MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ – UNIFAP

COLEGIADO DO CURSO DE MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

ORIVALDO NAZARENO MONTEIRO DE ATAIDE

UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA DE PONTOS, RETAS E POLÍGONOS NA GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

MACAPÁ/AP

2010

ORIVALDO NAZARENO MONTEIRO DE ATAIDE

UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA DE PONTOS, RETAS E POLÍGONOS NA GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora do Colegiado do Curso de Licenciatura Plena em Matemática – Área de Matemática, da Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado Pleno em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco

MACAPÁ/AP

2010

ORIVALDO NAZARENO MONTEIRO DE ATAIDE

UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA DE PONTOS, RETAS E POLÍGONOS NA GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

Trabalho final de graduação apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática – Área de Matemática, da Universidade Federal do Amapá, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado Pleno em Matemática.

Aprovado em 10 de dezembro de 2011.

Componentes da banca examinadora:

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco – Orientador (UNIFAP)

Steve Wanderson Calheiros de Araújo (UNIFAP)

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil (UNIFAP)

MACAPÁ/AP

2010

A meu pai, Orivaldo Nazareno de Ataide, pelos valores morais e modelo de dedicação à família, a minha mãe, Irene Moraes Monteiro, por nunca deixar de me apoiar, pela vontade de vencer e de se manter sempre de pé. A meus amados irmãos. A meu orientador Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco, pelas lições ensinadas em sala de aula e pela atenção fora dela.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco, pela confiança e especial dedicação.

Aos professores Dr. José Walter Cárdenas Sotil e Steve Wanderson Calheiros de Araújo por aceitarem avaliar este trabalho, pela valiosa contribuição ao meu aprendizado e por acreditarem no meu potencial.

Aos grandes amigos presentes e ausentes.

E, principalmente, a todos os homens e mulheres que ajudaram a construir a Matemática, uma disciplina maravilhosa que me ajudou a encontrar o caminho da luz; sem a Matemática minha vida seria um completo vazio; ela foi meu ombro amigo, quando ninguém mais acreditava em mim, e minhas lágrimas eram apenas corpos em queda livre; ela foi minha voz quando eu não podia fala; e foi meus olhos quando eu não conseguia ver; hoje, só sinto o mundo por seus teoremas e equações. Tudo que sou e tudo que tenho devo a ela. Amo a Matemática tal como a meus pais.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3,4, ...\}$ - Conjunto dos números naturais

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3,4, ...\}$ - Conjunto dos números naturais não-nulos

$\mathbb{R}$ - Conjunto dos números reais

$\mathbb{R}^2$ - Espaço euclidiano 2-dimensional, conjunto dos pares ordenados de componentes reais

$\mathbb{N}/\{0\} = \mathbb{N}^*$

$\mathbb{R}/\{0\}$ – conjunto dos números reais não-nulos

(x, y) – Par ordenado, cujas componentes são x e y

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ - função real

$\therefore$ - portanto

$\|$ - paralelo a

$\blacksquare$ - final de prova

GRÁFICOS

Resumo

Este trabalho apresenta uma forma alternativa para se representar pontos, retas e polígonos através de coordenadas cartesianas, denominada de *dispositivo de coordenadas cartesianas*. Ela permitirá determinar equações de retas, bem como calcular áreas de polígonos usando-se as coordenadas de seus vértices. A aplicação desse dispositivo possibilita uma redução no uso de fórmulas para os cálculos feitos para se encontrar equações de retas e áreas de polígonos. Assim, a utilização de tal dispositivo trará benefícios para professores e estudantes de Geometria Analítica Plana, pois ele fornece um desenvolvimento mental muito simples.

Palavras-chave: Pontos. Retas. Polígonos. Áreas de Polígonos. Dispositivo de Pontos.

Abstract

This paper presents an alternative way to represent points, lines and polygons using Cartesian coordinates, called device Cartesian coordinates. It will determine equations of straight lines, as well as calculate areas of polygons using the coordinates of its vertices. The application of this device allows a reduction in the use of formulas for the calculations to find equations of straight lines and areas of polygons. Thus, the use of such devices will benefit teachers and students of Analytical Geometry Plana, because it provides a very simple mental development.

Keywords: Points. Straights. Polygons. Areas of Polygons. Device Points.

Sumário

1. Introdução

A Matemática sempre foi vista, pela grande maioria dos estudantes, como um monstro difícil de ser abatido; alguns até dizem que é um bicho-de-sete-cabeças. Há alguns casos de traumas de ordem psíquica causados por esta disciplina. Contudo, há casos de amor e paixão, representando puras exceções. De qualquer forma, percebe-se claramente que há muito que se fazer para tornar a matéria em algo mais simples.

Em busca dessa simplicidade, esta monografia foi construída. Essa construção se assentou em novos resultados; os quais foram encontrados devido à criação de algumas definições, o que produziu a descoberta de alguns teoremas. Tudo isso foi feito com o intuito exclusivo de se produzir uma alternativa para a abordagem de pontos, retas e polígonos; oferecendo aos estudantes da Geometria Analítica Plana uma ferramenta mais simples para a resolução de problemas.

Por essa proposta de monografia, surge, obviamente, a necessidade intrínseca da criação de idéias novas, acarretando a construção de alguns teoremas. Assim, pode-se dizer que este trabalho é uma “Tese de Graduação”.

Pelos aspectos apresentados, esta pesquisa não se trata de uma simples repetição de idéias recolhidas de vários autores. Ela, portanto, pretende evitar a cópia de textos de vários escritores, possibilitando que seu autor transforme o saber científico, obtido nas aulas de disciplinas específicas do Curso de Matemática, em um saber prático, em que se desenvolvem competências que lhe serão úteis no seu futuro exercício da docência nas escolas de ensino básico.

Tendo-se, dessa forma, a noção exata de que os conhecimentos adquiridos em Geometria Analítica Plana precisam ser reconstruídos para que os trabalhos com os nossos futuros alunos da educação básica possam fluir melhor, propõe-se esta monografia, de cunho científico e investigativo, para discussão pela comunidade acadêmica sobre sua possível aplicação nas escolas de ensino básico. Essa proposta se apresenta dividida em cinco partes principais.

A primeira parte expõe a essência do trabalho: *o dispositivo de coordenadas cartesianas*. Nela, demonstra-se a **condição de colinearidade de pontos**. Além disso, nessa parte do trabalho, temos a criação de conceitos novos, com a construção de definições e teoremas.

A segunda parte exibe as definições de eixos orientados e a forma de se representar polígonos planos, através das coordenadas de seus vértices. Temos para esta parte da pesquisa, uma primeira aplicação do *dispositivo de coordenadas cartesianas*.

A terceira parte destaca a construção do *dispositivo* para retas paralelas não coincidentes e retas concorrentes. Nesse momento, aparece o primeiro teorema de alcance inovador: *o teorema das colunas alternadas para retas paralelas*.

A quarta parte apresenta um dos mais importantes teoremas desta monografia: *o teorema das áreas de polígonos*. Tal teorema tem grande importância, porque é responsável por uma substancial simplificação dos cálculos de áreas de polígonos, quando em comparação com os métodos atualmente praticados.

Na quinta e última parte, mostramos a validade do *dispositivo* para outros tópicos da Matemática e da Física, comprovando que conhecidas fórmulas destas duas disciplinas podem ser encontradas por esse *dispositivo*. Alem disso, sugerimos que esse *dispositivo* possa ser objeto de estudo e pesquisa para futuras outras aplicações.

Capítulo 1

Pontos Colineares

1.1 Dispositivo de coordenadas cartesianas

Uma função afim $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, é representada, graficamente, por uma reta. Assim, podemos dizer que $y = ax + b$ é uma reta. Seja $A_i = (x_i, y_i)$, com $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, um ponto qualquer da reta $r: y = ax + b$; o índice i representa tão-somente a ordem de colocação do ponto A_i no dispositivo seguinte.

Vamos dispor as coordenadas de um ponto dessa reta em uma coluna, como a formada abaixo.

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

Agora, consideremos a organização em colunas das coordenadas de n pontos quaisquer da reta r dada acima.

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_{i-1} & x_i & \ldots & x_{n-2} & x_{n-1} & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_{i-1} & y_i & \ldots & y_{n-2} & y_{n-1} & y_n & y_1 \end{matrix}$$

A essa forma de organização chamaremos ***dispositivo de coordenadas cartesianas***. Nesse dispositivo, x_i representa o valor de x na coluna de ordem i. Analogamente, y_i representa o valor de y na coluna de ordem i. Tal ordem se estabelece em sentido crescente da esquerda para a direita, com exceção da última coluna, que é uma mera repetição da primeira.

Definição 1.1.1 Seja um dispositivo de coordenadas cartesianas para n pontos de uma reta. Sejam também P_1 o somatório dos ***produtos primários*** e P_2 o somatório dos ***produtos secundários,*** definidos por:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 & \cdots & x_{i-1} & & x_i & \cdots & x_{n-2} & & x_{n-1} & & x_n & & x_1 \\ & \searrow & & \searrow & & & & \searrow & & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ y_1 & & y_2 & & y_3 & \cdots & y_{i-1} & & y_i & \cdots & y_{n-2} & & y_{n-1} & & y_n & & y_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + \cdots + x_{i-1} \cdot y_i + \cdots + x_{n-2} \cdot y_{n-1} + x_{n-1} \cdot y_n + x_n \cdot y_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 & \cdots & x_{i-1} & & x_i & \cdots & x_{n-2} & & x_{n-1} & & x_n & & x_1 \\ & \swarrow & & \swarrow & & & & \swarrow & & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ y_1 & & y_2 & & y_3 & \cdots & y_{i-1} & & y_i & \cdots & y_{n-2} & & y_{n-1} & & y_n & & y_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_2 + \cdots + x_i \cdot y_{i-1} + \cdots + x_{n-1} \cdot y_{n-2} + x_n \cdot y_{n-1} + x_1 \cdot y_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} y_i + x_1 y_n \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Em que i representa a posição de cada coluna no dispositivo, seguindo-se em ordem crescente, no dispositivo, da esquerda para direita, com exceção da última coluna, que é uma mera repetição da primeira. As setas que aparecem no dispositivo são estritamente ilustrativas, sendo usadas apenas para indicar os fatores de um determinado produto; além disso, na prática, não usaremos essas setas na operacionalização dos cálculos; mas, elas serão úteis em muitas das demonstrações aqui apresentadas.

1.2 Teorema da Colinearidade

Teorema 1.2.1 Para uma mesma reta, o somatório dos produtos primários é igual ao somatório dos produtos secundários.

Demonstração. Como $y = ax + b$, vem: $y_2 = ax_2 + b$, $y_3 = ax_3 + b$, $y_i = ax_i + b$, $y_{n-1} = ax_{n-1} + b$, $y_n = ax_n + b$ e $y_1 = ax_1 + b$.

Dessa forma, substituindo-se estas identidades na equação (1.1.1), temos:

$$\begin{aligned} P_1 = {} & x_1(ax_2 + b) + x_2(ax_3 + b) + \cdots + x_{i-1} \cdot (ax_i + b) + \cdots + x_{n-2}(ax_{n-1} + b) \\ & + x_{n-1}(ax_n + b) + x_n(ax_1 + b) \end{aligned}$$

$$P_1 = ax_1x_2 + bx_1 + ax_2x_3 + bx_2 + \cdots + ax_{i-1}x_i + bx_{i-1} + \cdots + ax_{n-2}x_{n-1} + bx_{n-2} + ax_{n-1}x_n + bx_{n-1} + ax_1x_n + bx_n$$

$$P_1 = a(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{i-1}x_i + \cdots + x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-1}x_n + x_1x_n) + b(x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1} + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) \tag{1.2.1}$$

Sendo ainda $y_{n-2} = ax_{n-2} + b$ e $y_{i-1} = ax_{i-1} + b$.

Desse modo, substituindo-se estas identidades na equação (1.1.2), temos:

$$P_2 = x_2(ax_1 + b) + x_3(ax_2 + b) + \cdots + x_i \cdot (ax_{i-1} + b) + \cdots + x_{n-1}(ax_{n-2} + b) + x_n(ax_{n-1} + b) + x_1(ax_n + b)$$

$$P_2 = ax_1x_2 + bx_2 + ax_2x_3 + bx_3 + \cdots + ax_{i-1}x_i + bx_i + \cdots ax_{n-2}x_{n-1} + bx_{n-1} + ax_{n-1}x_n + bx_n + ax_1x_n + bx_1$$

$$P_2 = a(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{i-1}x_i + \cdots + x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-1}x_n + x_1x_n) + b(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_i + \cdots + x_{n-1} + x_n) \tag{1.2.2}$$

Como a equação (1.2.1) equivale à equação (1.2.2), conclui-se que:

$$\boxed{P_1 = P_2}$$

O que conclui nossa demonstração. ■

Teorema 1.2.2 Para as coordenadas dos pontos de uma mesma reta, permutando-se duas ou mais colunas entre si, o somatório dos produtos primários ainda continuará sendo igual ao somatório dos produtos secundários. Mas, nesse caso, obtêm-se somatórios distintos dos originais.

Demonstração. Seja P_1 tal que:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
x_1 & & x_2 & & x_3 & \cdots & x_{i-1} & & x_i & \cdots & x_{j-1} & & x_j & \cdots & x_{n-1} & & x_n & & x_1 \\
 & \searrow & & \searrow & & & & \searrow & & & & \searrow & & & & \searrow & & \searrow & \\
y_1 & & y_2 & & y_3 & \cdots & y_{i-1} & & y_i & \cdots & y_{j-1} & & y_j & \cdots & y_{n-1} & & y_n & & y_1
\end{array}$$

$$P_1 = x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + \cdots + x_{i-1} \cdot y_i + \cdots + x_{j-1} \cdot y_j + \cdots + x_{n-1} \cdot y_n + x_n \cdot y_1$$

Para $1 < i < j < n$, com $i, j, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Como $y = ax + b$, vem: $y_i = ax_i + b$, $y_{i-1} = ax_{i-1} + b$, $y_j = ax_j + b$, $y_{j-1} = ax_{j-1} + b$, $y_n = ax_n + b$, $y_{n-1} = ax_{n-1} + b$, $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$ e $y_3 = ax_3 + b$.

Dessa forma,

$$P_1 = x_1(ax_2 + b) + x_2(ax_3 + b) + \cdots + x_{i-1}(ax_i + b) + \cdots + x_{j-1}(ax_j + b) + \cdots + x_{n-1}(ax_n + b) + x_n(ax_1 + b)$$

$$P_1 = ax_1x_2 + bx_1 + ax_2x_3 + bx_2 + \cdots + ax_{i-1}x_i + bx_{i-1} + \cdots + ax_{j-1}x_j + bx_{j-1} + \cdots + ax_{n-1}x_n + bx_{n-1} + ax_nx_1 + bx_n$$

$$P_1 = a(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{i-1}x_i + \cdots + x_{j-1}x_j + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) + b(x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1} + \cdots + x_{j-1} + \cdots + x_{n-1} + x_n) \quad (1.2.3)$$

Seja P_2 tal que:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
x_1 & & x_2 & & x_3 & & \cdots & & x_{i-1} & & x_i & & \cdots & & x_{j-1} & & x_j & & \cdots & & x_{n-1} & & x_n & & x_1 \\
 & \swarrow & & \swarrow & & & & & & \swarrow & & & & & & \swarrow & & & & & & \swarrow & & \swarrow & \\
y_1 & & y_2 & & y_3 & & \cdots & & y_{i-1} & & y_i & & \cdots & & y_{j-1} & & y_j & & \cdots & & y_{n-1} & & y_n & & y_1
\end{array}$$

$$P_2 = x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_2 + \cdots + x_i \cdot y_{i-1} + x_j \cdot y_{j-1} + \cdots + x_n \cdot y_{n-1} + x_1 \cdot y_n$$

$$P_2 = x_2(ax_1 + b) + x_3(ax_2 + b) + \cdots + x_i(ax_{i-1} + b) + x_j(ax_{j-1} + b) + \cdots + x_n(ax_{n-1} + b) + x_1(ax_n + b)$$

$$P_2 = ax_1x_2 + bx_2 + ax_2x_3 + bx_3 + \cdots + ax_{i-1}x_i + bx_i + ax_{j-1}x_j + bx_j + \cdots + ax_{n-1}x_n + bx_n + ax_1x_n + bx_1$$

$$P_2 = a(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{i-1}x_i + x_{j-1}x_j + \cdots + x_{n-1}x_n + x_1x_n) + b(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_i + x_j + \cdots + x_n) \quad (1.2.4)$$

Dessa forma, a equação (1.2.3) equivale à equação (1.2.4). Portanto,

$$\boxed{P_1 = P_2}$$

Seja ainda $P_1{}'$ tal que:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
x_1 & & x_2 & & x_3 & & \cdots & & x_{i-1} & & x_j & & \cdots & & x_{j-1} & & x_i & & \cdots & & x_{n-1} & & x_n & & x_1 \\
 & \searrow & & \searrow & & & & & & \searrow & & & & & & \searrow & & & & & & \searrow & & \searrow & \\
y_1 & & y_2 & & y_3 & & \cdots & & y_{i-1} & & y_j & & \cdots & & y_{j-1} & & y_i & & \cdots & & y_{n-1} & & y_n & & y_1
\end{array}$$

$$P_1{}' = x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + \cdots + x_{i-1} \cdot y_j + \cdots + x_{j-1} \cdot y_j + \cdots + x_{n-1} \cdot y_n + x_n \cdot y_1$$

Dessa forma,

$$P_1{}' = x_1(ax_2 + b) + x_2(ax_3 + b) + \cdots + x_{i-1}\left(ax_j + b\right) + \cdots + x_{j-1}(ax_i + b) + \cdots$$
$$+ x_{n-1}(ax_n + b) + x_n(ax_1 + b)$$

$$P_1{}' = ax_1x_2 + bx_1 + ax_2x_3 + bx_2 + \cdots + ax_{i-1}x_j + bx_{i-1} + \cdots + ax_{j-1}x_j + bx_{j-1} + \cdots$$
$$+ ax_{n-1}x_n + bx_{n-1} + ax_nx_1 + bx_n$$

$$P_1{}' = a\left(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{i-1}x_j + \cdots + x_{j-1}x_i + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1\right) + b(x_1 + x_2 + \cdots$$
$$+ x_{i-1} + \cdots + x_{j-1} + \cdots + x_{n-1} + x_n) \qquad (1.2.5)$$

Seja também $P_2{}'$ tal que:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
x_1 & & x_2 & & x_3 & \cdots & x_{i-1} & & x_j & \cdots & x_{j-1} & & x_i & \cdots & x_{n-1} & & x_n & & x_1 \\
 & \swarrow & & \swarrow & & & & \swarrow & & & & \swarrow & & & & \swarrow & & \swarrow & \\
y_1 & & y_2 & & y_3 & \cdots & y_{i-1} & & y_j & \cdots & y_{j-1} & & y_i & \cdots & y_{n-1} & & y_n & & y_1
\end{array}$$

$$P_2{}' = x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_2 + \cdots + x_j \cdot y_{i-1} + x_i \cdot y_{j-1} + \cdots + x_n \cdot y_{n-1} + x_1 \cdot y_n$$

$$P_2{}' = x_2(ax_1 + b) + x_3(ax_2 + b) + \cdots + x_j(ax_{i-1} + b) + x_i\left(ax_{j-1} + b\right) + \cdots + x_n(ax_{n-1}$$
$$+ b) + x_1(ax_n + b)$$

$$P_2{}' = ax_1x_2 + bx_2 + ax_2x_3 + bx_3 + \cdots + ax_{i-1}x_j + bx_j + ax_{j-1}x_i + bx_i + \cdots + ax_{n-1}x_n$$
$$+ bx_n + ax_1x_n + bx_1$$

$$P_2{}' = a\left(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{i-1}x_j + x_{j-1}x_i + \cdots + x_{n-1}x_n + x_1x_n\right) + b(x_1 + x_2 + x_3$$
$$+ \cdots + x_j + x_i + \cdots + x_n) \qquad (1.2.6)$$

Já que a equação (1.2.5) equivale à equação (1.2.6), então podemos escrever:

$$\boxed{P_1{}' = P_2{}'}$$

Assim, conclui-se que a ordem de disposição das colunas, para pontos de uma mesma reta, é irrelevante para a identidade das somas dos produtos primários e secundários. No entanto, permutando-se duas colunas no dispositivo, formam-se produtos primários e secundários distintos dos originais. Isso nos permite escrever que $P_1 = P_2 \neq P_1{}' = P_2{}'$, o que demonstra o teorema. ∎

Exemplo 1.2.1 Vamos testar o dispositivo na reta de equação $y = -2x + 5$.

Vamos atribuir alguns valores para x e calcular os valores correspondentes para y.

$$x = -2 \Rightarrow y = -2 \cdot (-2) + 5 = 4 + 5 = 9$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -2 \cdot (-1) + 5 = 2 + 5 = 7$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -2 \cdot (0) + 5 = 0 + 5 = 5$$

$$x = 2 \Rightarrow y = -2 \cdot 2 + 5 = -4 + 5 = 1$$

$$x = 3 \Rightarrow y = -2 \cdot 3 + 5 = -6 + 5 = -1$$

Lançando-se esses dados no dispositivo de coordenadas de pontos, temos:

$$\begin{array}{ccccccccccc} -2 & & -1 & & 0 & & 2 & & 3 & & -2 \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ 9 & & 7 & & 5 & & 1 & & -1 & & 9 \end{array}$$

$$P_1 = (-2) \cdot 7 + (-1) \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 9 = -14 - 5 + 0 - 2 + 27 = 27 - 21 = 6$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} -2 & & -1 & & 0 & & 2 & & 3 & & -2 \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ 9 & & 7 & & 5 & & 1 & & -1 & & 9 \end{array}$$

$$P_2 = (-1) \cdot 9 + 0 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = -9 + 0 + 10 + 3 + 2 = 15 - 9 = 6$$

Portanto, temos a identidade:

$$\boxed{P_1 = P_2}$$

Exemplo 1.2.2 Encontre a equação da reta que passa pelos pontos $(1, -2)$ e $(3, 5)$.

Seja r a reta procurada. Considere (x, y) um ponto qualquer de r. Os pontos (x, y), $(1, -2)$ e $(3, 5)$ pertencem a r, ou seja, são pontos colineares. Assim, a equação geral da reta r poderá ser encontrada pelo Teorema de Colinearidade desses pontos:

$$\begin{array}{ccccccc} x & & 3 & & 1 & & x \\ & \times & & \times & & \times & \\ y & & 5 & & -2 & & y \end{array}$$

$$5x - 6 + y = 3y + 5 - 2x \Rightarrow \boxed{7x - 2y - 11 = 0}$$

Exemplo 1.2.3 Determine o coeficiente angular da reta que passa nos pontos $(3,1)$ e $(5,8)$.

Seja m o coeficiente angular da reta r: $y = mx + b$. Os pontos (x,y), $(3,1)$ e $(5,8)$ pertencem à reta r, logo, são colineares. Dessa forma, podemos encontrar a equação reduzida de r.

$$\begin{array}{ccccccc} x & & 3 & & 5 & & x \\ & \times & & \times & & \times & \\ y & & 1 & & 8 & & y \end{array}$$

$$x + 24 + 5y = 3y + 5 + 8x$$

$$2y = 7x - 19$$

$$y = \frac{7}{2}x - \frac{19}{2}$$

Portanto, o coeficiente angular da reta r é dado por:

$$\boxed{m = \frac{7}{2}}$$

Exemplo 1.2.4 Numa dada função afim f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a imagem de 2 é igual a 4, e a imagem de 3 é igual a 1. Para essa função, encontre a imagem de -1.

Para essa função, consideremos $f(x) = y$. Nesse caso, x representa qualquer elemento do conjunto domínio, e y representa qualquer elemento do conjunto imagem. Assim, temos: $f(2) = 4$, $f(3) = 1$ e $f(-1) = y$.

Como, graficamente, uma função afim é representada por uma reta, então podemos aplicar o Teorema de Colinearidade para os pares ordenados da forma $\big(x, f(x)\big)$:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & & 3 & & -1 & & 2 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 4 & & 1 & & y & & 4 \end{array}$$

$$2 + 3y - 4 = 12 - 1 + 2y$$

$$\boxed{y = 13}$$

1.2.1 Equação Segmentária da Reta

Pelo *Teorema de Colinearidade*, pode-se encontrar a equação de qualquer reta no plano, conhecidos apenas dois pontos distintos dessa reta. Sejam $p, q \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, tais que p está no eixo y, e q pertence ao eixo x. Determinemos a equação segmentária da reta.

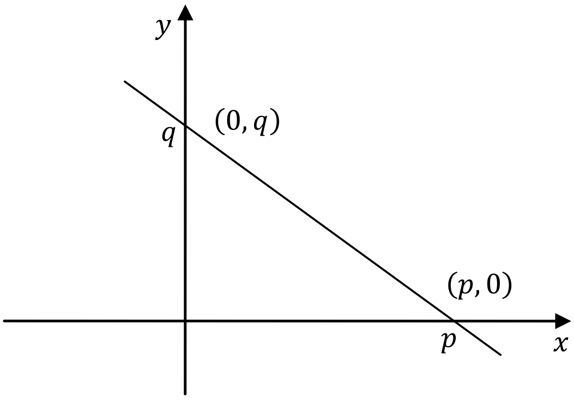


Gráfico 1: reta segmentária

$$\begin{array}{ccccccc} x & & 0 & & p & & x \\ & \times & & \times & & \times & \\ y & & q & & 0 & & y \end{array}$$

$$qx + py = pq$$

$$\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq}$$

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

A equação acima é conhecida como a equação segmentária da reta.

Capítulo 2

Eixos e Polígonos

2.1 Eixos orientados

Considere uma reta r num sistema de eixos cartesianos. Sejam A, B e C pontos de r. Assumamos uma orientação em r, com origem O também em r, tais que A, B, C, $O \in \mathbb{R}^2$. Tomemos as distâncias $\overline{OA} = a, \overline{OB} = b, \overline{OC} = c$ e observemos o gráfico abaixo.

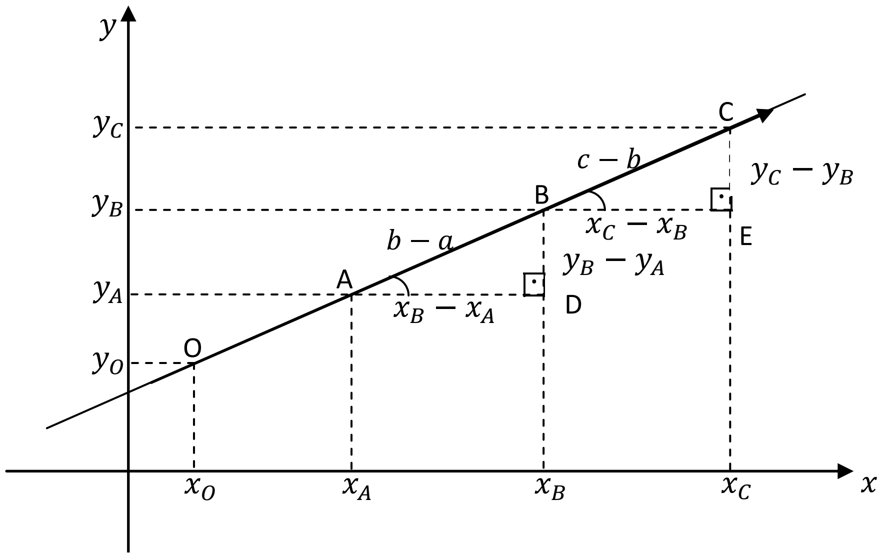


Gráfico 2: eixo orientado

Os triângulos ABD e BCE são semelhantes. Assim, para o eixo x, podemos escrever a seguinte proporção para essa semelhança:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$$

$$\frac{b - a}{x_B - x_A} = \frac{c - b}{x_C - x_B}$$

Levando-se em consideração que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, então obtemos:

$$bx_C - bx_B - ax_C + ax_B = cx_B - cx_A - bx_B + bx_A$$

$$ax_B + bx_C + cx_A = bx_A + cx_B + ax_C$$

A identidade acima pode ser reescrita no dispositivo abaixo:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} a & & b & & c & & a \\ & \times & & \times & & \times & \\ x_A & & x_B & & x_C & & x_A \end{array}}$$

Analogamente, para o eixo y, observamos a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$$

$$\frac{b - a}{y_B - y_A} = \frac{c - b}{y_C - y_B}$$

Da igualdade entre o produto dos meios e o produto dos extremos, vem:

$$by_C - by_B - ay_C + ay_B = cy_B - cy_A - by_B + by_A$$

$$ay_B + by_C + cy_A = by_A + cy_B + ay_C$$

A identidade acima também pode ser reescrita no dispositivo de coordenadas de pontos, como se observa abaixo:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} a & & b & & c & & a \\ & \times & & \times & & \times & \\ y_A & & y_B & & y_C & & y_A \end{array}}$$

Portanto, temos o seguinte *dispositivo para eixos orientados*:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} a & & b & & c & & a \\ & \times & & \times & & \times & \\ \alpha & & \beta & & \gamma & & \alpha \end{array}}$$

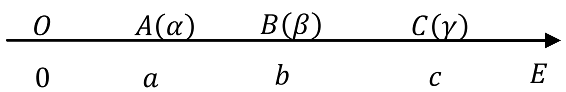
No dispositivo logo acima, o somatório dos produtos primários é igual ao somatório dos produtos secundários:

$$\boxed{P_1 = P_2}$$

Essa igualdade ocorre porque os pontos A, B e C são colineares, já que pertencem a uma mesma reta.

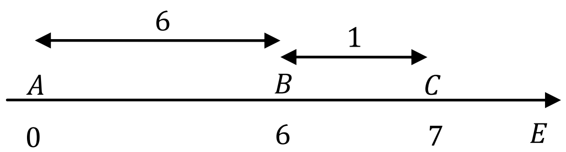
Nesse dispositivo, α, β e γ representam as componentes $(x\ ou\ y)$ dos pontos A, B e C, para um mesmo eixo, x ou y. E a, b e c representam as componentes destes pontos em um eixo de orientação, relativamente, associado aos eixos do sistema de coordenadas cartesianas no qual estão os pontos A, B e C. Isto é, α, β e γ representam as componentes x apenas, ou somente as componentes y, nunca x e y juntas.

Observe que no eixo $\overrightarrow{OE}$ abaixo a, b e c são, respectivamente, as componentes dos pontos A, B e C nesse eixo e α, β e γ são, respectivamente, as componentes desses pontos num dos eixos cartesianos.



Exemplo 2.1.1 Considere os pontos A, B e C, tais que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 6$, $x_A = 4$ e $x_B = 16$. Determine x_C.

Vamos relacionar os pontos A, B e C a um eixo $\overrightarrow{OE}$. Se $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 6$, então $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{6}{1}$. Assim, podemos dizer que, neste eixo, $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 1$ e, portanto, $\overline{AC} = 7$. Observe o esquema ilustrativo seguinte:



Usando-se o dispositivo para eixos orientados, temos:

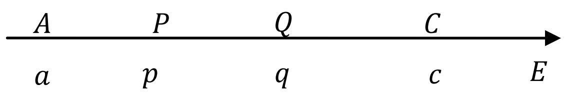
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 6 & & 7 & & 0 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 4 & & 16 & & x_C & & 4 \end{array}$$

$$6x_C + 28 = 24 + 112$$

$$6x_C = 136 - 28 = 108 \Rightarrow x_C = \frac{108}{6} \Rightarrow \boxed{x_C = 18}$$

Exemplo 2.1.2 Os pontos $A(3,3)$, $B(10,1)$ e $C(6,9)$ são vértices de um triângulo. Os pontos P e Q dividem o lado $\overline{AC}$ desse triângulo em três partes iguais; enquanto o ponto M divide o lado $\overline{BC}$ em duas partes iguais. Determine os pontos de interseção da reta $\overleftrightarrow{AM}$ com as retas $\overleftrightarrow{BP}$ e $\overleftrightarrow{BQ}$.

Seja $\overrightarrow{OE}$ o eixo orientado que contém os pontos A, P, Q e C, tal que $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$. Observe a figura abaixo:

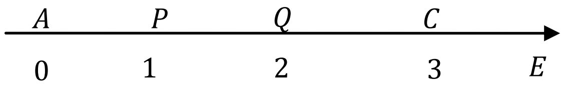


Na representação gráfica acima, a, p, q e c indicam componentes de um mesmo eixo.

Assim,

$$\overline{AQ} = 2\overline{AP} \Rightarrow \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{2}{1}\ , \overline{AC} = 3\overline{AP} \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \frac{3}{1}$$

Isso nos permite escrever as coordenadas relativas dos pontos A, P, Q e C no eixo orientado $\overrightarrow{OE}$ abaixo:



Dessa forma, podemos aplicar o dispositivo para eixos orientados:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1 & & 3 & & 0 \\ & \times & & \times & & \times & \\ a & & p & & c & & a \end{array}$$

$$c + 3a = a + 3p$$

$$3p = c + 2a$$

Então, podemos encontrar o ponto P:

$$3P = C + 2A$$

$$P = (4, 5)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 2 & & 3 & & 0 \\ & \times & & \times & & \times & \\ a & & q & & c & & a \end{array}$$

$$2c + 3a = 2a + 3q$$

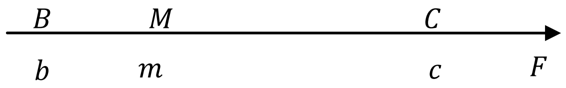
$$3q = 2c + a$$

Do mesmo modo, podemos encontrar as coordenadas do ponto Q:

$$3Q = 2C + A$$

$$Q = (5, 7)$$

Seja $\overrightarrow{OF}$ o eixo orientado que contém os pontos B, M e C, tal que $BM = MC$. Observe a figura abaixo:

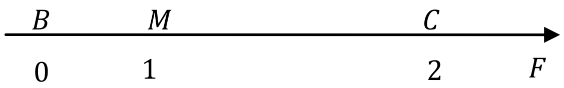


Na representação gráfica acima, b, m e c representam componentes de um mesmo eixo.

Assim,

$$BC = 2BM \Rightarrow \frac{BC}{BM} = \frac{2}{1}$$

Isso nos permite escrever as coordenadas relativas aos pontos B, M e C no eixo orientado $\overrightarrow{OF}$ abaixo:



Dessa forma, podemos aplicar o dispositivo para eixos orientados:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 0 \\ & \times & & \times & & \times & \\ b & & m & & c & & b \end{array}$$

$$c + 2b = b + 2m$$

$$2m = b + c$$

Então, podemos encontrar o ponto M:

$$2M = B + C \Rightarrow M = (8, 5)$$

Através do Teorema de Colinearidade, encontra-se a equação da reta que passa pelos pontos B e P:

$$\begin{array}{ccccccc} 10 & & 4 & & x & & 10 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 1 & & 5 & & y & & 1 \end{array}$$

$$50 + 4y + x = 4 + 5x + 10y$$

$$4x + 6y = 46 \Rightarrow \boxed{\overleftrightarrow{BP}: 2x + 3y = 23}$$

Pelo Teorema de Colinearidade, encontra-se a equação da reta que passa pelos pontos B e Q:

$$\begin{array}{ccccccc} 10 & & 5 & & x & & 10 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 1 & & 7 & & y & & 1 \end{array}$$

$$70 + 5y + x = 5 + 7x + 10y$$

$$\boxed{\overleftrightarrow{BQ}: 6x + 5y = 65}$$

Os pontos A, M e (x,y) são colineares, logo, pode-se encontrar a equação da reta que passa pelos pontos A e M:

$$\begin{matrix} 3 & & 8 & & x & & 3 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 3 & & 5 & & y & & 3 \end{matrix}$$

$$15 + 8y + 3x = 24 + 5x + 3y$$

$$\boxed{\overleftrightarrow{AM}: 2x - 5y = -9}$$

Seja R o ponto de interseção entre a reta $\overleftrightarrow{BP}$ e a reta $\overleftrightarrow{AM}$. Então, $R = \overleftrightarrow{BP} \cap \overleftrightarrow{AM}$. Isso nos permite calcular as coordenadas desse ponto.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 23 \\ 2x - 5y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 23 \\ -2x + 5y = 9 \end{cases}$$

$$8y = 32 \Rightarrow y = 4$$

Substituindo o valor acima na equação abaixo, temos:

$$2x + 3y = 23 \Rightarrow 2x + 3 \cdot 4 = 23 \Rightarrow x = \frac{11}{2}$$

Assim, o ponto R tem coordenadas dadas por:

$$\boxed{R = \left(\frac{11}{2}, 4\right)}$$

Seja S o ponto de interseção entre a reta $\overleftrightarrow{BQ}$ e a reta $\overleftrightarrow{AM}$. Então, $S = \overleftrightarrow{BQ} \cap \overleftrightarrow{AM}$. Dessa forma, podemos calcular as coordenadas desse ponto através de sistemas de equações lineares, como abaixo indicado.

$$\begin{cases} 6x + 5y = 65 \\ 2x - 5y = -9 \end{cases}$$

$$8x = 56$$

$$\boxed{x = 7}$$

Substituindo o valor de x, encontrado anteriormente, na equação abaixo, temos:

$$6x + 5y = 65 \Rightarrow 6 \cdot 7 + 5y = 65 \Rightarrow 42 + 5y = 65 \Rightarrow y = \frac{23}{5}$$

Assim, as coordenadas do ponto S são dadas por:

$$\boxed{S = \left(7, \frac{23}{5}\right)}$$

2.2 Representação de polígonos

Seja um polígono de vértices A_1, A_2, A_3,..., A_i,..., A_n, em que a ordem i foi estabelecida para o *sentido anti-horário* no percurso dos lados do polígono e passando, sucessivamente, pelos seus vértices. Representaremos o polígono $A_1 A_2 A_3 \ldots A_i \ldots A_n$ pelo dispositivo a seguir:

$$\begin{matrix} x_{A_1} & x_{A_2} & x_{A_3} & \cdots & x_{A_{n-1}} & x_{A_n} & x_{A_1} \\ y_{A_1} & y_{A_2} & y_{A_3} & & y_{A_{n-1}} & y_{A_n} & y_{A_1} \end{matrix}$$

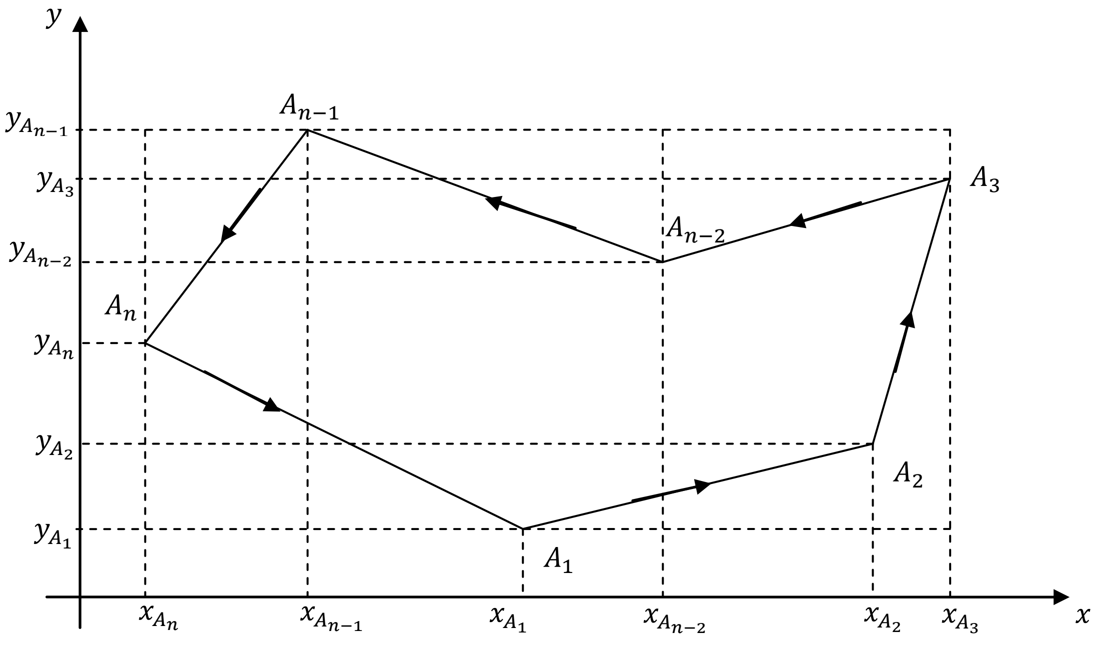


Gráfico 3: polígono orientado no sentido anti-horário

Exemplo 2.2.1 Representar o triângulo de vértices $A(8,1)$, $B(19,4)$ e $C(3,10)$ por esse dispositivo:

$$\begin{matrix} 8 & 19 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 10 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 19 & 3 & 8 & 19 \\ 4 & 10 & 1 & 4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 8 & 19 & 3 \\ 10 & 1 & 4 & 10 \end{matrix}$$

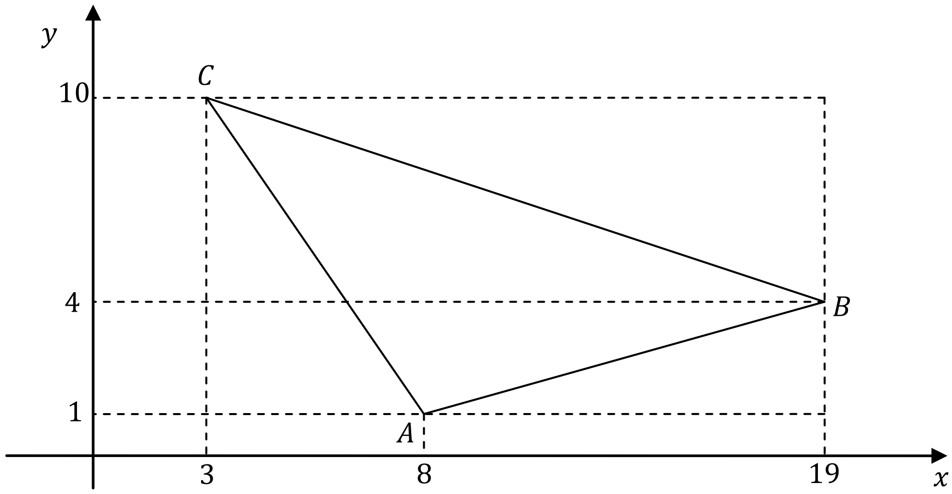


Gráfico 4: polígono de vértices ABC

Todas as representações acima indicam o mesmo triângulo. Um polígono de n lados tem n representações, porque podemos iniciar sua representação por qualquer um de seus n vértices.

Capítulo 3

Retas

3.1 Retas paralelas

Sejam $r: y = m_r x + b$ e $s: y = m_s x + a$ duas retas paralelas de coeficientes angulares m_r e m_s, respectivamente. Assim, vamos mostrar que $m_r = m_s$.

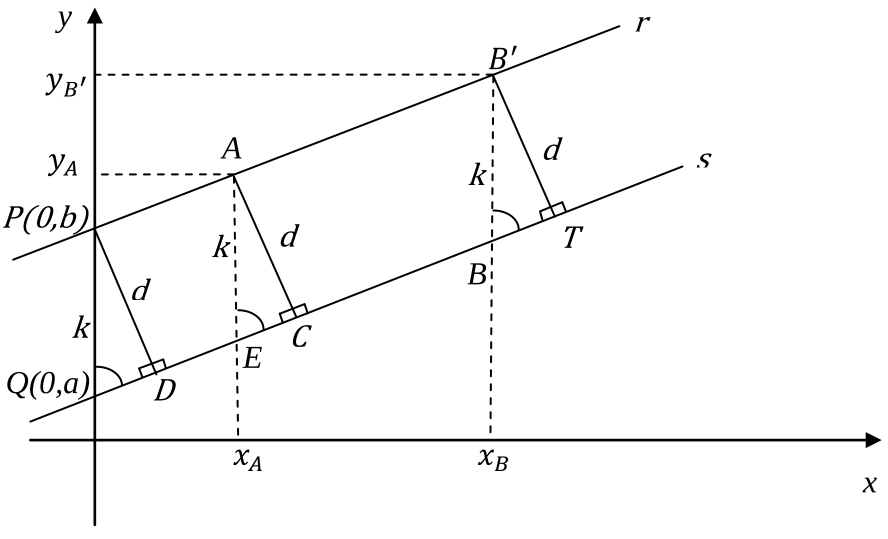


Gráfico 5: retas paralelas

Se $P(0, b)$, $A(x_A, y_A)$, $B^{'}(x_B, y_B + k) \in r$; então, pelo Teorema de Colinearidade, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & x_A & & x_B & & 0 \\ & \times & & \times & & \times & \\ b & & y_A & & y_B + k & & b \end{array}$$

$$x_A y_B + x_A k + b x_B = b x_A + x_B y_A$$

Sendo $y_B = m_s x_B + a$, $y_A = m_r x_A + b$ e $k = b - a$, a equação acima torna-se:

$$x_A(m_s x_B + a) + x_A(b - a) + b x_B = \ b x_A + x_B(m_r x_A + b)$$

$$m_s x_A x_B + a x_A + b x_A - a x_A + b x_B = \ b x_A + m_r x_A x_B + b x_B$$

$$m_s x_A x_B = m_r x_A x_B$$

Donde se conclui

$$\boxed{m_r = m_s}$$

Assim, duas retas paralelas têm coeficientes angulares iguais.

A seguir mostraremos que duas retas paralelas têm dispositivos de pontos tais que um leva ao outro. Ou seja, o dispositivo da reta r equivale ao da reta s, sendo r e s retas paralelas.

Lema 3.1 Duas retas paralelas têm dispositivos de pontos equivalentes.

Demonstração. Sejam r e s duas retas paralelas. Considere $B_i \in r, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, e $A_j \in s, 1 \leq j \leq 2n$.

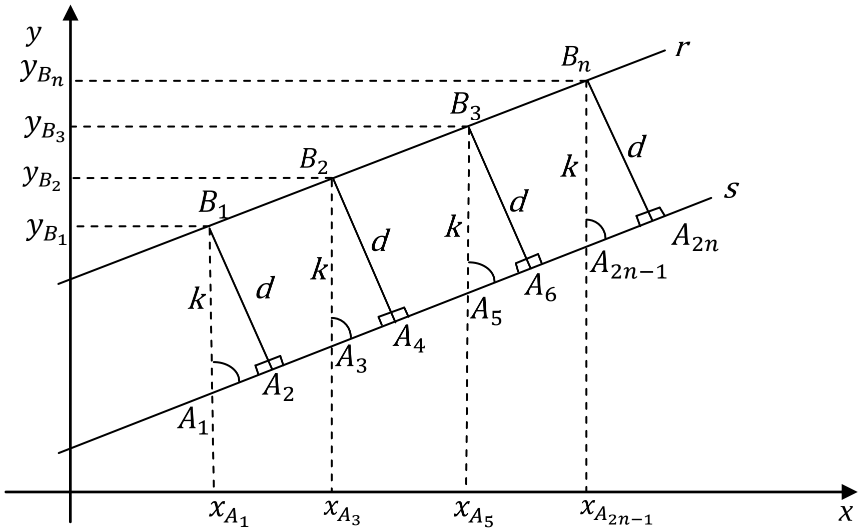


Gráfico 6: duas retas paralelas

Os pontos $B_1 = \left(x_{A_1}, y_{A_1} + k\right)$, $B_2 = \left(x_{A_3}, y_{A_3} + k\right)$, $B_3 = \left(x_{A_5}, y_{A_5} + k\right)$,..., $B_n = \left(x_{A_{2n-1}}, y_{A_{2n-1}} + k\right)$ pertencem à reta r. Logo, poderemos aplicar o Teorema de Colinearidade para esses pontos:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_{A_1} & & x_{A_3} & & x_{A_5} & & x_{A_{2n-1}} & & x_{A_1} \\ & \times & & \times & & \times & & \times & \\ y_{A_1} + k & & y_{A_3} + k & & y_{A_5} + k & & y_{A_{2n-1}} + k & & y_{A_1} + k \end{array}$$

$$x_{A_1}y_{A_3} + kx_{A_1} + x_{A_3}y_{A_5} + kx_{A_3} + x_{A_5}y_{A_{2n-1}} + kx_{A_5} + x_{A_{2n-1}}y_{A_1} + kx_{A_{2n-1}}$$
$$= x_{A_3}y_{A_1} + kx_{A_3} + x_{A_5}y_{A_3} + kx_{A_5} + x_{A_{2n-1}}y_{A_5} + kx_{A_{2n-1}} + x_{A_1}y_{A_{2n-1}} + kx_{A_1}$$

Eliminando-se os termos simétricos na identidade acima, tem-se:

$$x_{A_1}y_{A_3} + x_{A_3}y_{A_5} + x_{A_5}y_{A_{2n-1}} + x_{A_{2n-1}}y_{A_1} = x_{A_3}y_{A_1} + x_{A_5}y_{A_3} + x_{A_{2n-1}}y_{A_5} + x_{A_1}y_{A_{2n-1}}$$

A equação acima pode ser escrita através do dispositivo de representação de pontos de uma reta. Nesse caso específico, são os pontos da reta s.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_{A_1} & & x_{A_3} & & x_{A_5} & & x_{A_{2n-1}} & & x_{A_1} \\ & \times & & \times & & \times & & \times & \\ y_{A_1} & & y_{A_3} & & y_{A_5} & & y_{A_{2n-1}} & & y_{A_1} \end{array}$$

3.1.1 Teorema das colunas alternadas para retas paralelas

Teorema 3.1.1.1 Sejam $r: y = mx + a$ e $s: y = mx + b$ duas retas paralelas. Sejam ainda os pontos $A_i \in r$, com $i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, e $B_j \in s$, com $j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Tomemos n pontos de r e também n pontos de s. Se dispusermos estes n pontos de r, *alternadamente*, com os n pontos de s no dispositivo de coordenadas de pontos, então o somatório dos produtos primários igualar-se-á ao somatório dos produtos secundários, como ocorre com pontos colineares.

Demonstração. Se $A_i \in r$, então $y_{A_n} = mx_{A_n} + a$, $y_{A_{n-1}} = mx_{A_{n-1}} + a$, $y_{A_1} = mx_{A_1} + a$ e $y_{A_2} = mx_{A_2} + a$

Se $B_j \in s$, então $y_{B_n} = mx_{B_n} + b$, $y_{B_{n-1}} = mx_{B_{n-1}} + b$, $y_{B_1} = mx_{B_1} + b$ e $y_{B_2} = mx_{B_2} + b$.

Seja P_1 o somatório dos produtos primários e vamos, inicialmente, usar a primeira coluna com as coordenadas de um ponto da reta r. Assim, temos:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
x_{A_1} & & x_{B_1} & & x_{A_2} & & x_{B_2} & \cdots & x_{A_{n-1}} & & x_{B_{n-1}} & & x_{A_n} & & x_{B_n} & & x_{A_1} \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
y_{A_1} & & y_{B_1} & & y_{A_2} & & y_{B_2} & \cdots & y_{A_{n-1}} & & y_{B_{n-1}} & & y_{A_n} & & y_{B_n} & & y_{A_1}
\end{array}$$

$$P_1 = x_{A_1}y_{B_1} + x_{B_1}y_{A_2} + x_{A_2}y_{B_2} + \cdots + x_{A_{n-1}}y_{B_{n-1}} + x_{B_{n-1}}y_{A_n} + x_{A_n}y_{B_n} + x_{B_n}y_{A_1}$$

$$P_1 = x_{A_1}\left(mx_{B_1} + b\right) + x_{B_1}\left(mx_{A_2} + a\right) + x_{A_2}\left(mx_{B_2} + b\right) + \cdots + x_{A_{n-1}}\left(mx_{B_{n-1}} + b\right) \\ + x_{B_{n-1}}\left(mx_{A_n} + a\right) + x_{A_n}\left(mx_{B_n} + b\right) + x_{B_n}\left(mx_{A_1} + a\right)$$

$$P_1 = mx_{A_1}x_{B_1} + bx_{A_1} + mx_{A_2}x_{B_1} + ax_{B_1} + mx_{A_2}x_{B_2} + bx_{A_2} + \cdots + mx_{A_{n-1}}x_{B_{n-1}} + bx_{A_{n-1}} \\ + mx_{A_n}x_{B_{n-1}} + ax_{B_{n-1}} + mx_{A_n}x_{B_n} + bx_{A_n} + mx_{A_1}x_{B_n} + ax_{B_n}$$

$$P_1 = m\left(x_{A_1}x_{B_1} + x_{A_2}x_{B_1} + x_{A_2}x_{B_2} + \cdots + x_{A_{n-1}}x_{B_{n-1}} + x_{A_n}x_{B_{n-1}} + x_{A_n}x_{B_n} + x_{A_1}x_{B_n}\right) \\ + a\left(x_{B_1} + \cdots + x_{B_{n-1}} + x_{B_n}\right) + b\left(x_{A_1} + x_{A_2} + \cdots + x_{A_{n-1}} + x_{A_n}\right) \qquad (3.1.1)$$

Seja P_2 o somatório dos produtos secundários. Assim, temos:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
x_{A_1} & & x_{B_1} & & x_{A_2} & & x_{B_2} & \cdots & x_{A_{n-1}} & & x_{B_{n-1}} & & x_{A_n} & & x_{B_n} & & x_{A_1} \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
y_{A_1} & & y_{B_1} & & y_{A_2} & & y_{B_2} & \cdots & y_{A_{n-1}} & & y_{B_{n-1}} & & y_{A_n} & & y_{B_n} & & y_{A_1}
\end{array}$$

$$P_2 = x_{B_1}y_{A_1} + x_{A_2}y_{B_1} + x_{B_2}y_{A_2} + \cdots + x_{B_{n-1}}x_{B_{n-1}} + x_{B_n}y_{A_n} + x_{A_1}y_{B_n}$$

$$P_2 = x_{B_1}\left(mx_{A_1} + a\right) + x_{A_2}\left(mx_{B_1} + b\right) + x_{B_2}\left(mx_{A_2} + a\right) + \cdots + x_{B_{n-1}}\left(mx_{A_{n-1}} + a\right) \\ + x_{A_n}\left(mx_{B_{n-1}} + b\right) + x_{B_n}\left(mx_{A_n} + a\right) + x_{A_1}\left(mx_{B_n} + b\right)$$

$$P_2 = mx_{A_1}x_{B_1} + ax_{B_1} + mx_{A_2}x_{B_1} + bx_{A_2} + mx_{A_2}x_{B_2} + ax_{B_2} + \cdots + mx_{A_{n-1}}x_{B_{n-1}} + ax_{B_{n-1}} \\ + mx_{A_n}x_{B_{n-1}} + bx_{A_n} + mx_{A_n}x_{B_n} + ax_{B_n} + mx_{A_1}x_{B_n} + bx_{A_1}$$

$$P_2 = m\left(x_{A_1}x_{B_1} + x_{A_2}x_{B_1} + x_{A_2}x_{B_2} + \cdots + x_{A_{n-1}}x_{B_{n-1}} + x_{A_n}x_{B_{n-1}} + x_{A_n}x_{B_n} + x_{A_1}x_{B_n}\right) \\ + a\left(x_{B_1} + x_{B_2} + \cdots + x_{B_{n-1}} + x_{B_n}\right) + b\left(x_{A_1} + x_{A_2} + \cdots + x_{A_n}\right) \qquad (3.1.2)$$

Como a equação (3.1.1) equivale à equação (3.1.2), então, temos:

$$\boxed{P_1 = P_2}$$

Como queríamos mostrar. ■

Se começarmos com uma coluna de coordenadas da reta s, obteremos o mesmo resultado. Observe:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
x_{B_1} & & x_{A_1} & & x_{B_2} & & x_{A_2} & \cdots & x_{B_{n-1}} & & x_{A_{n-1}} & & x_{B_n} & & x_{A_n} & & x_{B_1} \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
y_{B_1} & & y_{A_1} & & y_{B_2} & & y_{A_2} & \cdots & y_{B_{n-1}} & & y_{A_{n-1}} & & y_{B_n} & & y_{A_n} & & y_{B_1}
\end{array}$$

Seja P_1, tal que:

$$P_1 = x_{B_1}y_{A_1} + x_{A_1}y_{B_2} + x_{B_2}y_{A_2} + \cdots + x_{B_{n-1}}y_{A_{n-1}} + x_{A_{n-1}}y_{B_n} + x_{B_n}y_{A_n} + x_{A_n}y_{B_1}$$

$$P_1 = x_{B_1}\left(mx_{A_1} + a\right) + x_{A_1}\left(mx_{B_2} + b\right) + x_{B_2}\left(mx_{A_2} + a\right) + \cdots + x_{B_{n-1}}\left(mx_{A_{n-1}} + a\right) \\ + x_{A_{n-1}}\left(mx_{B_n} + b\right) + x_{B_n}(mx_{A_n} + a) + x_{A_n}(mx_{B_1} + b)$$

$$P_1 = mx_{A_1}x_{B_1} + ax_{B_1} + mx_{A_1}x_{B_2} + bx_{A_1} + mx_{A_2}x_{B_2} + ax_{B_2} + \cdots + mx_{A_{n-1}}x_{B_{n-1}} + ax_{B_{n-1}} \\ + mx_{A_{n-1}}x_{B_n} + bx_{A_{n-1}} + mx_{A_n}x_{B_n} + ax_{B_n} + mx_{A_n}x_{B_1} + bx_{A_n}$$

$$P_1 = m(x_{A_1}x_{B_1} + x_{A_1}x_{B_2} + x_{A_2}x_{B_2} + \cdots + x_{A_{n-1}}x_{B_{n-1}} + x_{A_{n-1}}x_{B_n} + x_{A_n}x_{B_n} + x_{A_n}x_{B_1}) \\ + a(x_{B_1} + x_{B_2} + \cdots + x_{B_{n-1}} + x_{B_n}) + b\left(x_{A_1} + \cdots + x_{A_{n-1}} + x_{A_n}\right) \qquad (3.1.3)$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
x_{B_1} & & x_{A_1} & & x_{B_2} & & x_{A_2} & \cdots & x_{B_{n-1}} & & x_{A_{n-1}} & & x_{B_n} & & x_{A_n} & & x_{B_1} \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
y_{B_1} & & y_{A_1} & & y_{B_2} & & y_{A_2} & \cdots & y_{B_{n-1}} & & y_{A_{n-1}} & & y_{B_n} & & y_{A_n} & & y_{B_1}
\end{array}$$

Considere P_2, tal que:

$$P_2 = x_{A_1}y_{B_1} + x_{B_2}y_{A_1} + x_{A_2}y_{B_2} + \cdots + x_{A_{n-1}}y_{B_{n-1}} + x_{B_n}y_{A_{n-1}} + x_{A_n}y_{B_n} + x_{B_1}y_{A_n}$$

$$P_2 = x_{A_1}(mx_{B_1} + b) + x_{B_2}(mx_{A_1} + a) + x_{A_2}(mx_{B_2} + b) + \cdots + x_{A_{n-1}}\left(mx_{B_{n-1}} + b\right) \\ + x_{B_n}\left(mx_{A_{n-1}} + a\right) + x_{A_n}(mx_{B_n} + b) + x_{B_1}(mx_{A_n} + a)$$

$$P_2 = mx_{A_1}x_{B_1} + bx_{A_1} + mx_{A_1}x_{B_2} + ax_{B_2} + mx_{A_2}x_{B_2} + bx_{A_2} + \cdots + mx_{A_{n-1}}x_{B_{n-1}} + bx_{A_{n-1}} \\ + mx_{A_{n-1}}x_{B_n} + ax_{B_n} + mx_{A_n}x_{B_n} + bx_{A_n} + mx_{A_n}x_{B_1} + ax_{B_1}$$

$$P_2 = m\left(x_{A_1}x_{B_1} + x_{A_1}x_{B_2} + x_{A_2}x_{B_2} + \cdots + x_{A_{n-1}}x_{B_{n-1}} + x_{A_{n-1}}x_{B_n} + x_{A_n}x_{B_n} + x_{A_n}x_{B_1}\right) \\ + a\left(x_{B_1} + x_{B_2} + \cdots + x_{B_n}\right) + b\left(x_{A_1} + x_{A_2} + \cdots + x_{A_{n-1}} + x_{A_n}\right) \qquad (3.1.4)$$

A equação (3.1.3) é equivalente à equação (3.1.4). Assim, podemos escrever:

$$\boxed{P_1 = P_2}$$ ■

Exemplo 3.1.1. Considere r e s retas paralelas, tais que $A(3,1)$, $B(2,4) \in r$ e $C(1,5) \in s$. Determine a equação geral de s.

Aplicando-se o teorema das colunas alternadas para retas paralelas, temos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & & x & & 2 & & 1 & & 3 \\ & \times & & \times & & \times & & \times & \\ 1 & & y & & 4 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$$3y + 4x + 10 + 1 = x + 2y + 4 + 15$$

$$3x + y + 11 - 19 = 0$$

$$\boxed{3x + y - 8 = 0}$$

Teorema 3.1.2 Seja uma reta $r: ax + by + c = 0$. Então, existe uma reta $s \ni (x_0, y_0)$ paralela a r, tal que $s: ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$.

Demonstração. Como $\left(0, -\frac{c}{b}\right), \left(-\frac{c}{a}, 0\right) \in r$, pela condição de paralelismo, vem:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & & 0 & & x_0 & & -c/a & & x \\ & \times & & \times & & \times & & \times & \\ y & & -c/b & & y_0 & & 0 & & y \end{array}$$

$$-\frac{c}{b}x - \frac{c}{a}y = -\frac{c}{b}x_0 - \frac{c}{a}y_0 \Rightarrow ax + by = ax_0 + by_0$$

$$\boxed{s: ax + by - (ax_0 + by_0) = 0} \tag{3.3.1}$$

Exemplo 3.1.1 Encontre a equação geral da reta que passa pelo ponto $(2,3)$ e é paralela à reta $r: 3x + 4y - 1 = 0$.

Seja s a reta procurada. Aplicando-se o teorema 3.1.2, temos:

$$s: 3x + 4y - (3 \cdot 2 + 4 \cdot 3) = 0 \Rightarrow \boxed{s: 3x + 4y - 18 = 0}$$

3.2 Retas concorrentes

Sejam as retas concorrentes $r: y = ax + b$ e $s: y = cx + d, a \neq c$. Sejam os pontos $A_i(\alpha_i, \beta_i) \in r$ e $B_j(\gamma_j, \delta_j) \in s$, com $i, j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, tais que $\alpha_i \neq \alpha_j$ e $\gamma_i \neq \gamma_j$, se $i \neq j$. Vamos mostrar que para duas retas concorrentes, temos produtos primários distintos dos secundários.

Assim,

$$\begin{cases} \beta_i = a\alpha_i + b \\ \delta_j = c\gamma_j + d \end{cases}$$

Analisemos o gráfico seguinte:

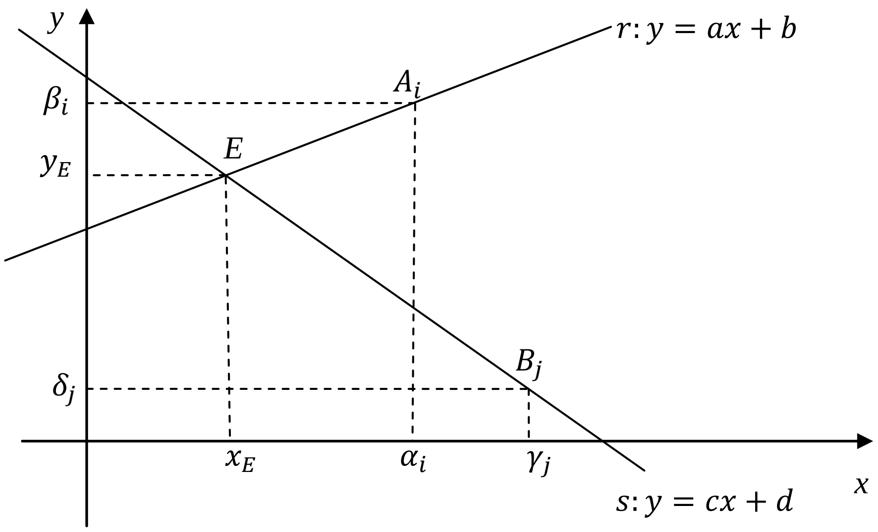


Gráfico 7: retas concorrentes

Seja P_1 tal que:

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 & & \gamma_1 & & \alpha_i & & \gamma_j & & \alpha_1 \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \beta_1 & & \delta_1 & & \beta_i & & \delta_j & & \beta_1 \end{array}$$

$P_1 = \alpha_1\delta_1 + \gamma_1\beta_i + \alpha_i\delta_j + \gamma_j\beta_1$; $\quad$ $\delta_1 = c\gamma_1 + d, \beta_i = a\alpha_i + b, \delta_j = c\gamma_j + d, \beta_1 = a\alpha_1 + b$

$$P_1 = \alpha_1(c\gamma_1 + d) + \gamma_1(a\alpha_i + b) + \alpha_i(c\gamma_j + d) + \gamma_j(a\alpha_1 + b)$$

$$P_1 = c\alpha_1\gamma_1 + d\alpha_1 + a\alpha_i\gamma_1 + b\gamma_1 + c\alpha_i\gamma_j + d\alpha_i + a\alpha_1\gamma_j + b\gamma_j$$

$$P_1 = (\alpha_i\gamma_1 + \alpha_1\gamma_j)a + (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_i\gamma_j)c + (\gamma_1 + \gamma_j)b + (\alpha_1 + \alpha_i)d \qquad (3.2.1)$$

Seja P_2 tal que:

$$\begin{matrix} \alpha_1 & & \gamma_1 & & \alpha_i & & \gamma_j & & \alpha_1 \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ \beta_1 & & \delta_1 & & \beta_i & & \delta_j & & \beta_1 \end{matrix}$$

$P_2 = \gamma_1\beta_1 + \alpha_i\delta_1 + \gamma_j\beta_i + \alpha_1\delta_j;$ $\quad \delta_1 = c\gamma_1 + d, \beta_i = a\alpha_i + b, \delta_j = c\gamma_j + d, \beta_1 = a\alpha_1 + b$

$$P_2 = \gamma_1(a\alpha_1 + b) + \alpha_i(c\gamma_1 + d) + \gamma_j(a\alpha_i + b) + \alpha_1(c\gamma_j + d)$$

$$P_2 = a\alpha_1\gamma_1 + b\gamma_1 + c\alpha_i\gamma_1 + d\alpha_i + a\alpha_i\gamma_j + b\gamma_j + c\alpha_1\gamma_j + d\alpha_1$$

$$P_2 = (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_i\gamma_j)a + (\alpha_i\gamma_1 + \alpha_1\gamma_j)c + (\gamma_1 + \gamma_j)b + (\alpha_1 + \alpha_i)d \tag{3.2.2}$$

Para $i \neq 1$, temos $\alpha_1 \neq \alpha_i$. Assim,

$$\begin{cases} \alpha_1\gamma_1 \neq \alpha_i\gamma_1 \\ \alpha_1\gamma_j \neq \alpha_i\gamma_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1\gamma_1 \neq \alpha_i\gamma_1 \\ \underline{\alpha_i\gamma_j \neq \alpha_1\gamma_j \qquad\qquad +} \\ \boxed{\alpha_1\gamma_1 + \alpha_i\gamma_j \neq \alpha_i\gamma_1 + \alpha_1\gamma_j} \end{cases}$$

Como a equação (3.2.1), nas condições dadas acima, é distinta da equação (3.2.2), então:

$$\boxed{P_1 \neq P_2}$$

Dessa forma, na disposição em colunas alternadas das coordenadas dos pontos de duas retas, temos, resumidamente:

1. $P_1 = P_2$ para duas retas paralelas;
2. $P_1 \neq P_2$ para duas retas concorrentes.

Com isso, podemos responder a pergunta abaixo:

Exemplo 3.2.1 “No infinito, duas retas paralelas se encontram?”

Sejam $r: y = ax + b$ e $s: y = ax + c, b \neq c$, retas paralelas não-coincidentes. Sejam os pontos $A_i(\alpha_i, \beta_i) \in r$ e $B_j(\gamma_j, \delta_j) \in s$, com $i, j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, tais que $\alpha_i \neq \alpha_j$ e $\gamma_i \neq \gamma_j$, se $i \neq j$. Assim, $\beta_i = a\alpha_i + b$ e $\delta_j = a\gamma_j + c$.

Seja P_1 tal que:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \alpha_1 & & \gamma_1 & & \alpha_2 & & \gamma_2 & & \alpha_n & & \gamma_n & & \alpha_1 \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \beta_1 & & \delta_1 & & \beta_2 & & \delta_2 & & \beta_n & & \delta_n & & \beta_1 \end{array}$$

Com $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}, \lim_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty, \lim_{n \to +\infty} \gamma_n = +\infty$.

$P_1 = \alpha_1\delta_1 + \gamma_1\beta_2 + \alpha_2\delta_2 + \gamma_2\beta_n + \alpha_n\delta_n + \gamma_n\beta_1$; com

$$\delta_1 = a\gamma_1 + c, \beta_2 = a\alpha_2 + b, \delta_2 = a\gamma_2 + c, \beta_n = a\alpha_n + b, \delta_n = a\gamma_n + c, \beta_1 = a\alpha_1 + b$$

$$P_1 = \alpha_1(a\gamma_1 + c) + \gamma_1(a\alpha_2 + b) + \alpha_2(a\gamma_2 + c) + \gamma_2(a\alpha_n + b) + \alpha_n(a\gamma_n + c) + \gamma_n(a\alpha_1 + b)$$

$$P_1 = a\alpha_1\gamma_1 + c\alpha_1 + a\alpha_2\gamma_1 + b\gamma_1 + a\alpha_2\gamma_2 + c\alpha_2 + a\alpha_n\gamma_2 + b\gamma_2 + a\alpha_n\gamma_n + c\alpha_n + a\alpha_1\gamma_n + b\gamma_n$$

$$P_1 = a(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_n\gamma_2 + \alpha_n\gamma_n + \alpha_1\gamma_n) + b(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_n) + c(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_n) \quad (3.2.3)$$

Seja P_2 tal que:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \alpha_1 & & \gamma_1 & & \alpha_2 & & \gamma_2 & & \alpha_n & & \gamma_n & & \alpha_1 \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ \beta_1 & & \delta_1 & & \beta_2 & & \delta_2 & & \beta_n & & \delta_n & & \beta_1 \end{array}$$

$$(n \to +\infty)$$

$$P_2 = \gamma_1\beta_1 + \alpha_2\delta_1 + \gamma_2\beta_2 + \alpha_n\delta_2 + \gamma_n\beta_n + \alpha_1\delta_n$$

Sendo $\delta_1 = a\gamma_1 + c, \beta_2 = a\alpha_2 + b, \delta_2 = a\gamma_2 + c, \beta_n = a\alpha_n + b, \delta_n = a\gamma_n + c, \beta_1 = a\alpha_1 + bP_2 = \gamma_1(a\alpha_1 + b) + \alpha_2(a\gamma_1 + c) + \gamma_2(a\alpha_2 + b) + \alpha_n(a\gamma_2 + c) + \gamma_n(a\alpha_n + b) + \alpha_1(a\gamma_n + c)$, temos:

$$P_2 = a\alpha_1\gamma_1 + b\gamma_1 + a\alpha_2\gamma_1 + c\alpha_2 + a\alpha_2\gamma_2 + b\gamma_2 + a\alpha_n\gamma_2 + c\alpha_n + a\alpha_n\gamma_n + b\gamma_n + a\alpha_1\gamma_n + c\alpha_1$$

$$P_2 = a(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_n\gamma_2 + \alpha_n\gamma_n + \alpha_1\gamma_n) + b(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_n) + c(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_n) \quad (3.2.4)$$

Como a equação (3.2.3) é igual à equação (3.2.4), então $P_1 = P_2$. Assim, r e s não são retas concorrentes e, portanto, não se encontram no infinito ou em qualquer outro lugar.

3.3 Retas Perpendiculares

Teorema 3.3.1 Seja uma reta $r: ax + by + c = 0$, com a e b não nulos. Então, existe uma reta s, perpendicular à r, que passa pela pelo ponto (x_0, y_0), tal que $s: bx - ay - (\, bx_0 - ay_0) = 0$.

Demonstração. Seja uma reta $r: ax + by + c = 0$. Então, existe uma reta s, perpendicular à r, que passa pela origem.

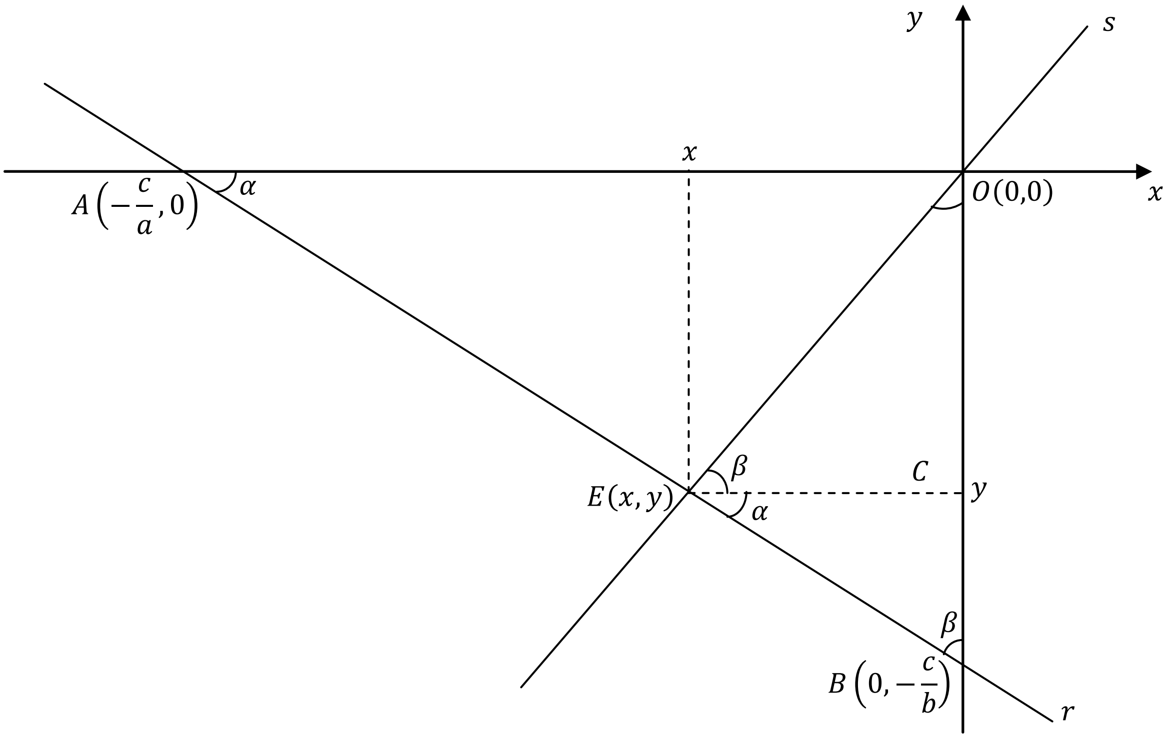


Gráfico 8: retas perpendiculares

Para o triângulo COE, temos a seguinte relação trigonométrica:

$$tg\beta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{c}{b}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{c} = \frac{b}{a} \Rightarrow bx = ay \Rightarrow bx - ay = 0$$

$$\therefore \boxed{s: bx - ay = 0}$$

Como qualquer reta t, perpendicular à r, é, necessariamente, paralela à s, temos:

$$t: bx - ay + k = 0$$

Se $P(x_0, y_0) \in t$, então

$$bx_0 - ay_0 + k = 0$$

$$k = -(\ bx_0 - ay_0)$$

$$\boxed{t: bx - ay - (\ bx_0 - ay_0) = 0} \qquad (3.3.1)$$

Exemplo 3.3.1 Encontre a equação geral da reta que passa pelo ponto $(3,4)$ e é perpendicular à reta $r: 7x + 2y + 1 = 0$.

Seja s a reta procurada. Então, usando-se o teorema 3.3.1, podemos encontra a equação geral de s:

$$s: 2x - 7y - (2 \cdot 3 - 7 \cdot 4) = 0$$

$$s: 2x - 7y - (-22) = 0$$

$$\boxed{s: 2x - 7y + 22 = 0}$$

Exemplo 3.3.2 Encontre a equação geral da reta que passa pelo ponto $(1, 6)$ e é perpendicular à reta $r: 3x - 5y + 4 = 0$.

Seja s a reta procurada. Então,

$$s: 5x + 3y - (5 \cdot 1 + 3 \cdot 6) = 0$$

$$\boxed{s: 5x + 3y - 23 = 0}$$

Quadro de resumo do capítulo. Portanto, temos, resumidamente, para uma dada reta t e um dado ponto $(x_0, y_0) \in t$,

$$\boxed{r \parallel t \begin{cases} r: ax + by + c = 0 \\ t: ax + by - (\ ax_0 + by_0) = 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{r \perp t \begin{cases} r: ax + by + c = 0 \\ t: bx - ay - (\ bx_0 - ay_0) = 0 \end{cases}}$$

Capítulo 4

Áreas de Polígonos Planos

4.1 Área de um triângulo. Considere o triângulo de vértices A, B e C.

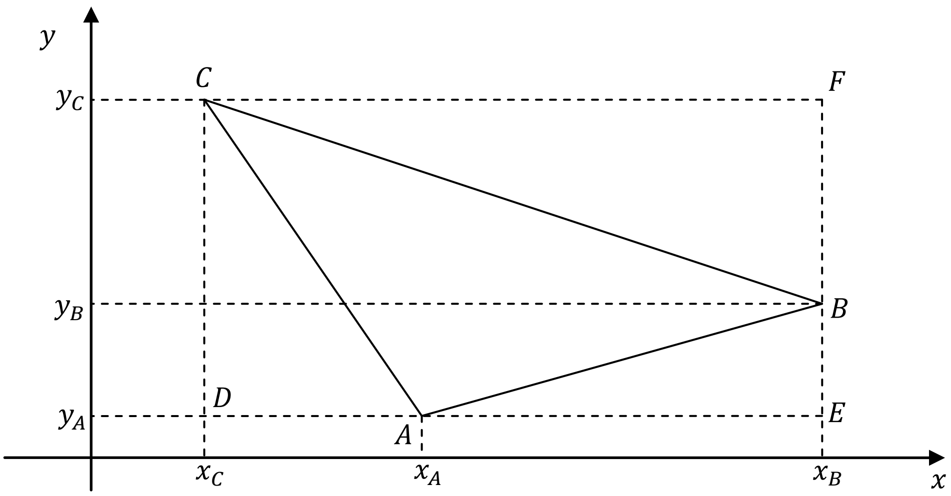


Gráfico 9: triângulo de vértices ABC

Seja A a área do triângulo ABC. Então,

$$A = \text{área do retângulo } CDEF - \text{área do triângulo } ABE - \text{área do triângulo } BCF - \text{área do triângulo } ACD$$

$$A = (x_B - x_C)(y_C - y_A) - \frac{1}{2}(x_B - x_A)(y_B - y_A) - \frac{1}{2}(x_B - x_C)(y_C - y_B) - \frac{1}{2}(x_A - x_C)(y_C - y_A)$$

Multiplicando-se por 2 a equação acima, temos:

$$2A = 2(x_B - x_C)(y_C - y_A) - (x_B - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_C)(y_C - y_B) - (x_A - x_C)(y_C - y_A)$$

Efetuando-se os cálculos dos produtos acima, encontramos:

$$2A = 2(x_B y_C - x_B y_A - x_C y_C + x_C y_A) - (x_B y_B - x_B y_A - x_A y_B + x_A y_A)$$
$$- (x_B y_C - x_B y_B - x_C y_C + x_C y_B) - (x_A y_C - x_A y_A - x_C y_C + x_C y_A)$$

$$2A = 2x_B y_C - 2x_B y_A - 2x_C y_C + 2x_C y_A - x_B y_B + x_B y_A + x_A y_B - x_A y_A - x_B y_C + x_B y_B$$
$$+ x_C y_C - x_C y_B - x_A y_C + x_A y_A + x_C y_C - x_C y_A$$

Cancelando-se os termos simétricos, vem:

$$2A = x_B y_C - x_B y_A + x_C y_A + x_A y_B - x_C y_B - x_A y_C$$

Desse modo, temos a seguinte relação para a área do triângulo ABC:

$$\boxed{2A = x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - (x_B y_A + x_C y_B + x_A y_C)}$$

Seja P_1 tal que:

$$\begin{array}{ccccccc} x_A & & x_B & & x_C & & x_A \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ y_A & & y_B & & y_C & & y_A \end{array}$$

$$P_1 = x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A \qquad (4.1.1)$$

Seja P_2 tal que:

$$\begin{array}{ccccccc} x_A & & x_B & & x_C & & x_A \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ y_A & & y_B & & y_C & & y_A \end{array}$$

$$P_2 = x_B y_A + x_C y_B + x_A y_C \qquad (4.1.2)$$

Observe que a diferença entre a equação $(4.1.1)$ e a equação $(4.1.2)$ é igual ao dobro da área do triângulo. Assim, temos:

$$\boxed{2A = P_1 - P_2}$$

4.2 Área de um quadrilátero. Considere o quadrilátero de vértices A, B, C e D.

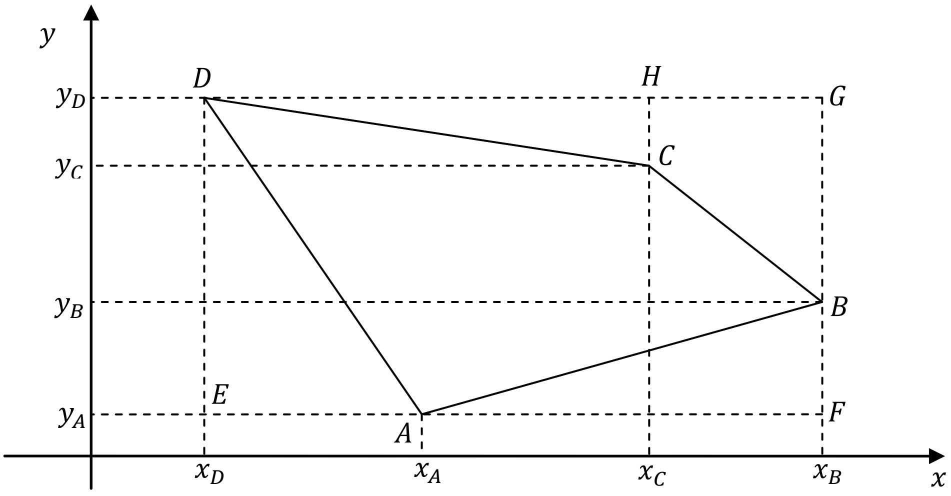


Gráfico 10: quadrilátero de vértices ABCD

Seja A a área do quadrilátero $ABCD$.

$$A = \text{área do retângulo } DEFG - \text{área do triângulo } ABF - \text{ área do triângulo } ADE - \text{área do triângulo } CDH - \text{área do trapézio } BCHG$$

$$A = (x_B - x_D)(y_D - y_A) - \frac{1}{2}(x_B - x_A)(y_B - y_A) - \frac{1}{2}(x_A - x_D)(y_D - y_A) - \frac{1}{2}(x_C - x_D)(y_D - y_C) - \frac{1}{2}(x_B - x_C)(y_D - y_B + y_D - y_C)$$

Multiplicando-se por 2 a equação acima, vem:

$$2A = 2(x_B - x_D)(y_D - y_A) - (x_B - x_A)(y_B - y_A) - (x_A - x_D)(y_D - y_A) - (x_C - x_D)(y_D - y_C) - (x_B - x_C)(2y_D - y_B - y_C)$$

$$2A = 2(x_By_D - x_By_A - x_Dy_D + x_Dy_A) - (x_By_B - x_By_A - x_Ay_B + x_Ay_A) - (x_Ay_D - x_Ay_A - x_Dy_D + x_Dy_A) - (x_Cy_D - x_Cy_C - x_Dy_D + x_Dy_C) - (2x_By_D - x_By_B - x_By_C - 2x_Cy_D + x_Cy_B + x_Cy_C)$$

Efetuando-se os produtos, temos:

$$2A = 2x_By_D - 2x_By_A - 2x_Dy_D + 2x_Dy_A - x_By_B + x_By_A + x_Ay_B - x_Ay_A - x_Ay_D + x_Ay_A + x_Dy_D - x_Dy_A - x_Cy_D + x_Cy_C + x_Dy_D - x_Dy_C - 2x_By_D + x_By_B + x_By_C + 2x_Cy_D - x_Cy_B - x_Cy_C$$

Cancelando-se os termos simétricos, encontramos:

$$2A = -x_B y_A + x_D y_A + x_A y_B - x_A y_D - x_D y_C + x_B y_C + x_C y_D - x_C y_B$$

Ou ainda,

$$2A = x_A y_B + x_B y_C + x_C y_D + x_D y_A - x_B y_A - x_C y_B - x_D y_C - x_A y_D$$

Assim,

$$\boxed{2A = x_A y_B + x_B y_C + x_C y_D + x_D y_A - (x_B y_A + x_C y_B + x_D y_C + x_A y_D)}$$

Seja P_1 o somatório dos produtos primários, tal que:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_A & & x_B & & x_C & & x_D & & x_A \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ y_A & & y_B & & y_C & & y_D & & y_A \end{array}$$

$$P_1 = x_A y_B + x_B y_C + x_C y_D + x_D y_A \qquad (4.2.1)$$

Seja P_2 o somatório dos produtos secundários, tal que:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_A & & x_B & & x_C & & x_D & & x_A \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ y_A & & y_B & & y_C & & y_D & & y_A \end{array}$$

$$P_2 = x_B y_A + x_C y_B + x_D y_C + x_A y_D \qquad (4.2.2)$$

Note que a diferença entre a equação (4.2.1) e a equação (4.2.2) é igual ao dobro da área do quadrilátero. Assim, temos:

$$\boxed{2A = P_1 - P_2}$$

4. 3 Teorema das áreas de polígonos

Teorema 4.3.1 Seja um polígono orientado no sentido anti-horário. Então, a área A desse polígono é dada por:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(P_1 - P_2)}$$

Demonstração. Seja um polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_n$, de n lados e vértice genérico $A_i, 1 \leq i \leq n$, com $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, como indicado abaixo:

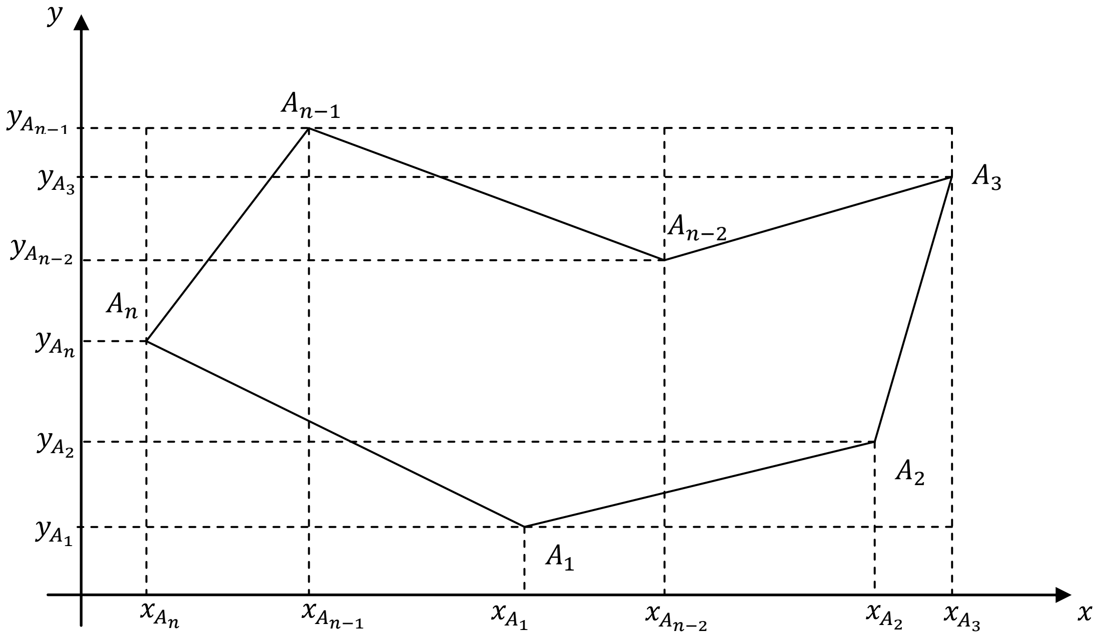


Gráfico 11: polígono de vértices $\boldsymbol{A_1A_2A_3 \cdots A_n}$

Seja A a área do polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_n$.

$$A = (x_{A_3} - x_{A_n})(y_{A_{n-1}} - y_{A_1}) - \frac{1}{2}(x_{A_2} - x_{A_1})(y_{A_2} - y_{A_1})$$
$$- \frac{1}{2}(x_{A_3} - x_{A_2})(y_{A_2} - y_{A_1} + y_{A_3} - y_{A_1}) - \cdots - \frac{1}{2}(x_{A_1} - x_{A_n})(y_{A_n} - y_{A_1})$$
$$- \frac{1}{2}(x_{A_{n-1}} - x_{A_n})(y_{A_{n-1}} - y_{A_n}) - \frac{1}{2}(x_{A_3} - x_{A_{n-2}})(y_{A_{n-1}} - y_{A_3} + y_{A_{n-1}}$$
$$- y_{A_{n-2}}) - \frac{1}{2}\ (x_{A_{n-2}} - x_{A_{n-1}})(y_{A_{n-1}} - y_{A_{n-2}})$$

Multiplicando-se por 2 a equação acima, temos:

$$2A = 2(x_{A_3} - x_{A_n})(y_{A_{n-1}} - y_{A_1}) - (x_{A_2} - x_{A_1})(y_{A_2} - y_{A_1})$$
$$- (x_{A_3} - x_{A_2})(y_{A_2} - 2y_{A_1} + y_{A_3}) - \cdots - (x_{A_1} - x_{A_n})(y_{A_n} - y_{A_1})$$
$$- (x_{A_{n-1}} - x_{A_n})(y_{A_{n-1}} - y_{A_n}) - (x_{A_3} - x_{A_{n-2}})(2y_{A_{n-1}} - y_{A_3} - y_{A_{n-2}})$$
$$- (x_{A_{n-2}} - x_{A_{n-1}})(y_{A_{n-1}} - y_{A_{n-2}})$$

Efetuando-se os produtos, vem:

$$2A = 2\left(x_{A_3}y_{A_{n-1}} - x_{A_3}y_{A_1} - x_{A_n}y_{A_{n-1}} + x_{A_n}y_{A_1}\right) - \left(x_{A_2}y_{A_2} - x_{A_2}y_{A_1} - x_{A_1}y_{A_2} + x_{A_1}y_{A_1}\right)$$
$$- \left(x_{A_3}y_{A_2} - 2x_{A_3}y_{A_1} + x_{A_3}y_{A_3} - x_{A_2}y_{A_2} + 2x_{A_2}y_{A_1} - x_{A_2}y_{A_3}\right) - \cdots$$
$$- \left(x_{A_1}y_{A_n} - x_{A_1}y_{A_1} - x_{A_n}y_{A_n} + x_{A_n}y_{A_1}\right)$$
$$- \left(x_{A_{n-1}}y_{A_{n-1}} - x_{A_{n-1}}y_{A_n} - x_{A_n}y_{A_{n-1}} + x_{A_n}y_{A_n}\right)$$
$$- \left(2x_{A_3}y_{A_{n-1}} - x_{A_3}y_{A_3} - x_{A_3}y_{A_{n-2}} - 2x_{A_{n-2}}y_{A_{n-1}} + x_{A_{n-2}}y_{A_3} + x_{A_{n-2}}y_{A_{n-2}}\right)$$
$$- (x_{A_{n-2}}y_{A_{n-1}} - x_{A_{n-2}}y_{A_{n-2}} - x_{A_{n-1}}y_{A_{n-1}} + x_{A_{n-1}}y_{A_{n-2}})$$

Equivalentemente, temos:

$$2A = 2x_{A_3}y_{A_{n-1}} - 2x_{A_3}y_{A_1} - 2x_{A_n}y_{A_{n-1}} + 2x_{A_n}y_{A_1} - x_{A_2}y_{A_2} + x_{A_2}y_{A_1} + x_{A_1}y_{A_2} - x_{A_1}y_{A_1}$$
$$- x_{A_3}y_{A_2} + 2x_{A_3}y_{A_1} - x_{A_3}y_{A_3} + x_{A_2}y_{A_2} - 2x_{A_2}y_{A_1} + x_{A_2}y_{A_3} - \cdots - x_{A_1}y_{A_n}$$
$$+ x_{A_1}y_{A_1} + x_{A_n}y_{A_n} - x_{A_n}y_{A_1} - x_{A_{n-1}}y_{A_{n-1}} + x_{A_{n-1}}y_{A_n} + x_{A_n}y_{A_{n-1}} - x_{A_n}y_{A_n}$$
$$- 2x_{A_3}y_{A_{n-1}} + x_{A_3}y_{A_3} + x_{A_3}y_{A_{n-2}} + 2x_{A_{n-2}}y_{A_{n-1}} - x_{A_{n-2}}y_{A_3} - x_{A_{n-2}}y_{A_{n-2}}$$
$$- x_{A_{n-2}}y_{A_{n-1}} + x_{A_{n-2}}y_{A_{n-2}} + x_{A_{n-1}}y_{A_{n-1}} - x_{A_{n-1}}y_{A_{n-2}}$$

Cancelando-se os termos simétricos, encontramos:

$$2A = x_{A_1}y_{A_2} - x_{A_3}y_{A_2} - x_{A_2}y_{A_1} + x_{A_2}y_{A_3} - \cdots - x_{A_n}y_{A_{n-1}} + x_{A_n}y_{A_1} - x_{A_1}y_{A_n} + x_{A_{n-1}}y_{A_n}$$
$$+ x_{A_3}y_{A_{n-2}} + x_{A_{n-2}}y_{A_{n-1}} - x_{A_{n-2}}y_{A_3} - x_{A_{n-1}}y_{A_{n-2}}$$

Portanto, a área do polígono $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ é dada por:

$$2A = (x_{A_1}y_{A_2} + x_{A_2}y_{A_3} + \cdots + x_{A_3}y_{A_{n-2}} + x_{A_{n-2}}y_{A_{n-1}} + x_{A_{n-1}}y_{A_n} + x_{A_n}y_{A_1}) - (x_{A_2}y_{A_1}$$
$$+ x_{A_3}y_{A_2} + \cdots + x_{A_{n-2}}y_{A_3} + x_{A_{n-1}}y_{A_{n-2}} + x_{A_n}y_{A_{n-1}} + x_{A_1}y_{A_n})$$

Seja P_1 o somatório dos produtos primários, tal que:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_{A_1} & & x_{A_2} & & x_{A_3} & \cdots & x_{A_{n-2}} & & x_{A_{n-1}} & & x_{A_n} & & x_{A_1} \\ & \searrow & & \searrow & & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ y_{A_1} & & y_{A_2} & & y_{A_3} & \cdots & y_{A_{n-2}} & & y_{A_{n-1}} & & y_{A_n} & & y_{A_1} \end{array}$$

$$P_1 = x_{A_1}y_{A_2} + x_{A_2}y_{A_3} + \cdots + x_{A_{n-2}}y_{A_{n-1}} + x_{A_{n-1}}y_{A_n} + x_{A_n}y_{A_1}$$

Seja P_2 o somatório dos produtos secundários, tal que:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_{A_1} & & x_{A_2} & & x_{A_3} & \cdots & x_{A_{n-2}} & & x_{A_{n-1}} & & x_{A_n} & & x_{A_1} \\ & \swarrow & & \swarrow & & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ y_{A_1} & & y_{A_2} & & y_{A_3} & \cdots & y_{A_{n-2}} & & y_{A_{n-1}} & & y_{A_n} & & y_{A_1} \end{array}$$

$$P_2 = x_{A_2}y_{A_1} + x_{A_3}y_{A_2} + \cdots + x_{A_{n-1}}y_{A_{n-2}} + x_{A_n}y_{A_{n-1}} + x_{A_1}y_{A_n}$$

Assim, temos:

$$2A = P_1 - P_2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}(P_1 - P_2)} \qquad \blacksquare$$

4.3.1 Percurso anti-horário dos lados de um polígono

Lema 4.3.1.1 A diferença entre o somatório dos produtos primários e o somatório dos produtos secundários para um percurso no *sentido anti-horário* dos lados de um polígono é positiva.

Demonstração. Seja $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ um polígono de n lados e vértice genérico A_i, com $1 \leq i \leq n$, para $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Considere ainda o percurso orientado no *sentido anti-horário*, como indicado na figura abaixo.

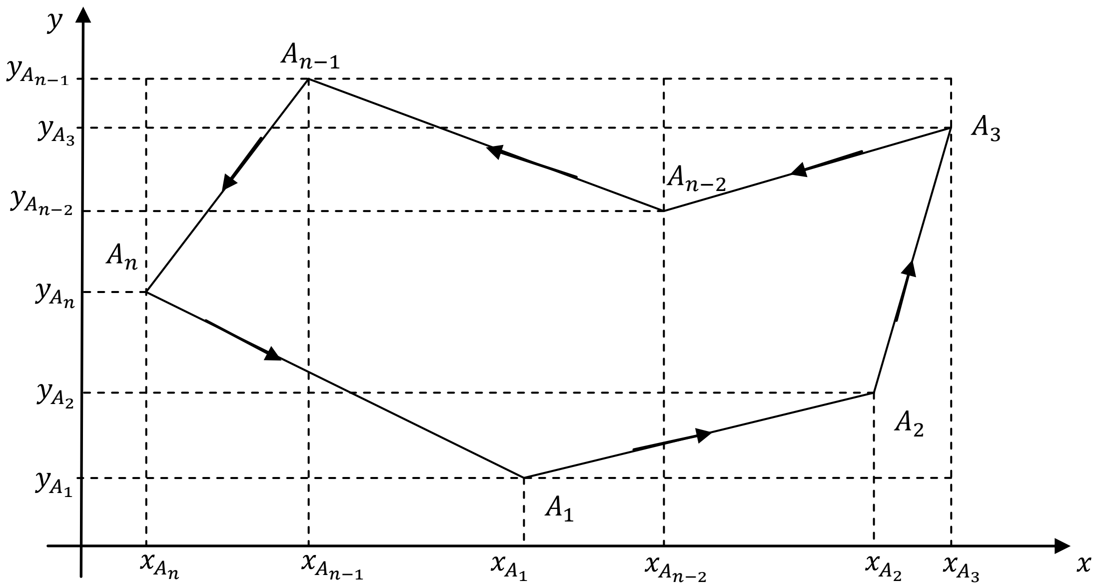


Gráfico 12: orientação no sentido anti-horário

Seja P_1 tal que:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_{A_1} & & x_{A_2} & & x_{A_3} & \cdots & x_{A_{n-2}} & & x_{A_{n-1}} & & x_{A_n} & & x_{A_1} \\ & \searrow & & \searrow & & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ y_{A_1} & & y_{A_2} & & y_{A_3} & \cdots & y_{A_{n-2}} & & y_{A_{n-1}} & & y_{A_n} & & y_{A_1} \end{array}$$

$$P_1 = x_{A_1}y_{A_2} + x_{A_2}y_{A_3} + \cdots + x_{A_{n-2}}y_{A_{n-1}} + x_{A_{n-1}}y_{A_n} + x_{A_n}y_{A_1}$$

Seja P_2 tal que:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{A_1} & & x_{A_2} & & x_{A_3} & \cdots & x_{A_{n-2}} & & x_{A_{n-1}} & & x_{A_n} & & x_{A_1} \\
 & \swarrow & & \swarrow & & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
y_{A_1} & & y_{A_2} & & y_{A_3} & \cdots & y_{A_{n-2}} & & y_{A_{n-1}} & & y_{A_n} & & y_{A_1}
\end{array}$$

$$P_2 = x_{A_2}y_{A_1} + x_{A_3}y_{A_2} + \cdots + x_{A_{n-1}}y_{A_{n-2}} + x_{A_n}y_{A_{n-1}} + x_{A_1}y_{A_n}$$

Como $2A = P_1 - P_2$, a diferença $P_1 - P_2$ sempre será positiva para o percurso no sentido anti-horário dos lados de um polígono, já que A é estritamente positivo.

4.3.2 Percurso horário dos lados de um polígono

Lema 4.3.2.1 A diferença entre o somatório dos produtos primários e o somatório dos produtos secundários para um percurso no *sentido horário* dos lados de um polígono é negativa.

Demonstração. Seja $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ um polígono de n lados e vértice genérico A_i, com $1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Considere também o percurso orientado no *sentido horário*, como indicado na figura abaixo.

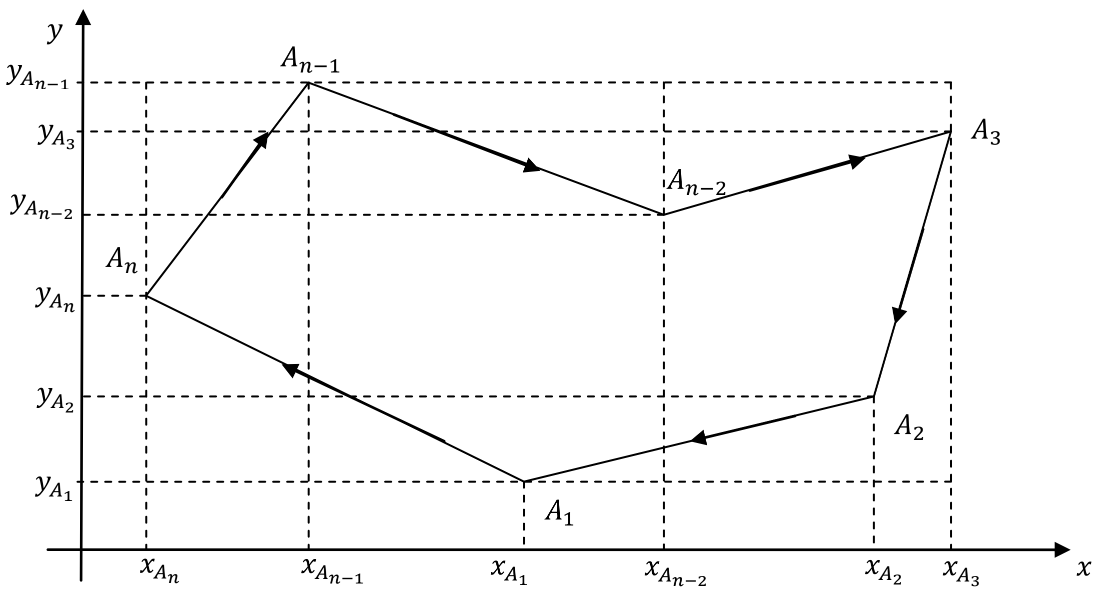


Gráfico 13: orientação no sentido horário

Seja $\overline{P_1}$ o somatório dos produtos primários no sentido horário do percurso dos lados polígono acima, tal que:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_{A_1} & & x_{A_n} & & x_{A_{n-1}} & & x_{A_{n-2}} & \cdots & x_{A_3} & & x_{A_2} & & x_{A_1} \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & \searrow & & \searrow & \\ y_{A_1} & & y_{A_n} & & y_{A_{n-1}} & & y_{A_{n-2}} & \cdots & y_{A_3} & & y_{A_2} & & y_{A_1} \end{array}$$

$$\overline{P_1} = x_{A_1}y_{A_n} + x_{A_n}y_{A_{n-1}} + x_{A_{n-1}}y_{A_{n-2}} + \cdots + x_{A_3}y_{A_2} + x_{A_2}y_{A_1}$$

Seja $\overline{P_2}$ o somatório dos produtos secundários no sentido horário do percurso dos lados polígono acima, tal que:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_{A_1} & & x_{A_n} & & x_{A_{n-1}} & & x_{A_{n-2}} & \cdots & x_{A_3} & & x_{A_2} & & x_{A_1} \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & \swarrow & & \swarrow & \\ y_{A_1} & & y_{A_n} & & y_{A_{n-1}} & & y_{A_{n-2}} & \cdots & y_{A_3} & & y_{A_2} & & y_{A_1} \end{array}$$

$$\overline{P_2} = x_{A_n}y_{A_1} + x_{A_{n-1}}y_{A_n} + x_{A_{n-2}}y_{A_{n-1}} + \cdots + x_{A_2}y_{A_3} + x_{A_1}y_{A_2}$$

Como

$$2A = (x_{A_1}y_{A_2} + x_{A_2}y_{A_3} + \cdots + x_{A_3}y_{A_{n-2}} + x_{A_{n-2}}y_{A_{n-1}} + x_{A_{n-1}}y_{A_n} + x_{A_n}y_{A_1}) - (x_{A_2}y_{A_1} + x_{A_3}y_{A_2} + \cdots + x_{A_{n-2}}y_{A_3} + x_{A_{n-1}}y_{A_{n-2}} + x_{A_n}y_{A_{n-1}} + x_{A_1}y_{A_n})$$

então

$$\boxed{2A = \overline{P_2} - \overline{P_1}}$$

Desse modo, a diferença $\overline{P_1} - \overline{P_2}$ é sempre negativa para o percurso horário dos lados de um polígono, pois $2A > 0 \Rightarrow \overline{P_2} - \overline{P_1} > 0 \Rightarrow -\overline{P_1} + \overline{P_2} > 0 \Rightarrow \overline{P_1} - \overline{P_2} < 0$

Contudo, $\overline{P_2} - \overline{P_1} = P_1 - P_2$

Daí, concluímos:

$$\boxed{P_1 - P_2 = -(\overline{P_1} - \overline{P_2})}$$

Teorema 4.3.2 Para um polígono percorrido no sentido anti-horário, o somatório dos produtos primários sempre será maior que o somatório dos produtos secundários.

Demonstração. Como $2A = P_1 - P_2$ e $A > 0$, vem: $2A > 0 \Rightarrow P_1 - P_2 > 0 \Rightarrow P_1 > P_2$, como queríamos demonstrar.

Corolário 4.3.2.1 Para todo polígono, o somatório dos produtos primários é totalmente diferente do somatório dos produtos secundários.

Observação 4.3.2.1 Todo polígono possui área. Não existe polígono de área negativa ou nula. Assim, se ocorrer $P_1 - P_2 = 0$, trata-se de uma reta, e não de um polígono (reta não é polígono), pois os pontos de uma reta são, obviamente, colineares, ou seja, $P_1 = P_2$.

Exemplo 4.3.1 Calcule a área do polígono de vértices $(-4, -1)$, $(3, 1)$, $(2, 4)$, $(-1, 2)$ e $(1, 5)$.

Solução 1. Representemos o polígono dado no gráfico abaixo e indiquemos seus vértices por $A(-4, -1), B(3, 1), C(2, 4), D(-1, 2)$ e $E(1, 5)$ e dividamo-no em três triângulos, indicados por Δ_{BCD}, Δ_{ABD} e Δ_{ADE}.

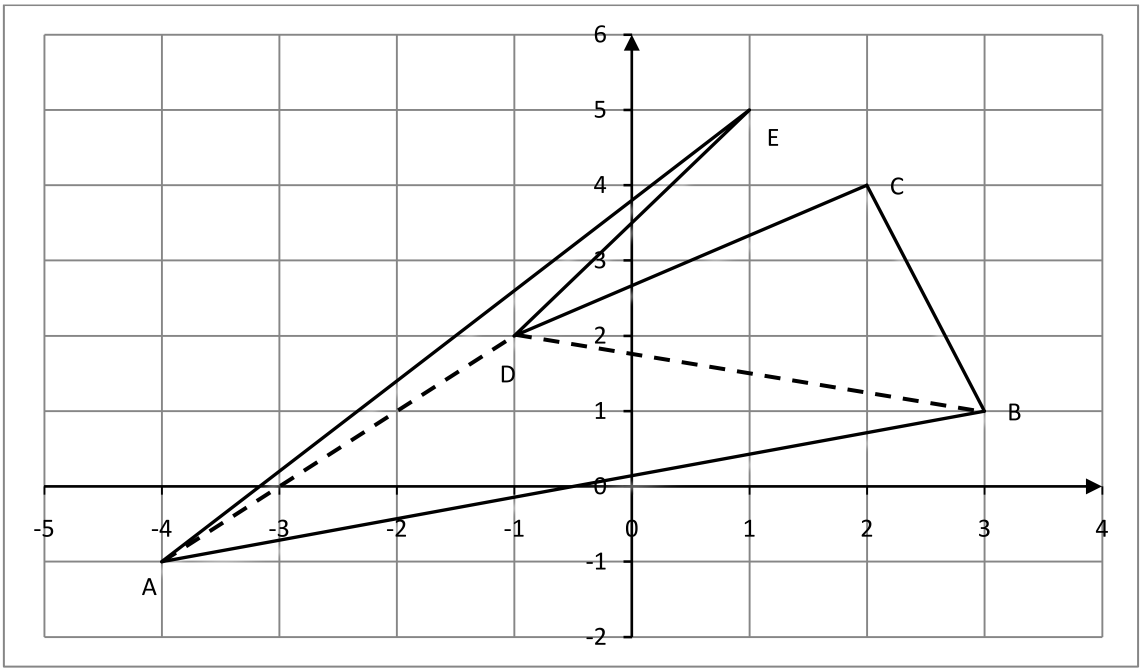


Gráfico 14: polígono de vértices ABCDE

Na tradicional Geometria Analítica Plana, a área S de um triângulo de vértices A, B e C é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |D_{ABC}| \; (IEZZI, 1979, p. 84)$$

Em que

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} (IEZZI, 1979, p. 84)$$

Dessa forma, a área A do polígono $ABCDE$ é dada por:

$$A = \text{área}(\Delta_{BCD}) + \text{área}(\Delta_{ABD}) + \text{área}(\Delta_{ADE})$$

$$A = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix}\right\| + \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix}\right\| + \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{matrix}\right\|$$

$$A = \frac{1}{2}|12 - 1 + 4 + 4 - 6 - 2| + \frac{1}{2}|-4 + 1 + 6 + 1 + 8 + 3|$$

$$+ \frac{1}{2}|-8 - 1 - 5 - 2 + 20 - 1|$$

$$A = \frac{1}{2}|11| + \frac{1}{2}|15| + \frac{1}{2}|3| \Rightarrow \boxed{A = \frac{29}{2} u.a.}$$

Solução 2. Representemos o polígono dado no gráfico abaixo e indiquemos seus vértices por $A(-4, -1), B(3, 1), C(2, 4), D(-1, 2)$ e $E(1, 5)$. Observe que adotamos o sentido anti-horário para o percurso dos lados do polígono, porque esse sentido sempre produz o valor absoluto da diferença entre o somatório dos produtos primários e o somatório dos produtos secundários.

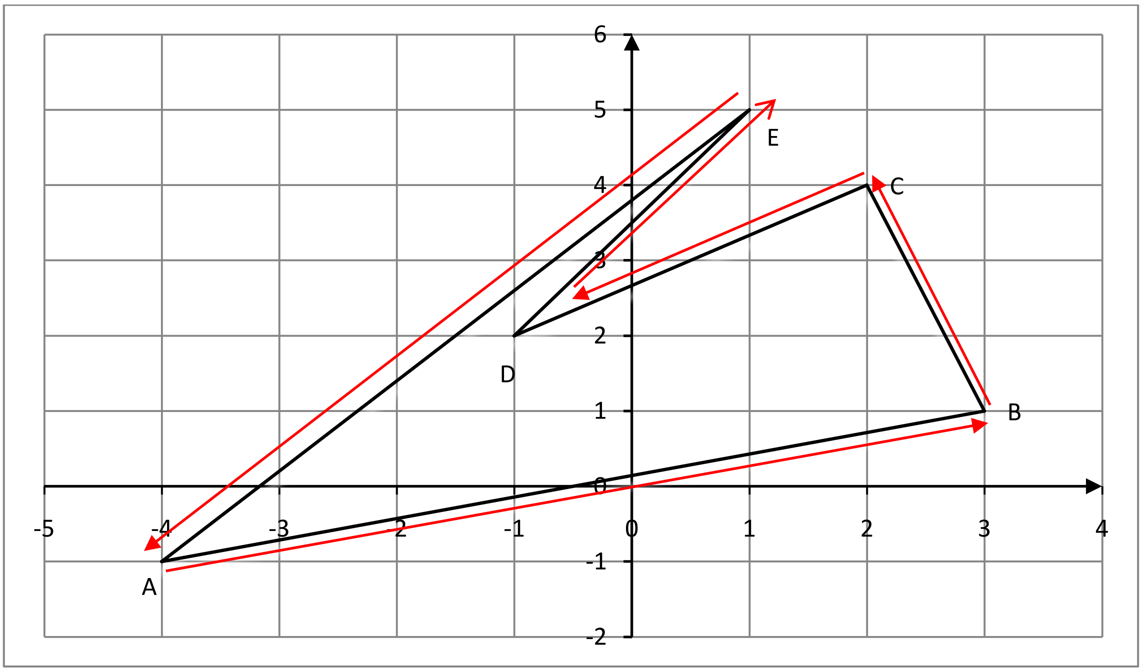


Gráfico 15: polígono orientado ABCDE

Usando-se o dispositivo de áreas de polígonos, encontramos:

$$\begin{array}{ccccccccccc} -4 & & 3 & & 2 & & -1 & & 1 & & -4 \\ & \times & & \times & & \times & & \times & & \times & \\ -1 & & 1 & & 4 & & 2 & & 5 & & -1 \end{array}$$

$$2A = -4 + 12 + 4 - 5 - 1 + 3 - 2 + 4 - 2 + 20 = 29$$

$$\boxed{A = \frac{29}{2} u.a.}$$

Exemplo 4.3.2 Calcule a área da figura $ABCDEFGHI$ abaixo.

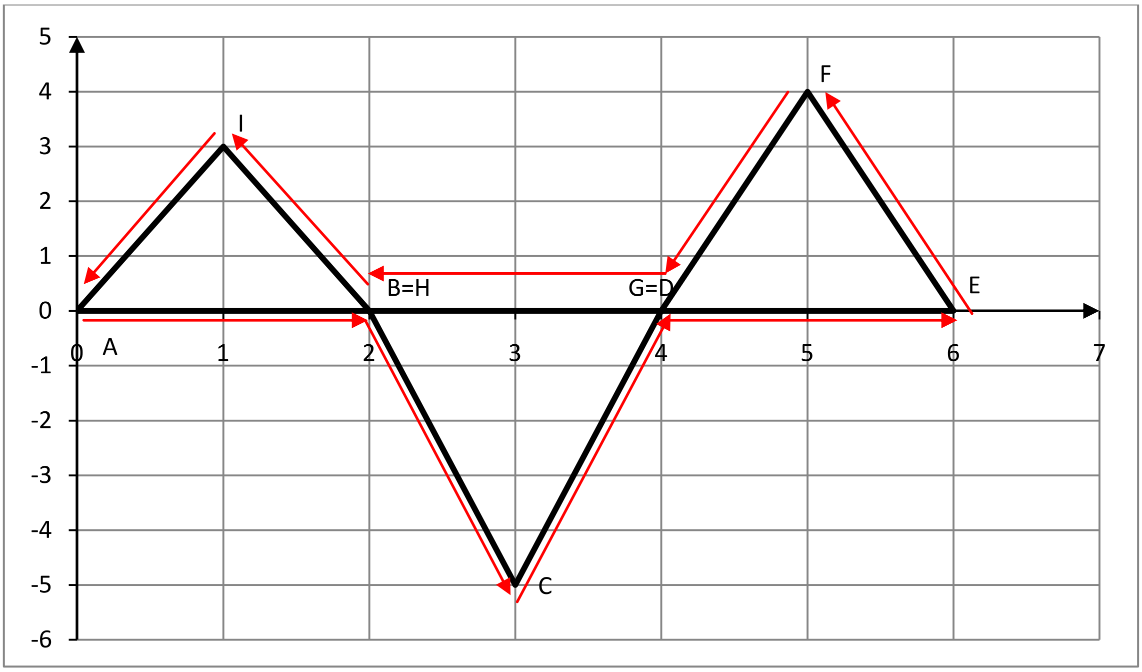


Gráfico 16: polígono orientado ABCDEFGHI

Aplicando-se o dispositivo de coordenadas de pontos para o polígono dado, temos:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} 0 & & 2 & & 3 & & 4 & & 6 & & 5 & & 4 & & 2 & & 1 & & 0 \\ & \times & & \times & & \times & & \times & & \times & & \times & & \times & & \times & & \times & \\ 0 & & 0 & & -5 & & 0 & & 0 & & 4 & & 0 & & 0 & & 3 & & 0 \end{array}$$

$$2A = -10 + 24 + 6 + 20 - 16$$

$$\boxed{A = 12\; u.a.}$$

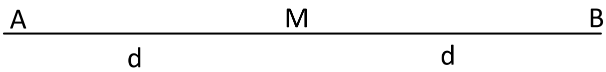
Capítulo 5

Aplicações

Com as aplicações a seguir, demonstraremos a validade do dispositivo de coordenadas de pontos do plano para diferentes tópicos da Matemática e da Física e, com isso, esperamos que esta monografia sirva de inspiração para estudo e pesquisa, assim como esperamos que apareçam novas aplicações para o dispositivo.

5.1 Ponto médio

Seja M o ponto médio do segmento de extremos A e B. Sejam m, α e β, respectivamente, componentes quaisquer de *M*, *A* e *B*, para um mesmo eixo. Como os pontos *M*, *A* e *B* são colineares, vem:



$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & & m & & \beta & & \alpha \\ & \times & & \times & & \times & \\ 0 & & d & & 2d & & 0 \end{array}$$

$$d\alpha + 2dm = d\beta + 2d\alpha$$

$$2m = \beta + \alpha$$

$$\boxed{m = \frac{\beta + \alpha}{2}}$$

Assim,

$$\boxed{M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

Exemplo 5.1.1 Determine o ponto médio do segmento de extremos $A(1,5)$ e $B(8,7)$.

Seja M o ponto médio do segmento de extremos $A(1,5)$ e $B(8,7)$.

Assim,

$$M = \left(\frac{1+8}{2}, \frac{5+7}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{12}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, 6\right)$$

5.2 Baricentro de um triângulo

Seja o triângulo de vértices A, B e C, cujo baricentro é o ponto G. Sejam α, β, γ, m e g, respectivamente, componentes quaisquer de A, B, C, M e G, para um mesmo eixo.

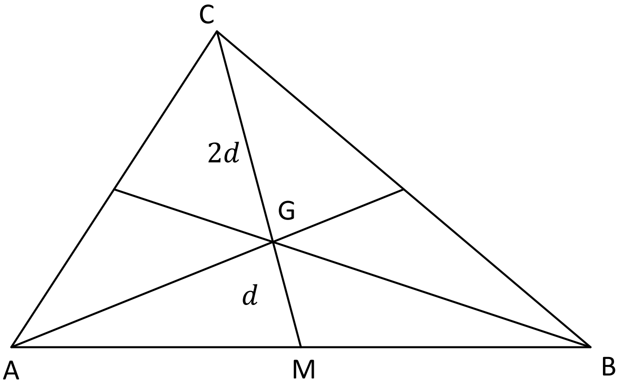


Figura 1: baricentro G do triângulo ABC

Como C, G e M são colineares, vem:

$$\begin{matrix} \gamma & & g & & m & & \gamma \\ & \times & & \times & & \times & \\ 0 & & 2d & & 3d & & 0 \end{matrix}$$

$$2d\gamma + 3gd = 2md + 3\gamma d$$

Como M é ponto médio de $\overline{AB}$, vem:

$$m = \frac{\beta + \alpha}{2}$$

Daí,

$$3gd = 2\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right)d + \gamma d$$

$$3g = \alpha + \beta + \gamma$$

$$\boxed{g = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}}$$

Assim,

$$\boxed{G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)}$$

Exemplo 5.2.1 Considere o triângulo de vértices $A(1,3)$, $B(4,7)$ e $C(-2,-1)$. Calcule o baricentro desse triângulo.

Chamemos o baricentro do triângulo de vértices $A(1,3)$, $B(4,7)$ e $C(-2,-4)$ de G.

Assim,

$$G = \left(\frac{1 + 4 - 2}{3}, \frac{3 + 7 - 4}{3}\right) = \left(\frac{3}{3}, \frac{6}{3}\right) = (1,2)$$

5.3 Interpretação geométrica de uma progressão aritmética

5.3.1 Progressão aritmética (P. A.).

Definição

Chama-se *seqüência finita ou n-upla* toda aplicação f do conjunto

$\mathbb{N}_n^* = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ em ℝ.

Assim, em toda seqüência finita, a cada número $i(1 \leq i \leq n)$ está associado um número real a_i

$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (n, a_n)\}$.

Definição

Chama-se progressão aritmética (P. A.) uma seqüência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

onde a e r são números reais dados.

Assim, uma P. A. é uma seqüência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada. (IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel, 1977, p 1-D)

Teorema 5.3.1.1 Sejam a ordem n e o termo-geral a_n de uma P. A. de razão r. Seja ainda o conjunto dos pontos dados por $P = \{(n, a_n) \in \mathbb{R}^2;\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$. Então, os pontos $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$, ... , (n, a_n) são colineares.

Demonstração. Seja t uma reta que contenha os pontos $(1, a_1)$ e $(2, a_2)$. Seja $T = (x, y)$ um ponto qualquer de t. Então, os pontos $(1, a_1)$, $(2, a_2)$ e (x, y)são colineares. Dessa forma, podemos encontrar a equação reduzida da reta t:

$$\begin{matrix} 1 & & 2 & & x & & 1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ a_1 & & a_2 & & y & & a_1 \end{matrix}$$

$$a_2 + 2y + xa_1 = 2a_1 + xa_2 + y$$

Da definição de P. A., temos:

$$a_2 = a_1 + r$$

Assim,

$$a_1 + r + 2y + xa_1 = 2a_1 + x(a_1 + r) + y$$

$$a_1 + r + y + xa_1 = 2a_1 + xa_1 + xr$$

$$y = xr + a_1 - r$$

$$\boxed{t: y = rx + (a_1 - r)}$$

Provemos que, para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $(n, a_n) \in t: y = f(x) = rx + a_1 - r$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pelo Princípio da Indução Finita,

I) Para $x = 1$, temos: $f(1) = r \cdot 1 + a_1 - r = r + a_1 - r = a_1 \therefore (1, a_1) \in t$ (sentença verdadeira);

II) Admitamos a validade da relação para $x = n$: $f(n) = rn + a_1 - r = a_n$, $(n, a_n) \in t$ (hipótese de indução) e provemos que vale para $x = n + 1$:

$$f(n+1) = r(n+1) + a_1 - r = rn + r + a_1 - r = (rn + a_1 - r) + r$$

$$f(n+1) = a_n + r$$

Pela definição de P. A., temos:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Assim,

$$f(n+1) = a_{n+1}$$

Então,

$$(n+1, a_{n+1}) \in t$$

Portanto,

$$\boxed{(n, a_n) \in t, \forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}}$$

Assim, P é subconjunto de t. Então, os pontos $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$,...,(n, a_n) são colineares. ■

Exemplo 5.3.1.1 Mostrar que os três primeiros termos de uma P. A., de razão r, são componentes de pontos colineares.

Seja a referida P. A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Assim, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_1 \end{array}$$

$$a_2 + 2a_3 + 3a_1 = 2a_1 + 3a_2 + a_3$$

$$a_1 + a_3 = 2a_2$$

$$a_1 + a_2 + r = 2a_2 \Rightarrow \boxed{a_1 + r = a_2}$$

5.3.2 Determinação do termo-geral de uma P. A.

Nota 5.3.2.1 Podemos encontrar a fórmula do termo-geral de uma P. A. pelo dispositivo de coordenadas cartesianas de pontos do plano.

Demonstração. Como o primeiro, o segundo e o n-ésimo termos de uma P. A. são componentes de pontos colineares, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & n & & 1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ a_1 & & a_1 + r & & a_n & & a_1 \end{array}$$

$$a_1 + r + 2a_n + na_1 = 2a_1 + na_1 + nr + a_n$$

$$a_n = a_1 + nr - r$$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

Questão 5.3.2.1 O sexto e o décimo termos de uma P. A. são, respectivamente, iguais a 20 e 32. Calcule o primeiro termo desta P. A.

Solução. Inserindo-se os dados da questão no dispositivo, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} 6 & & 10 & & 1 & & 6 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 20 & & 32 & & a_1 & & 20 \end{array}$$

$$192 + 10a_1 + 20 = 200 + 32 + 6a_1$$

$$4a_1 = 232 - 212$$

$$4a_1 = 20 \Rightarrow \boxed{a_1 = 5}$$

Questão 5.3.2.2 (Unifap – Concurso PM/BM) Considere um quadrado de lado de 1 cm e vértices ABCD. Agora tomemos um ponto, $X \in AB$, tal que $AXD = 2XBC$ e $Y \in BC$, tal que DY seja perpendicular a XC.

Qual é a área do triângulo DXM, sendo M o ponto de intersecção de DY com XC?

(a) $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{20}}$

(b) $\frac{7}{20}$

(c) $\frac{1}{2}$

(d) $\frac{1}{3}$

(e) $\frac{2}{3}$

Solução. Considere o quadrado de vértices $ABCD$, indicado na questão, num sistema de eixos cartesianos.

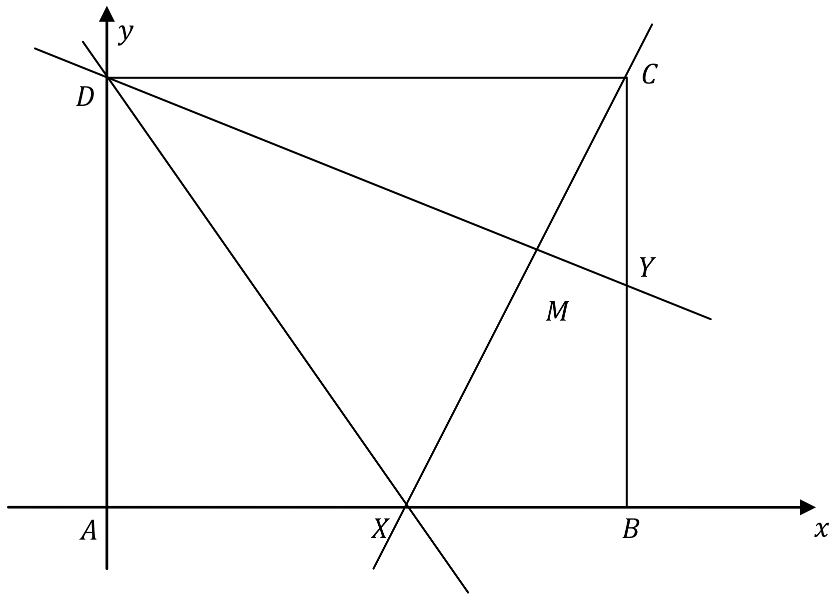


Figura 2: quadrado ABCD

Sejam A_1 e A_2, respectivamente, as áreas dos triângulos AXD e XBC. Sejam também os pontos $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$ e $X(\alpha, 0)$.

Assim, pode-se calcular a área do triângulo AXD pelo dispositivo abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & c & & 0 & & 0 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 0 & & 0 & & 1 & & 0 \end{array}$$

$$2A_1 = \alpha$$

Analogamente, para o triângulo XBC, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & & 1 & & 1 & & \alpha \\ & \times & & \times & & \times & \\ 0 & & 0 & & 1 & & 0 \end{array}$$

$$2A_2 = 1 - \alpha$$

Como $AXD = 2XBC$, $AXD = A_1$ e $XBC = A_2$, vem:

$$A_1 = 2A_2$$

Daí,

$$2A_1 = 2(2A_2)$$

$$\alpha = 2(1 - \alpha\ )$$

$$\alpha = 2 - 2\alpha$$

$$3\alpha = 2$$

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

Os pontos (x, y), $C(1, 1)$ e $X\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ pertencem à reta $\overleftrightarrow{XC}$, portanto:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2/3 & & x & & 1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 1 & & 0 & & y & & 1 \end{array}$$

$$\frac{2}{3}y + x = \frac{2}{3} + y$$

$$2y + 3x = 2 + 3y$$

$$\boxed{3x - y - 2 = 0}$$

A reta $\overleftrightarrow{XC}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{DY}$. Além disso, obviamente, $D(0, 1) \in \overleftrightarrow{DY}$. Assim,

$$x + 3y - (x_D + 3y_D) = 0$$

$$x + 3y - (0 + 3 \cdot 1) = 0 \Rightarrow \boxed{x + 3y - 3 = 0}$$

O ponto M é a interseção entre as retas $\overleftrightarrow{XC}$ e $\overleftrightarrow{DY}$, portanto,

$$\begin{cases} 3x_M - y_M - 2 = 0 \\ x_M + 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x_M - 3y_M - 6 = 0 \\ x_M + 3y_M - 3 = 0 \end{cases}$$

$$10x_M - 9 = 0$$

$$x_M = \frac{9}{10}$$

$$y_M = 3x_M - 2$$

$$y_M = 3\left(\frac{9}{10}\right) - 2 = \frac{27}{10} - 2 = \frac{27 - 20}{10} = \frac{7}{10}$$

Assim,

$$M = \left(\frac{9}{10}, \frac{7}{10}\right)$$

Finalmente, a área A do triângulo de vértices DXM pode ser calculada por:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 2/3 & & 9/10 & & 0 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 1 & & 0 & & 7/10 & & 1 \end{array}$$

$$2A = \frac{14}{30} + \frac{9}{10} - \frac{2}{3} = \frac{14 + 27 - 20}{30} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

$$\boxed{A = \frac{7}{20} u.a.}$$

5.4 Aplicações na Física

Na Física Clássica, uma partícula que se movimenta em movimento uniformemente variado tem equação horária da velocidade dada por:

$$\boxed{v(t) = v_0 + at} \tag{5.4.1}$$

Na equação (5.4.1), $v(t)$ representa a velocidade da partícula em função de um instante $t \geq 0$, v_0 indica a velocidade inicial da partícula antes de sofrer a ação de uma força de aceleração constante a.

Assim, o gráfico da função horária da velocidade é o seguinte:

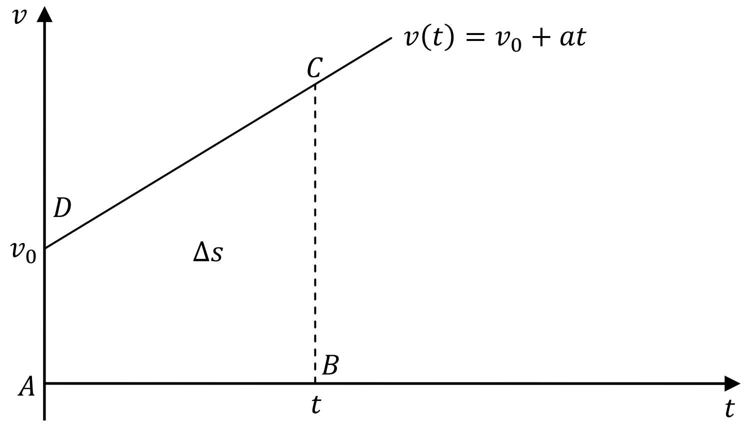


Gráfico 17: função horária da velocidade

A área do polígono de vértices $A(0,0)$, $B(t,0)$, $C(t, v_0 + at)$ e $D(0, v_0)$ é, numericamente, igual à variação de posição da partícula $\Delta s = s(t) - s_0$.

Portanto,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & t & & t & & 0 & & 0 \\ & \times & & \times & & \times & & \times & \\ 0 & & 0 & & v_0 + at & & v_0 & & 0 \end{array}$$

$$2\Delta s = v_0 t + at^2 + v_0 t$$

$$2[s(t) - s_0] = 2v_0 t + at^2$$

$$s(t) - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \boxed{s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

Exemplo 5.4.1 Uma partícula parte do repouso e pára 14 segundos depois. A velocidade v, em m/s, do móvel varia em função do tempo t, em segundos, de acordo com o gráfico a seguir.

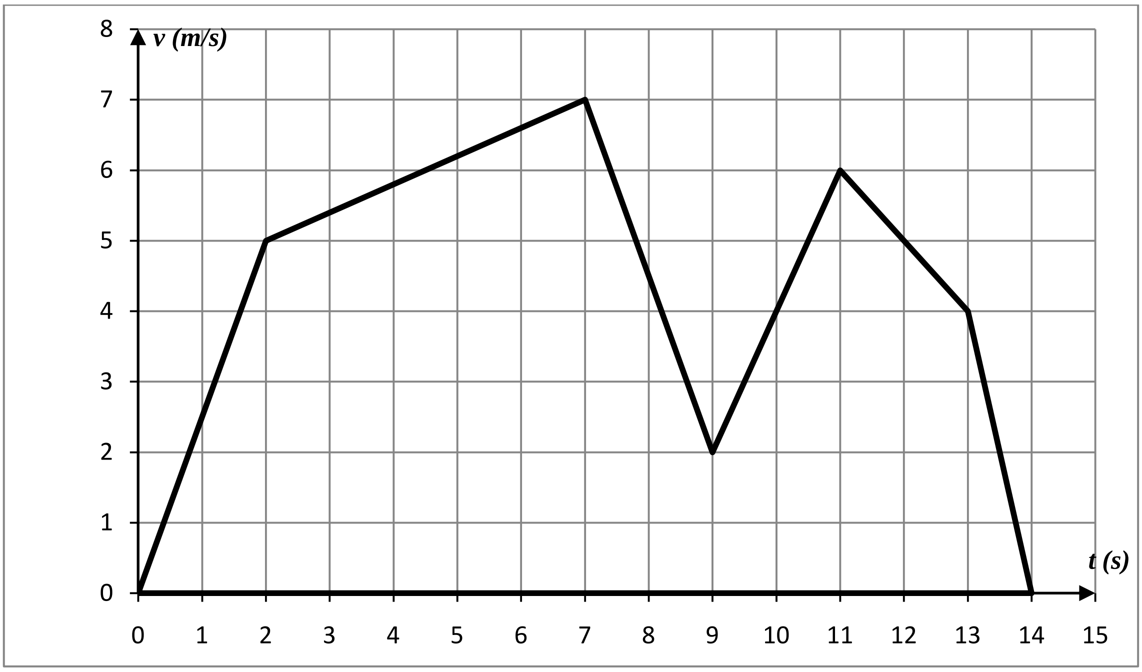


Gráfico 18: velocidade em função do tempo

Determine a distância percorrida pela partícula nesses 14 segundos.

Como a área do polígono é numericamente igual à variação de posição ($\Delta s = A$), podemos calcular a distância percorrida, nos 14 segundos de duração do movimento da partícula, pelo dispositivo do cálculo de área abaixo.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & & 14 & & 13 & & 11 & & 9 & & 7 & & 2 & & 0 \\ & \times & & \times & & \times & & \times & & \times & & \times & & \times & \\ 0 & & 0 & & 4 & & 6 & & 2 & & 7 & & 5 & & 0 \end{array}$$

$$2\Delta s = 56 + 78 + 22 + 63 + 35 - 44 - 54 - 14 - 14$$

$$\Delta s = 128/2$$

$$\boxed{\Delta s = 64\, m}$$

Metodologia

Para este trabalho foram criadas definições, que permitiram deduções de alguns lemas e teoremas. O método dedutivo contribuiu decisivamente para essa construção de lemas e teoremas, os quais podem ser usados, alternativamente, para demonstrar algumas proposições. Além disso, o método indutivo também foi importante para conseguir a precisão matemática necessária a um trabalho que se propõe inovador. O ineditismo do trabalho sugere uma profunda discussão sobre seu tema para posteriores aplicações do mesmo nas escolas de nível básico.

Resultados e Discussões

O *Teorema de Colinearidade* apresentado neste trabalho, no qual o somatório dos produtos primários é igual ao somatório dos produtos secundários, guarda uma similar relação com a *condição de alinhamento* da tradicional Geometria Analítica Plana, na qual o determinante formado pelas coordenadas cartesianas de três pontos, em que a primeira coluna da matriz da qual se calcula o determinante é constituída pelas abscissas, a segunda, pelas ordenadas, e a terceira, por elementos unitários, é identicamente nulo. Contudo, quando se usa o Teorema de Colinearidade, é possível a verificação da colinearidade de mais de três pontos, simultaneamente.

O cálculo de áreas de polígonos, usando-se o dispositivo de coordenadas cartesianas de pontos, é extensivo para qualquer polígono, seja côncavo, seja convexo. Além disso, evita-se, por esse dispositivo, a necessidade de aplicação de várias fórmulas para se calcular os diferentes tipos de polígonos.

Também se reduz, consideravelmente, o número de fórmulas e de equações, quando se aplica o dispositivo nas Progressões Aritméticas. Nesse caso, a redução mais expressiva ocorre na simplicidade do método.

Por fim, como o dispositivo não faz uso de propriedades operatórias características de matrizes ou de determinantes, não é conveniente falar que esse dispositivo é conseqüência destes conteúdos matemáticos, ou seja, o dispositivo não é uma matriz tampouco um determinante, em quaisquer de suas ocorrências. Além do mais, vale ressaltar que determinantes não são definidos para matrizes não-quadradas.

Conclusões

Com o *dispositivo de coordenadas cartesianas de pontos do plano*, pôde-se determinar facilmente a equação geral de uma reta, dados dois pontos distintos quaisquer dela; calcular a área de um polígono tornou-se uma tarefa simples com o advento desse dispositivo. Além disso, surgiram alguns teoremas inéditos na Matemática que indicam a possibilidade de existência de outros, que serão, provavelmente, úteis para a redução de cálculos usados no Ensino Médio.

A partir desse dispositivo, não será mais preciso usar o Teorema de Laplace ou a Regra de Sarrus para a determinação da equação geral de uma reta no plano ou para o cálculo da área de um triângulo, dadas as coordenadas cartesianas de seus vértices.

Além do mais, a aplicação desse dispositivo em outras áreas do conhecimento humano produzirá resultados mais rapidamente, com um aumento da simplicidade de raciocínio, com um baixo uso de outras regras e com a utilização de menos fórmulas.

Tudo isso nos permite evidenciar o alto grau de importância desse dispositivo para a sociedade e encerrar este trabalho com uma grande expectativa para o desenvolvimento da pesquisa científica nessa área. Desse modo, o ineditismo do trabalho sugere uma profunda discussão sobre seu tema para posteriores aplicações do mesmo nas escolas de nível básico.

Referências

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**: sequências, matrizes, determinante, sistemas. Vol.4. 2. ed. São Paulo: Atual Editora, 1977.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: geometria analítica. Vol.7. São Paulo: Atual Editora, 1979.

SPIVAK, Michael. O **Cálculo em variedades**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2003.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física**: mecânica. Vol. 1. 6.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. Volume único. 1.ed. São Paulo: Ática, 2005.