Serviço Público Federal

Universidade Federal do Amapá

Pró-Reitoria de Ensino e Graduação

Licenciatura Plena em Matemática

Max de Oliveira Rodrigues

Márcio Roberto Sousa Pereira

Delcides Mergulhão Brasil

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO PRIMÁRIA

OIAPOQUE-AP

2010

Steve Wanderson Calheiros de Araújo.

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO PRIMÁRIA

Monografia de conclusão de curso apresentada para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática da Universidade Federal do Amapá.

Orientador: Prof. Steve Wanderson Calheiros de Araújo.

OIAPOQUE-AP

2010

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

Steve Wanderson Calheiros de Araújo

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO PRIMÁRIA

Monografia de conclusão de curso apresentada como requisito para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática, da Universidade Federal do Amapá, pela seguinte banca examinadora:

____

Orientador : Prof. Steve Wanderson Calheiros de Araújo
Colegiado de Matemática, UNIFAP

____

Prof. Msc. Simone de Almeida Delphim Leal
Colegiado de Matemática, UNIFAP

____

Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima
Centro de Matemática, Computação e Cognição,
Universidade Federal do ABC - UFABC

DATA DA AVALIAÇÃO: _____ /_____ /______

CONCEITO: ______________________________

Dedicatória

Tenho a imensa honra de dedicar a conclusão deste curso ao senhor nosso Deus que me deu sabedoria e que esteve constantemente presente nesta árdua caminhada. A minha mãe e ao meu pai que sempre me ajudaram e incentivaram a estudar. A todas as pessoas que participaram de forma direta e indiretamente para minha formação e realização dos meus objetivos.

Max Rodrigues

Tenho a imensa honra de dedicar a conclusão deste curso a Deus que me deu força e sabedoria para vencer mais esta etapa de minha vida. Aos meus pais que sempre cobraram e incentivaram meus estudos. A minha esposa Sandra Marques que com todas as dificuldade me apoiou nessa caminhada. Aos meus irmãos, Marcelo e Marília que sempre torceram pelo meu sucesso. A todas as pessoas que participaram de forma direta e indiretamente para minha formação e realização dos meus sonhos.

Márcio Sousa

Ao Único e Verdadeiro Senhor e Salvador, Jesus Cristo, que tem me dado o ar que respiro, o pão que me alimenta, o teto que me abriga. Aos meus pais, irmãos, esposa e filha, pelo amor e apoio nos momentos difíceis. Ao meus amigos Max e Márcio pelo incentivo de continuar e jamais desistir. Ao mestre Steve pelo conhecimento repassado no decorrer do curso. E todos que contribuíram pelo sucesso de minha formação.

Delcides Brasil

Agradecimentos

Ao Deus Eterno, Arquiteto do Universo e suas Leis, por ajudar-nos a sempre superar os obstáculos que nos aparecem, dando-nos sabedoria para resolvê-los sempre da melhor maneira possível.

Aos nossos queridos pais Manoel da Silva Rodrigues; Raimundo Nonato Beckman Pereira; Miqueias Lameira Brasil e Antonia Brito de Oliveira; Meire Lourdes Sousa Pereira; Dinair Mergulhão Brasil que sempre estiveram presentes em todos os momentos de nossas vidas. A nossa família, por darem um sentido muito especial a nossa vida e nos fazerem encontrar forças, mesmo de longe, incentivando e nos apoiando sempre.

Um agradecimento profundo aos nossos colegas e amigos que compartilharam conosco momentos de alegria e satisfação.

Queremos expressar nosso reconhecimento mais profundo aos nossos professores pelo apoio dado durante o curso, em especial ao Professor Steve Wanderson Calheiros de Araújo, mestre que muito admiramos e respeitamos, por tudo que enfrentou juntamente conosco e pelas oportunidades que nos proporcionou.

Resumo

Um teorema clássico devido a Jordan-Chevalley afirma que "Se V é um espaço vetorial finitamente gerado sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Suponha que o polinômio minimal $m(x)$ de T se fatore como,

$$m(x) = P_1^{r_1} P_2^{r_2} \cdot ... \cdot P_k^{r_k}$$

sendo cada P_i um polinômio mônico irredutível sobre $\mathbb{K}$. Se $W_i = Nuc\ P_i^{r_i}(T) = \{v \in V : P_i^{r_i}(T)v = 0\}$, então W_i é T-invariante,

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$$

e

$$P_i^{r_i}$$

é o polinômio minimal da restrição de T a W_i". Tendo em vista a sua importância, este resultado, tem naturalmente diversas formas ou técnicas de ser abordado. Mais precisamente, o teorema título desta monografia é ferramenta essencial para representar matricialmente um operador em blocos, para os operadores não diagonalizáveis é consequência imediata pensar no teorema em tela e tem como aplicação fundamental a forma canônica de Jordan e muitas outras aplicações de cunho teórico. O objetivo desta monografia é apresentar teoria necessária digo, definições e resultados, de forma que possamos tratar do Teorema da Decomposição Primária como resultado central e algumas de suas conseqüências mais imediatas, já citadas.

Palavras-chave: teorema da decomposição primária, operadores diagonalizáveis, invariância, decomposição em somas diretas, operadores nilpotentes, forma canônica de Jordan.

Abstract

A classic theorem due to Jordan-Chevalley asserts that "If V is vector space finitely generated over a field $\mathbb{K}$ and $T : V \longrightarrow V$ is linear operator, suppose the minimal polynomial $m(x)$ of T can be factored such as,

$$m(x) = P_1^{r_1} P_2^{r_2} \cdot ... \cdot P_k^{r_k}$$

where each P_i is a monic irreducible polynomial over $\mathbb{K}$. If $W_i = Nuc\ P_i^{r_i}(T) = \{v \in V : P_i^{r_i}(T)v = 0\}$, then W_i is T-invariant

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$$

and

$$P_i^{r_i}$$

is the minimal polynomial of the restriction of T the W_i". Given its importance, this result is by different ways or techniques addressed. More precisely, the theorem title of this monograph is an essential tool to represent an operator in the block matrix form for no diagonal operators is an immediate consequence think of the theorem on the screen and its fundamental application the canonical form Jordan and many other applications of theoretical. The purpose of this monograph is to present necessary theory say, definitions and results, so we can deal with the Primary Decomposition Theorem as a result and some of its central more immediate consequences, already quoted.

Keywords: Primary decomposition theorem, which are diagonal operators, invariance, decomposition in direct sums, nilpotent operators, Jordan canonical form.

Sumário

1 Introdução

Antes de fazermos uma apresentação de nosso trabalho capítulo a capítulo faremos aqui um breve comentário percorrendo a linha histórica até chegarmos no tempo de Camile Jordan e Claude Chevalley, como veremos responsáveis pelo teorema título deste trabalho. Muitas das ferramentas básicas de álgebra linear, especialmente aquelas preocupadas com a solução de sistemas de equações lineares, data da Antiguidade. Veja, por exemplo, a história da eliminação de Gauss. Mas o estudo abstrato de vetores e espaços vetoriais não começa até 1600. A origem de muitas destas idéias é discutida no artigo sobre os determinantes. O método dos mínimos quadrados, utilizado pela primeira vez por Gauss na década de 1790, é uma aplicação rápida e significativa das idéias de álgebra linear. O assunto começou a tomar sua forma moderna em meados do século 19, que viu muitas idéias e métodos de séculos anteriores generalizada como a álgebra abstrata. Matrizes e tensores foram introduzidas e bem compreendida por volta do século 20. O uso desses objetos na relatividade espacial, estatística e mecânica quântica contribui muito para espalhar o assunto da álgebra linear, além da matemática pura. Quando Jordan estava escrevendo a obra que o impulsionou como matemático, teve o seu momento de vaidade e resolveu mostrar a seus alunos de engenharia da Escola Politécnica e do Collège de France que seria capaz de desenvolver algo que ninguém havia pensado antes, foi quando começou a escrever em plena sala de aula o que mais tarde seria a Forma Canônica de Jordan. Em álgebra linear, a forma Canônica de Jordan mostra que uma determinada matriz M sobre um corpo $\mathbb{K}$ contendo os autovalores de M pode ser transformado em uma certa forma normal, alterando a base. Esta forma normal é quase diagonal, no sentido de que o seus únicos não zeros isto é entradas ficam na diagonal. Isto torna-se mais precisa na decomposição Jordan-Chevalley, que é conhecida também como teorema da decomposição primária. Em matemática, a decomposição Jordan-Chevalley, é em homenagem a Camille Jordan e Claude Chevalley, também conhecido como decomposição Primária, expressa um operador linear como a soma de suas parte semi-simples pendulares e suas partes nilpotentes. A decomposição multiplicativa expressa um operador invertível como o produto de seu semi-simples pendulares e peças unipotentes. A decomposição é importante no estudo de grupos algébricos. A decomposição está relacionada com a forma Canônica de Jordan. Ennemond Marie Camille Jordan (5 de janeiro de 1838 - 22 de janeiro de 1922), matemático francês nascido em La Croix-Rousse, na cidade de Lyon, trabalhou em diferentes áreas da Matemática, contribuindo para todos os tópicos estudados ao seu tempo, e ganhou fama em toda a Europa ao demonstrar célebres problemas de álgebra. Seu trabalho na teoria de grupos realizadas entre 1860 e 1870 foi escrito no livro Tratado sobre equações algébricas e substituições que ele publicou em 1870 (Traité des substitutions et dês équations algébriques). Este tratado deu um estudo detalhado da teoria de Galois, bem como proporcionou o primeiro livro de teoria de grupos. Por este trabalho foi premiado com o Prémio Poncelet da Académie des Sciences. O tratado contém o teorema da " Forma Canônica de Jordan"para matrizes, e não sobre os números complexos, mas ao longo de um campo finito. Ele parece não ter tido conhecimento dos resultados anteriores deste tipo de Weierstrass. Seu livro trouxe grupos de permutação em um papel central na matemática e até Burnside escreveu seu livro sobre teoria de grupo quase 30 anos depois.

Este trabalho está distribuído em oito capítulos sendo o primeiro uma introdução histórica e aqui gostaríamos de frisar que fazendo esta pesquisa, para nossa surpresa, e inclusive de nosso orientador, descobrimos que o **Teorema da Decomposição Primária** também é conhecido como **Teorema de Jordan-Chevaley**, isto é, o mérito da prova deste resultado não só é de Jordan, veja os comentários acima. Além disso, ainda neste capítulo introdutório que foi em parte construído com pesquisa feita pela internet, veja referência [29] e também fazemos uma breve explanação sobre os capítulos decorrentes. O segundo capítulo que tem como título **Operadores Diagonalizáveis** foi escolhido para este trabalho pelo fato de nos levar naturalmente a pensar em outras formas para os operadores que não são diagonalizáveis por exemplo, uma das aplicações do teorema da Decomposição Primária que é a Forma Canônica de Jordan que é, sem dúvida o forte elo de ligação ao teorema título deste trabalho. Neste capítulo tratamos de definir o que é autovalor, autovetor e um operador linear diagonalizável e exibimos um método de como investigar se existe uma base tal que este operador possa-se apresentar na forma diagonalizável. Além disso, definimos o polinômio característico, o polinômio minimal e dentre vários resultados que enunciamos e provamos ressaltamos a prova do principal resultado deste capítulo que é o Teorema de Cayley-Hamilton. Aqui enfatizamos a forma como abordamos a prova deste resultado cujo mérito se dá as discussões feitas no Verão UNICAMP 2010 ministrado pelo Prof.º Dr.º Osvaldo Roci onde nosso orientador esteve como aluno e como conseqüência das notas de aula deste curso tem-se a prova aqui apresentada. Algumas conseqüências importantes que servirão de auxílio para determinar as possíveis formas de Jordan também são enunciadas e provadas. Reservamos o final deste capítulo para apresentarmos quatro exemplos para esclarecer e chamar atenção de detalhes teóricos vistos no início, como por exemplo: mesmo o polinômio característico tendo todas as suas raízes no corpo estabelecido pode não ter uma base formada por autovetores, ou seja, pode não ser diagonalizável o que mostra ser um defeito do operador. Um fato importante de se ressaltar, é que este capítulo tem uma séria influência do livro referência [9] e da notas de aula do Verão UNICAMP 2010. O terceiro capítulo que tem como título **Invariância** definimos os espaços T-invariantes que tem um papel essencial para a decomposição de um operador em espaços de menor dimensão com a propriedade de que todo elemento deste novo espaço ainda pertence a ele. E o grande trunfo deste tópico é dar-nos uma ferramenta para podermos representar a matriz de um operador em blocos. Isto fatalmente torna mais simples a investigação das particularidades que os operadores apresentam. O quarto capítulo cujo título é **Decomposições em Somas Diretas Invariantes** é posto aqui para complementar e usar a idéia dos subespaços T-invariantes apresentados no terceiro capítulo. Como exibiremos a seguir a restrição deste operador ao subespaço T-invariante ainda é um operador linear e um dos maiores ganhos é o fato de podermos escrever a matriz de T usando blocos das matrizes destas restrições que tem uma característica toda especial como veremos isso reduz todo trabalho de investigação da matriz do operador T para as matrizes das restrições deste operador a estes subespaços T-invariantes. O quinto capítulo que é o foco desta monografia tem o título de **Teorema da Decomposição Primária ou Teorema de Jordan-Chevalley**. A escolha deste teorema para este trabalho se dá muito por influência de nosso orientador, mas também se dá pelo fato de quando estávamos investigando na internet, artigos,comentários, livros, revistas sobre o teorema título desta monografia são de certa forma raros. Já sobre a forma canônica de Jordan são muitos os artigos,comentários, livros e revistas e comparando com o número de artigos sobre o **Teorema de Jordan-Chevalley** a diferença é muito grande. Desta maneira torna-se de uma certa forma complicado para nós acadêmicos interessados pelo tema fazer uma busca mais aprofundada. O interessante é que o principal teorema responsável pela demonstração da forma de Jordan é o teorema da decomposição primária. Como veremos ao longo desta monografia ao estudar e provar as afirmações feitas no teorema em epígrafe damos o primeiro passo para obter-se uma forma canônica. Segundo Hamilton Prado Bueno o teorema central desta monografia é focu no estudo da álgebra linear, veja em seu livro referência [6] que cita,

> "...apresentamos os resultados mais importantes sobre operadores definidos em espaços arbitrários de dimensão finita: O Teorema Espectral e a **decomposição primária**, a forma canônica de Jordan e a decomposição racional.(Bueno, Hamilton Prado, àlgebra linear Um segundo curso, página 114)".

Outro detalhe importante é a linha que seguimos para a prova do teorema título desta monografia que é a chamada de "tradicional", segundo Hamilton Prado Bueno em seu livro referência [6] página 247. Caso os leitores deste trabalho tenham interesse em ver outras formas de demonstrações vejam referências [16] e [17], ou mesmo em [6] nas páginas 122 e 123. Dividimos a prova do Teorema da Decomposição Primária em três partes dois lemas e a prova central, isto pelo fato da demonstração ser muito longa e não muito trivial. Aqui queremos deixar claro que estamos de acordo com as notas de aula do verão UNICAMP 2010 e referência [23] e acreditamos também que desta forma tornamos a leitura mais agradável . Ressalto que esta mesma linha foi seguida no verão UNICAMP 2010. Já para o capítulo seis reservamos três aplicações bastante interessantes. A primeira com o título de **representação matricial em blocos por meio do T.D.P.** e as outras duas com o título **Aplicação do Teorema da Decomposição Primária para operadores diagonalizáveis**. No capítulo sete incluímos um breve apanhado sobre operadores nilpotentes no intuito de utilizarmos na principal aplicação do T.D.P. que encontra-se no capítulo oito que é a forma canônica de Jordan. Ressaltamos que demos nossa contribuição neste capítulo com pequenos comentários e ajustes que julgamos necessarios. Mas a prova do principal teorema do capítulo em epígrafe é como está no livro referência [24]. E como já revelamos, no capítulo oito faremos a prova do conhecido como teorema de Jordan que está enunciado como na referência [24]. Dentre outros detalhes provados iremos mostrar que num sentido amplo todo o operador tem a forma canônica de Jordan. Reservamos ainda neste capítulo três aplicações, **totalmente originais**, comentadas para esclarecer as hipóteses e tese do teorema central deste capítulo. Por fim no capítulo nove fazemos nossas considerações finais. Agora passaremos ao início do trabalho matemático propriamente dito com o próximo capítulo.

2 Operadores Diagonalizáveis

Iniciaremos ponderando que um operador linear é uma transformação linear $T : V \longrightarrow V$, sendo V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ (isto é, com seu domínio e contradomínio iguais). Se $dim_{\mathbb{K}} V = n$ e B é uma base de V, então a matriz $[T]_B$, que para nós será a matriz do operador T na base B, pertencente a $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Sabemos dos estudos da álgebra linear mais elementar que muitas informações sobre T podem ser conseguidas a partir de cálculos sobre $[T]_B$. Desta forma para se obter informações sobre T a partir de $[T]_B$, é conveniente então que a matriz $[T]_B$ seja a mais simples possível. Em outras palavras, procuramos uma base B de V tal que certas informações sobre T possam ser facilmente obtidas a partir de $[T]_B$.

Observamos inicialmente que se $[T]_B$ for uma matriz diagonal, então informações sobre o Núcleo de T e o seu posto podem ser muito facilmente obtidas. Este será o nosso primeiro passo como motivação para provarmos o principal resultado deste trabalho **"O Teorema da Decomposição Primária"**. Em seguida, deduziremos a principal aplicação deste teorema a Forma Canônica de Jordan. Logo a grande motivação dentre outras existentes para a conjectura e prova do importante teorema título deste trabalho é o de procurar condições sobre T para que exista uma base B de tal forma que $[T]_B$ seja diagonal e na sua impossibilidade analisaremos a chamada forma de Jordan. Cabe ressaltar que existem outras formas canônicas que não serão tratadas neste trabalho. Ao longo destes manuscritos, $\mathbb{K}$ denotará um corpo qualquer e $T : V \longrightarrow V$ será um operador linear onde V é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$.

Definição 2.1 *Considerem $T : V \longrightarrow V$ um operador linear e suponha que exista uma base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ de V tal que a matriz $[T]_B$ tenha a forma diagonal, isto é, tal que*

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

com $\lambda_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, ..., n$. Da definição de $[T]_B$, teremos então que $T(v_i) = \lambda_i v_i$ para

$i = 1, ..., n$, isto é, a imagem de qualquer vetor da base B por T é um múltiplo deste vetor. Veremos que elementos com esta propriedade serão importantes em nosso estudo.

Definição 2.2 *Considere $T : V \longrightarrow V$ um operador linear.*
(i) Um autovalor de T é um elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe um vetor não nulo $v \in V$ com $T(v) = \lambda v$.
(ii) Se λ é um autovalor de T, então todo vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ é chamado de autovetor de T associado a λ. Denotaremos por $Aut_T(\lambda)$ o subespaço de V gerado por todos os autovetores associados a λ.
(iii) Suponha que $dim_{\mathbb{K}} V = n < \infty$. Dizemos que T é diagonalizável se existir uma base B tal que $[T]_B$ é diagonal, o que é equivalente a dizer que existe uma base formada por autovetores de T.

Observação.
(i) Considere $T : V \longrightarrow V$ um operador linear não injetor. Então 0 é um autovalor de T. De fato, como T não é injetor, existe um vetor não nulo v em $Nuc\, T$. Daí $T(v) = 0 = 0 \cdot v$, como queríamos.
(ii) É claro que existem operadores lineares que não possuem autovalores. Considere, por exemplo, $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-y, x)$. Deixamos a cargo do leitor a verificação de que T não possui autovalores. Na realidade, seguirá facilmente de nossas considerações abaixo que todo operador $T \in L(V, V)$ onde V é um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de dimensão finita possui autovetores.

Considere $T : V \longrightarrow V$ um operador linear onde V é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Iremos discutir agora um método para descobrirmos todos os seus autovetores, caso os tenha.
Se $\lambda \in \mathbb{K}$ for um autovalor de T, então existe v diferente do vetor nulo, tal que $T(v) = \lambda v$, o que é equivalente a dizer que $(\lambda Id - T)(v) = 0$, onde $Id : V \longrightarrow V$ é a transformação identidade em V. Segue então que

$$\lambda \text{ é um autovalor de } T \Longleftrightarrow Nuc(\lambda Id - T) \neq \{0\}.$$

Teorema 2.1 *As seguintes afirmações são equivalentes.*

(i) λ é um autovalor de T

(ii) $T - \lambda I$ é um operador linear não injetivo

(iii) $det(T - \lambda I) = 0$

Prova $(i) \Leftrightarrow (ii)$

Se λ é autovalor de T, então existe v não nulo, tal que

$$Tv = \lambda v \Leftrightarrow (\lambda v - Tv) = 0 \Leftrightarrow (\lambda I - T)v = 0 \Leftrightarrow Nuc(\lambda I - T) \neq \{0\}$$

é não injetiva.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$

Se $T - \lambda I$ é não injetiva, então $T - \lambda I$ é não inversível, o que implica

$$det[T - \lambda I]_B = 0.$$

Observe que $[T - \lambda I]_B$ é a matriz do operador $T - \lambda I$ em uma base qualquer.

$(iii) \Leftrightarrow (i)$

Se $detT - \lambda I = 0 \Leftrightarrow det[T - \lambda I]_B = 0 \Leftrightarrow$ existe $v \in V$ com v não nulo, tal que,

$[T - \lambda I]_B[v]_B = 0 \Leftrightarrow (T - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow Tv - \lambda v = 0 \Leftrightarrow Tv = \lambda v$, e desta forma, λ é um autovalor associado ao autovetor v.

Esta relação acima nos dá uma idéia de como poderemos achar os autovalores de um dado operador T. Considere C uma base de V. Observe que $[x\ Id - T]_C$ é uma matriz onde, na diagonal principal, aparecem polinômios mônicos de grau um com coeficiente em $\mathbb{K}$ e elemento de $\mathbb{K}$ nas outras posições.

Portanto, $det\ ([x\ Id - T]_C)$ é um polinômio mônico de grau n sobre $\mathbb{K}$.

A equivalência pode ser reescrita como

$$\lambda \text{ é um autovalor de } T \Longleftrightarrow \lambda \text{ é uma raíz de } det\ ([x\ Id - T]_C).$$

Neste ponto, poderíamos nos perguntar se o polinômio em questão depende necessariamente da base C escolhida ou se é de fato um invariante de T. Na realidade, ele independe da escolha da base, como veremos a seguir. Considerem C e C' duas bases de V. Logo existe uma matriz invertível P tal que $[T]_c = P^{-1}[T]_{c'}P$ (em outras palavras, as matrizes $[T]_c$ e $[T]_{c'}$ são semelhantes). Daí, se indicarmos por Id_n a matriz identidade de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, teremos

$$\begin{aligned}
det([xId - T]_c) = det(xId_n - [T]_c) = \\
= det(xP^{-1}Id_nP - P^{-1}[T]_{c'}P) = \\
= det(P^{-1}(xId_n - [T]_{c'})P) = \\
= det(P^{-1})det(xId_n - [T]_{c'})det(P) = \\
= det(xId_n - [T]_{c'}) = det([xId - T]_{c'}).
\end{aligned}$$

(lembre que $det(P^{-1})det(P) = 1$).
Assim, $det([xId - T]_c)$ é uma invariante de T, não dependendo da base C escolhida isto justifica as definições da próxima seção.

2.1 O Polinômio Característico e o Polinômio Minimal

Definiremos abaixo dois polinômios relacionados a uma transformação linear T, a saber o polinômio característico e o polinômio minimal que juntos servirão dentre outras coisas para determinar as possíveis Formas Canônicas de Jordan.

Definição 2.3 *Considerem V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, $T \in L(V, V)$ um operador linear e C uma base de V. Chamamos o polinômio $det([xId - T]_c)$ de polinômio característico de T e o denotamos por $P(x)$.*

Agora vamos considerar $T : V \longrightarrow V$ um operador linear e $M(T) = \{g(x) \in \mathbb{K}[x]; g(T) = 0\}$, sendo $\mathbb{K}[x]$ o conjunto dos polinômios com entradas em $\mathbb{K}$. Daremos mais adiante uma justificativa de que este conjunto $M(T)$ é não vazio, pois o polinômio característico pertence a $M(T)$ devido a um resultado que mostraremos logo a seguir intitulado por Teorema de Cayley-Hamilton.
Agora de posse da definição do conjunto $M(T)$ iremos definir o polinômio minimal.

Definição 2.4 *Dado que $M(T) \neq \{0\}$. Seja $m(x)$ o polinômio mônico de menor grau em $M(T)$, tal que, $M(T)$ é subespaço de $\mathbb{K}(x)$ e $M(T) =< m(x) >$.*

Definição 2.5 *O único polinômio mônico $m(x)$ que gera $M(T)$ é definido como polinômio minimal.*

Exemplo 2.1 *Vamos considerar o operador*

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto T(x, y, z) = (x + y, zy, y + z)$$

A matriz deste operador com relação a base canônica $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é :

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí, o seu polinômio característico é dado por $P(x) = det(xId - [T]_B) = (x - 1)^2(x - 2)$. Já o seu polinômio minimal é o único polinômio mônico que gera $M(T)$, então

$$m(x) = (x - 1)(x - 2).$$

2.2 O Teorema de Cayley-Hamilton

Vamos olhar melhor as relações entre os dois polinômios citados na seção anterior. Iremos mostrar inicialmente que o polinômio característico se anula em T (O Teorema de Cayley-Hamilton) e, portanto, o minimal é um divisor do característico. Também , iremos mostrar que eles possuem as mesmas raízes. Estes dois resultados combinados serão úteis na determinação das formas de Jordan. Começaremos inicialmente provando o chamado Teorema de Cayley-Hamilton.

Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema 2.2 Considere $T : V \longrightarrow V$ um operador linear sobre um espaço vetorial V finitamente gerado e $P(x)$ o polinômio característico de T. Então $P(T)$ é o operador linear nulo de V.

Prova. Considerem $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V , $A = [T]_B$ e $B = [\lambda I - A]_B$. Então $P(\lambda) = detB$ é o polinômio característico de T. Queremos mostrar que $P(T)v =$

0, para todo $v \in V$. Mas será suficiente mostrar que isso ocorre em qualquer $v_i \in B$, isto é, $P(T)v_i = 0$. Tomemos $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Daí,

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i$$

e que

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}Tv_i.$$

Então

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}Tv_i - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i = 0 \Leftrightarrow$$

(1) $$\sum_{i=1}^{n}(\delta_{ij}T - a_{ij}I)v_i = 0.$$

Mas, $b_{ij} = \delta_{ij}\lambda - a_{ij}$ e daí

$$b_{ij}(T) = \delta_{ij}T - a_{ij}I$$

e temos que

$$b_{ij}(T)v_i = (\delta_{ij}T - a_{ij}I)v_i$$

e substituindo em (1), tem - se;

(2) $$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}(T)v_i = 0.$$

Mas,

$$B\widetilde{B} = (c_{ij}) = detBI$$

e

$$c_{ik} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\widetilde{b}_{jk} = \delta_{ij}detB$$

sendo $\widetilde{B} = (\widetilde{b}_{jk})$ é a adjunta clássica. Então

$$b_{jk}\sum_{i=1}^{n} b_{ij}(T)v_i = 0$$

e somando em j temos,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\widetilde{b}_{jk}(T)v_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} c_{ik}v_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}detBv_i = 0$$

$$detBv_i = 0 \Leftrightarrow detBv = 0$$

Agora mostraremos a relação das raízes dos polinômios característico e minimal. Começamos com a seguinte proposição.

Proposição 2.1 *O polinômio minimal $m(x)$ divide o polinômio característico $P(x)$.*

Prova. Tomemos (1) $P(x) = q(x)m(x) + r(x)$, com $r(x) = 0$ ou $\partial r(x) < \partial m(x)$, sendo $\partial r(x)$ e $\partial m(x)$ significam respectivamente os graus dos polinômios $r(x)$ e $m(x)$, para $q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$.

Agora, vamos aplicar T em (1) e teremos

$$P(T) = q(T)m(T) + r(T)$$

e então para todo $v \in V$ temos que

$$P(T)v = q(T)m(T)v + r(T)v$$

e como $P(T)v = 0$, pelo Teorema Cayley Hamilton e temos que $m(T)v = 0$ para todo $v \in V$. Daí, $r(T)v = 0$, para todo $v \in V$, então $r(T) = 0$. Agora observe que se $\partial r(x) < \partial m(x)$, teríamos um polinômio que anula - se em T, para todo $v \in V$ e com grau menor que o de $m(x)$. Mas isto contradiz o mínimal de $m(x)$ em $M(T)$. Logo $r(x) = 0$.

Observação. Se c é um autovalor do operador linear $T : V \longrightarrow V$, $g(x) \in \mathbb{K}[x]$ e v é autovetor associado a c então

$$g(T)v = g(c)v.$$

De fato, considere

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Daí, observe que

$$g(T)v = (a_nT^n + a_{n-1}T^{n-1} + ... + a_2T^2 + a_1T + a_0T^0)v$$

$$= a_nT^nv + a_{n-1}T^{n-1}v + ... + a_2T^2v + a_1T^1v + a_0T^0v$$

$$= a_nc^nv + a_{n-1}c^{n-1}v + ... + a_2c^2v + a_1c^1v + a_0c^0v$$

$$= (a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + ... + a_2c^2 + a_1c^1 + a_0c^0)v$$

$$= g(c)v.$$

Teorema 2.3 *O polinômio minimal $m(x)$ e o polinômio característico $P(x)$ do operador*

$$T : V \longrightarrow V$$

possuem as mesmas raízes.

Prova. Como $m(x)$ divide $P(x)$, então toda raíz de $m(x)$ é raíz de $P(x)$. Agora tomamos c como uma raíz de $P(x)$ então c é um autovalor de T, isto é, existe $v \neq 0$, tal que, $Tv = cv$. Então pelo resultado acima

$$m(T)v = m(c)v = 0.$$

Pois, $m(T)v = 0$. Daí, $m(c) = 0$, para todo v não nulo, então $m(c) = 0$, isto é, c é raiz de $m(x)$.

Segue da discussão acima que os autovalores de T, caso existam, serão as raízes de seu polinômio característico.

Observação. Considere V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e seja T em $L(V, V)$. Como $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado, o polinômio característico de T será da forma

$$P(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} ... \; (x - \lambda_t)^{r_t}$$

Com λ_1, ..., $\lambda_t \in \mathbb{C}$ e $r_i \geq 1$. Portanto, existirão autovalores para T.

Agora vamos exibir quatro exemplos no intuito também de mostrar que nem sempre é possível encontrar uma base de autovetores.

Exemplo 2.2 **(a)** *Considere*

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longrightarrow T(x, y) = (-y, x).$$

Se $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$, então

$$[T]_c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Também,

$$P(x) = det \left(x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= det \begin{pmatrix} x & +1 \\ -1 & x \end{pmatrix} x^2 + 1.$$

Como $P(x) = x^2 + 1$ *não tem raízes reais, segue que* T *não possui autovalores.*

(b) *Considere agora*

$$T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

$$(x, y) \longrightarrow T(x, y) = (-y, x).$$

É fácil ver que o polinômio característico $P(x) = x^2 + 1$ *é o mesmo que o do item (a). Mais aqui, como estamos considerando* $\mathbb{C}^2$ *como espaço vetorial sobre* $\mathbb{C}$*, então* $P(x) = (x - i)(x + i)$ *e os valores* i *e* $-i$ *são autovalores de* T*. Considere* C *a base canônica de* $\mathbb{C}^2$ *sobre* $\mathbb{C}$*. Como*

$$[iId_2 - T]_c = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

Segue que $(x, y) \in Aut_T(i)$ *se, e somente se,*

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Com isso, $Aut_T(i) = [(i, 1)]$*. De forma análoga, teremos,* $Aut_T(-i) = [(i, -1)]$*. Observe que* $B = \{(i, 1), (i, -1)\}$ *é uma base de* $\mathbb{C}^2$ *sobre* $\mathbb{C}$ *e, nesta base,* T *tem a sua forma diagonal*

$$[T]_B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

(c) *Considere* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$*, tal que*

$$[T]_c = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

sendo C é uma base de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$. Como vimos

$$P(x) = det \begin{pmatrix} x-2 & -2 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ -2 & 2 & x-3 \end{pmatrix}$$

Um cálculo simples leva-nos a $P(x) = (x-1)(x-2)^2$ e, portanto, os autovalores de T são 1 e 2. Vamos calcular $Aut_T(1)$ e $Aut_T(2)$. Pelo visto acima, $Aut_T(1) = Nuc(Id_3 - T)$. Como

$$[Id_3 - T]_c = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Segue que $(x, y, z) \in Aut_T(1)$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo este sistema, chegamos a $Aut_T(1) = [(1, -2, -3)]$. Uma conta análoga mostra-nos que $Aut_T(2) = [(0, 1, 2)]$. Como os autovetores de T são ou múltiplos de $(1, -2, 3)$ ou múltiplos de $(0, 1, 2)$, concluímos que não pode existir uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T. Este exemplo mostra-nos que, apesar de $P(x)$ ter todas as suas raízes em $\mathbb{R}$, não existe uma base de autovetores de T. De qualquer maneira, observe que $\{(1, -2, -3), (0, 1, 2)\}$ é linearmente independente.

(d) *Considere $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que*

$$[T]_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

sendo C é uma base qualquer de $\mathbb{R}^3$. Fazendo-se os cálculos, teremos que $P(x) = (x+1)^2(x+2)$, $Aut_T(-1) = [(1, 0, 2), (0, 1, 2)]$ e $Aut_T(-2) = [(1, -1, 1)]$. Observe que $B = \{(1, 0, 2), (0, 1, 2), (1, -1, 1)\}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^3$ com 3 elementos e, portanto, é uma base. Além disso, os seus elementos são *todos autovetores. Não é difícil verificar que*

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Logo, T é diagonalizável.

3 Invariância

Quanto menor é a dimensão do espaço V, mais fácil é estudar operadores lineares $T : V \longrightarrow V$ (isto é especialmente verdadeiro quando $dimV = 1$ ou $dimV$ é 2.). Por isso, quando se tem um operador $T : V \longrightarrow V$, é natural que se tente, de alguma maneira, " decompô-lo "em operadores definidos em subespaços de dimensões menores. O passo inicial nessa busca é a noção de subespaços invariante por um operador, que estudaremos nesta seção.

Definição 3.1 *Considere $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Diz-se que um subespaço W de V é invariante sob T, ou T-invariante, se T transforma W em si mesmo, isto é, se $v \in W$ implica $T(v) \in W$. Neste caso, T restrito a W define um operador linear em W; isto é, T induz um operador linear $\widehat{T} : W \longrightarrow W$ definido por $\widehat{T}(w) = T(w)$ para todo $w \in W$.*

Exemplo 3.1 *Considere $T : V \longrightarrow V$ um operador linear sendo V um $K-$espaço vetorial.*
(a) Os subespaços $NucT$ e ImT são $T-$invariantes.
(b) Se λ for um autovalor de T, então $Aut_T(\lambda)$ é um subespaço $T-$invariante de V. Pois, se $v \in Aut_T(\lambda)$, então $T(v) = \lambda v \in Aut_T(\lambda)$.

Exemplo 3.2 *Considere $T : R^3 \longrightarrow R^3$ o operador linear que gira cada vetor em relação ao eixo dos z de um ângulo θ:*

$$T(x, y, z) = (x \cos\theta - y\, sen\theta, x\, sen\theta + y \cos\theta, z)$$

Sendo W o plano (xy), observe que cada vetor $w = (a, b, 0) \in W$, permanece em W sob a transformação T, isto é, W é T-invariante. Observe também que o eixo dos z, U é invariante sob T. Além disso, a restrição de T a W gira cada vetor em relação à origem O, e a restrição de T a U é transformada identidade em U.

Além disso, pode-se ver que esses são os únicos subespaços invariantes não triviais de T

Exemplo 3.3 *Autovetores não-nulos de um operador linear $T : V \longrightarrow V$ podem ser caracterizados como geradores de subespaços unidimensionais T-invariantes. De fato,* *suponha que $T(v) = \lambda v, com$ v não nulo. Então, $W = \{kv, k \in K\}$, o subespaço unidimensional gerado por v, é invariante sob T, porque*

$$T(kv) = kT(v) = k(\lambda v) = k\lambda v \in W$$

Reciprocamente, suponha que $dimU = 1$ e u não nulo, gera U e que U é invariante sob T. Então, $T(u) \in U$; logo, $T(u)$ é múltiplo de u, isto é, $T(u) = \mu u$. Portanto, u a autovetor de T, pertencente a μ.

O teorema seguinte dá-nos uma classe importante de subespaços invariantes.

Teorema 3.1 *Considere $T : V \longrightarrow V$ um operador linear e seja $f(t)$ um polinômio. Então, o núcleo de $f(T)$ é invariante sob T.*

Prova.

Suponhamos que $v \in Nucf(T)$, isto é, $f(T)(v) = 0$. Precisamos mostrar que $T(v)$ também pertence ao núcleo de $f(T)$, isto é, $f(T)(T(v)) = 0$. Como $f(t)t = tf(t)$, temos $f(T)T = Tf(T)$. Assim $f(T)T(v) = T(f(T))(v) = T(f(T)(v)) = T(0) = (0) = 0$, como se deseja.

A noção de invariância está relacionada à representações matriciais em blocos como veremos a seguir.

Teorema 3.2 *Considerem que W é um subespaço invariante do operador $T : V \longrightarrow V$ e B uma base de W. Então, T tem uma representação matricial em blocos $\begin{pmatrix} [\widehat{T}]_B & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, sendo $[\widehat{T}]_B$ a representação matricial da restrição de T a W.*

Prova. Tomando uma base $B = \{w_1, ..., w_r\}$ de W e completando esta base a uma base $D = \{w_1, ..., w_r, v_1, ..., v_s\}$ de V. Temos,

$$\begin{aligned}
\widehat{T}(w_1) = T(w_1) &= a_{11}w_1 + ... + a_{1r}w_r + 0v_1 + ... + 0v_s \\
\widehat{T}(w_2) = T(w_2) &= a_{21}w_1 + ... + a_{2r}w_r + 0v_1 + ... + 0v_s \\
&\vdots \\
\widehat{T}(w_r) = T(w_r) &= a_{r1}w_1 + ... + a_{rr}w_r + 0v_1 + ... + 0v_s \\
T(v_1) &= b_{11}w_1 + ... + b_{1r}w_r + c_{11}v_1 + ... + c_{1s}v_s \\
T(v_2) &= b_{21}w_1 + ... + b_{2r}w_r + c_{21}v_1 + ... + c_{2s}v_s
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$T(v_s) = b_{s1}w_1 + ... + b_{sr}w_r + c_{s1}v_1 + ... + c_{ss}v_s$$

Mas a matriz de T na base D é a transposta da matriz dos coeficientes no sistema de equações já apresentado. Logo, ela tem a forma $\begin{pmatrix} [\widehat{T}]_B & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, onde $[\widehat{T}]_B$ é a transposta da matriz dos coeficientes para o subsistema óbvio. Pelo mesmo argumento, $[\widehat{T}]_B$ é a matriz de $\widehat{T}$ em relação à base B de W.

4 Decomposições em Somas Diretas Invariantes

Iremos neste capítulo apresentar as idéias fundamentais para que um operador linear T sobre um espaço vetorial V de dimensão finita possa ser escrito como soma de operadores mais simples. Para tal vamos definir e mostrar resultados no intuito de decompor o espaço V de dimensão finita como a soma de subespaços T-invariantes de V. Tudo isto para "esmiuçar o operador T para ver como ele funciona". Passamos agora as idéias essenciais de que necessitamos.

Definição 4.1 *Um espaço vetorial V é denominado soma direta de seus subespaços $W_1, ..., W_r$, e escrito como*

$$V = W_1 \oplus ... \oplus W_r,$$

se todo o vetor $v \in V$ pode ser escrito de maneira única na forma

$$v = w_1 + w_2 + ... + w_r \quad com \quad w_i \in W_i.$$

Agora vamos definir o que é uma decomposição em soma direta de subespaços T-invariantes de V.

Definição 4.2 *Considerem que $T : V \to V$ é linear. V é a soma direta de subespaços T-invariantes (não-nulos) $W_1, ..., W_r$ se, e somente se,*

$$V = W_1 \oplus ... \oplus W_r \quad \text{com} \quad T(W_i) \subset W_i, i = 1, ..., r$$

Considere T_i a restrição de T a W_i. então, diz-se que T é decomponível nos operadores T_i ou que T é a soma direta dos T_i e escreve-se,

$$T = T_1 \oplus ... \oplus T_r.$$

Também se diz que os subespaços $W_1, ..., W_r$ reduzem T ou formam uma decomposição em soma direta T-invariante de V.

Agora vamos enunciar e provar um teorema de grande utilidade.

Teorema 4.1 *Considerem $W_1, ..., W_r$ subespaços de V e que*

$$\{w_{11}, ..., w_{1n_1}\}, ..., \{w_{r1}, ..., w_{rn_r}\}$$

são bases de $W_1, ..., W_r$, respectivamente. Então, V é soma direta dos W_i se, e somente se, a união

$$\{w_{11}, ..., w_{1n_1}, ..., w_{r1}, ..., w_{rn_r}\}$$

é uma base de V.

Prova. Suponhamos que B é base de V. Então, para qualquer $v \in V$, $v = a_{11}w_{11}+...+a_{1n_1}w_{1n_1}+...+a_{r1}w_{r1}+...+a_{rn_r}w_{rn_r} = w_1+w_2+...+w_r,$ *sendo* $w_i = a_{i1}w_{i1}+...+a_{in_i}w_{in_i} \in W_i$. Mostraremos, a seguir, que tal soma é única.
Suponhamos que

$$v = w_1' + w_2' + ... + w_r', \quad sendo \quad w_i' \in W_i.$$

Como $\{w_{i1}, ..., w_{in_i}\}$ é base de W_i, $\quad w_i' = b_{i1}w_{i1} + ... + b_{in_i}w_{in_i}$; logo,

$$v = b_{11}w_{11} + ... + b_{1n_1}w_{1n_1} + ... + b_{r1}w_{r1} + ... + b_{rn_r}w_{rn_r}.$$

Como B é base de V, $\quad a_{ij} = b_{ij}$, para cada i e cada j. Portanto, $w_i = w_i'$; logo, a soma para v é única. De acordo com isso V é a soma direta dos W_i.
Reciprocamente, suponha que V é a soma direta dos W_i. Então, para calcular $v \in V$, $\quad v = w_1 + ... + w_r$, sendo $w_i \in W_i$. Como $\{w_{ij_i}\}$ é a base de W_i, cada w_i é combinação linear dos w_{ij_i}; logo v é combinação linear dos elementos de B. Assim, B gera v. Mostraremos, agora, que B é linearmente independente, suponha que

$$a_{11}w_{11} + ... + a_{1n_1}w_{1n_1} + ... + a_{r1}w_{r1} + ... + a_{rn_r}w_{rn_r} = 0.$$

Note que $a_{i1}w_{i1} + ... + a_{in_i}w_{in_i} \in W_i$. Também temos que $0 = 0 + ... + 0, \quad sendo \quad 0 \in W_i$.
Como tal soma é única para 0,

$$a_{i1}w_{i1} + ... + a_{in_i}w_{in_i} = 0 \quad para \quad i = 1, ..., r.$$

A independência da base $\{w_{ij_i}\}$ implica que todos os $a's$ são 0. Assim, B é linearmente independente e, portanto, é base de V.

Exemplo 4.1 *Vamos considerar o caso especial em que dois subespaços W_1 e W_2 formam uma decomposição em soma direta T-invariante de V do operador $T : V \to V$, sendo, $dimW_1 = 2$ e $dimW_2 = 3$, e suponhamos que $B_1 = \{u_1, u_2\}$ e $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ são bases de W_1 e W_2, respectivamente. Se T_1 e T_2 denotam restrições de T a W_1 e W_2, respectivamente, então:*

$$\begin{array}{ll} T_1(u_1) = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 & T_2(v_1) = b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + b_{13}v_3 \\ T_1(u_2) = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 & T_2(v_2) = b_{21}v_1 + b_{22}v_2 + b_{23}v_3 \\ & T_2(v_3) = b_{31}v_1 + b_{32}v_2 + b_{33}v_3 \end{array}$$

Portanto,

$$[T_1]_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad e \quad [T_2]_{B_2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

são respectivamente matriciais de T_1 e T_2, respectivamente. Pelo teorema acima, $\{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}$ é base de V. Como $T(u_i) = T_1(u_i)$ e $T(v_j) = T_2(v_j)$, a matriz de T nessa base é a matriz diagonal de blocos

$$\begin{pmatrix} [T_1]_{B_1} & 0 \\ 0 & [T_2]_{B_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

As idéias empregadas para o exemplo acima são exatamente utilizadas na generalização deste exemplo que se dá no teorema abaixo cuja demonstração é na essencia uma extensão do que foi feito.

Teorema 4.2 *Considerem que $T : V \longrightarrow V$ é linear e que V é a soma direta de subespaços T-invariantes $W_1, ..., W_r$. Se $[T_i]_{B_i}$ é a representação matricial da restrição de T a W_i, então T pode ser representado pela matriz diagonal de blocos*

$$\begin{pmatrix} [T_1]_{B_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [T_2]_{B_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [T_r]_{B_r} \end{pmatrix}$$

A matriz diagonal de blocos M com elementos diagonais $[T_1]_{B_1}, ..., [T_r]_{B_r}$ é, algumas vezes, chamada soma direta das matrizes $[T_1]_{B_1}, ..., [T_r]_{B_r}$ e denotada $M = [T_1]_{B_1} \oplus ... \oplus [T_r]_{B_r}$.

5 Teorema da Decomposição Primária ou Teorema de Jordan-Chevalley

Como já mencionamos na introdução a forma que abordaremos a prova deste teorema é conhecida de “tradicional”. Veja, a citação abaixo:

> “O objetivo deste Apêndice é apresentar uma demonstração “tradicional”do Teorema da Decomposição Primária.(Bueno, Hamilton Prado, àlgebra linear Um segundo curso, página 114)”.

Outras técnicas de abordar a prova deste importante teorema encontram-se nas referências [6], [17] e [18]. Para que a prova em si do referido teorema não fique muito carregada iremos adotar a estratégia do livro referência [24]. E enunciaremos dois resultados auxiliares em forma de lema para fazer uso deles na prova do teorema central com isto esperamos ser mais didáticos. Vamos ao primeiro lema.

Lema 5.1 *Considerem que $g(x)$, $h(x) \in \mathbb{K}[x]$, polinômios relativamente primos, tais que, $(gh)T = 0$.*

Se $U = Nuc\ g(T)$ e $W = Nuc\ h(T)$, então U e W são T-invariantes e $V = U \oplus W$.

Prova. Primeiro vamos mostrar que U e W são T-invariantes. Tomemos $u \in U$, daí $g(T)u = 0$. Com isso vamos verificar se $Tu \in U$. Pelo Teorema 3.1 junto com o fato de que $g(T)u = 0$ temos,

$$g(T)(Tu) = T(g(T))u = T(0) = 0$$

Portanto, $Tu \in U$. O mesmo ocorre com W.

Como por hipótese $g(x)$, $h(x)$ são primos, isto é, $mdc(g, h) = 1$, então pelo teorema de Bezout, em $\mathbb{K}[x]$ existem polinômios $r(x)$, $s(x) \in \mathbb{K}[x]$, tais que

$$r(x)g(x) + s(x)h(x) = 1$$

e daí,

$$r(T)g(T) + s(T)h(T) = I \tag{1}$$

Agora de posse do fato (1) vamos mostrar que $V = U + W$. Considere $v \in V$. De (1) tiramos que

$$v = r(T)g(T)v + s(T)h(T)v.$$

Mas, observe que

$$h(T)(r(T)g(T))v = (r(T)g(T))h(T)v = r(T)(gh)(T)v = r(T)0 = 0$$

Daí, $r(T)g(T)v \in W$, então digamos que $r(T)g(T)v = w \in W$. Agora observe que

$$g(T)(s(T)h(T))v = (s(T)h(T))g(T)v$$

$$= s(T)(h(T)g(T))v$$

$$= s(T)(g(T)h(T))v$$

$$= s(T)(gh)(T)v$$

$$= s(T)0 = 0.$$

Isto é, $s(T)h(T)v \in U$, então digamos que $u = s(T)h(T)v \in U$. Logo,

$$v = w + u.$$

Daí, concluímos que $V = U + W$. Agora vamos mostrar que para todo $v \in V$, v escreve-se de forma única, como

$$v = w + u, sendo\ u \in U\ e\ w \in W.$$

Suponha que, para todo $v \in V$, escreve-se como

(2) $v = w + u$ sendo $u \in U$ e $w \in W$.

O que faremos é mostrar que w e u são determinados de forma única. Para tal vamos aplicar em (2) $r(T)g(T)$, isto é,

$$r(T)g(T)v = r(T)g(T)u + r(T)g(T)w.$$

Mas $u \in U$, então $g(T)u = 0$ e segue que $r(T)g(T)u = r(T)0 = 0$. Então,

(3) $$r(T)g(T)v = r(T)g(T)w.$$

Daí, mais uma vez de (1) temos que

(4) $$w = r(T)g(T)w + s(T)h(T)w.$$

Mas $w \in W$, então $h(T)w = 0$ e $s(T)h(T)w = s(T)0 = 0$. Então,

$$w = r(T)g(T)w.$$

De (3) e (4), tem-se que $w = r(T)g(T)v$, isto é, w é determinado de maneira única. Vamos mostrar que u é determinado de maneira única. Para tal vamos aplicar em (2) $s(T)h(T)$ e teremos,

$$s(T)h(T)v = s(T)h(T)u + s(T)h(T)w.$$

Como $w \in W$, então $h(T)w = 0$ e $s(T)h(T)w = 0$. Daí,

$$(5) \qquad s(T)h(T)v = s(T)h(T)u.$$

Mais uma vez de (1) temos que

$$(6) \qquad u = r(T)g(T)u + s(T)h(T)u = s(T)h(T)u,$$

pois $r(T)g(T)u = 0$. De (6) e (5) temos que $u = s(T)h(T)v$, ou seja é determinado de forma única.

Portanto, $V = U \oplus W$.

Lema 5.2 *Nas mesmas condições do Lema* 5.1 *se,* $f(x) = g(x)h(x)$ *é o polinômio minimal de* T *e tanto* $g(x)$ *como* $h(x)$ *são mônicos, então* $g(x)$ *é o polinômio mínimo da restrição de* T *a* U *e* $h(x)$ *é o polinômio mínimo da restrição de* T *a* W*.*

Prova. Considere m_u o polinômio do operador,

$$T_u : U \longrightarrow U(T_u(w) = Tw, \forall\ w \in U)$$

e m_w o polinômio mínimo do operador,

$$T_w : W \longrightarrow W.$$

temos que $g(T_u) = 0$, pois

$$U = Nuc\ g(T) \Rightarrow m_u/g$$

e $h(T_w) = 0$, pois

$$W = Nuc\ h(T) \Rightarrow m_w/h$$

Além disso, temos que para todo $v \in V$, tem-se que $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$. Daí,

$$m_u m_w(T)v = m_u m_w(T)(u + w) = m_u m_w(T)u + m_u m_w(T)w = 0 + 0 = 0$$

para todo $v \in V$. Logo, $m_u m_w(T) = 0$, isto é, $m_u m_w$ anula T. Mas, estamos supondo que f é o minimal de T, isto é, $f/m_u m_w$. Mas, $f = gh$, $\partial(m_u) \leq \partial(g)$ e $\partial(m_w) \leq \partial(h)$. Como os polinômios são todos mônicos obtemos então que $f = gh = m_u m_w \Leftrightarrow m_u = g$, pois m_u/g e $m_w = h$, devido m_w/h.

O Teorema da Decomposição Primária

Teorema 5.1 *Considerem V um espaço vetorial finitamente gerado sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Suponha que o polinômio minimal $m(x)$ de T se fatore como:*

$$m(x) = P_1^{r_1} P_2^{r_2} \cdot ... \cdot P_k^{r_k}$$

, sendo cada P_i um polinômio mônico irredutível sobre $\mathbb{K}$. Se $W_i = Nuc\ P_i^{r_i}(T) = \{v \in V : P_i^{r_i}(T)v = 0\}$, então W_i é T-invariante

$V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$ e $P_i^{r_i}$ é o polinômio minimal da restrição de T a W_i.

Prova. A prova será por indução sobre K. Se $k = 1$, então $m(x) = P_1^{r_1}$. Como $m(T) = 0$ então $Nuc\ P_1^{r_1}(T) = Nuc\ m(T) = Nuc\ 0 = V$, isto é, o núcleo do operador nulo é o espaço vetorial inteiro.

Para tal, suponha que $k > 1$ e que o resultado seja válido para $k - 1$ polinômio. Tomemos $g(x) = P_1^{r_1}$ e $h(x) = P_2^{r_1} P_3^{r_3} \cdot ... \cdot P_k^{r_k}$ temos que g e h são mônicos relativamente primos.
Considerem, $W_1 = Nuc\ g(T)$ e $W = Nuc\ h(T)$. Pelo Lema 5.1 $V = W_1 \oplus W$ e W_1 e W são T-invariantes. Agora pelo Lema 5.2 os polinômios mínimos das restrições de T a W_1 e a W são respectivamente $g(x)$ e $h(x)$. Denotaremos T_1 a restrição de T a W.
Já temos por hipótese de indução que $P_i^{r_i}$ é o polinômio minimal de T restrito a $W_i = Nuc\ P_i^{r_i}(T_1)$ com $2 \leq i \leq k$. Isto significa que $Nuc\ P_i^{r_i}(T) \subset Nuc\ P_i^{r_i}(T_1) \subset W$ logo, $Nuc\ P_i^{r_i}(T) \subset W$. (lembre-se $W = Nuc\ P_2^{r_2}(T_1) \oplus ... \oplus Nuc\ P_k^{r_k}(T_1))$
Portanto, $Nuc\ P_i^{r_i}(T) = Nuc\ P_i^{r_i}(T_1) = W$.
Observando que T restrito W_i coincide com a restrição de T_1 a W_i, daí os $P_i^{r_i}$ são os mínimos de T.

6 Aplicações

6.1 Representação Matricial em Blocos por meio do T.D.P.

Como aplicação do Teorema da Decomposição Primária iremos mostrar primeiramente como decompor um espaço como a soma de subespaços T-invariantes. E de posse desta informação vamos determinar uma base de tal forma que a matriz deste operador em tal base tem uma representação matricial em blocos. O que já é um ganho no objetivo de investigar o operador, pois a matriz em blocos é mais simples.

Considere a aplicação $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (10x_1 - 7x_4 + x_5, -x_3, x_2, 13x_1 - 9x_4 + x_5, 4x_1 - 3x_4 + x_5).$$

A representação de T na base canônica B do $\mathbb{R}^5$ é a matriz

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & -9 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de $[T]_B$ é

$$det([T]_B - \lambda I) = \begin{pmatrix} 10-\lambda & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & -9-\lambda & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Expandindo esse determinante com relação a segunda coluna, obtemos:

$$det([T]_B - \lambda I) = -\lambda det \begin{pmatrix} 10-\lambda & 0 & -7 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 13 & 0 & -9-\lambda & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$-det\begin{pmatrix} 10-\lambda & 0 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & -9-\lambda & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Desenvolvendo esses dois determinantes, obtemos

$$det([T]_B - \lambda I) = \lambda^2 det\begin{pmatrix} 10-\lambda & -7 & 1 \\ 13 & -9-\lambda & 1 \\ 4 & -3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$+det\begin{pmatrix} 10-\lambda & -7 & 1 \\ 13 & -9-\lambda & 1 \\ 4 & -3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (\lambda^2+1)[\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda]$$
$$= \lambda(\lambda^2+1)(\lambda-1)^2.$$

Pelo teorema da decomposição primária,

$$\mathbb{R}^5 = Nuc\ [T]_B \oplus Nuc\ ([T]_B^2 + I) \oplus Nuc\ ([T]_B - I)^2.$$

Aqui reside a tranquilidade para conseguir a representação matricial em blocos que desejamos. Pois, o espaço foi decomposto em 3 (três) subespaços T-invariantes acima exposto. Agora resta-nos trabalhar para determinar a base $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ que torna a representação matricial deste operador nesta base numa matriz em blocos. E a técnica consiste em encontrar a base de cada um dos subespaços T-invariantes, como já foi feito no exemplo 4.1.

Para tal vamos encontrar o $Nuc\ T$ resolvendo o sistema $Tx = 0$. Assim,

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & -9 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, $x_2 = x_3 = 0, x_4 = 3x_1/2, x_5 = -4x_1 + 3x_4 = -4x_1 + 9x_1/2 = x_1/2$. Assim, a solução geral de $Tx = 0$ é $x = (2x_1, 0, 0, 3x_1, x_1)$ e o vetor $v_1 \in B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ da base procurada pode ser escolhido como $v_1 = (2, 0, 0, 3, 1)$, isto é, o $Nuc\ T$ tem dimensão 1. Como era esperado, pois o grau do monômio λ no polinômio característico é 1.

Calculando $T^2 + I$ e resolvendo o sistema $(T^2 + I)x = 0$, encontramos a solução geral

$$(0, x_2, x_3, 0, 0).$$

De modo que os vetores, v_2 e v_3 podem ser escolhidos como

$$v_2 = (0, 1, 0, 0, 0) \quad e \quad v_3 = (0, 0, 1, 0, 0),$$

isto é, o $Nuc\ ([T]_B^2 + I)$ tem dimensão 2. Da mesma forma o sistema $(T - I)^2 x = 0$, cuja solução geral é

$$(x_1, 0, 0, x_4, 3x_1 - 2x_4)$$

o que nos permite escolher os vetores

$$v_4 = (1, 0, 0, 0, 3) \quad e \quad v_5 = (0, 0, 0, 1, -2),$$

isto é, $Nuc\ ([T]_B - I)^2$ tem dimensão 2. Desta forma, a base procurada $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ é dada por

$$B = \{v_1 = (2, 0, 0, 3, 1), v_2 = (0, 1, 0, 0, 0), v_3 = (0, 0, 1, 0, 0), v_4 = (1, 0, 0, 0, 3), v_5 = (0, 0, 0, 1, -2)\}$$

Agora vamos representar a aplicação linear T nessa base. Temos:

$$T(2, 0, 0, 3, 1) = (0, 0, 0, 0, 0) = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4 + 0v_5$$

$$T(0, 1, 0, 0, 0) = (0, 0, 1, 0, 0) = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 + 0v_4 + 0v_5$$

$$T(0, 0, 1, 0, 0) = (0, -1, 0, 0, 0) = 0v_1 - v_2 + 0v_3 + 0v_4 + 0v_5$$

$$T(1, 0, 0, 0, 3) = (13, 0, 0, 16, 7) = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 13v_4 + 16v_5$$

$$T(0, 0, 0, 1, -2) = (-9, 0, 0, -11, -5) = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 - 9v_4 - 11v_5.$$

Assim, utilizando o $Teorema$ 4.2 teremos a representação de T na base B como uma matriz diagonal em blocos como se vê abaixo.

$$T_B = \begin{pmatrix} (0) & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \\ & & \begin{pmatrix} 13 & -9 \\ 16 & -11 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

O bloco (0) corresponde à restrição de T ao subespaço invariante $Nuc\,T$. O bloco

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é produzido pela restrição de T ao subespaço invariante $Nuc(T^2 + I)$. O bloco

$$\begin{pmatrix} 13 & -9 \\ 16 & -11 \end{pmatrix}$$

é gerada pela restrição de T ao subespaço invariante $Nuc(T - I)^2$.

Vamos a uma outra aplicação bastante útil.

6.2 Aplicação do Teorema da Decomposição Primária para Operadores Diagonalizáveis

Existe uma afirmação que é possível se fazer já de posse dos conhecimentos do capítulo 2 deste trabalho que faremos agora.

Teorema 6.1 *Se um operador linear $T : V \longrightarrow V$ é diagonalizável então o polinômio minimal de T se fatora como*

$$m(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdot ... \cdot (x - c_k),$$

sendo $c_1, c_2, ..., c_k$ escalares distintos em $\mathbb{K}$.

A prova da afirmação acima é simples e não é necessário de nenhum resultado extraordinário como veremos agora.

Prova. Suponha que T é diagonalizável e $c_1, ..., c_k$ são os autovalores distintos de T.

Considere $B = \{v_{11}, ..., v_{1n_1}, ..., v_{k1}, ..., v_{kn_k}\}$ uma base de V constituída de autovetores de T onde $T(v_{jl}) = c_j v_{jl}, 1 \leq j \leq k$ e $1 \leq 1 \leq n_k$.

Considere $f(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdot ... \cdot (x - c_k)$ e vamos mostrar que f é o mínimo de T.

Já temos que $f(T)v = 0$, para todo $v \in V$. Para tal basta mostrar a ação sobre os elementos da base. Veja,

$$f(T)v_{jl} = (T - c_1 I)(T - c_2 I) \cdot ... \cdot (T - c_k I)v_{jl}$$

como $(T - c_i T)$ comuta com $(T - c_j I)$, então

$$f(T)v_{jl} = (T - c_1 I)(T - c_2 I) \cdot ... \cdot (T - c_k I)(T - c_j I)v_{jl}$$

$$f(T)v_{jl} = (T - c_1 I)(T - c_2 I) \cdot ... \cdot (T - c_k I)(0) = 0$$

Agora observe que f é mônico de menor grau logo f é o minimal de T.

Já a volta da afirmação acima não é trivial sem o resultado do Teorema da Decomposição Primária. Desta forma, iremos enunciar a volta e fazer a prova usando o T.D.P..

Teorema 6.2 *Considere um operador linear $T : V \longrightarrow V$. Se o polinômio minimal de T se fatora como*

$$m(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdot ... \cdot (x - c_k),$$

sendo $c_1, c_2, ..., c_k$ escalares distintos em $\mathbb{K}$. Então o operador T é diagonalizável.

Prova. Se $m(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdot ... \cdot (x - c_k)$ é o minimal de T, então pelo Teorema da Decomposição Primária, temos que

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k,$$

sendo

$$W_i = Nuc(T - c_i I) \Rightarrow (T - c_i I)w_i = 0 \Leftrightarrow Tw_i = c_i w_i.$$

Assim, cada w_i é um autovetor de T associado a cada um dos c_i, com $1 \leq i \leq k$.

Logo $B = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$ é uma base de autovetores de V. Portanto T é diagonalizável. Pois, $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$ então sendo $B_i = \{v_i\}$ base de W_i, então

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i.$$

Outra Aplicação do Teorema da Decomposição Primária é:

Considere $T : V \longrightarrow V$ operador linear e suponhamos que o polinômio minimal de T seja $m(x) = (x - c_1)^{r_1} \cdot ... \cdot (x - c_k)^{r_k}$ sendo $c_1, ..., c_k$ escalares distintos e $W_i = Nuc(T - c_i I)^{r_i}, 1 \leq i \leq k$. Então,

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k.$$

7 Operadores Nilpotentes

Está seção é apresentada aqui especialmente para dar-nos suporte a principal aplicação do Teorema da Decomposição Primária que é a Forma Canônica de Jordan.

Definição 7.1 *Um operador linear $T : V \longrightarrow V$ é chamado nilpotente se $T^n = 0$ para algum inteiro positivo n; chamamos k o índice de nilpotência de T se $T^k = 0$, mais $T^{k-1} \neq 0$. Analogamente, uma matriz quadrada é chamada nilpotente se $A^n = 0$ para algum inteiro positivo n e de índice k se $A^k = 0$, mais $A^{k-1} \neq 0$. Evidentemente, o polinômio mínimo de um operador (matriz) nilpotente de índice k é $m(t) = t^k$; portanto, seu único autovalor é zero.*

O resultado fundamental de operadores nilpotentes segue.

Teorema 7.1 *Considere $T : V \longrightarrow V$ um operador nilpotente de índice k. Então, T tem uma representação matricial diagonal em blocos, cujos elementos diagonais são da forma*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(isto é, todos os elementos de N são 0, exceto aqueles logo acima da diagonal principal que são 1). Existe, pelo menos, um N de ordem k e todos os outros N_s' são de ordem $\leq k$. O número de N_s' de cada ordem possível é determinados de maneira única por T. Além disso, o número total de N_s' de todas as ordens é igual à nulidade de T.

Na prova do teorema acima é possível mostrar que o número de tais matrizes N de ordem i é $2m_i - m_{i+1} - m_{i-1}$, sendo m_i é a nulidade de T^i.

Prova. Suponhamos que $dim\ V = n$. Considerem $W_1 = Nuc\, T, W_2 = Nuc\, T^2, ..., W_k = Nuc\ T^k$. Faça $m_i = dim\ W_i$, para $i = 1, ..., k$. Como T é de índice k , segue-se que $W_k = V$ e $W_{k-1} \neq V$; logo, $m_{k-1} < m_k = n$.
Além disso $W_1 \subseteq W_2 \subseteq ... \subseteq W_{k-1} \subseteq W_k$.

Assim, por indução, podemos escolher uma base $\{u_1, ..., u_n\}$ de V tal que $\{u_1, ..., u_{m_i}\}$ é a base de W_i.
Agora, escolhamos uma nova base para V em relação à qual T tem a forma desejada. Para tal será conveniente rotular os membros dessa nova base, por pares de índices. Comecemos pondo

$$v_{(1,k)} = u_{m_{k-1}+1}, v_{(2,k)} = u_{m_{k-1}+2}, ..., v_{(m_k - m_{k-1},k)} = u_{m_k}$$

De forma, que

$$B_k = \{v_{(1,k)} = u_{m_{k-1}+1}, v_{(2,k)} = u_{m_{k-1}+2}, ..., v_{(m_k - m_{k-1},k)} = u_{m_k}\},$$

seja um conjunto maximal com essa propriedade linearmente independente de W_k, tal que $B_k \bigcap W_{k-1} = \{0\}$ e

$$v_{(1,k-1)} = Tv_{(1,k)}, v_{(2,k-1)} = Tv_{(2,k)}, ..., v_{(m_k - m_{k-1},k-1)} = Tv_{(m_k - m_{k-1},k)}.$$

Daí,

$$S_1 = v_{(1,k-1)}, ..., v_{(m_k - m_{k-1},k-1)}\}$$

é um subespaço linearmente independente de W_{k-1}. Estendemos S_1 à um subconjunto de W_{k-1}, acrescentando novos elementos (se necessário) que denotamos por

$$B_{k-1} v_{(m_k - m_{k-1}+1,k-1)}, v_{(m_k - m_{k-1}+2,k-1)}, ..., v_{(m_{k-1} - m_{k-2},k-1)}$$

tal que, $< B_{k-1} > \cap W_{k-2} = \{0\}$, além disso B_{k-1} é maximal com essa propriedade.
Agora, fazemos

$$v_{(1,k-2)} = Tv_{(1,k-1)}, v_{(2,k-2)} = Tv_{(2,k-1)}, ...,$$

$$v_{(m_{k-1} - m_{k-2},k-2)} = Tv_{(m_{k-1} - m_{k-2},k-1)}$$

Segue,

$$S_2 = \{u_1, ..., u_{m_{k-3}}, v_{(1,k-2)}, ..., v_{(m_{k-1} - m_{k-2},k-2)}\}$$

é um subconjunto linearmente independente de W_{k-2} que podemos estender a um subconjunto B_{k-2} de W_{k-2} ajustando elementos

$$v_{(m_{k-1} - m_{k-2}+1,k-2)}, v_{(m_{k-1} - m_{k-2}+2,k-2)}, ..., v_{(m_{k-2} - m_{k-3}+3,k-2)}.$$

Continuando desta maneira, obtemos uma nova base para V, que, por conveniência de referência, expomos como segue

$$\begin{array}{l}
\quad v_{(1,k)}, \ldots, v_{(m_k-m_{k-1},k)} \\
v_{(1,k-1)}, \ldots, v_{(m_k-m_{k-1},k-1)}, \ldots, v_{(m_{k-1}-m_{k-2},k-1)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
v_{(1,2)}, \quad \ldots, v_{(m_k-m_{k-1},2)}, \ldots, v_{(m_{k-1}-m_{k-2},2)}, \ldots, v_{(m_2-m_1,2)} \\
v_{(1,1)}, \quad \ldots, v_{(m_k-m_{k-1},1)}, \ldots, v_{(m_{k-1}-m_{k-2},1)}, \ldots, v_{(m_2-m_1,1)}, \ldots, v(m_1, 1)
\end{array}$$

A última linha forma base de W_1, as duas últimas formam base de W_2, etc. Mas o que é importante para nós é que T transforma cada vetor imediatamente abaixo na tabela ou em 0 se o vetor está na última linha. Isto é,

$$Tv_{(i,j)} = \begin{cases} v_{(i,j-1)} & para \;\; j > 1 \\ 0 & para \;\; i = 1. \end{cases}$$

De posse do conhecimento dos operadores nilpontentes podemos abordar a principal aplicação do Teorema da Decomposição Primária que faremos na próxima seção.

8 Forma Canônica de Jordan

Vejamos algumas palavras do Prof.º Elon Lages Lima,

> "A Forma canônica de Jordan exibe a matriz mais simples que se pode obter para o operador T. Ela se mostra útil no estudo de questões que envolvem potências sucessivas do operador T, como as equações diferenciais lineares e as equações diferenças finitas lineares.(Lima, Elon Lages, Álgebra Linear, 5ª Edição, página 333)".

Um operador T pode ser posto na forma canônica de Jordan se seus polinômios característico e mínimo se fatoram em polinômios lineares. Isto é sempre verdadeiro se K for o corpo complexo C. Em qualquer caso, podemos sempre estender o corpo básico K a um corpo em que os polinômios mínimos e característico fatoram-se em fatores lineares; assim, em sentido amplo, todo operador tem uma forma canônica de Jordan. Analogamente, toda matriz é semelhante a uma matriz na forma canônica de Jordan.

Teorema 8.1 *Considere $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, cujos polinômio mínimo e característico são respectivamente,*

$$P(t) = (t - \lambda_1)^{n_1}...(t - \lambda_r)^{n_r},$$

e

$$m(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}...(t - \lambda_r)^{m_r}$$

sendo os λ_i escalares distintos. Então, T tem uma representação matricial diagonal em blocos J, cujos elementos diagonais são da forma

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

para cada λ_i, os blocos correspondentes J_{ij} tem as seguintes propriedades:

(i) *Existe, ao menos, um J_{ij} de ordem m_i: todos os outros J_{ij} são de ordem $\leq m_i$.*

(ii) *A soma das ordens dos J_{ij} é n_i.*

(iii) *O número dos J_{ij} é igual a multiplicidade geométrica dos λ_i.*

(iv) *O número dos J_{ij} de cada ordem possível é determinado de maneira única por T.*

Definição 8.1 *A matriz J, que aparece no teorema anterior, é chamada a forma canônica de Jordan do operador T. Um bloco diagonal J_{ij} é chamado um bloco de Jordan pertencente ao autovalor λ_i. Observe que*

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Isto é,

$$J_{ij} = \lambda_i I + N,$$

onde N é o bloco nilpotente que aparece no teorema 7.1.

Antes de fazermos a prova do teorema acima iremos fazer algumas aplicações que chamaremos de aplicações práticas para melhor entendermos as afirmações, isto é, hipóteses e tese do teorema. Em seguida faremos a refederida prova.

8.1 Aplicação

Uma maneira de aplicar o teorema da forma canônica de Jordan é encontrar as possíveis formas canônicas tendo apenas o polinômio característico na forma fatorada. Observe que será bem mais trabalhoso que encontrar as possíveis formas canônicas de Jordan que se tivessemos o característico e o mínimo, como veremos.

Suponhamos que o polinômio característico de um operador linear T é

$$P(t) = (t-5)^3(t-6)^2.$$

Como $t-5$ tem expoente 3 no polinômio característico, então o autovalor 5 deve aparecer três vezes na diagonal principal. Semelhantemente, o autovalor 6 deve aparecer duas vezes na diagonal principal. Ainda atendendo as hipóteses do teorema observamos que o bloco relacionado ao autovalor 5 pode aparecer no máximo de ordem 3. O mesmo para o autovalor 6 o maior bloco pode ter ordem 2. Assim, as possíveis formas canônicas de Jordan são:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} & & \\ & (5) & \\ & & \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} (5) & & & \\ & (5) & & \\ & & (5) & \\ & & & \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} & & \\ & (6) & \\ & & (6) \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} & & & \\ & (5) & & \\ & & (6) & \\ & & & (6) \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc} (5) & & & & \\ & (5) & & & \\ & & (5) & & \\ & & & (6) & \\ & & & & (6) \end{array}\right).$$

8.2 Aplicação

Agora veremos como aplicar o teorema da forma canônica de Jordan para encontrar as possíveis formas canônicas dado o polinômio característico e o mínimo do operador em fatores lineares. É interessante notar que reduz-se muito o trabalho, ou melhor, as possibilidades que na aplicação anterior. Suponhamos que os polinômios, característico e mínimo de um operador T são respectivamente,

$$P(t) = (t+4)^4(t-5)^3 \quad e \quad m(t) = (t+4)^2(t-5)^2$$

De acordo com o teorema da forma canônica de Jordan deve existir ao menos um bloco de ordem 2 e todos os outros blocos relacionado ao autovalor -4 deverão ter ordem menor ou igual a 2, pois o grau do fator $t+4$ é 2 no polinômio mínimo. Outro detalhe importante é que a soma das ordens dos blocos relacionados ao autovalor -4 deve ser igual a 4, pois o grau do fator $t+4$ é 4 no polinômio característico. Pelas observações feitas até o presente momento nos restam duas possibilidades ainda olhando o autovalor -4 que seria uma matriz com dois blocos de ordem 2 e autovalor -4 ou uma matriz com um bloco de ordem 2 e dois bloco de ordem 1 e autovalor -4. Analisando o fator $(t-5)^2$ do polinômio mínimo e atendendo o teorema em tela concluímos que em ambas as possibilidades deverá aparecer dois blocos relacionado ao autovalor 5 um de ordem 2, pois o grau do fator $t-5$ do mínimo é 2 e o outro bloco relacionado ao autovalor 5 de ordem 1. Sendo assim, as possíveis formas de Jordan, isto é, as matrizes são,

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} & & \\ & & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} & \\ & & & (5) \end{pmatrix}$$

Neste caso é importante frisar que existem dois autovetores relacionados ao autovalor -4 e dois autovetores relacionados ao autovalor 5.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} & & & & \\ & (-4) & & & \\ & & (-4) & & \\ & & & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} & \\ & & & & (5) \end{pmatrix}$$

Já nesta forma existem três autovetores relacionados ao autovalor -4 e dois autovetores relacionados ao autovalor 5.

8.3 Aplicação

Vamos determinar todas as possíveis formas canônicas de Jordan, para uma matriz de ordem 5, cujo polinômio mínimo é $m(t) = (t-8)^2$. Pelo teorema da forma canônica de Jordan a matriz deve ter um bloco de Jordan de ordem 2, pois o grau do fator $(t-8)$ é 2 no polinômio mínimo e os outros devem ser de ordem 2 ou 1. Então , só existem duas possibilidades são elas,

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} & \\ & & (8) \end{pmatrix} ou \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} & & & \\ & (8) & & \\ & & (8) & \\ & & & (8) \end{pmatrix}$$

Note que todos os elementos diagonais devem ser 8, pois o único autovalor é 8.

Em fim vamos a prova do teorema central desta seção.

Prova. Dadas as hipóteses do referido teorema temos que pelo **teorema da decomposição primária**, T é decomponível em operadores $T_1, ..., T_r$, isto é, $T = T_1 \oplus ... \oplus T_r$, sendo $(t - \lambda_i)^{m_i}$ é o polinômio mínimo de T_i. Assim, em particular,

$$(T_1 - \lambda_1 I)^{m_1} = 0, ..., (T_r - \lambda_r I)^{m_r} = 0$$

Fazendo $N_i = T_i - \lambda_i I$. Então, para $i = 1, ..., r$,

$$T_i = N_i + \lambda_i I,$$

sendo

$$N_i^{m_i} = 0$$

Isto é, T_i é a soma do operador escalar $\lambda_i I$ com um operador nilpotente N_i, que é de índice de nilpontência m_i, pois $(t - \lambda_i)^{m_i}$ é polinômio mínimo de T_i.

Agora, pelo $Teorema$ 7.1 sobre operadores nilpotentes, podemos escolher um base tal que N_i esteja na forma canônica. Nessa base, $T_i = N_i + \lambda_i I$ é representado por uma matriz diagonal de blocos M_i, cujos elementos diagonais são as matrizes J_{ij}. A soma direta J das matrizes M_i está na forma canônica e, pelo $Teorema$ 4.2, é representação matricial de T.

Por último devemos mostrar que os blocos J_{ij} satisfazem as propriedades requeridas. A propriedade (i) segue do fato que N_i é de índice m_i. A propriedade (ii) é verdadeira, pois T e J tem o mesmo polinômio característico. A propriedade (iii) é verdadeira, pois a nulidade de $N_i = T_i - \lambda_i I$ que é igual à multiplicidade geométrica do autovalor λ_i. A propriedade (iv) segue do fato que os T_i e, portanto, os N_i são determinados de maneira única por T.

9 Conclusão

A presente monografia chega aos seus paragráfos finais com a certeza de deixarmos como contribuição mais uma opção de um material sobre o Teorema da Decomposição Primária e algumas de suas consequências mais imediatas. Nada de novo foi acrescentado, no sentido ser inédito. Mas com certeza tentamos reunir aquilo que já existe em um único material de forma bem objetiva e em nossa visão um material agradável. Para tal resolveu-se apresentar esta monografia em oito capítulos. Das quais no capítulo 1, introdução, enfatizamos uma informação histórica importante o fato de que a prova do teorema da decomposição primária não é só mérito de Jordan e sim de Claude Chevalley também, tanto que este teorema também é conhecido historicamente como teorema de Jordan-Chevalley. Em seguida resolvemos abordar no capítulo 2, o tópico operadores diagonalizáveis, no intuito de construir um material harmônico e didático. Pois, como ficou constatado na impossibilidade de conseguirmos a representação matricial mais elementar de todas para um operador que é a matriz diagonal, somos motivados a procurarmos outros caminhos, isto é, outras formas matriciais para representar um operador. E é claro que sejam simples. Trilhando está busca somos levados a construir um terceiro capítulo comentando sobre instrumentos necessários para se compreender no futuro a linguagem que usaremos para tratar do teorema central da monografia, que são os, polinômios minimal e característicos, e seus resultados mais importantes que envolvem esse ferramentário. Inclusive um destes resultados por exemplo que envolvem o polinômio característico, é um dos teoremas mais importantes da álgebra linear, no sentido de sua grande utilidade, que é o teorema de Cayley-Hamilton. E aqui enfatizamos mais uma vez como pode-se constatar há um cunho de originalidade ao menos na linguagem como foi provado tal teorema. Outra afirmação fundamental que poderia ter sido inserida neste capítulo seria, o Teorema 6.1 que tem o seguinte conteúdo: "Se um operador linear $T : V \longrightarrow V$ é diagonalizável então o polinômio minimal de T se fatora como

$$m(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdot ... \cdot (x - c_k),$$

sendo $c_1, c_2, ..., c_k$ escalares distintos em $\mathbb{K}$."Que tem sua prova totalmente acessível para este capítulo. Mas resolvemos não colocar ele aqui estrategicamente para mostrar que sua volta é possível devido ao teorema da decomposição primária, isto é, ele foi colocado no capítulo seis como aplicação do teorema de Jordan-Chevalley. O capítulo quatro que trata de invariância como foi visto está totalmente ligado a idéia de representação matricial em blocos e por está razão essencial, uma matriz em blocos é com certeza mais simples do que uma matriz não diagonal. Inclusive é necessário como se nota para ler o teorema da decomposição primária. Após a introdução dos assuntos sobre invariância a noção de decomposição em somas diretas surge naturalmente como foi constatado. Pelo fato de estarmos preocupados em querer tornar o operador o mais simples possível, isto é, queremos "esmiuça-lo, desmontá-lo de forma a visualisar tudo sobre ele". E isso se torna possível quando estamos de posse desses conhecimentos invariância e decomposição em somas diretas, como vimos nos capítulos 3 e 4. Ressalto aqui a importância do Teorema 4.1 do capítulo 4. Em fim estamos prontos para entender e provar o teorema da decomposição primária que é provado na forma "Tradicional" como citado no texto. Escolhemos a técnica adotada pela referência [24]. Resolvemos enunciar dois lemas para só então atacar a prova central, pois achamos mais didático e elegante. Até este presente momento conseguimos concluir toda teoria como proposto no resumo para tratar com segurança e habilidade o teorema central. Agora no capítulo seis tratamos de duas aplicações. Uma de cunho mais prático, a aplicação 6.1, e a outra de cunho mais teórico 6.2. Ressalto que ficou como um ganho a compreensão do ocorre na essência sobre a aplicação 6.1, pois é ali que usando o teorema da decomposição primária encontra-se a matriz de um operador em blocos. Então surge uma indagação será que se trabalharmos a base ali encontrada conseguimos tornar esses blocos o mais trivial possível? A resposta é sim. Mas, não é o foco dessa monografia trabalhar a base de Jordan. Desta forma somos compelidos a tratar por necessidade um capítulo, o sétimo, sobre operadores nilpotentes. Isto para podermos finalizar este trabalho mostrando o potencial do teorema título deste trabalho com a principal aplicação do teorema da decomposição primária que é a busca de condições para a forma canônica de Jordan. Pois, é necessário para lermos o teorema da forma de Jordan. Por fim tratamos de definir a forma de Jordan, seus blocos e enunciar o teorema de Jordan. Em seguida optamos antes de fazer a prova do teorema introduzir algumas aplicações para melhor compreender e tornar o trabalho agradável de se ler e só então é que atacamos a prova do teorema. Desta forma, acreditamos que cumprimos com o proposto no resumo. Além do fato de vivermos um imenso prazer na construção deste trabalho, pois foi criado um ambiente de pesquisa ao longo de sintetizarmos os diversos tópicos de diversos livros, artigos e revistas num único trabalho aqui exposto.

Referências

[1] ANNALES DES MINES - PAGE D'ACCUEIL. Disponível em: <http://www.annales.org/archives/x/jordan.html>. Acesso em 21 mar 2010.

[2] ANSWERS.COM. Disponível em: <http://www.answers.com/topic/camille-jordan>. Acesso em 21 mar 2010.

[3] ANSWERS.COM. Disponível em: <http://www.answers.com/topic/claude-chevalley>. Acesso em 21 mar 2010.

[4] ANSWERS.COM. Disponível em: <http://www.answers.com/topic/jordan-chevalley-decomposition>. Acesso em 21 mar 2010.

[5] BOLDRINI, COSTA / FIGUEREDO, WETZLER, Álgebra Linear - 3ª edição.

[6] Bueno, Hamilton Prado, Álgebra Linear- Um segundo curso, SBM.

[7] Callioli,Carlos C./ Domingues,Hygino H./ Costa, Raberto C. F., Álgebra Linear e Aplicações.

[8] Carvalho, João Pitombeira de, Álgebra Linear-Introdução.

[9] Coelho,Flávio Ulhoa.-Lourenço, Mary Lilian., Um Curso de Álgebra Linear.

[10] DEPARTAMENTO DE MATEMATICA - UFMG. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ syok/cursos/al/>. Acesso em 24 abr 2010.

[11] EDITION JACQUES GABAY. Disponível em: <http://www.gabay.com/sources/Liste_ Bio.asp?NP=JORDAN% 2BCamille>. Acesso em 21 mar 2010.

[12] EDITION JACQUES GABAY. Disponível em: <http://www.gabay.com/sources/Liste_ Fiche.asp?CV=129>. Acesso em 21 mar 2010.

[13] Frank Ayres,JR, Matrizes-traduzido por BARROSO, ANA AMÁLIA FEIJÓ- coleção SCHAUM.

[14] GOOGLE TRADUTOR. Disponível em: <http://translate.google.com.br/>. Acesso em 21 mar 2010.

[15] H. D. Ikramov, LINEAR ALGEBRA- Problems Book

[16] Hadley, G., Álgebra Linear.

[17] HOFFMANN / KUNZE, Álgebra Linear.

[18] HOFFMANN, KENNETH / KUNZE, RAY, LINEAR ALGEBRA- 2ª edição.

[19] L. H. JACY MONTEIRO, Álgebra Linear-1º VOLUME.

[20] Lang, Serge, Álgebra Linear.

[21] Lang, Serge, Álgebra Linear-Coleção Clássicos da Matemática.

[22] Lima, Elon Lages, Álgebra Exterior- Coleção Matempatica Unversitária.

[23] Lima, Elon Lages, Álgebra Linear- Coleção Matempatica Unversitária.

[24] Lipschutz, Seymour, Álgebra Linear-Coleção SCHAUM.

[25] Santos, Nathan Moreira dos., Vetores e Matrizes:uma introdução á Álgebra Linear.

[26] Shokranian,Salahoddin, Introdução à Álgebra Linear.

[27] SO BIOGRAFIAS. Disponível em: <http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/MariECJo.html>. Acesso em 21 mar 2010.

[28] Teixeira, Ralph Costa, Álgebra Linear-exercícios e soluções-Coleção Matempatica Unversitária.

[29] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS. Disponível em: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Biographies/Jordan.html>. Acesso em 21 mar 2010.