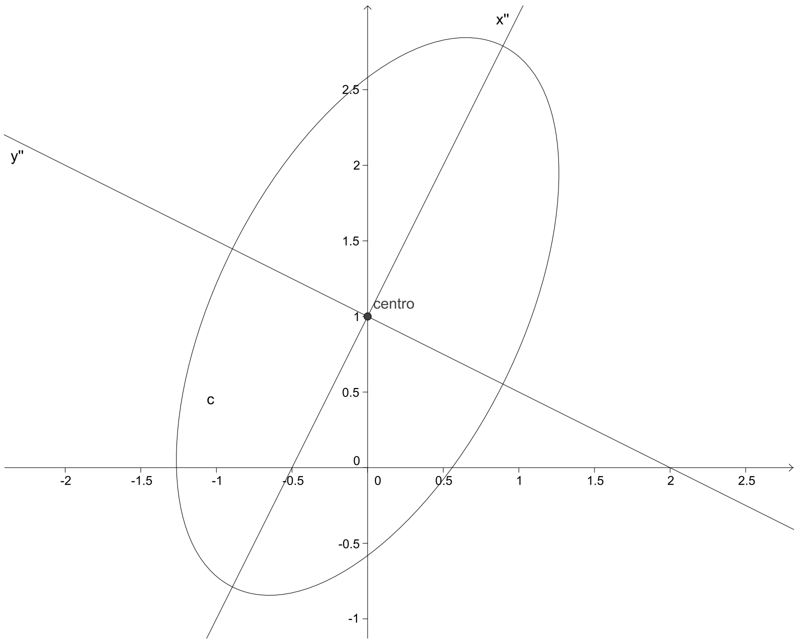


Figura 3.2: Equação quadrática: $17x^2 - 12xy + 8y^2 + 12x - 16y - 12 = 0$

Capítulo 4

Cálculo direto da excentricidade em termos dos coeficientes da quadrática

No capitulo 2 foram definidas as cônicas. A elipse, como o lugar geométrico dos pontos nos quais a soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados os focos, é uma constante. A hipérbole. como o lugar geométrico dos pontos nos quais o módulo da diferença a dois pontos fixos, chamados os focos é uma constante e a parábola, como o lugar geométrico tal que a distância a um ponto fixo, chamado o foco, é igual à distância a uma reta fixa, chamada a diretriz. Cada uma destas cônicas tem uma definição particular, entretanto as cônicas podem ser definidas de uma forma única como:

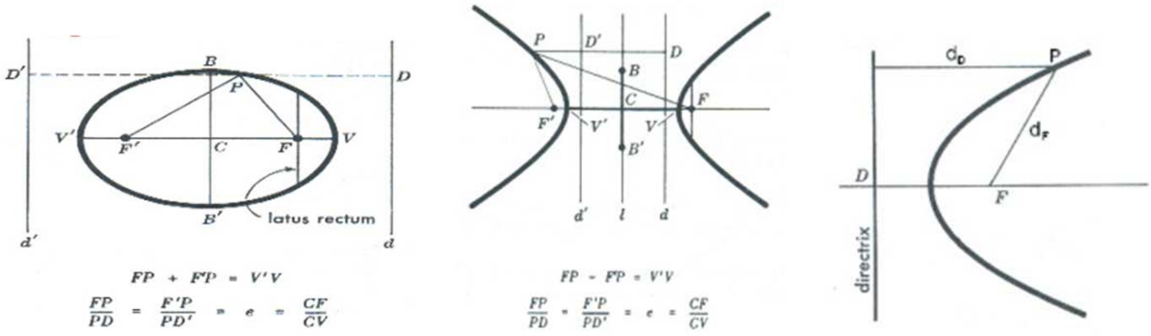
Definição 4.1 *A cônica é uma curva na qual o lugar geométrico dos pontos que se movimentam de modo que, a taxa de sua distância a um ponto fixo e sua distância a uma reta fixa é uma constante. A taxa constante é a excentricidade* e*, o ponto fixo é o foco* F*, e a reta fixa é a diretriz* d *da cônica. Segundo o valor da excentricidade* e *(ver Figura 4.1), dizemos que a cônica é:*

a) *uma elipse, se* $0 < e < 1$*,*

b *uma hipérbole, se* $e > 1$*,*

c) *uma parábola, se* $e = 1$*.*

Para determinar a excentricidade segundo a Definição 4.1, vamos considerar primeiro as cônicas na sua forma padrão, e a seguir o caso geral de uma equação quadrática. Como a excentricidade da parábola é constante $e = 1$, no que segue consideramos as cônicas centrais, isto é, a elipse e a hipérbole.



(a) Elipse: $0 < e < 1$ (b) Hipérbole: $e > 1$ (c) Parábola: $e = 1$

Figura 4.1: As cônicas definidas segundo a sua excentricidade

4.1 Excentricidade da cônica na forma padrão

Consideremos a elipse da Figura 4.2 [2]. Nesta figura temos, $OA = a$, $OB = b$, $OF = c$ e $AE = d$.

Pela definição da excentricidade,

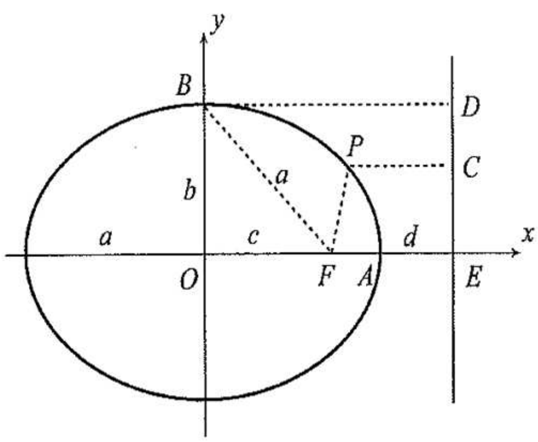


Figura 4.2: Elipse

$$e = \frac{BF}{BD} = \frac{AF}{AE}.$$

Como $BF = a$, $BD = a + d$, $AF = a - c$ e $AE = d$, então

$$e = \frac{a}{a+d} = \frac{a-c}{d}$$

Das propriedades das frações, temos

$$e = \frac{a-(a-c)}{a+d-d}$$

Portanto, a excentricidade da elipse é calculada por,

$$e = \frac{c}{a} \tag{4.1}$$

onde, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ e os valores a e b definem a equação da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De modo análogo, a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

tem excentricidade

$$e = \frac{c}{a}$$

onde, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Neste caso a é o raio mínimo da hipérbole, isto é, a é a menor distância do centro da hipérbole aos pontos da hipérbole.

4.2 Excentricidade da cônica no caso geral

Consideremos a equação geral da cônica 3.1, mas para evitar confusão com a terminologia da cônica padrão escrevemos esta equação como:

$$fx^2 + 2gxy + hy^2 + 2kx + 2ly + m = 0. \tag{4.2}$$

Logo, se

$$\Delta = \begin{vmatrix} f & g & k \\ g & h & l \\ k & l & m \end{vmatrix}.$$

Se $fh - g^2 \neq 0$, então 4.2 pode ser escrita como:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2} = 0, \tag{4.3}$$

onde, λ_1 e λ_2 são as raízes da equação característica:

$$\begin{vmatrix} f - \lambda & g \\ g & h - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (f + h)\lambda + (fh - g^2) = 0.$$

Para esta equação se verifica,

a) Suas raízes são:

$$\frac{(f+h) \pm \sqrt{(f+h)^2 - 4(fh-g^2)}}{2} \tag{4.4}$$

b) Soma das raízes:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = f + h \tag{4.5}$$

c) Produto das raízes:

$$\lambda_1 \, \lambda_2 = fh - g^2 \tag{4.6}$$

d) Quando $x = 0$ e $y = 0$ em 4.3, temos que os quadrados dos raios ao longo dos eixos principais são: $-\dfrac{\Delta}{\lambda_1^2\lambda_2}$ e $-\dfrac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^2}$.

Para calcular a excentricidade da cônica dada por 4.2, devemos ter em conta as diferentes possibilidades de $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$ e o sinal de Δ, totalizando oito casos.

4.2.1 Caso: $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\Delta < 0$ e $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$

Como $\lambda_1\lambda_2 > 0$ temos uma elipse e de $\Delta < 0$ e $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ resulta:

$$-\frac{\Delta}{\lambda_1^2\lambda_2} > -\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^2} > 0.$$

Fazendo,

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1^2\lambda_2}, \qquad b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^2},$$

temos em particular que

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Escrevemos 4.3 como:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1,$$

a qual representa uma elipse com excentricidade

$$e = \frac{c}{a}, \qquad \text{onde} \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

Logo,

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2}}. \tag{4.7}$$

Para escrever a excentricidade, em termos dos coeficientes da quadrática, vamos escrever 4.7 em termos da soma e o produto dos autovalores. Para isto, observe que como $\lambda_2 > \lambda_1$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \sqrt{(\lambda_2 + \lambda_1)^2 - 4\lambda_2\lambda_1}$$

Substituindo em 4.7 temos que

$$e = \sqrt{\frac{\sqrt{(\lambda_2 + \lambda_1)^2 - 4\lambda_2\lambda_1}}{\lambda_2}}. \tag{4.8}$$

Como λ_2 é a maior raiz, temos de 4.4,

$$\lambda_2 = \frac{(f+h) + \sqrt{(f+h)^2 - 4(fh - g^2)}}{2}. \tag{4.9}$$

Substituindo 4.9, 4.5 e 4.6 em 4.8 resulta,

$$e = \sqrt{\frac{2\sqrt{(f+h)^2 - 4(fh-g^2)}}{(f+h) + \sqrt{(f+h)^2 - 4(fh-g^2)}}}.$$

Simplificando os radicandos obtem-se a excentricidade em função dos termos da equação quadrática 4.2:

$$e = \sqrt{\frac{2\sqrt{(f-h)^2 + 4g^2}}{(f+h) + \sqrt{(f-h)^2 + 4g^2}}} \tag{4.10}$$

4.2.2 Caso: $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\Delta > 0$ e $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

Como $\lambda_1\lambda_2 > 0$ temos novamente uma elipse e de $\Delta > 0$ e $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ resulta:

$$-\frac{\Delta}{\lambda_1^2\lambda_2} > -\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^2} > 0.$$

Fazendo,

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1^2\lambda_2}, \qquad b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^2},$$

temos em particular que

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Escrevemos 4.3 como:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1,$$

a qual representa uma elipse com excentricidade

$$e = \frac{c}{a}, \qquad \text{onde} \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

Logo,

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{-\lambda_2}}. \tag{4.11}$$

Para escrever a excentricidade, em termos dos coeficientes da quadrática, vamos escrever 4.11 em termos da soma e o produto dos autovalores. Para isto, observe que como $\lambda_2 <$ $\lambda_1 < 0$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{(\lambda_2 + \lambda_1)^2 - 4\lambda_2\lambda_1}$$

Substituindo em 4.11 temos que

$$e = \sqrt{\frac{\sqrt{(\lambda_2 + \lambda_1)^2 - 4\lambda_2\lambda_1}}{-\lambda_2}}. \tag{4.12}$$

Como λ_2 é a menor raiz, temos de 4.4,

$$\lambda_2 = \frac{(f+h) - \sqrt{(f+h)^2 - 4(fh - g^2)}}{2}. \tag{4.13}$$

Substituindo 4.13, 4.5 e 4.6 em 4.12 resulta,

$$e = \sqrt{\frac{2\sqrt{(f+h)^2 - 4(fh - g^2)}}{-(f+h) + \sqrt{(f+h)^2 - 4(fh - g^2)}}}.$$

Simplificando os radicandos obtem-se a excentricidade em função dos termos da equação quadrática 4.2:

$$e = \sqrt{\frac{2\sqrt{(f-h)^2 + 4g^2}}{-(f+h) + \sqrt{(f-h)^2 + 4g^2}}} \tag{4.14}$$

4.2.3 Casos: $(\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$ e $\Delta < 0)$ ou $(\ \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$ e $\Delta > 0)$

Nestes casos, temos que $\lambda_1\lambda_2 > 0$ e alem mais,

$$-\frac{\Delta}{\lambda_1^2\lambda_2} < 0 \qquad \text{e} \qquad -\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^2} < 0.$$

Logo, a equação 4.3 é inconsistente. Temos portanto uma elipse imaginária.

4.2.4 Caso: $\lambda_1\lambda_2 < 0,\ \Delta > 0$ e $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$

Como $\lambda_1\lambda_2 < 0$ temos uma hipérbole e de $\Delta > 0$ e $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ resulta:

$$-\frac{\Delta}{\lambda_1^2\lambda_2} > 0 \qquad \text{e} \qquad -\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^2} < 0.$$

Fazendo,

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1^2\lambda_2}, \qquad -b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^2},$$

temos em particular que

$$\frac{b^2}{a^2} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Escrevemos 4.3 como:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1,$$

a qual representa uma elipse com excentricidade

$$e = \frac{c}{a}, \qquad \text{onde} \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Logo,

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{-\lambda_2}}. \tag{4.15}$$

Para escrever a excentricidade, em termos dos coeficientes da quadrática, vamos escrever 4.15 em termos da soma e o produto dos autovalores. Para isto, observe que como $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_1)^2 - 4\lambda_1\lambda_2}$$

Substituindo em 4.15 temos que

$$e = \sqrt{\frac{\sqrt{(\lambda_2 + \lambda_1)^2 - 4\lambda_2\lambda_1}}{-\lambda_2}}. \tag{4.16}$$

Como λ_2 é a menor raiz, temos de 4.4,

$$\lambda_2 = \frac{(f + h) - \sqrt{(f + h)^2 - 4(fh - g^2)}}{2}. \tag{4.17}$$

Substituindo 4.17, 4.5 e 4.6 em 4.16 resulta,

$$e = \sqrt{\frac{2\sqrt{(f + h)^2 - 4(fh - g^2)}}{-(f + h) + \sqrt{(f + h)^2 - 4(fh - g^2)}}}.$$

Simplificando os radicandos obtem-se a excentricidade em função dos termos da equação quadrática 4.2:

$$e = \sqrt{\frac{2\sqrt{(f - h)^2 + 4g^2}}{-(f + h) + \sqrt{(f - h)^2 + 4g^2}}} \tag{4.18}$$

Este resultado também é verdadeiro se $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ e $\Delta > 0$.

4.2.5 Caso: $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $\Delta < 0$ e $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

Como $\lambda_1\lambda_2 < 0$ temos uma hipérbole e de $\Delta < 0$ e $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ resulta:

$$-\frac{\Delta}{\lambda_1^2\lambda_2} < 0 \qquad \text{e} \qquad -\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^2} > 0.$$

Fazendo,

$$-b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1^2\lambda_2}, \qquad a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^2},$$

temos em particular que

$$\frac{b^2}{a^2} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Escrevemos 4.3 como:

$$\frac{y''^2}{a^2} - \frac{x''^2}{b^2} = 1,$$

a qual representa uma elipse com excentricidade

$$e = \frac{c}{a}, \qquad \text{onde} \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Logo,

$$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1}}. \tag{4.19}$$

Para escrever a excentricidade, em termos dos coeficientes da quadrática, vamos escrever 4.19 em termos da soma e o produto dos autovalores. Para isto, observe que como $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{(\lambda_1+\lambda_1)^2 - 4\lambda_1\lambda_2}$$

Substituindo em 4.19 temos que

$$e = \sqrt{\frac{\sqrt{(\lambda_2+\lambda_1)^2 - 4\lambda_2\lambda_1}}{\lambda_1}}. \tag{4.20}$$

Como λ_1 é a maior raiz, temos de 4.4,

$$\lambda_1 = \frac{(f+h)+\sqrt{(f+h)^2-4(fh-g^2)}}{2}. \tag{4.21}$$

Substituindo 4.21, 4.5 e 4.6 em 4.20 resulta,

$$e = \sqrt{\frac{2\sqrt{(f+h)^2-4(fh-g^2)}}{(f+h)+\sqrt{(f+h)^2-4(fh-g^2)}}}.$$

Simplificando os radicandos obtem-se a excentricidade em função dos termos da equação quadrática 4.2:

$$e = \sqrt{\frac{2\sqrt{(f-h)^2+4g^2}}{(f+h)+\sqrt{(f-h)^2+4g^2}}} \tag{4.22}$$

Obtemos o mesmo resultado se $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ e $\Delta < 0$.

Os resultados das excentricidades podem ser resumidos no seguinte teorema:

Teorema 4.1 *Se $fh - g^2 \neq 0$, $fx^2 + 2gxy + hy^2 + 2kx + 2ly + m = 0$ representa uma seção cônica central cuja excentricidade é*

$$e = \sqrt{\frac{2\sqrt{(f-h)^2 + 4g^2}}{\pm(f+h) + \sqrt{(f-h)^2 + 4g^2}}} \tag{4.23}$$

Onde o sinal $(+)$ é escolhido quando $\Delta\ < 0$ e o sinal $(-)$ quando $\triangle\ > 0$. Se, entretanto, $fh - g^2 = 0$ e $\Delta\ \neq 0$, a equação representa uma parábola e, portanto, sua excentricidade é $e = 1$.

A excentricidade é uma das invariantes de uma seção cônica. Isto é, a excentricidade não muda quando a cônica passa por qualquer transformação isométrica.

Capítulo 5

Análise da excentricidade de uma cônica

Neste capítulo apresentamos o cálculo da excentricidade para várias equações quádraticas. Primeiro apresentamos o cálculo pelo método do Teorema 4.1 e depois pelo método de translação e rotação da cônica. O grau de dificuldade é muito menor quando usamos o Teorema 4.1.

1. Consideramos a equação quadrática do exemplo 3.1:

   $$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 12x - 16y - 12 = 0.$$

   Comparando com a equação geral 4.2:

   $$fx^2 + 2gxy + hy^2 + 2kx + 2ly + m = 0$$

   temos $f = 17,\ \ g = -6,\ \ h = 8,\ \ k = 6,\ \ l = -8,\ \ m = -12$. Além mais,

   $$\Delta = \begin{vmatrix} 17 & -6 & 6 \\ -6 & 8 & -8 \\ 6 & -8 & -12 \end{vmatrix} = -2000$$

   Substituindo estes valores na equação 4.23 e considerando que $\Delta < 0$ temos:

   $$e = \sqrt{\frac{2\sqrt{(17-8)^2 + 4(-6)^2}}{(17+8) + \sqrt{(17-8)^2 + 4(-6)^2}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15}{25 + 15}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

   resultado idêntico ao obtido no exemplo 3.1. Como $0 < e < 1$ a cônica é uma elipse.

2. Analisamos a excentricidade da cônica representada pela equação quadrática

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$$

Comparando com a equação geral 4.2:

$$fx^2 + 2gxy + hy^2 + 2kx + 2ly + m = 0$$

temos $f = 3, \;\; g = -1, \;\; h = 3, \;\; k = 1, \;\; l = -2, \;\; m = 1$. Além mais,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Substituindo estes valores na equação 4.23 e considerando que $\Delta < 0$ e $fg - h^2 = 8 > 0$ temos:

$$e = \sqrt{\frac{2\sqrt{(3-3)^2 + 4(-1)^2}}{(3+3) + \sqrt{(3-3)^2 + 4(-1)^2}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{6+2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sim 0,7,$$

Como $0 < e < 1$ a cônica é uma elipse. Na Figura 5.1 se mostra o gráfico da elipse.

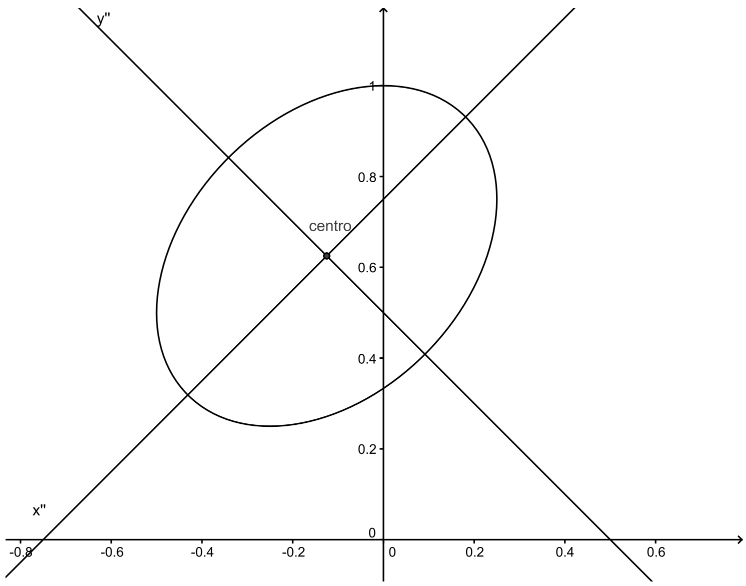


Figura 5.1: Equação quadrática: $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

Vamos calcular agora a excentricidade usando translações e rotações. Como

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \\ C &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8\end{aligned}$$

Como $C = fg - h^2 > 0$, temos que a quadrática representa uma elipse.

Para o cálculo dos autovalores resolvemos a seguinte equação,

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0,$$

a qual resulta na equação,

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

com raízes $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$.

Substituindo estes valores em 3.14, obtemos a forma canônica,

$$4x''^2 + 2y''^2 + \frac{-3}{8} = 0,$$

ou

$$\frac{x''^2}{\frac{3}{32}} + \frac{y''^2}{\frac{3}{16}} = 1.$$

Para calcular o centro derivamos 3.16 em relação a x e y:

$$\begin{aligned} 6x - 2y + 2 &= 0 \\ -2x + 6y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução é o centro $(x_0, y_0) = (-\frac{1}{8}, \frac{5}{8})$.

Os coeficientes angulares dos eixos principais são calculados por,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\lambda_1 - f}{g} = \frac{4-3}{-1} = -1 \\ m_2 &= \frac{\lambda_2 - f}{g} = \frac{2-3}{-1} = 1 \end{aligned}$$

Como conhecemos o centro $(x_0, y_0) = (0, 1)$ e os coeficientes angulares $m_1 = -1$ e $m_2 = 1$, determinamos a equação dos eixos principais por,

$$\begin{aligned} y - \frac{5}{8} &= -(x + \frac{1}{8}) \\ y - \frac{5}{8} &= (x + \frac{1}{8}). \end{aligned}$$

Como temos uma elipse, resulta

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \\
b &= \sqrt{\frac{3}{32}} = \frac{\sqrt{6}}{8} \\
c &= \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{3}{16} - \frac{3}{32}} = \sqrt{\frac{3}{32}}.
\end{aligned}$$

Logo, a excentricidade é:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{\frac{3}{32}}{\frac{3}{16}}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

resultado similar ao obtido com o obtido usando a equação 4.23. Neste caso precisamos calcular a forma padrão da cônica para identificar os termos a e c para o cálculo da excentricidade. Isto não é necessário no cálculo da excentricidade segundo a equação 4.23.

3. Analisamos a excentricidade da cônica representada pela equação quadrática

$$x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 4y - 3 = 0.$$

Comparando com a equação geral 4.2:

$$fx^2 + 2gxy + hy^2 + 2kx + 2ly + m = 0$$

temos $f = 1, \;\; g = 1, \;\; h = -1, \;\; k = -3, \;\; l = 2, \;\; m = -3$. Além mais,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

Substituindo estes valores na equação 4.23 e considerando que $\Delta < 0$ e $fg - h^2 = -2 < 0$ temos:

$$e = \sqrt{\frac{2\sqrt{(1-(-1))^2 + 4(1)^2}}{(1-1) + \sqrt{(1-(-1))^2 + 4(1)^2}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{8}}} = \sqrt{2} \sim 1,4142,$$

Como $e > 1$ a cônica é uma hipérbole. Na Figura 5.2 se mostra o gráfico da hipérbole.

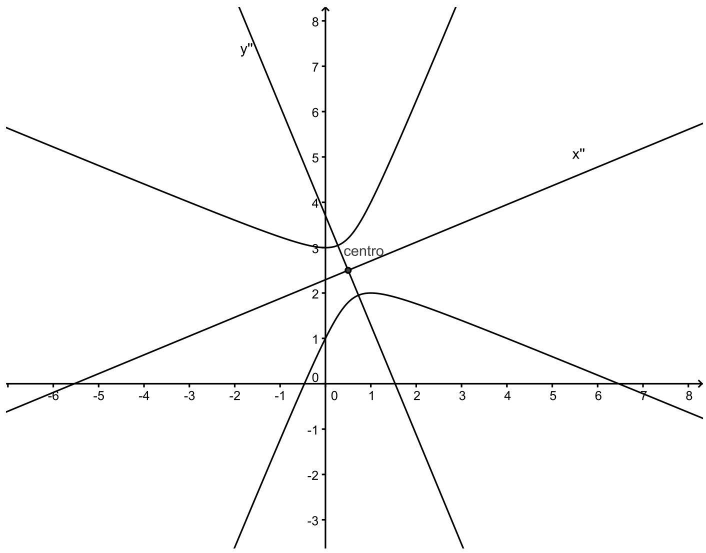


Figura 5.2: Equação quadrática: $x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

Vamos calcular agora a excentricidade usando translações e rotações. Como

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

Como $C = fh - g^2 = 1 \cdot (-1) - 1^2 = -2 < 0$, temos que a quadrática é do tipo hipérbolico.

Para o cálculo dos autovalores resolvemos a seguinte equação,

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

a qual resulta na equação,

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

com raízes $\lambda_1 = \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

Substituindo estes valores em 3.14, obtemos a forma canônica,

$$\sqrt{2}x''^2 - \sqrt{2}y''^2 + \frac{-1}{-2} = 0,$$

ou

$$\frac{x''^2}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} - \frac{y''^2}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = 1.$$

Para calcular o centro derivamos 3.16 em relação a x e y:

$$\begin{aligned} 2x + 2y - 6 &= 0 \\ 2x - 2y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução é o centro $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.

Os coeficientes angulares dos eixos principais são calculados por,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\lambda_1 - f}{g} = \frac{\sqrt{2} - 1}{1} = \sqrt{2} - 1 \\ m_2 &= \frac{\lambda_2 - f}{g} = \frac{-\sqrt{2} - 1}{1} = -\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

Como conhecemos o centro $(x_0, y_0) = (0, 1)$ e os coeficientes angulares $m_1 = \sqrt{2} - 1$ e $m_2 = -\sqrt{2} - 1$, determinamos a equação dos eixos principais por,

$$\begin{aligned} y - \frac{5}{2} &= (\sqrt{2} - 1)(x - \frac{1}{2}) \\ y - \frac{5}{2} &= (-\sqrt{2} - 1)(x - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Como temos uma hipérbole, resulta

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \\ b &= \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \\ c &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Logo, a excentricidade é:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}} = \sqrt{2},$$

resultado similar ao obtido com o obtido usando a equação 4.23.

4. Analisamos a excentricidade da cônica representada pela equação quadrática

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0.$$

Comparando com a equação geral 4.2:

$$fx^2 + 2gxy + hy^2 + 2kx + 2ly + m = 0$$

temos $f = 1, \;\; g = -1, \;\; h = 1, \;\; k = 2, \;\; l = -3, \;\; m = 1$. Além mais,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Como $fh - g^2 = 1 \cdot 1 - (-1)^2 = 0$ e $\Delta \neq 0$, pelo Teorema 4.1 temos que a equação quadrática representa uma parábola e portanto sua excentricidade é igual a $e = 1$.

Ainda conhecendo que a excentricidade é $e = 1$, podemos testar a equação 4.23. Substituindo estes valores na equação 4.23 e considerando que $\Delta < 0$ temos:

$$e = \sqrt{\frac{2\sqrt{(1-1))^2 + 4(-1)^2}}{(1+1) + \sqrt{(1-1)^2 + 4(-1)^2}}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{4}}{2+\sqrt{4}}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1.$$

Como $e = 1$ verificamos segundo a equação 4.23 que a cônica é uma parábola. Na Figura 5.3 se mostra o gráfico da parábola.

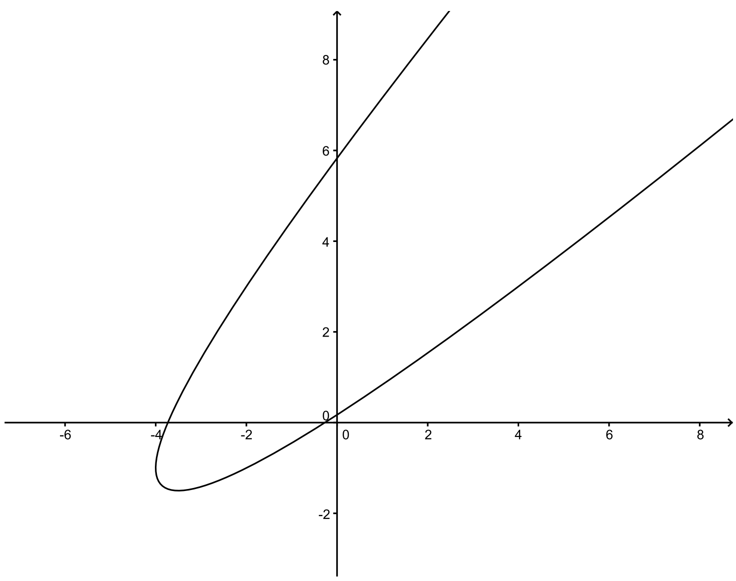


Figura 5.3: Equação quadrática: $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$

5. Analisamos a excentricidade da cônica representada pela equação quadrática

$$x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0.$$

Comparando com a equação geral 4.2:

$$fx^2 + 2gxy + hy^2 + 2kx + 2ly + m = 0$$

temos $f = 1, \;\; g = 0, \;\; h = 1, \;\; k = 1, \;\; l = 0, \;\; m = 1$. Além mais,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Como $fg - h^2 = 1 \cdot 1 - 0^2 = 1 \neq 0$ e $\Delta = 0$ temos uma cônica degenerada. Completando quadrados na equação quadrática temos,

$$(x+1)^2 + y^2 = 0$$

cuja solução é o ponto $P(-1, 0)$, como mostra a Figura 5.4.

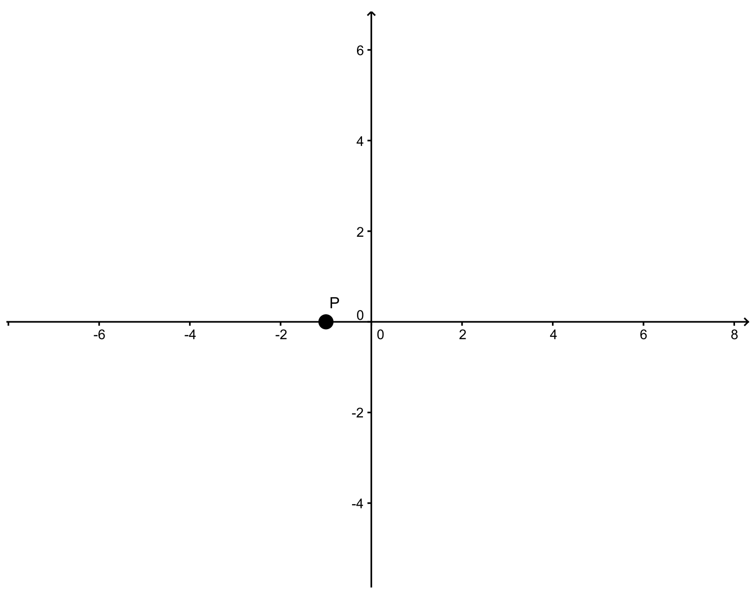


Figura 5.4: Equação quadrática: $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$

6. Analisamos a excentricidade da cônica representada pela equação quadrática

$$x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 5y - 3 = 0.$$

Comparando com a equação geral 4.2:

$$fx^2 + 2gxy + hy^2 + 2kx + 2ly + m = 0$$

temos $f = 1$, $g = \dfrac{3}{2}$, $h = 2$, $k = 1$, $l = \dfrac{5}{2}$, $m = -3$. Além mais,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} & -3 \end{vmatrix} = -1$$

Como $fg - h^2 = 1 \cdot 2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\dfrac{1}{4} \neq 0$ temos uma curva de tipo hipérbolico, mais como $\Delta = 0$ temos uma cônica degenerada. A Figura 5.5 mostra que a curva são duas retas que se cortam.

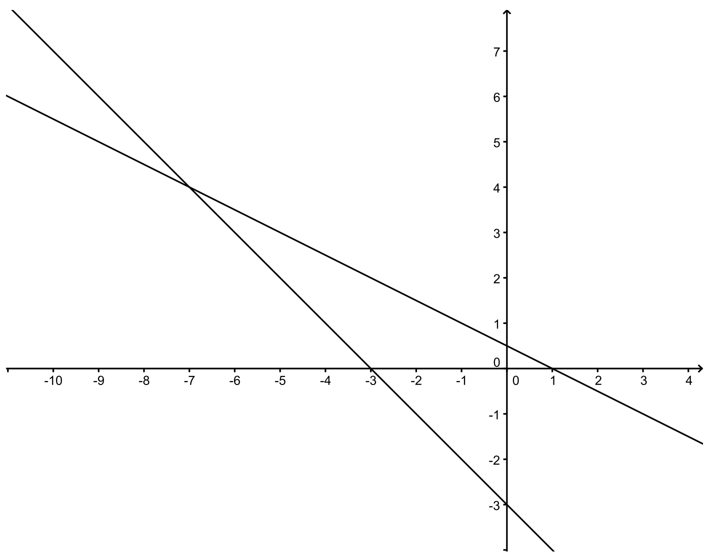


Figura 5.5: Equação quadrática: $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$

Considerações Finais

Neste trabalho de Conclusão de Curso apresentamos uma descrição das cônicas com duas formulações. Na primeira formulação foi definida cada cônica segundo uma propriedade particular: a elipse definida como a soma constante das distâncias a dois focos, a hipérbole definida como a diferença constante das distâncias a dois focos, e a parábola como a igualdade das distâncias ao foco e diretriz.

Na segunda formulação definimos uma cônica como a razão constantes entre as distâncias do foco e diretriz. Esta constante sendo a excentricidade e. Se $0 < e < 1$ temos uma elipse, se $e > 1$ temos uma hipérbole e se $e = 1$ temos uma parábola. A importância da excentricidade é evidente com esta formulação, pois através dela se definem as cônicas.

Com esta definição, mostramos que a excentricidade é calculada como $e = \dfrac{c}{a}$ quando a cônica está na forma padrão. Para o caso geral desenvolvemos o cálculo da excentricidade por meio de translações e rotações, o qual é o método clássico. Em adição foi desenvolvida a teoria completa para as translações e rotações, calculando o centro e os eixos principais das cônicas.

Com base nos trabalhos de Ayoub [1, 4, 2] desenvolvemos o cálculo direto da excentricidade a partir dos coeficientes da equação quadrática geral. Neste caso não é necessário transformar a equação por rotação e/ou translação,nem identificar os eixos principais ou distância aos focos ou diretriz. O número de operações é muito menor que o método clássico.

Observamos que o cálculo da excentricidade não é fornecido ou muitas vezes mal calculado pelos softwares de geometria dinâmica. O método direto apresentado neste trabalho para o cálculo da excentricidade é fácil de calcular e de implementar computacionalmente em qualquer software de geometria dinâmica.

Este método direto é uma alternativa para o ensino da excentricidade no ensino médio pois não precisa do conceito de autovalor ou autovetor, nem rotação ou translação.

Referências Bibliográficas

[1] AYOUB, Ayoub, B. *The director circle of a central conic section*. Mathematics and Computer Education; Spring 2007; Vol 41, Nº 2, 2007.

[2] AYOUB, Ayoub B. *The Eccentricity of a Conic Section*. The Mathematical Association of América, Vol. 34, Nº 2, pp 116-121, 2003.

[3] LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítiva e Álgebra Linear*. 3ª ed. Coleção Matemática Universitária. Ed. IMPA. Rio de Janeiro - 1999.

[4] AYOUB, Ayoub B. *The Central Conic Sections Revisited*. Mathematics Magazine, Vol. 66, Nº 5, pp 116-121, 1993.

[5] GOLOVINA, L.I. *Algebra Lineal y Algunas de sus Aplicaciones*. Editorial MIR, 1986.

[6] *www.fsato.prof.ufu.br/conicas/node2.html.*

[7] *www.slideshare.net/isj/conicas-hoje.*

[8] *www.mat.uel.br/geometria/artigos/PA-21-TC.pdf.*

[9] *www.lia.ufc.br/ rafaelstv/gc/cq.pdf.*

[10] *http://mathematikos.psico.ufrgs.br/disciplinas/ufrgs/mat01039032/ webfolios/grupo1/analitica/hiperbole.html.*