

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

ALANJOCER DA CONCEIÇÃO LOPES
RICARDO ANDRÉ MACIEL DA CRUZ

MÉTODOS DE CONTAGEM E APLICAÇÕES

Macapá-AP
2010

ALANJOCER DA CONCEIÇÃO LOPES
RICARDO ANDRÉ MACIEL DA CRUZ

MÉTODOS DE CONTAGEM E APLICAÇÕES

Macapá-AP
2010

ALANJOCER DA CONCEIÇÃO LOPES
RICARDO ANDRÉ MACIEL DA CRUZ

MÉTODOS DE CONTAGEM E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado de matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para a obtenção do Grau de Licenciatura Plena em Matemática, sob a orientação do professor Dr. José Walter Cárdenas Sotil.

Macapá-AP
2010

ALANJOCER DA CONCEIÇÃO LOPES
RICARDO ANDRÉ MACIEL DA CRUZ

MÉTODOS DE CONTAGEM E APLICAÇÕES

Monografia apresentada à Universidade Federal do Amapá, como requisito obrigatório para obtenção do grau de licenciatura plena em matemática.

Aprovada em 23 de Abril 2010.

BANCA EXAMINADORA

Dr. José Walter Cárdenas Sotil

Dr. Guzman Eulálio Isla Chamilco

Msc. Vânia de Fátima Lemes de Miranda

A Deus, por nos conceder o conhecimento, a perseverança e principalmente a vida.

Às nossas famílias, pelo apoio nos momentos de dificuldades.

Aos nossos amigos de graduação, pelos momentos de companheirismo.

Ao Professor Steve Wanderson, pelos momentos de aprendizagem.

Agradecemos ao Professor José Walter Cárdenas Sotil pelos esclarecimentos e orientação.

A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens. (Descartes)

RESUMO

Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) desenvolvem-se os Métodos de Contagem e algumas de suas aplicações. Diferente a muitos livros didáticos que enfatizam os métodos de contagem como sendo permutações, arranjos ou combinações, esse trabalho é baseado em dois princípios básicos: o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo. Procurar a solução de problemas de contagem como uma permutação, arranjo ou combinação utilizando fórmulas pré-definidas é uma abordagem insuficiente, pois a maior parte dos problemas de contagem não são permutações ou combinações. As combinações e permutações são um caso particular dos princípios aditivo e multiplicativo, sendo que a maioria dos problemas de contagem podem ser resolvidos por esses dois princípios. Com base nos princípios aditivo e multiplicativo desenvolvem-se as permutações, arranjos, combinações, permutações com repetição, combinações com repetição, permutações circulares, anagramas, equações e inequações lineares com coeficientes unitários, probabilidades e distribuição binomial. Também são apresentados os enunciados e soluções de diversos problemas de contagem vindos de vestibulares e concursos públicos, onde se evidencia a importância de abordar a solução desses problemas usando o princípio multiplicativo e aditivo

Palavras-chave. Métodos de Contagem, Princípio aditivo, Princípio multiplicativo

RESUMÉN

En este trabajo de Conclusión de curso (TCC) se desenvuelven Métodos de Contaje y algunas de sus aplicaciones. Diferentemente a la mayoría de libros textos que enfatizan los métodos de contaje como siendo permutaciones, combinaciones o arreglos, este trabajo es basado en dois principios básicos: el principio aditivo y el principio multiplicativo. Tentar encontrar la solución de los problemas de contaje como una permutación, arreglo o combinación, usando formulas predefinidas es una abordaje insuficiente, porque la mayoría de los problemas de contaje no son únicamente permutaciones y combinaciones. Las combinaciones y permutaciones son un caso especial de los principios aditivo y multiplicativo, siendo que la mayoría de problemas se pueden resolver por estos dos principios. Tomando como base el principio aditivo y multiplicativo se desarrollan las permutaciones, arreglos, combinaciones, permutaciones con repetición, combinaciones con repetición, permutaciones circulares, anagramas, ecuaciones lineales y desigualdades con coeficientes iguales a la unidad, probabilidades y la distribución binomial. Se presentan también los enunciados y las soluciones de varios problemas de contaje originarios de concursos de admisión a las universidades e institutos, así como de concursos públicos, lo que muestra la relevancia de abordar la solución de estos problemas utilizando los principios aditivo y multiplicativo.

Palabras clave. Métodos de contaje, Principio aditivo, Principio multiplicativo

INTRODUÇÃO

Considere o seguinte problema:

Um grupo de dança folclórica, formado por sete meninos e quatro meninas, foi convidado a realizar apresentações de dança no exterior. Contudo, o grupo dispõe de recursos para custear as passagens de apenas seis dessas crianças. Sabendo-se que, nas apresentações do programa de danças, devem participar pelo menos duas meninas, o número de diferentes maneiras que as seis crianças podem ser escolhidas é igual a?

Uma das formas de resolver esse problema seria descrever todas as possibilidades de formar um grupo com seis crianças, em que pelo menos dois componentes fossem meninas. Assim, com sete meninos (a, b, c, d, e, f, g) e quatro meninas (1, 2, 3, 4), os grupos são formados da seguinte maneira:

a – b – c – d – 1 – 2

a – b – c – d – 2 – 3

a – b – c – d – 3 – 4

.

.

.

a – b – 1 – 2 – 3 – 4

No entanto, tal método somente seria apropriado no caso de um problema simples com poucos elementos. Para acelerar a resolução de problemas como esse existe uma parte da Matemática chamada Combinatória, que analisa estruturas e relações discretas com o objetivo de demonstrar a existência de subconjuntos de um conjunto finito dado, satisfazendo certas condições, classificando esses subconjuntos sem que seja necessário enumerar os seus elementos.

Estudos realizados em pergaminhos antigos caminham para confirmar que a Análise combinatória tem sua origem nos tempos de Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C), tornando-o pioneiro nessa área da Matemática. Tais pergaminhos passaram por vários povos da idade média, sendo que nos últimos anos foram encontrados e analisados por

estudiosos. Com o auxílio de raios ultravioleta e programas de computador foi possível obter a escrita original do trabalho de Arquimedes, designado por *Stomachion*, que é um autêntico tratado sobre Análise Combinatória. O *Stomachion* (ver Figura 01) é aparentemente, um jogo, semelhante ao Tangran (jogo Chinês de 7 peças), mas constituído por 14 peças que devem ser encaixadas de maneira a formarem um quadrado. Arquimedes pretendia determinar de quantas maneiras as peças podiam encaixar-se, de forma a construir um quadrado. Estudos recentes mostraram que existem 17152 soluções (consideradas as soluções simétricas) ou 268 soluções (descartadas as soluções simétricas).

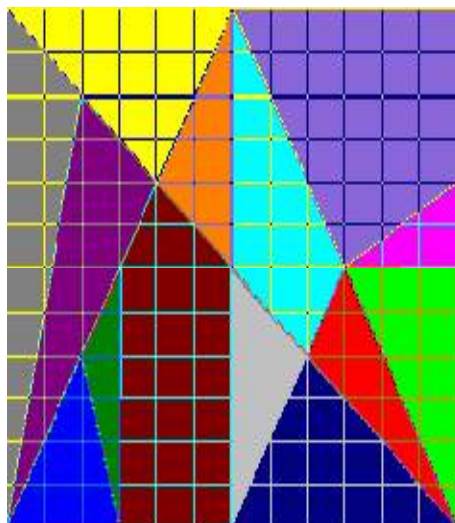


Figura 01- Stomachion

Outro fato que contribuiu para o desenvolvimento da Análise Combinatória foram os problemas originados nos chamados jogos de azar (dados, a roleta, cartas,...). As mais antigas ligações desses jogos com a matemática reduzem-se à enumeração das possibilidades de se obter um dado resultado no jogo, sem referência ao cálculo da probabilidade de se obter esse resultado. Era comum nos séculos XVI e XVII o interesse dos nobres e ricos em jogos de azar. Entretanto, esses jogos envolviam um alto grau de risco, levando os jogadores a buscar formas seguras para ganhar. É nesse contexto que surgem as primeiras obras sobre jogos de azar.

Nesse período, os matemáticos italianos Luca Paccioli (1445-1518), Girolano Cardano (1501-1576) e Niccoló Tartaglia (1499-1557) apresentam as primeiras considerações matemáticas sobre jogos de azar, onde a principal obra é atribuída a

Cardano, "*Liber de ludo Aleae*" (livro do jogo de dados) publicado em 1663. Nessa obra ele analisa os jogos de azar em geral e o jogo de dados em particular. Tal análise permitiu que ele chegasse bem próximo ao conceito de probabilidade, da noção de eventos equiprováveis e da essência do cálculo permutacional. Ele cita os axiomas do condicionamento (regra da adição) e independência (regra da Multiplicação).

Antes disso, Luca Paccioli em sua obra "*Summa de arithemetica, geometria, proportioni et proportionalita*" (*Pontos de aritmética, geometria, proporções e proporcionalidades*) propõe o problema das divisões das moedas: "*A e B jogam balla (jogo semelhante ao de moedas) e concordam em continuar até que um deles ganhe seis partidas; se o jogo tiver que ser interrompido quando A tiver ganhado 5 partidas e B apenas 3, como deverá repartir o valor apostado?*"

Em 1556, Tartaglia publica seu "*General Trattato*" (*Tratado geral*), obra em que apresenta uma teoria de contagem para jogos de dados e o esquema posteriormente denominado triângulo de Pascal. Nessa obra ele, também, detecta o erro de Paccioli (divisão do montante apostado na proporção 5:3) e propõe outra solução para o problema (divisão da proporção 2:1).

No entanto, as principais contribuições para o início da Teoria das Probabilidades são através da correspondência entre os matemáticos franceses Blaise Pascal e Pierre Fermat acerca de problemas surgidos nos jogos de azar, propostos pelo conde De Méré, nobre francês e assíduo jogador. Um dos problemas propostos era:

"Eu e um amigo meu estávamos a jogar quando recebemos uma mensagem e tivemos de interromper o jogo. Tínhamos colocado em jogo 32 pistolas (Moeda de ouro utilizada em vários países europeus até ao século XIX) cada um. Ganharia as 64 pistolas o que primeiro obtivesse 3 pontos, isto é, 3 vezes o número que escolheu no lançamento de um dado. Eu tinha escolhido o 6 e quando o jogo foi interrompido eu já tinha obtido o 6 duas vezes. O meu amigo escolheu o 1 e, quando interrompemos o jogo, tinha obtido o 1 uma vez. Como dividir as 64 pistolas?"

Uma resolução possível:

No próximo lançamento válido, ou sai o 6 e ganha o Conde, sendo a probabilidade de isso acontecer 1/2, ou sai o 1 (também com probabilidade 1/2) e o jogo tem de continuar. No lançamento seguinte, se sair o 6, ganha o Conde, neste caso

com probabilidade $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, se sair o 1 ganha o amigo, também com probabilidade de $\frac{1}{4}$.

Assim, a probabilidade de o Conde ganhar o jogo é de $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, logo deve receber $\frac{3}{4}$ das 64 pistolas, ou seja, 48 pistolas. Esquematizando: (VIEIRA, 2007).

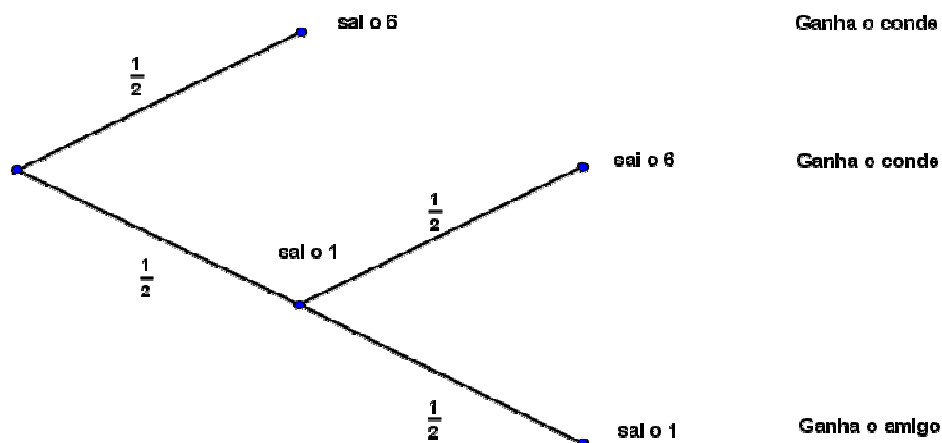


Figura 02-Resolução do problema proposto pelo conde De Mércé

Outro problema histórico foi o proposto, por volta de 1620, pelo Grão-duque da toscana a Galileu para fazer considerações sobre o jogo dos dados ou sobre as descobertas dos dados: “Nove se parte aditivamente em seis condições do mesmo modo que dez; no entanto, se jogar com três dados, a pessoa obtém dez mais freqüentemente que nove. Por quê?” Em síntese, ele queria saber por que, no lançamento de três dados, a soma dez sai mais vezes que a nove.

Soma igual a 9	Soma igual a 10
1+2+6	1+3+6
1+3+5	1+4+5
1+4+4	2+2+6
2+2+5	2+3+5
2+3+4	2+4+4
3+3+3	3+3+4

Galileu concluiu haver 25 casos de soma 9 e 27 casos de soma 10.

Além dos matemáticos já mencionados, vale destacar também os trabalhos realizados nessa área por Leibniz (1646-1716), Jacques Bernoulli (1654-1705), Moivre (1667-1754), Newton (1646-1727), Euler (1707-1783).

Leibniz escreveu, em 1660, “*Dissertatio de Arte Combinatória*” (*De arte combinatória*), que trata da análise combinatória, um dos aspectos de capital importância do cálculo das probabilidades e sobre aplicações do cálculo das probabilidades às questões financeiras.

Jacques Bernoulli escreveu o primeiro tratado importante sobre a teoria das probabilidades, num livro de edição póstuma, chamado “*Ars Conjectandi*” (*A arte da conjectura*) em 1713. Essa obra contém vários problemas relacionados a contagens e probabilidades, onde enuncia um teorema cuja generalização é hoje conhecida como a “Lei dos grandes números” e apresenta a teoria geral das permutações e combinações. Nessa obra ele também introduz a distribuição binomial e prova o primeiro teorema limite das teorias das probabilidades, depois chamados de Bernoulli e lei fraca dos grandes números.

Abraham de Moivre, na sua obra “*Doctrine of Changes*”, dedicou-se ao estudo das leis do acaso. Foi o primeiro a usar as funções geradoras para resolver a relação de recorrência $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, relacionada com a sucessão de Fibonacci (problema da multiplicação dos coelhos de Leonardo de Pisa).

Isaac Newton mostrou como calcular diretamente $(1 + x)^n$ sem antes calcular $(1 + x)^{n-1}$, e daí o desenvolvimento do conhecido Binômio de Newton.

Leonard Euler destaca-se por importantes contribuições. Sendo o fundador da teoria das partições de um número e do enunciado e solução do problema das Sete Pontes de Königsberg (teoria dos Grafos).

Existem também referenciais anteriores ao século XVI sobre a utilização de métodos de combinatória com outros ramos da matemática, é o caso da formação dos chamados quadrados mágicos, que datam provavelmente do século I d.C.

Há também textos antigos, aparentemente simples, onde é verificado o emprego de técnicas de contagens, por exemplo, o Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.): “*Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat (unidade de medida de grãos utilizada no Egito Antigo que equivale a 4,8 litros) de grãos; quantos itens têm ao todo?*”

Atualmente o estudo de Combinatória é dividido, para fins didáticos, em três espécies: arranjos, permutações e combinações. O presente trabalho, além de fazer o estudo de arranjos, permutações e combinações, propõe o estudo da base dessa teoria, que são o princípio aditivo e o princípio multiplicativo.

O primeiro Capítulo trata-se da introdução com comentários históricos da evolução dos métodos de contagem e das probabilidades. No capítulo 2 apresentam-se o princípio aditivo e princípio multiplicativo e desenvolvem-se as permutações simples, circulares, com repetições e anagramas. Em seguida são desenvolvidos os arranjos simples (amostragem sem repetição), arranjos com repetição (amostragem com reposição), além de combinações simples e com repetição. O capítulo 3 aborda equações e inequações lineares com coeficientes unitários, probabilidade e distribuição binomial como aplicações dos métodos de contagem. E, por fim, no quarto capítulo são propostos alguns problemas sobre o tema trabalhado, além de apresentar a resolução, buscando evidenciar a importância do princípio aditivo e do princípio multiplicativo.

O objetivo principal dessa obra é abordar os métodos de contagens a partir do princípio aditivo e princípio multiplicativo, mostrando o quanto tais princípios são essenciais para a resolução de problemas envolvendo métodos de contagens.

CAPÍTULO 2

MÉTODOS DE CONTAGENS

Métodos de contagem são métodos que permitem determinar o número de decisões que podem ser tomadas para executar certo procedimento ou tarefa. O grau de dificuldade para determinar o número de decisões dependerá das características do problema, o que determinará a estratégia mais adequada a seguir.

É usual assumir que métodos de contagem são fáceis, entretanto até problemas considerados simples podem gerar dúvidas quanto a sua solução. Será que a solução está certa? É um problema de combinação? É um problema de permutação? É um problema de arranjo? E se não for combinação, nem permutação, nem arranjo? Como posso ter certeza que a estratégia usada é a correta?

As dúvidas surgem porque diferente ao cálculo de áreas ou o cálculo de raízes quadráticas, onde existem uma fórmula pré-determinada, nos métodos de contagem não existe uma fórmula geral para determinar o número de possibilidades de determinado problema.

As estratégias de solução analisadas neste trabalho são:

- a) Dividir o problema de contagem em partes menores, de modo que as partes sejam disjuntas. Essa é a base do Princípio da Adição.
- b) Para cada elemento, analisar quantas decisões pode ser tomadas. Essa é a base do Princípio da Multiplicação.
- c) Somar adequadamente os resultados de (a) e (b).

A seguir será apresentado o princípio da adição e multiplicação.

2.1. PRINCÍPIO ADITIVO

Suponha que:

- a) Um procedimento designado por L_1 possa ser realizado de n_1 modos;
- b) Um segundo procedimento, designado por L_2 , possa ser realizado de n_2 modos;

- c) Não seja possível que ambos os procedimentos sejam realizados em conjunto, isto é, os procedimentos são disjuntos;

Então, o número de modos pelo qual o procedimento pode ser realizado formado por L_1 ou L_2 será de $n_1 + n_2$. A figura 03 ilustra o princípio aditivo.

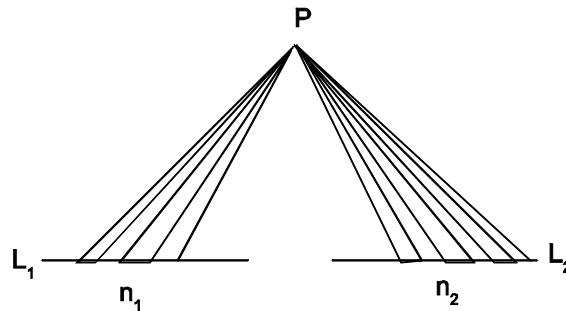


Figura 03- Princípio da adição

Exemplo: *Suponha que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro e que Carlos tenha dinheiro para assistir a apenas 1 evento. Quantos são os programas que Carlos pode fazer no sábado?*

Solução. No exemplo observe que:

- Carlos pode assistir a um filme, para o qual tem 3 opções;
- Carlos pode assistir ao teatro, para o qual tem 2 opções;
- Devido não ter dinheiro suficiente ele pode assistir a apenas 1 evento, logo ele não pode assistir a um filme e a uma peça de teatro no sábado.

Das condições acima, verifica-se o princípio aditivo. Logo, os programas que Carlos pode fazer no sábado são $3+2 = 5$.

2.2 EXTENSÃO DO PRINCÍPIO ADITIVO

Generalizando o princípio aditivo. Suponha que:

- a) Existem k procedimentos;
- b) O i -ésimo procedimento pode ser realizado de n_i modos ($i = 1, 2, \dots, k$);
- c) Não seja possível que dois quaisquer desses procedimentos possam ser realizados simultaneamente. Isto é, os procedimentos são disjuntos dois a dois.

Então, o número de modos pelo qual o procedimento pode ser realizado formado por L_1 ou L_2 ou ... ou L_k , é de:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

Exemplo: *Suponha que tenham entrado em cartaz 3 filmes, 2 peças de teatro e 4 musicais, e que Carlos tenha dinheiro para assistir a apenas 1 evento. Quantos são os programas que Carlos pode fazer no sábado?*

Solução. No exemplo, observe que:

- Carlos pode assistir a um filme, para o qual tem 3 opções;
- Carlos pode assistir ao teatro, para o qual tem 2 opções;
- Carlos pode assistir a um musical, para o qual tem 4 opções;
- Devido a não ter dinheiro suficiente ele pode assistir a apenas 1 evento no sábado.

Das condições acima, verifica-se o princípio aditivo. Logo, os programas que Carlos pode fazer no sábado são $3+2+4 = 9$. Isto é, Carlos pode fazer nove programas no sábado.

2.3. PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Suponha que:

- a) Um procedimento designado por L_1 possa ser realizado de n_1 modos;
- b) Um segundo procedimento, designado por L_2 , possa ser realizado de n_2 modos;
- c) Cada maneira de executar o procedimento L_1 pode ser seguida por qualquer daquelas para executar o procedimento L_2 .

Então, o número de modos pelo qual pode ser realizado o procedimento L_1 seguido do procedimento L_2 é de $n_1 \cdot n_2$. A figura 04 ilustra o princípio multiplicativo.

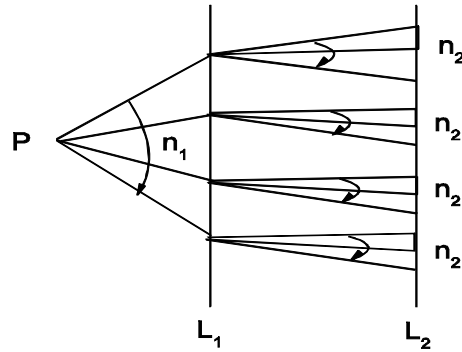


Figura 04- Princípio multiplicativo

Exemplo: *Suponha que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro e que Carlos possa assistir a um filme e a uma peça de teatro. Quantos são os programas que Carlos pode fazer no sábado?*

Solução. No exemplo, observe que:

- Carlos pode assistir a um filme, para o qual tem 3 opções;
- Carlos pode assistir a uma peça de teatro, para o qual tem duas opções;
- Nesse caso a opção assistir a um filme e assistir a uma peça de teatro não são opções disjuntas. Logo, o princípio da adição não se aplica. Entretanto, para cada filme que assiste, Carlos tem a opção de assistir qualquer um das peças de teatro. Verificam-se assim as condições do princípio multiplicativo.

Do princípio multiplicativo, Carlos pode fazer $3 \cdot 2 = 6$ programas no sábado.

2.4. EXTENSÃO DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Generalizando o princípio multiplicativo. Suponha que:

- a) Existam k procedimentos;
- b) O i -ésimo procedimento pode ser realizado de n_i modos ($i = 1, 2, \dots, k$);
- c) O i -ésimo procedimento pode ser seguido por qualquer dos n_{i+1} modos do $(i+1)$ -ésimo procedimento (para $i = 2, 3, \dots, n$).

Então, o número de modos pelo qual pode ser realizado o procedimento formado por L_1 , seguido pelo procedimento L_2 , seguido pelo procedimento L_3 , ... , seguido pelo procedimento L_k é de:

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$$

Exemplo: *Suponha que tenham entrado em cartaz 3 filmes, 2 peças de teatro e quatro musicais. E que Carlos possa assistir a um filme, a uma peça de teatro e a um musical. Quantos são os programas que Carlos pode fazer no sábado?*

Solução. No exemplo, observe que:

- Carlos pode assistir a um filme, para o qual tem 3 opções;
- Carlos pode assistir a uma peça de teatro, para o qual tem duas opções;
- Carlos pode assistir a um musical, para o qual tem 4 opções;
- Nesse caso a opção assistir a um filme, teatro ou musical não são opções disjuntas, logo o princípio da adição não se aplica. Entretanto, para cada filme que assiste, Carlos tem a opção de assistir qualquer um das peças de teatro. E para cada uma das opções de filme e teatro, ele pode assistir a qualquer um dos musicais. Verificam-se assim as condições do princípio multiplicativo.

Do princípio multiplicativo, Carlos pode fazer $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ programas no sábado.

2.5. PERMUTAÇÕES SIMPLES

Uma *permutação simples* (ou simplesmente *permutação*) de n objetos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos.

Assim, havendo n objetos, pergunta-se:

“Deve-se considerar a ordem dos n objetos na técnica de contagem?”

Se a resposta for afirmativa, trata-se de um caso de permutação.

Por exemplo, as permutações de a , b e c são os elementos ordenados:

(a,b,c) ; (a,c,b) ; (b,a,c) ; (b,c,a) ; (c,a,b) ; (c,b,a) .

Cada uma das ternas acima consideradas contém os mesmos objetos, entretanto diferem na ordem, o que faz que eles sejam agrupamentos diferentes.

Denominando P_n o número de permutações simples, o modo de calcular esse número é usando o princípio multiplicativo:

- a. Sejam n objetos a_1, a_2, \dots, a_n ;
- b. Para escolher o primeiro elemento da n -úpla existem n possibilidades: a_1, a_2, \dots, a_n ;
- c. Para qualquer um dos elementos escolhidos, por exemplo, a_1 , há $n-1$ possibilidades de escolher o segundo elemento: a_2, a_3, \dots, a_n . Pelo princípio multiplicativo, para escolher os dois primeiros elementos existem $n \times (n-1)$ possibilidades;

- d. Para qualquer par ordenado já escolhido, por exemplo, (a_1, a_2) , há $n-2$ possibilidades de escolher o terceiro elemento: a_3, a_4, \dots, a_n . Pelo princípio multiplicativo, há $n \times (n-1) \times (n-2)$ possibilidades de escolher os três primeiros elementos;
- e. Continuando esse procedimento, existem $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$ possibilidades de escolher as n -úplas.

Logo, o número de permutações de n objetos é:

$$P_n = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

Exemplo. *Considerando os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números de dois algarismos distintos podem ser formados?*

Solução. Os números de 2 algarismos têm duas casas a serem preenchidas, a casa das unidades e a casa das dezenas. É indistinta qual casa é preenchida primeira, pois não existe nenhuma restrição a ser considerada. Logo:

- A casa das dezenas pode ser ocupada por qualquer um dos 5 algarismos.
- Como os números são distintos, para cada uma das casas das dezenas já preenchidas, restam quatro algarismos para ocupar a casa das unidades.
- Então, pelo princípio multiplicativo há $5 \cdot 4 = 20$ números de dois algarismos distintos que podem ser formados com os cinco dígitos disponíveis.

Exemplo. *Quantos números de dois algarismos distintos podem ser formados?*

Solução. Os números de 2 algarismos têm duas casas a serem preenchidas, a casa das unidades e a casa das dezenas, com a restrição que a casa das dezenas não pode ser zero. Inicia-se a contagem pela restrição, isto é, preenche-se primeiro a casa das dezenas:

- Como o zero não pode ocupar a casa das dezenas, restam 9 algarismos que podem ser usados: 1, 2, ..., 9. Portanto, há 9 possibilidades de preencher a casa das dezenas.
- Como os números são distintos, para cada uma das casas das dezenas já preenchidas, restam 9 algarismos para ocupar a casa das unidades já que nesse caso será considerado o algarismo zero. Assim, há 9 possibilidades para preencher a casa das unidades.
- Então, pelo princípio multiplicativo há $9 \cdot 9 = 81$ números de dois algarismos distintos que podem ser formados.

2.6. PERMUTAÇÕES CIRCULARES (PC_n)

Problemas de Permutações Circulares com n elementos, denotado por PC_n , são problemas do tipo: “De quantos modos se podem colocar n objetos em círculos considerando-se iguais as disposições que coincidam por rotação?”.

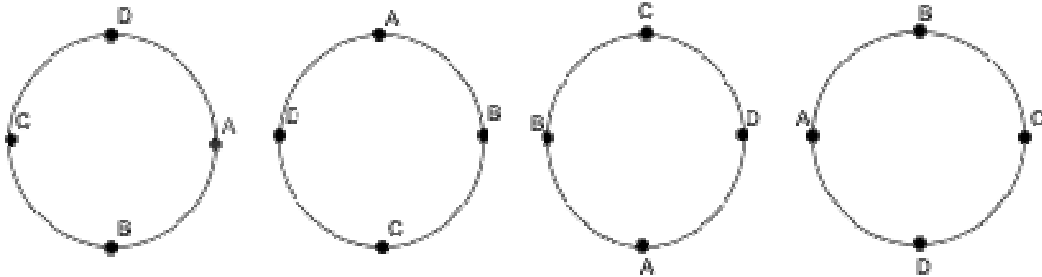


Figura 05- Exemplo de permutação circular

As quatro disposições acima são consideradas iguais em PC_4 , elas coincidem por rotação. Considerando um elemento, por exemplo, A, ele pode ocupar as 4 posições por rotação, logo se pode considerar como ocupando uma única posição. Fixando ele, o problema se reduz a permutar 3 elementos, assim há $3! = 6$ modos de colocar n objetos em círculos considerando-se iguais as disposições por rotação.

No caso geral, em PC_n fixa-se um elemento e considera-se as permutações simples de $(n-1)$ elementos. Portanto:

$$PC_n = (n-1)!$$

Exemplo. De quantos modos 4 crianças podem formar uma roda?

Solução. Uma disposição da roda com as quatro crianças seguida por rotações sobre o conjunto continua com a mesma configuração. Logo, trata-se de um caso de permutações circulares com 4 elementos. Portanto, o número de modos de que 4 crianças formam uma roda é:

$$PC_4 = (4-1)! = 3! = 6$$

Exemplo. Se Pedro e Ana são duas de 8 crianças, de quantas maneiras elas podem brincar ficando Ana e Pedro sempre lado a lado?

Solução. Primeiro, considera-se Pedro e Ana como uma única pessoa. Há, portanto, 7 “crianças” que podem brincar de $(7-1)! = 6!$ maneiras diferentes. Como Ana e Pedro podem estar lado a lado de duas maneiras diferentes, multiplica-se esse número por 2. Portanto, a resposta é igual a:

$$2 \times PC_7 = 2 \times (7-1)! = 2 \times 6! = 1.440$$

2.7. PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO ($P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$)

Permutações com repetição são permutações de n objetos nem todos distintos, em que um deles aparece n_1 vezes, outro n_2 vezes, e assim por diante até que o último apareça n_k vezes. Com a condição:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

Para contar o número de modos de $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ utiliza-se o seguinte procedimento:

- em n objetos existem:

$$P_n = n! \text{ modos}$$

- como n_1 elementos se repetem há $n_1!$ modos a mais, corrigindo:

$$\frac{n!}{n_1!}$$

- como n_2 elementos se repetem há $n_2!$ modos a mais, corrigindo:

$$\frac{n!}{n_1! n_2!}$$

- seguindo o procedimento, obtém-se:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Exemplo. De quantos modos podemos colocar em fila sete letras, sendo três letras A, duas letras B e duas letras C.

Solução. São listadas a seguir algumas possibilidades: aaabbcc, aabbacc, acbbaac, cbbaaac, cabbacac. Esse é um problema de permutações com repetição, onde $n = 7$, $n_1 = 3$, $n_2 = 2$ e $n_3 = 2$, logo o número de modos de colocar em fila 7 letras, sendo três letras A, duas letras B e duas letras C é:

$$P_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

Exemplo. Se um time de futebol jogou 13 partidas em um campeonato, tendo perdido 5 jogos, empatado 2 e vencido 6 jogos, de quantos modos pode isto ter ocorrido?

Solução. Esse é um problema de permutações com repetição, onde $n = 13$, $n_1 = 5$, $n_2 = 2$ e $n_3 = 6$, logo o número de modos que isto pode ter ocorrido é:

$$P_{13}^{5,2,6} = \frac{13!}{5!2!6!} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8^4 \times 7 \times 6!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 6!} = 36036$$

2.8. ANAGRAMAS

Denomina-se **Anagrama** a um agrupamento (não necessariamente fazendo sentido na linguagem comum) formado com as letras de uma palavra, mas numa ordem qualquer. O número de anagramas é uma permutação com repetição do número de letras da palavra considerando as repetições de cada uma das letras.

Exemplo. Para contar o número de anagramas que se podem formar com a palavra MATEMATICA determina-se o número de letras da palavra MATEMATICA e as vezes que se repetem cada letra: existem 10 letras, a letra M se repete 2 vezes, a letra A se repete 3 vezes, a letra T se repete 2 vezes e as outras letras (E, I e C) não se repetem. Logo, o número de anagramas é:

$$P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = P_{10}^{3,2,2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! 2! 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 2} = 151.200$$

2.9. ARRANJOS SIMPLES () OU AMOSTRAGEM SEM REPOSIÇÃO

Um arranjo simples ou simplesmente arranjo ou amostragem sem reposição, de n objetos diferentes tomados p a p , é qualquer agrupamento ordenado de p elementos

dos n objetos. Isso é equivalente a ter n objetos diferentes com os quais se quer preencher p lugares.

Denominando o número de arranjos de n objetos tomados de p em p , o modo de calcular esse número é usando o princípio multiplicativo:

- a. Sejam n objetos diferentes a_1, a_2, \dots, a_n ;
- b. Para escolher o primeiro elemento da n -úpla há n possibilidades: a_1, a_2, \dots, a_n ;
- c. Para qualquer um dos elementos escolhidos, por exemplo, a_1 , há $n-1$ possibilidades de escolher o segundo elemento: a_2, a_3, \dots, a_n . Pelo princípio multiplicativo, na escolha dos dois primeiros elementos existem $n \times (n-1)$ possibilidades.
- d. Para qualquer par ordenado já escolhido, por exemplo, (a_1, a_2) há $n-2$ possibilidades de escolher o terceiro elemento: a_3, a_4, \dots, a_n . Pelo princípio multiplicativo, há $n \times (n-1) \times (n-2)$ possibilidades de escolher os três primeiros elementos.
- e. Continuando esse procedimento, resulta que o número de possibilidades de escolher os p elementos é:

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo. *Quantos anagramas de duas letras diferentes se podem formar com um alfabeto de 23 letras?*

Solução. Há 23 letras e deseja-se calcular quantos grupos ordenados de duas letras diferentes se podem formar. Ou seja, trata-se de um problema de arranjo de 23 elementos tomados de dois em dois:

$$A_{23}^2 = \frac{23!}{21!} = 23 \times 22 = 506$$

Portanto, formar-se 506 anagramas de duas letras.

Exemplo. Quantos números de 4 ou 5 algarismos distintos, e maiores do que 2.000, podem ser formados com os algarismos 0, 1, 3, 5 e 7?

Solução. Usa-se o princípio aditivo para separar os números com 4 ou 5 números distintos. Assim, contam-se quantos números podem ser formados com 4 algarismos distintos e soma-se esse resultado com a contagem dos números com 5 algarismos distintos.

- a) Números de 4 algarismos distintos: há 4 posições para serem preenchidas. Como o número deve ser maior do que 2.000, a primeira posição pode ser preenchida ou com o 3 ou com 5 ou com 7, isto é, de 3 maneiras diferentes. As outras 3 posições podem ser preenchidas com qualquer um dos 4 dígitos restantes, isto é, de A_4^3 maneiras. Portanto, pelo princípio multiplicativo há $3 \times A_4^3 = 3 \times \frac{4!}{1!} = 72$ números de 4 algarismos distintos e maiores que 2.000 formados com os algarismos 0, 1, 3, 5 e 7.
- b) Números de 5 algarismos distintos: há 5 posições para serem preenchidas. A posição da dezena de milhar pode ser preenchida ou com o 1 ou com o 3 ou com 5 ou com 7, isto é, de 4 maneiras diferentes. As outras 4 posições podem ser preenchidas com qualquer um dos 4 dígitos restantes, isto é, de $4! = 24$ maneiras. Portanto, pelo princípio multiplicativo há $4 \cdot 4! = 96$ números de 5 algarismos distintos e maiores do que 2.000 formados com os dígitos 0, 1, 3, 5 e 7. Conseqüentemente, aplicando o princípio aditivo, somam-se os resultados de a) e b). Há $72 + 96 = 168$ números que verificam a condição do problema.

2.10. ARRANJOS COM REPETIÇÃO () OU AMOSTRAGEM COM REPOSIÇÃO

Um Arranjo com repetição ou Amostragem com reposição, de n objetos diferentes tomados p a p , é qualquer agrupamento ordenado de p elementos dos n objetos, onde qualquer elemento tem n possibilidades de ser escolhido, sendo permitida a reposição de cada elemento escolhido. Isto é, se um elemento é escolhido, ele é repostado formando parte das próximas escolhas.

Denominando o número de arranjos com reposição de n objetos tomados de p em p , o modo de calcular esse número é usando o princípio multiplicativo:

- Sejam n objetos diferentes a_1, a_2, \dots, a_n ;
- Para escolher o primeiro elemento da n -úpla existem n possibilidades: a_1, a_2, \dots, a_n ;
- Para qualquer um dos elementos escolhidos, por exemplo, a_1 , como ele é repostado existem n possibilidades de escolher o segundo elemento: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Pelo princípio multiplicativo, há na escolha dos dois primeiros elementos $n \times n = n^2$ possibilidades;

- d. Para qualquer par ordenado já escolhido, por exemplo (a_1, a_2) , como eles foram repostos existem n possibilidades de escolher o terceiro elemento: a_1, a_2, \dots, a_n . Pelo princípio multiplicativo, há $n \times n \times n = n^3$ possibilidades de escolher os três primeiros elementos;
- e. Continuando esse procedimento, resulta que o número de possibilidades de escolher os p elementos é:

$$AR_n^p = n \times n \times n \times \dots \times n = n^p$$

Exemplo. Qual o total de placas de carro que podem ser construídas constando de 7 símbolos, sendo os 3 primeiros constituídos por letras e os 4 últimos por dígitos?

Solução. Considerando o alfabeto com 26 letras e considerando a reposição, as 3 letras podem ser escolhidas de AR_{26}^3 maneiras diferentes.

Considerando os 10 dígitos (0, 1, 2, ..., 9), os 4 dígitos podem ser escolhidos, com reposição, de AR_{10}^4 formas. Logo, pelo princípio multiplicativo, o total de placas é:

$$AR_{26}^3 \times AR_{10}^4 = 26^3 \times 10^4 = 175.760.000$$

2.11. COMBINAÇÕES SIMPLES ()

As combinações simples de n elementos tomados de k em k , podem ser caracterizadas pelo seguinte problema:

“Se , quantos subconjuntos distintos de k elementos podem ser formados de um conjunto S de n elementos?”

Para responder esse problema, sejam A_1, A_2, \dots, A_r os r subconjuntos de k elementos. Esses subconjuntos são distintos, mas não necessariamente disjuntos.

Seja B_i a coleção das k -uplas ordenadas que se podem formar escolhendo as componentes entre os elementos de A_i sem reposição.

Logo, , onde indica o número de k -uplas ordenadas de B_i . Pode-se contar o número de elementos de de duas formas diferentes:

- a) Como pois B_i difere de B_j em pelo menos um elemento, pelo princípio aditivo:

$$v(t) = v(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r) = v(B_1) + \dots + v(B_r) = k! + \dots + k! = k! \times r$$

b) De outro lado, T consta das k-uplas que se podem formar escolhendo as componentes em S sem reposição:

$$v(T) = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Igualando em a) e b):

$$k! \times r = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow r = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = C_n^k$$

Denota-se as combinações simples de n elementos tomados de k em k por C_n^k ou

. Logo:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemplo. *Quantos anagramas de duas letras diferentes se podem formar com um alfabeto de 23 letras?*

Solução. Esse é um problema resolvido na seção 2.9 usando arranjos. A seguir a resolução do problema usando combinações e a definição de anagrama.

– Havendo duas letras diferentes, por exemplo, AB, pode-se formar $\frac{2!}{1!1!} = 2!$ anagramas.

– De outro lado, as palavras de duas letras (sem importar a ordem) de um total de 23 letras somam um total de C_{23}^2 .

– Logo, pelo princípio da multiplicação: $C_{23}^2 \times 2! = \frac{23!}{21! \times 2!} \times 2! = 23 \times 22 = 506$

anagramas formados por duas letras diferentes.

Exemplo. *Quantos são os anagramas formados por 2 vogais e 3 consoantes escolhidas dentre 18 consoantes e 5 vogais?*

Solução. Seguindo o procedimento do exemplo anterior, contam-se quantos anagramas podem ser formados com 5 elementos diferentes, quantas palavras diferentes não

importando a ordem podem ser formados com duas de 5 vogais e com 3 de 18 consoantes e finalmente usa-se o princípio da multiplicação.

- Havendo uma palavra de 5 letras formada por duas vogais e três consoantes diferentes, por exemplo, AEBCD, podem-se formar $\frac{5!}{1!1!1!1!1!} = 5!$ anagramas;
- As palavras de duas vogais (sem importar a ordem) de um total de 5 vogais somam um total de ;
- As palavras de três consoantes (sem importar a ordem) de um total de 18 consoantes somam um total de .
- Logo, pelo princípio da multiplicação: $C_5^2 \times C_{18}^3 \times 5! = \frac{5!}{3!2!} \times \frac{18!}{15!3!} \times 5! = 979.200$ anagramas formados de duas vogais e três consoantes diferentes.

Exemplo. *Quantos anagramas da palavra UNIFORMES começam por consoante e terminam em vogal?*

Solução. A palavra “UNIFORMES” possui 4 vogais e 5 consoantes. Deve-se escolher uma consoante para começar a palavra e uma vogal para terminá-la.

- Escolhendo uma consoante das 5 disponíveis, C_5^1 ;
- Selecionando uma vogal das 4 disponíveis, C_4^1 ;
- As outras 7 letras podem ocupar qualquer uma das sete posições, logo há 7! maneiras de selecioná-las;
- Aplicando o princípio multiplicativo, o número de anagramas da palavra UNIFORMES que começa, com consoante e terminam por vogal é igual a:

$$C_5^1 \times C_4^1 \times 7! = 5 \times 4 \times 7! = 100.800$$

2.12. COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO ()

Suponha que num parque de diversões existam quatro tipos de brinquedos: *a*, *b*, *c* *d*. E que uma pessoa quer comprar dois bilhetes. É claro que ela poderá comprar dois bilhetes do mesmo tipo (pode ser que ela queira ir duas vezes na roda gigante). Descrevendo todas as possibilidades, obtêm-se dez: aa, bb, cc, dd, ab, ac, ad, bc, bd, cd.

Observe que esse número é maior do que $C_4^2 = 6$, pois quando são consideradas as combinações simples de 4 tomados 2 a 2, não pode ser tomado um mesmo objeto mais de uma vez. Esse é um tipo de problema conhecido como das *combinações com repetição* de 4 tomados 2 a 2. Descrevendo a solução desse problema, conta-se da seguinte forma:

- Se os bilhetes são para brinquedos diferentes tem-se $C_4^2 = 6$ escolhas. Eles são: ab, ac, ad, bc, bd e cd;
- Se os bilhetes são para o mesmo brinquedo, o primeiro bilhete pode ser escolhido de $C_4^1 = 4$ maneiras, o segundo bilhete só tem uma possibilidade de escolha, pois tem que ser igual ao primeiro bilhete. Logo, há 4 escolhas;
- Usando o princípio aditivo, o número total de escolhas é:

$$C_4^2 + C_4^1 \times 1 = 6 + 4 = 10$$

Retornando ao parque de diversões. Uma pessoa, caso tenha dinheiro suficiente, poderá comprar mais do que 4 bilhetes. Nesse caso ela, necessariamente, deverá comprar pelo menos 2 bilhetes de um mesmo brinquedo. Supondo que ela resolva comprar 5 bilhetes para estes 4 brinquedos. Algumas possibilidades seriam: *aaaaa*, *abbbc*, *aacbb*, *bbccd*, etc.

Para contar o total de elementos do tipo acima basta dividir o problema e usar em seguida o princípio da adição:

- Se a pessoa compra dois bilhetes para o mesmo brinquedo e compra um bilhete para os outros brinquedos, existem $C_4^1 = 4$ escolhas.
- Se a pessoa compra dois bilhetes para um brinquedo, dois bilhetes para outro brinquedo e um bilhete para um terceiro brinquedo, existem $C_4^2 = 6$ escolhas.
- Se a pessoa compra dois bilhetes para um brinquedo e três bilhetes para outro brinquedo, existem $C_4^1 = 4$ escolhas.
- Se a pessoa compra três bilhetes para um brinquedo, um bilhete para outro brinquedo e um bilhete para um terceiro brinquedo, existem $C_4^1 = 4$ escolhas.
- Se a pessoa compra quatro bilhetes para um brinquedo e um bilhete para outro brinquedo, existem $C_4^1 = 4$ escolhas.

- Se a pessoa compra os cinco bilhetes para um único brinquedo, existem escolhas.
- Usando o princípio da adição para contar todos os casos:

$$C_4^1 \times C_3^3 + C_4^1 \times C_3^2 + C_4^1 \times C_3^1 + C_4^1 \times C_3^0 + C_4^0 \times C_3^5 = 56$$

Outra forma de resolver esse problema é representar os brinquedos como barras

|. Para dividir a reta em 4 partes é necessário somente 3 barras.

espaço 1 | espaço 2 | espaço 3 | espaço 4

Desejando preencher esses espaços com os 5 bilhetes representados por bolas, por exemplo:

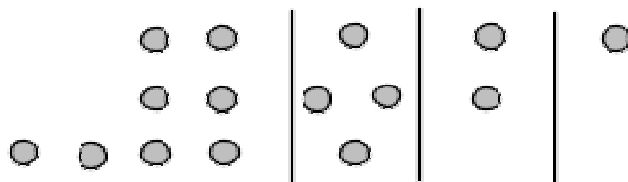


Figura 06- Exemplo de combinação com repetição

Esse problema equivale a combinar 8 elementos tomados de 5 em 5. Logo, o número de escolhas é igual a $C_8^5 = \frac{8!}{3!5!} = 56$, o qual coincide com o resultado anterior.

Nesse caso: $CR_3^4 = C_8^5$.

No caso geral de combinações com repetição de n elementos tomados de p em p CR_n^p , há um total de $(n+p-1)$ objetos que correspondem a $(n-1)$ barras e p bolas, logo:

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p$$

Quando são consideradas combinações simples de n elementos tomados de p a p , p deve ser menor do que ou igual a n ($p \leq n$). No caso de combinações com repetição, essa restrição não é necessária, como foi visto no caso da compra de bilhetes.

Exemplo. De quantos modos podemos comprar 4 refrigerantes em um bar que vende 2 tipos de refrigerante?

Solução. Esse é um problema de combinações com repetição, logo:

$$CR_2^4 = C_{2+4-1}^4 = C_5^4 = 5.$$

Denotando os refrigerantes por a e b , estas 5 possibilidades seriam as seguintes:

$aaaa, aaab, aabb, abbb, bbbb.$

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES

Esse capítulo trata de algumas das aplicações dos métodos de contagem. Inicialmente é apresentado o procedimento para contar o número de soluções das equações lineares com coeficientes unitários. Em seguida, tal procedimento é estendido para as inequações lineares com coeficientes unitários. Logo após, são apresentados alguns aspectos sobre probabilidades, em que são empregadas as técnicas de contagem. Por fim, é trabalhada a distribuição binomial.

3.1. EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES UNITÁRIOS

O objetivo é contar o número de soluções de equações do tipo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m \\ x_i \in (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) \end{cases} \quad (1)$$

ou

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m \\ x_i \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \quad (2)$$

A diferença entre (1) e (2), é que em (1) é permitido às variáveis x_i assumirem o valor zero, enquanto que em (2) isso não é permitido. Em (2) todos os coeficientes devem ser inteiros positivos.

As equações do tipo (1) e (2) têm todos os coeficientes unitários. Equações do tipo (1) e (2) são problemas da Programação Inteira, na qual se procura soluções inteiras para essas equações. Nessa seção não será procurada as soluções de (1) e (2), e sim, contar o número de soluções dessas equações. Como exemplo, considere a equação do tipo (1).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

Nesse caso, é simples achar as soluções de (3). Basta considerar as possibilidades de ocorrência como mostra a seguinte tabela:

x_1	0	1	2	3	4	5
x_2	5	4	3	2	1	0

Ou seja, as soluções são: $\{(0,5), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (5,0)\}$. Logo, o número de soluções de (3) é seis.

De outro lado, a equação (3) pode ser vista como um problema de combinação com repetição (seção 2.12), pois ela pode ser formulada da seguinte forma: Distribuir 5 bolas de gude entre 2 meninos, supondo que os meninos possam receber mais de uma bola. Por exemplo, o menino x_1 recebe as 5 e o menino x_2 nenhuma bola; o menino x_1 recebe 3 bolas e o menino x_2 duas, e assim consecutivamente até esgotar todas as possibilidades. Logo, o número de soluções da equação (3) é:

$$CR_2^5 = C_{2+5-1}^5 = C_6^5 = \frac{6!}{5!(6-5)!} = \frac{6!}{5!1!} = 6$$

Isto é, há 6 soluções, como já tinha sido determinada. Em geral, é estabelecida a seguinte propriedade:

Propriedade 3.1: O número de soluções da equação:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = m \\ x_i \geq 0, \quad x_i \in \mathbb{Z}, \quad i=1, 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

é determinada pelo número: $CR_n^m = C_{n+m-1}^m$

Agora, considere o problema do tipo (2):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 > 0, x_2 > 0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (4)$$

Da tabela 3.1 excluem-se os pares (0,5) e (5,0), logo as soluções de (4) são:

$$\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$$

Tem-se, então, 4 soluções. Para simplificar a contagem das soluções de (4), é conveniente transformar essa equação numa do tipo (1). Para isso, faz-se a transformação

$$\begin{cases} x_1=1+y_1 \\ x_2=1+y_2 \end{cases} \quad (5)$$

Logo:

$$\begin{cases} y_1=x_1-1 \\ y_2=x_2-1 \end{cases}$$

Como $x_i \geq 1 \rightarrow x_i-1 \geq 0 \rightarrow y_i \geq 0$, isto é, $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ (6)

Substituindo (5) e (6) em (4):

$$\begin{cases} (1+y_1) + (1+y_2) = 5 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \quad y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases} y_1+y_2=3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \quad y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (7)$$

A equação (7) é do tipo (1) e o número de suas soluções pode ser obtido pela

Propriedade 3.1. Logo, o número de soluções de (7) é determinado pelo número:

$$CR_2^3 = C_{2+3-1}^3 = C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

Como tinha sido determinado previamente. Em geral, para resolver a equação (2), faz-se a substituição: $x_i = 1 + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$

Como $x_i \geq 1 \rightarrow x_i-1 \geq 0 \rightarrow y_i \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, n$

Logo, (2) transforma-se na equação:

$$\begin{cases} (1+y_1) + (1+y_2) + \dots + (1+y_n) = m \\ y_i \geq 0, y_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Portanto, obtém-se o sistema equivalente à equação (2):

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + \dots + y_n = m - n \\ y_i \geq 0, y_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (8)$$

Pela **Propriedade 3.1**, o número de soluções de (8) é:

$$CR_n^{m-n} = C_{n+m-n-1}^{m-n} = C_{m-1}^{m-n} = C_{m-1}^{n-1}$$

A seguinte propriedade tem sido estabelecida:

Propriedade 3.2: O número de soluções da equação

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = m \\ x_i > 0, x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

É determinado pelo número:

$$CR_n^{m-1} = C_{m-1}^{m-n} = C_{m-1}^{n-1}$$

3.2. INEQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES UNITÁRIOS

Nessa seção o objetivo é contar o número de soluções da inequação:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq m \\ x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (9)$$

Para resolver essa inequação, é necessário transformá-la numa equação do tipo (1). Para isso, será adicionada uma variável, x_{n+1} , que vai absorver a diferença entre m e $x_1 + x_2 + \dots + x_n$:

$$x_{n+1} = m - x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (10)$$

Obviamente:

$$x_{n+1} \geq 0 \quad (11)$$

De (9), (10) e (11) tem-se a equação:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = m \\ x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (12)$$

Por construção, o número de soluções da equação de (12) é a mesma do número de soluções da inequação (9). Pela **Propriedade 3.1** o número de soluções de (12) é CR_{n+1}^m , que é igual ao número de soluções de (9).

A seguinte propriedade tem sido estabelecida:

Propriedade 3.3: o número de soluções da equação:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = m \\ x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

É determinado pelo número:

$$CR_{n+1}^m = C_{n+m}^m$$

Exemplo: Determinar o número de soluções inteiras e não negativas da desigualdade:

$$x + y + z \leq 6$$

Solução. A desigualdade:

$$\begin{cases} x + y + z \leq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; x, y, z \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

É do tipo (9). Pela **Propriedade 3.3**, o número de soluções dessa inequação é determinado pelo número:

$$CR_{3+1}^6 = CR_4^6 = CR_{6+4-1}^6 = C_9^6 = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84$$

3.3. PROBABILIDADES

Uma aplicação das técnicas de contagens é na avaliação das probabilidades ditas teóricas ou a priori, na qual contamos o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

A seguir alguns conceitos importantes sobre probabilidades.

Experimento Aleatório: é aquele experimento que poderá ser repetido sob as mesmas condições indefinidamente, não sendo possível especificar a priori o resultado de cada experimento. Entretanto, são conhecidos todos os resultados possíveis do experimento. Por exemplo, no lançamento de uma moeda sabe-se que os resultados podem ser cara ou coroa, mas não se tem certeza do resultado do próximo lançamento da moeda.

Espaço Amostral (Ω): é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, e será denotado por Ω . No exemplo do lançamento de uma moeda:

$$\Omega = \{c, k\}, \text{ onde } c = \text{cara e } k = \text{coroa.}$$

Evento: é qualquer subconjunto do espaço amostral Ω . No exemplo do lançamento de uma moeda:

$$\Omega = \{c, k\}, \{c\}, \{k\}, \emptyset \text{ são eventos de } \Omega.$$

Evento Simples: é aquele evento formado por um único elemento do espaço amostral. Se o evento é formado por dois ou mais elementos será chamado de **evento composto**. No exemplo do lançamento de uma moeda, os eventos $\{c\}$ e $\{k\}$ são eventos simples.

Variável Aleatória: seja E um experimento aleatório e Ω o espaço amostral associado a
Uma função: $X : \Omega \rightarrow R$ é denominada variável aleatória. Isto é, se ω é um elemento de Ω , então $x(\omega)$

Espaço amostral Equiprovável: o espaço amostral finito $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é dito equiprovável se todos os eventos simples têm a mesma probabilidade de ocorrer, isto é:

$$P(a_i) = \frac{1}{n}$$

Se $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é um espaço amostral equiprovável e $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, com r é um evento de Ω , então:

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{r \text{ parcelas}} = \frac{r}{n}$$

Assim:

$$P(A) = \frac{\text{números de casos favoráveis ao evento}(A)}{\text{número total de casos}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Exemplo. No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de obter um número par?

Solução. Nesse caso, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A = \{2, 4, 6\} \text{ (obter um número par)}$$

Logo:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Considere o dado honesto, assim todas as faces têm a mesma probabilidade de serem obtidas.

A probabilidade pode ser definida axiomáticamente sobre o espaço amostral Ω .

Se $P(\Omega) = \{A : A \text{ é evento de } \Omega\}$ é o conjunto das partes de Ω , define-se probabilidade:

$$P: P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \rightarrow P(A)$$

Verificam-se as propriedades:

- 1) $P(\Omega) = 1$
- 2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se $A \cap B = \emptyset$, $A, B \subset \Omega$
- 3) $P(A) \geq 0$, $\forall A \subset \Omega$

Como consequência direta dessas propriedades, tem-se que:

- a) $P(\emptyset) = 0$
- b) $P(A^c) = 1 - P(A)$, onde A^c é o complemento de A
- c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Prova de (a). $\Omega = \Omega \cup \emptyset$, com $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$

De 2):

$$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega)$$

$$P(\Omega) + P(\emptyset) = P(\Omega)$$

$$1 + P(\emptyset) = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

Prova de (b). $A \cup A^c = \Omega$ e $A \cap A^c = \emptyset$

De 2):

$$P(A) + P(A^c) - P(\Omega)$$

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Exemplo. *Havendo dois baralhos, uma carta é extraída de cada um, qual é a probabilidade de que pelo menos uma seja ás de ouro?*

Solução. Considere:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 \text{ e } x_2 \text{ são as cartas obtidas do 1º e 2º baralho, respectivamente}\}$$

$A = \{(x_1, x_2): x_1 \text{ e } x_2 \text{ são ases de ouro}\}$

$A^c = \{(x_1, x_2): x_1 \text{ e } x_2 \text{ não são ases de ouro}\}$

Nesse caso é mais simples calcular $P(A^c)$.

$$P(A^c) = \frac{n(A^c)}{n(\Omega)} = \frac{51 \times 51}{52 \times 52}$$

Logo:

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) = 1 - \frac{51 \times 51}{52 \times 52} = \frac{52 \times 52 - 51 \times 51}{52 \times 52} = \\ &= \frac{52^2 - 51^2}{52^2} = \frac{(52 + 51)(52 - 51)}{52^2} = \frac{103}{52} \end{aligned}$$

Exemplo: Qual é a probabilidade de obter 6 ou menos de 6 com três dados?

Solução.

$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3): x_i \text{ resultado do } i\text{-ésimo dado, } 1 \leq x_i \leq 6, i = 1, 2, 3\}$

$$n(\Omega) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$$

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) : 3 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 6\}$$

Considere o evento A como a união disjunta dos eventos:

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 3\} \cup \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 4\} \cup \\ &\cup \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 5\} \cup \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 6\} \end{aligned}$$

Caso 1: considere a equação:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_i \geq 1, x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

O número de soluções dessa equação é dado pela **Propriedade 3.2**:

$$CR_3^{3-3} = CR_{3+0-1}^0 = C_2^0 = 1$$

Caso 2: Considere a equação:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_i \geq 1, x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

O número de soluções dessa equação é:

$$CR_3^{4-3} = CR_3^1 = CR_{3+1-1}^1 = C_3^1 = 3$$

Caso 3: Considere a equação:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_i \geq 1, x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

O número de soluções dessa equação é:

$$CR_3^{5-3} = CR_3^2 = CR_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Caso 4: Considere a equação:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_i \geq 1, x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

O número de soluções dessa equação é:

$$CR_3^{6-3} = CR_3^3 = CR_{3+3-1}^3 = C_5^3 = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Logo:

$$n(A) = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

Portanto,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{20}{210} = \frac{5}{54}$$

3.4. DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Antes de definir e exemplificar distribuição binomial, é necessário apresentar algumas ferramentas que serão de vital importância para o entendimento do tópico.

Provas de Bernoulli.

Um processo de provas de Bernoulli é uma sequência de n experimentos, tal que:

- i) Cada experimento tem dois possíveis resultados, chamados sucessos ou fracassos;
- ii) A probabilidade p de sucessos é a mesma para cada experimento;
- iii) A probabilidade não é afetada pelo conhecimento de resultado prévio (as provas são independentes).

Exemplo: Uma moeda é lançada 8 vezes. Cada lançamento pode ser cara ou coroa, e a probabilidade de obter cara é $p = \frac{1}{2}$ para cada lançamento.

Probabilidade Binomial:

Denotando $b(n, p, k)$ a probabilidade que em n provas de Bernoulli se obtenha exatamente k sucessos.

Exemplo: Calcular $b(3, p, k)$

Solução: $n = 3, k = 2$

Obter a probabilidade de 2 sucessos em 3 provas de Bernoulli.

$$1\ 1\ 0 \rightarrow p \times p \times q = p^2q$$

$$1\ 0\ 1 \rightarrow p \times q \times p = p^2q$$

$$0\ 1\ 1 \rightarrow q \times p \times p = qp^2$$

$$b(3, p, 2) = p(x = (1, 1, 0)) + p(x = (1, 0, 1)) + p(x = (0, 0, 1))$$

$$b(3, p, 2) = p^2q + p^2q + qp^2 + qp^2 = 3p^2q$$

Exemplo: Calcular $b(3, p, 0)$

Solução:

$$q\ q\ q = q^3$$

$$b(3, p, 0) = q^3$$

Exemplo: Calcular $b(3, p, 1)$

Solução:

$$1\ 0\ 0 \rightarrow p \times q \times q = pq^2$$

$$0\ 1\ 0 \rightarrow q \times p \times q = pq^2$$

$$0\ 0\ 1 \rightarrow q \times q \times p = pq^2$$

$$b(3, p, 1) = pq^2 + pq^2 + pq^2 = 3pq^2$$

Exemplo: Calcular $b(3, p, 3)$

Solução:

$$p\ p\ p = p^3$$

$$b(3, p, 3) = p^3$$

Nota: A soma das probabilidades $b(3,p,k)$, $k=0,1,2,3$ resulta em:

$$\begin{aligned} & b(3, p, 0) + b(3, p, 1) + b(3, p, 2) + b(3, p, 3) \\ &= q^3 + 3q^2p + 3p^2q + p^3 \\ &= (p + q)^3 = 1^3 = 1 \end{aligned}$$

Propriedade 3.4. Sejam n provas de Bernoulli com probabilidade p de sucesso sobre cada experimento. A probabilidade de obter k sucessos é:

$$b(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{onde } q = 1 - p.$$

Distribuição Binomial.

Sejam: $n \in \mathbb{Z}^+$, $p \in (0, 1)$ e a variável aleatória X :

X : número de sucessos em provas de Bernoulli com parâmetro n e p .

A distribuição $b(n, p, k)$ é chamada distribuição binomial.

Nota:

$$\sum_{k=0}^n b(n, p, k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1^n = 1$$

Exemplo: A probabilidade de um menino ser daltônico é 8%. Qual é a probabilidade de serem daltônicos todos os 4 meninos que se apresentaram, em um determinado dia, para um exame oftalmológico?

Solução:

$$p = 0,08$$

$$q = 0,92$$

$$b(4, p, 4) = \binom{4}{4} p^4 q^0 = \frac{4!}{4!0!} \times p^4 = (0,08)^4 = 0,00004096 = 0,004096\%$$

Exemplo: O resultado do crescimento de ervilhas amarelas homozigotas (AA) com ervilhas verdes homozigotas (aa) são ervilhas amarelas heterozigotas (Aa). Se estas ervilhas forem cruzadas entre si ocorrem ervilhas amarelas e verdes, na proporção de 3 para 1. Logo, num cruzamento deste tipo, a probabilidade de ocorrer ervilhas amarelas é $p = \frac{3}{4}$ e verde é $q = \frac{1}{4}$.

Seja a variável aleatória:

X : número de ervilhas amarelas em um conjunto de ervilhas a qual segue uma distribuição binomial $b(n, p, k)$.

Se forem selecionadas ao acaso, 4 ervilhas resultantes do cruzamento de ervilhas heterozigotas. Qual é a probabilidade de 2 dessas 4 ervilhas sejam da cor amarelas?

Solução. Nesse caso:

$$n = 4, k = 2, p = \frac{3}{4} \text{ e } q = \frac{1}{4}$$

$$b(4, p, 2) = \binom{4}{2} p^2 q^{4-2} = \frac{4!}{2!2!} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{27}{128} = 0,2109 = 21,09\%$$

CAPÍTULO 4

PROBLEMAS DE MÉTODOS DE CONTAGENS

Além dos aspectos teóricos práticos apresentados no Capítulo 2, das aplicações do capítulo 3 e das várias áreas das ciências que usam as técnicas aqui apresentadas, neste capítulo apresentam-se problemas provenientes de vestibulares de diversas universidades, institutos técnicos e de provas de concursos públicos. Essa breve apresentação mostra a relevância, cada vez maior, com que esse tema é considerado nos vários tipos de concursos e vestibulares.

PROBLEMA 01 (ESAF 2008). *Marcam-se 5 pontos sobre uma reta r e 8 pontos sobre uma reta r' paralela a r . O número de n triângulos com vértices em 3 desses 13 pontos é dado por?*

Solução.

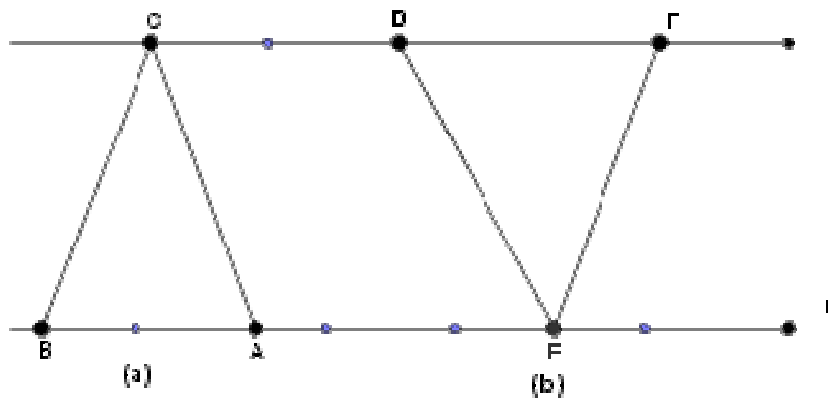


Figura 07. Tipos de triângulos (a) e (b) formados com vértices em r e r'

Para formar um triângulo com vértices em r e r' é necessário que dois vértices estejam numa das retas e o outro vértice esteja na outra reta. Sendo assim, há dois tipos de triângulos (a) e (b) (ver Figura 07). Como eles são diferentes, o número total de

possibilidades é a soma das possibilidades do tipo (a) e do tipo (b) (Princípio Aditivo). Resta agora contar o número de possibilidades de cada tipo.

Contagem de triângulos do tipo (a): Esses são triângulos com dois vértices em r' e um vértice em r . Para contar essas possibilidades utiliza-se o seguinte procedimento:

Dos oito pontos da reta r' devem-se escolher dois, sendo que nesse caso escolher os vértices A e B é o mesmo que escolher B e A, ou seja, a ordem é irrelevante. Logo, há C_8^2 possibilidades de escolher dois pontos em r' .

Para cada dois pontos de r' , deve-se escolher um ponto de r entre 5 pontos. Nesse caso há C_5^1 possibilidades.

Pelo princípio multiplicativo, existem $C_8^2 \cdot C_5^1$ possibilidades:

$$C_8^2 \cdot C_5^1 = \frac{8!}{2!(8-2)!} \cdot \frac{5!}{1!(5-1)!} = 28 \cdot 5 = 140$$

Contagem de triângulos do tipo (b): Esses são triângulos com dois vértices em r e um vértice em r' . Para contar essas possibilidades utiliza-se o seguinte procedimento:

Dos cinco pontos da reta r devem-se escolher dois, sendo que nesse caso escolher os vértices D e E é o mesmo que escolher E e D, ou seja, a ordem é irrelevante. Logo, há C_5^2 possibilidades de escolher dois pontos em r .

Para cada dois pontos de r , deve-se escolher um ponto de r' entre 8 pontos. Nesse caso existem C_8^1 possibilidades.

Pelo princípio multiplicativo, há $C_8^1 \cdot C_5^2$ possibilidades:

$$C_8^1 \cdot C_5^2 = \frac{8!}{1!(8-1)!} \cdot \frac{5!}{2!(5-2)!} = 8 \cdot 10 = 80$$

Princípio Aditivo: Como os conjuntos dos triângulos formados pelas combinações dos pontos das retas r e r' são disjuntos, aplica-se então o Princípio Aditivo. Finalmente:

$$C_8^2 \cdot C_5^1 + C_8^1 \cdot C_5^2 = 140 + 80 = 220$$

Portanto, são formados 220 triângulos com vértices em três desses 13 pontos.

PROBLEMA 02 (ESAF 2008). *Um grupo de dança folclórica, formado por sete meninos e quatro meninas, foi convidado a realizar apresentações de dança no*

exterior. Contudo, o grupo dispõe de recursos para custear as passagens de apenas seis dessas crianças. Sabendo-se que, nas apresentações do programa de danças, devem participar pelo menos duas meninas, o número de diferentes maneiras que as seis crianças podem ser escolhidas é igual a?

Solução. Existem 7 meninos e 4 meninas para formar um grupo com 6 crianças, composto por **pelo menos duas meninas**. Têm-se os seguintes casos excludentes:

1º caso: um grupo formado por **duas meninas** e, conseqüentemente, **4 meninos**;

2º caso: um grupo formado por **3 meninas e 3 meninos**;

3º caso: um grupo formado por **4 meninas e 2 meninos**

Verificando cada caso.

1º caso:

Para cada possibilidade de escolha do número de meninas há uma possibilidade de escolha para o número de meninos, logo pelo princípio multiplicativo:

$$\frac{\text{meninas}}{\text{meninas}} \times \frac{\text{meninos}}{\text{meninos}}$$

Para escolher o número de meninas tomam-se duas do total de 4. Como a ordem não é relevante, por exemplo, um grupo formado por Ana e Paula é igual ao formado por Paula e Ana, há C_4^2 possibilidades.

Para escolher o número de meninos toma-se 4 do total de 7. Como a ordem não é relevante, por exemplo, um grupo formado por Zico e Júnior é igual ao formado por Júnior e Zico, há C_7^4 possibilidades.

Logo:

$$\frac{C_4^2}{\text{meninas}} \times \frac{C_7^4}{\text{meninos}} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \times \frac{7!}{4!(7-4)!} = 6 \cdot 35 = 210$$

2º caso:

Para cada possibilidade de escolha do número de meninas há uma possibilidade de escolha para o número de meninos, logo pelo princípio multiplicativo:

$$\frac{\text{meninas}}{\text{meninas}} \times \frac{\text{meninos}}{\text{meninos}}$$

Para escolher o número de meninas toma-se 3 do total de 4 meninas. Como a ordem não é relevante, por exemplo, um grupo formado por Ana, Paula e Dani, é igual ao formado por Dani, Paula e Ana, há C_4^3 possibilidades.

Para escolher o número de meninos toma-se 3 do total de 7. Como a ordem não é relevante, por exemplo, um grupo formado por Zico, Júnior e Adílio é igual ao formado por Adílio, Júnior e Zico, há C_7^3 possibilidades.

Logo:

$$\frac{C_4^3}{\text{meninas}} \times \frac{C_7^3}{\text{meninos}} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \times \frac{7!}{3!(7-3)!} = 4 \cdot 35 = 140$$

3º caso:

Para cada possibilidade de escolha do número de meninas há uma possibilidade de escolha para o número de meninos, logo pelo princípio multiplicativo:

$$\frac{\quad}{\text{meninas}} \times \frac{\quad}{\text{meninos}}$$

Para escolher o número de meninas toma-se 4 do total de 4 meninas. Como a ordem não é relevante, por exemplo, um grupo formado por Thaís, Ana, Paula e Dani, é igual ao formado por Dani, Paula, Ana e Thaís há C_4^4 possibilidades.

Para escolher o número de meninos toma-se 2 do total de 7. Como a ordem não é relevante, por exemplo, um grupo formado por Zico, Júnior, Adílio e Andrade é igual ao formado por Andrade, Adílio, Júnior e Zico, há C_7^2 possibilidades.

Logo:

$$\frac{C_4^4}{\text{meninas}} \times \frac{C_7^2}{\text{meninos}} = \frac{4!}{4!(4-4)!} \times \frac{7!}{2!(7-2)!} = 1 \cdot 21 = 21$$

Princípio Aditivo: Como os três casos são excludentes, pelo princípio aditivo o número total de possibilidades é a soma dos três casos considerados:

$$210 + 140 + 21 = 371$$

Portanto, existem 371 possibilidades de formar um grupo de seis, com pelo menos duas meninas.

PROBLEMA 03 (ESAF 2005). Um grupo de estudantes encontra-se reunido em uma sala para escolher, aleatoriamente, por sorteio, quem entre eles irá ao Simpósio de Matemática do próximo ano. O grupo é composto de 15 rapazes e de certo número de moças. Os rapazes cumprimentam-se, todos e apenas entre si, uma única vez; as moças cumprimentam-se, todas e apenas entre si, uma única vez. Há um total de 150 cumprimentos. O número de moças é, portanto, igual a:

Solução. Os rapazes cumprimentam-se somente uma vez e apenas entre si, da mesma forma as moças. Trata-se de casos excludentes, ou seja, a intersecção dos cumprimentos dos rapazes e das moças é vazia. Essa informação, de imediato, remete ao princípio aditivo. Sendo assim:

$$\frac{\text{N}^\circ \text{ de cumprimentos}}{\text{entre rapazes}} + \frac{\text{N}^\circ \text{ de cumprimentos}}{\text{entre moças}} = \frac{150}{\text{Total de Cumprimentos}}$$

Para haver um cumprimento são necessários, logicamente, duas pessoas. Logo, para calcular o número de cumprimentos entre os 15 rapazes toma-se 2 dos 15. A ordem é irrelevante, por exemplo, X cumprimentar B é o mesmo que B cumprimentar X . Há, portanto, possibilidades.

O procedimento para calcular o número de cumprimentos entre moças é semelhante ao usado para calcular os dos rapazes. Chamando de n o total de moças, há possibilidades de cumprimentos entre elas. Logo:

$$\frac{C_{15}^2}{\text{N}^\circ \text{ de cumprimentos}} + \frac{C_n^2}{\text{N}^\circ \text{ de cumprimentos}} = \frac{150}{\text{Total de Cumprimentos}}$$

Calculando o valor de n :

$$\begin{aligned} C_{15}^2 + C_n^2 &= \frac{15!}{2!(15-2)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = \\ &= \frac{15!}{2!13!} + \frac{n \cdot (n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \\ &= \frac{15 \cdot 14}{2} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \\ &= \frac{210 + n \cdot (n-1)}{2} = 150 \\ &= 210 + n \cdot (n-1) = 300 \\ &= (n-1) \cdot n = 90 \end{aligned}$$

Na equação anterior ocorre a multiplicação de dois números consecutivos e o produto é igual a 90. Esses números só podem ser 9 e 10, respectivamente. Portanto, $n = 10$.

PROBLEMA 04 (CESGRANRIO 2006). *Uma pessoa joga seis partidas, vencendo três e perdendo três. Em quantas ordens diferentes podem ocorrer suas vitórias e derrotas?*

Solução. Trata-se aparentemente de um problema que envolve permutação com repetição. Contudo, dependendo da forma como são selecionados os elementos outras estratégias poderão ser empregadas para a resolução. É o que ocorre a seguir:

São seis partidas jogadas. Sendo três vitórias (V) e três derrotas (D).

$\overline{\quad\quad\quad}$ $\overline{\quad\quad\quad}$ $\overline{\quad\quad\quad}$ $\overline{\quad\quad\quad}$ $\overline{\quad\quad\quad}$ $\overline{\quad\quad\quad}$
 1ª partida 2ª partida 3ª partida 4ª partida 5ª partida 6ª partida

Como não há restrição, as três vitórias podem ocorrer em qualquer das seis partidas. Toma-se, portanto, 3 de 6. A ordem em que ocorrem as vitórias é irrelevante. Sendo assim, existem $\binom{6}{3}$ possibilidades.

$\overline{\quad\quad\quad}$ $\overline{\quad\quad\quad}$ $\overline{\quad\quad\quad}$ $\overline{\quad\quad\quad}$ $\overline{\quad\quad\quad}$ $\overline{\quad\quad\quad}$
 V V V
 1ª partida 2ª partida 3ª partida 4ª partida 5ª partida 6ª partida

A única restrição imposta às derrotas é que não podem ocorrer nas partidas em que ocorrem vitórias. Restam, portanto, três partidas para as três derrotas. A ordem em que ocorrem as derrotas é irrelevante. Sendo assim, existem $\binom{3}{3}$ possibilidades.

Como o evento das vitórias pode ocorrer de $m = \binom{6}{3}$ maneiras e o das derrotas de $n = \binom{3}{3}$ formas, para determinar as diferentes ordens de acontecer vitórias e derrotas, usa-se o princípio multiplicativo. Logo, o número de ordens diferentes que podem ocorrer vitórias e derrotas é:

$$m \cdot n = \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} \cdot \frac{3!}{3!(3-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{3! \cdot 0!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot 1 = 5 \cdot 4 = 20$$

PROBLEMA 05 (NCE/UFRJ 2005). *A quantidade de números ímpares entre 100 e 999, com todos os algarismos distintos é?*

Solução. O problema será resolvido de duas maneiras.

1ª maneira: para determinar a quantidade de números ímpares, com algarismos distintos, entre 100 e 999, devem-se calcular as possibilidades entre os números com três algarismos.

Centena Dezena Unidade

Inicialmente devem-se analisar as possíveis restrições. Como são procurados números ímpares, o algarismo das unidades deverá ser necessariamente ímpar. Sendo assim, dos dez algarismos (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) possíveis há apenas cinco disponíveis (1, 3, 5, 7, 9).

Centena Dezena 5 Possibilidades
Unidade

Outra restrição diz respeito ao algarismo das centenas, para que os números procurados sejam compostos por três algarismos deve-se excluir o zero na contagem das possibilidades. Assim, há nove possibilidades, contudo já foi utilizado um número no algarismo das unidades. Logo, há oito possibilidades para o algarismo das centenas.

$\frac{8 \text{ Possibilidades}}{\text{Centena}} \times \frac{\text{Dezena}}{\text{Dezena}} \times \frac{5 \text{ Possibilidades}}{\text{Unidade}}$

Por fim, a única restrição imposta ao algarismo das dezenas é que não podem ser utilizados os números empregados nas unidades e centenas. E como, nesse caso, o zero pode ser utilizado, há 8 possibilidades.

$\frac{8 \text{ Possibilidades}}{\text{Centena}} \times \frac{8 \text{ Possibilidades}}{\text{Dezena}} \times \frac{5 \text{ Possibilidades}}{\text{Unidade}}$

Como o acontecimento das centenas pode ocorrer de oito modos, o das dezenas de oito e o das unidades de cinco, usa-se o princípio multiplicativo.

Logo:

$$8 \times 8 \times 5 = 320$$

Portanto, a quantidade de números ímpares entre 100 e 999, com todos os algarismos distintos é igual a 320.

2ª maneira. Para determinar a quantidade de números ímpares, com algarismos distintos, entre 100 e 999, devem-se calcular as possibilidades entre os números com três algarismos distintos.

$$\frac{\quad}{\text{Centena}} \frac{\quad}{\text{Dezena}} \frac{\quad}{\text{Unidade}}$$

Inicialmente é necessário analisar as possíveis restrições. Existem duas situações para o algarismo das centenas: ele pode ser **par** ou **ímpar**.

a) Algarismo das centenas PAR: Se o algarismo das centenas for par, há cinco possibilidades para ele (0, 2, 4, 6, 8), no entanto, o zero deve ser descartado na contagem, pois são procurados algarismos com três dígitos. Logo, restam quatro possibilidades para a casa das centenas.

$$\frac{4 \text{ Possibilidades}}{\text{Centena}} \times \frac{\quad}{\text{Dezena}} \times \frac{\quad}{\text{Unidade}}$$

Outra restrição diz respeito à casa das unidades, como são procurados números ímpares o algarismo das unidades necessariamente será ímpar. Sendo assim, há cinco possibilidades para o algarismo da unidade (1, 3, 5, 7, 9).

$$\frac{4 \text{ Possibilidades}}{\text{Centena}} \times \frac{\quad}{\text{Dezena}} \times \frac{5 \text{ Possibilidades}}{\text{Unidade}}$$

Por fim, a única restrição imposta ao algarismo das dezenas é que não podem ser utilizados os números empregados nas unidades e centenas. Logo, há oito possibilidades, já que o zero pode ser usado.

$$\frac{4 \text{ Possibilidades}}{\text{Centena}} \frac{8 \text{ Possibilidades}}{\text{Dezena}} \frac{5 \text{ Possibilidades}}{\text{Unidade}}$$

Como para as quatro possibilidades existentes para o algarismo das centenas, existem oito possibilidades para o algarismo das dezenas e cinco para o algarismo das unidades, usa-se o princípio multiplicativo.

$$\frac{4 \text{ Possibilidades}}{\text{Centena}} \times \frac{8 \text{ Possibilidades}}{\text{Dezena}} \times \frac{5 \text{ Possibilidades}}{\text{Unidade}}$$

Logo:

$$4 \times 8 \times 5 = 160$$

b) Algarismo das centenas ÍMPAR: Se o algarismo das centenas for ímpar, há cinco possibilidades para preencher a casa das centenas (1, 3, 5, 7, 9) e somente quatro para a casa das unidades, que necessariamente deverá ser ímpar.

$$\frac{5 \text{ Possibilidades}}{\text{Centena}} \times \frac{4 \text{ Possibilidades}}{\text{Unidade}}$$

Por fim, a única restrição imposta ao algarismo das dezenas é que não podem ser utilizados os números empregados nas unidades e centenas. Logo, há oito possibilidades, já que o zero pode ser usado.

$$\frac{5 \text{ Possibilidades}}{\text{Centena}} \times \frac{8 \text{ Possibilidades}}{\text{Dezena}} \times \frac{4 \text{ Possibilidades}}{\text{Unidade}}$$

Como o acontecimento das centenas pode ocorrer de cinco modos, o das dezenas de oito e o das unidades de quatro, usa-se o princípio multiplicativo.

$$\frac{5 \text{ Possibilidades}}{\text{Centena}} \times \frac{8 \text{ Possibilidades}}{\text{Dezena}} \times \frac{4 \text{ Possibilidades}}{\text{Unidade}}$$

Logo:

$$5 \times 8 \times 4 = 160$$

Como as situações a) e b) são excludentes, aplica-se o princípio aditivo.

$$4 \times 8 \times 5 + 5 \times 8 \times 4 = 160 + 160 = 320$$

Portanto, a quantidade de números ímpares entre 100 e 999, com todos os algarismos distintos é igual a 320.

PROBLEMA 06 (UFMG 2001). Um aposentado realiza diariamente, de segunda a sexta-feira, estas cinco atividades:

A. Leva seu neto Pedrinho, às 13 horas, para a escola.

B. Pedala 20 minutos na bicicleta ergométrica.

C. Passeia com o cachorro da família.

D. Pega seu neto Pedrinho, às 17 horas, na escola.

E. Rega as plantas do jardim de sua casa.

Cansado, porém, de fazer essas atividades sempre na mesma ordem, ele resolveu que, a cada dia, vai realizá-las em uma ordem diferente. Nesse caso, qual o número de maneiras possíveis dele realizar essas cinco atividades em ordem diferente?

Solução. O aposentado deseja realizar essas atividades em ordens diferentes. Entretanto, a atividade **D** será realizada necessariamente sempre depois da **A** (não faz sentido, durante o mesmo dia, pegar o neto na escola às 17 horas e depois levá-lo à escola às 13 horas). Sendo assim, basta fixar a atividade A ao longo dos dias e permutar as outras. Para isso, usa-se o princípio multiplicativo:

Segunda – feira: $\frac{\quad}{1^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{2^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{3^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{4^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{5^{\text{a}} \text{ atividade}}$

Terça – feira : $\frac{\quad}{1^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{2^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{3^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{4^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{5^{\text{a}} \text{ atividade}}$

Quarta – feira : $\frac{\quad}{1^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{2^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{3^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{4^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{5^{\text{a}} \text{ atividade}}$

Quinta – feira : $\frac{\quad}{1^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{2^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{3^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{4^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{5^{\text{a}} \text{ atividade}}$

Sexta – feira : $\frac{\quad}{1^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{2^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{3^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{4^{\text{a}} \text{ atividade}} \frac{\quad}{5^{\text{a}} \text{ atividade}}$

SEGUNDA- FEIRA: Fixando A como 1ª atividade, há quatro possibilidades para a 2ª atividade, três para a 3ª atividade, duas para a 4ª atividade e uma para a 5ª atividade.

$$\frac{A}{1^{\text{a}} \text{ atividade}} \times \frac{4 \text{ Possibilidades}}{2^{\text{a}} \text{ atividade}} \times \frac{3 \text{ Possibilidades}}{3^{\text{a}} \text{ atividade}} \times \frac{2 \text{ Possibilidades}}{4^{\text{a}} \text{ atividade}} \times \frac{1 \text{ Possibilidade}}{5^{\text{a}} \text{ atividade}}$$

Veja que não há qualquer restrição, pois a atividade D está depois da A.

Logo:

$$1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

TERÇA – FEIRA: Fixando A como a 2ª atividade, há três possibilidades para a 1ª atividade, uma vez que D não pode ocupá-la (D sempre depois de A) e A já está fixo, três possibilidades para a 3ª atividade, duas possibilidades para a 4ª atividade e uma para a 5ª atividade.

$$\frac{3 \text{ Possibilidades}}{1^{\text{a}} \text{ atividade}} \times \frac{A}{2^{\text{a}} \text{ atividade}} \times \frac{3 \text{ Possibilidades}}{3^{\text{a}} \text{ atividade}} \times \frac{2 \text{ Possibilidades}}{4^{\text{a}} \text{ atividade}} \times \frac{1 \text{ Possibilidade}}{5^{\text{a}} \text{ atividade}}$$

Logo:

$$3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$$

QUARTA – FEIRA: Fixando A como a 3ª atividade, há três possibilidades para a 1ª atividade (D não pode vir antes do A e A está fixado), duas possibilidades para a 2ª atividade (não pode ser A, D e nem a possibilidade considerada na 1ª atividade), duas possibilidades para a 4ª atividade e uma para a 5ª atividade.

$$\frac{3 \text{ Possibilidades}}{1^{\text{a}} \text{ atividade}} \times \frac{2 \text{ Possibilidades}}{2^{\text{a}} \text{ atividade}} \times \frac{A}{3^{\text{a}} \text{ atividade}} \times \frac{2 \text{ Possibilidades}}{4^{\text{a}} \text{ atividade}} \times \frac{1 \text{ Possibilidade}}{5^{\text{a}} \text{ atividade}}$$

Logo:

$$3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 12$$

QUINTA-FEIRA: Considerando A como a 4ª atividade, há três possibilidades para a 1ª atividade (D não pode vir antes do A e A está fixado), duas possibilidades para a 2ª atividade (não pode ser A, D e nem a possibilidade considerada na 1ª atividade), uma possibilidade para a 3ª atividade e uma para a 5ª atividade, que é o próprio D.

$$\frac{3 \text{ Possibilidades}}{1^{\text{a}} \text{ atividade}} \times \frac{2 \text{ Possibilidades}}{2^{\text{a}} \text{ atividade}} \times \frac{1 \text{ Possibilidade}}{3^{\text{a}} \text{ atividade}} \times \frac{A}{4^{\text{a}} \text{ atividade}} \times \frac{D}{5^{\text{a}} \text{ atividade}}$$

Logo:

$$3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 6$$

Note que todas as possibilidades foram esgotadas. Como as possibilidades de atividades durante cada dia da semana são excludentes, aplica-se o princípio aditivo.

Logo:

$$24+18+12+6 = 70$$

Portanto, são 70 maneiras possíveis dele realizar essas cinco atividades em ordem diferente.

PROBLEMA 08 (UFPE 2000). *Um casal planeja ter 4 filhos. Supondo igual, a chance de um filho nascer do sexo masculino ou do sexo feminino, qual a probabilidade de o casal vir a ter, no mínimo, dois filhos do sexo masculino?*

Solução. Partindo da definição de probabilidade.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Em que:

E : ter, no mínimo, dois filhos do sexo masculino;

$P(E)$: Probabilidade do evento E ;

$n(E)$: Número de eventos Favoráveis;

$n(\Omega)$: Número do espaço amostral ou casos Possíveis.

$n(\Omega)$ é o número total de casos. Como o casal deseja ter 4 filhos, há 4 possibilidades de ser menino e 4 de ser menina, uma que vez o problema supõe igual a chance de nascer do sexo masculino ou feminino. Usando o princípio multiplicativo.

$$4 \times 4 = 16$$

$n(E)$ é o número de possibilidades do casal ter, no mínimo, dois filhos do sexo masculino. Note que como são no mínimo 2 filhos do sexo masculino, deverão ser considerados também os casos em que o casal tenha 3 filhos e 4 filhos do sexo masculino.

1º caso: dois filhos do sexo masculino e dois do sexo feminino.

Para que dois dos quatro filhos sejam do sexo masculino, toma-se 2 de 4. Como a ordem é irrelevante, há C_4^2 possibilidades. O procedimento para determinar as possibilidades de dois filhos serem do sexo feminino é semelhante, contudo, toma-se 2 de 2, pois dois filhos são do sexo masculino. Há, portanto, C_2^2 possibilidades. Como

para cada possibilidade do sexo masculino há uma para o sexo feminino, usa-se o princípio multiplicativo.

Logo:

$$C_4^2 \cdot C_2^2 = 6$$

2º caso: três filhos do sexo masculino e um do sexo feminino.

Para que três dos quatro filhos sejam do sexo masculino, toma-se 3 de 4. Como a ordem é irrelevante, há C_4^3 possibilidades. O procedimento para determinar as possibilidades de um filho ser do sexo feminino é semelhante, contudo, toma-se 1 de 1, pois três filhos são do sexo masculino. Há, portanto, C_1^1 possibilidades. Como para cada possibilidade do sexo masculino há uma para o sexo feminino, usa-se o princípio multiplicativo.

Logo:

$$C_4^3 \cdot C_1^1 = 4$$

3º caso: quatro filhos do sexo masculino.

Para que os quatro filhos sejam do sexo masculino, toma-se 4 de 4. Como a ordem é irrelevante, há C_4^4 possibilidades.

Como os três são excludentes, aplica-se o princípio aditivo.

Logo:

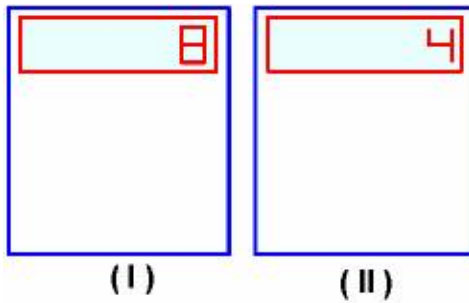
$$C_4^2 \cdot C_2^2 + C_4^3 \cdot C_1^1 + C_4^4 = 6 + 4 + 1 = 11$$

Agora basta substituir os valores encontrados, logo:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{C_4^2 \cdot C_2^2 + C_4^3 \cdot C_1^1 + C_4^4}{C_4^1 \cdot C_4^1} = \frac{11}{16}$$

Portanto, 11/16 é a probabilidade do casal ter, no mínimo, dois filhos do sexo masculino.

PROBLEMA 09 (CESGRANRIO). *Sete lâmpadas de neônio dispostas formando um "oito" como no mostrador de uma calculadora (figura I) podem ser acesas independentes uma das outras. Estando todas as 7 apagadas, acendem-se 4 delas ao mesmo tempo, ao acaso. A probabilidade de ser formado o algarismo 4, como aparece na figura II, é de?*



Solução. Partindo da definição de probabilidade.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Em que:

E : ser formado o algarismo 4;

$P(E)$: Probabilidade do evento E ;

$n(E)$: Número de eventos Favoráveis;

$n(\Omega)$: Número do espaço amostral ou casos Possíveis.

$n(\Omega)$ é o número total de possibilidades para acender 4 das 7 lâmpadas. Como a ordem não é relevante, por exemplo, acender as lâmpadas A, B, C, D é o mesmo que acender as lâmpadas D, C, B, A, há C_7^4 possibilidades. Logo:

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$$

$n(E)$ é o número de possibilidades de ser formado um 4 quando 4 lâmpadas forem acesas. Analisando a figura I e II do Problema, conclui-se que há apenas uma possibilidade.

Substituindo os valores encontrados:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{1}{C_7^4} = \frac{1}{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!3!}} = \frac{1}{35}$$

Portanto, a probabilidade de ser formado o algarismo 4 é $1/35$.

PROBLEMA 10 (ESPCEX 2007). A probabilidade de ocorrer um evento A é a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis:

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

De uma urna com bolas numeradas de 1 a 30 serão sorteadas 3 bolas, sem reposição. Um apostador marcou um bilhete com 5 números distintos (de 1 a 30). A probabilidade de ele acertar os 3 números é?

Solução. Como o problema já fornece a definição de probabilidade, resta apenas determinar o número de resultados possíveis, que é o número de possibilidades de acertar 3 bolas do total de 30 e o número de resultados favoráveis, que é o número de possibilidades de acertar 3 bolas marcando 5 números distintos do total de 30 bolas.

Serão sorteadas três bolas.

$$\frac{\quad}{1^{\text{a}} \text{ bola}} \quad \frac{\quad}{2^{\text{a}} \text{ bola}} \quad \frac{\quad}{3^{\text{a}} \text{ bola}}$$

Como o apostador marcou cinco números distintos e são trinta bolas no total, a possibilidade dele acertar o número da 1ª bola é 5/30.

$$\frac{5}{30} \quad \frac{\quad}{2^{\text{a}} \text{ bola}} \quad \frac{\quad}{3^{\text{a}} \text{ bola}}$$

Como trata-se de um sorteio sem reposição e já foi retirada uma bola da urna, restam 29 e como já foi utilizada uma possibilidade dos cinco números marcados, para a 2ª bola há 4/29 possibilidades.

$$\frac{5}{30} \quad \frac{4}{29} \quad \frac{\quad}{3^{\text{a}} \text{ bola}}$$

Para a 3ª bola restam apenas 28 bolas e três possibilidades dos cinco números marcados. Portanto, há 3/28 possibilidades.

$$\frac{5}{30} \quad \frac{4}{29} \quad \frac{3}{28}$$

A probabilidade do apostador acertar o 1º número é 5/30, a de acertar o 2º é 4/29 e a de acertar o 3º é 3/28. Para determinar a probabilidade dele acertar os três números usa-se o princípio multiplicativo.

$$P(A) = \frac{5 \times 4 \times 3}{30 \times 29 \times 28} = \frac{1 \times 4 \times 3}{6 \times 29 \times 28} = \frac{2 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 29 \times 2 \times 14} = \frac{1}{406}$$

Portanto, a probabilidade do apostador acertar os três números é $1/406$.

PROBLEMA 11 (FCC 2009). *Em uma prateleira há 16 pastas que contêm processos a serem arquivados e cada pasta tem uma etiqueta na qual está marcado um único número, de 1 a 16. Se as pastas não estão dispostas ordenadamente na prateleira e um Técnico Judiciário pegar aleatoriamente duas delas, a probabilidade de que nessa retirada os números marcados em suas respectivas etiquetas somem 13 unidades é de?*

Solução. Partindo da definição de probabilidade.

$$P = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}$$

Os casos possíveis são o total de possibilidades de pegar duas pastas. Como as pastas estão numeradas de 1 a 16, há 16 possibilidades para a 1ª e 15 para a 2ª, pois foi retirada uma. Então, para determinar as possibilidades de retirar duas pastas usa-se o princípio multiplicativo.

$$16 \times 15 = 240$$

Os casos favoráveis é o número de possibilidades de retirar duas pastas cuja soma seja 13 unidades. Veja o quadro de possibilidades:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13

Observe que estando disposta ordenadamente ou não, há apenas 12 possibilidades de retirar duas pastas cuja soma seja 13 unidades.

Substituindo os valores encontrados.

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{12}{16 \cdot 15} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 1}{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{20} = 0,05 = 5\%$$

Portanto, a probabilidade de retirar duas pastas cuja soma é igual a 13 é de 5%.

PROBLEMA 12 (UNIFAP 2010). Considere $\Delta = \{A, B, C, \dots, Z\}$ como sendo o conjunto formado por todas as letras do nosso alfabeto não esquecendo que agora K, Y e W também fazem parte, portanto devem ser consideradas. Determine:

- a) O número de subconjuntos de Δ , com 5 elementos, nos quais a letra K aparece;
- b) O número de subconjuntos de Δ , com 7 elementos, nos quais a letra Y não aparece;
- c) O número de subconjuntos de Δ , com 11 elementos, nos quais pelo menos uma das letras Y, W aparece.

Solução.

Resolvendo o item (a): Para a letra k aparecer no subconjunto com 5 elementos, basta fixar K e permutar os demais elementos. Assim, restam 25 possibilidades, por exemplo, para o segundo elemento, 24 para o terceiro, uma vez que para haver 5 elementos no subconjunto necessariamente eles terão que ser distintos. Há 23 possibilidades para o quarto e 22 para o quinto. Aplicando o princípio multiplicativo:

$$1 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$$

Contudo, o princípio multiplicativo leva em conta a ordem dos elementos enquanto que na formação dos subconjuntos a ordem não importa. Logo, no item (a) existem elementos repetidos. Por exemplo, os subconjuntos $\{k, a, b, c, d\}$, $\{k, b, c, d, a\}$, $\{k, c, a, b, d\}$, $\{a, b, c, d, k\}$ são iguais. Para retirar o número de elementos repetidos basta dividir o valor encontrado acima pelo fatorial do número de elementos do subconjunto. Contudo, o k está fixo, restam, portanto, 4 elementos.

Logo:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Daí:

$$\frac{1 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{25 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 23 \cdot 22}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 25 \cdot 23 \cdot 22 = 12\,650$$

Portanto, existem 2530 subconjuntos formados por cinco elementos em que a letra K aparece.

Resolvendo o item (b): No item (b), a única restrição é que o Y não pode aparecer. Retirando o Y do alfabeto restam 25 letras para formar subconjuntos com 7 elementos. Logo, há C_{25}^7 possibilidades. Logo:

$$\begin{aligned}
C_{25}^7 &= \frac{25!}{7!(25-7)!} = \frac{25!}{7!18!} = \\
&= \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18!}{7!18!} = \\
&= \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \\
&= 5 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 11 = 278300
\end{aligned}$$

Resolvendo o item (c): No item (c), a única restrição é que pelo menos Y ou W devem aparecer. Com isso, existirão duas situações:

1ª situação: Formando subconjuntos de 11 elementos com as 26 letras do alfabeto, Y ou W podem ou não estarem incluídos. Portanto, há possibilidades.

2ª situação: Para atender a restrição do problema, retiram-se da 1ª situação os casos em que Y ou W não aparecem. Retirando Y e W do alfabeto, ficam 24 letras para a formação de subconjuntos com 11 elementos. Portanto, há C_{24}^{11} possibilidades.

Para determinar o número de subconjuntos com 11 elementos em que Y ou W aparecem, basta subtrair as possibilidades da 1ª situação e da 2ª situação. Logo:

$$\begin{aligned}
C_{26}^{11} - C_{24}^{11} &= \frac{26!}{11!15!} - \frac{24!}{11!13!} = \\
&= \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \\
&= 7726160 - 2496144 = 5230016
\end{aligned}$$

Portanto, O número de subconjuntos de Δ , com 11 elementos, nos quais pelo menos uma das letras Y , W aparece é 5 230 016.

PROBLEMA 13 (FUVEST 2010). *Maria deve criar uma senha de 4 dígitos para sua conta bancária. Nessa senha, somente os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 podem ser usados e um mesmo algarismo pode aparecer mais de uma vez. Contudo, supersticiosa, Maria não quer que sua senha contenha o número 13, isto é, o algarismo 1 seguido imediatamente pelo algarismo 3. De quantas maneiras distintas Maria pode escolher sua senha?*

Solução. Calculando, primeiramente, o número total de possibilidades para criar uma senha de 4 dígitos, não levando, ainda, em consideração a restrição do problema (a de o número 13 aparecer).

Existem 5 algarismos distintos para formar uma senha com 4 dígitos e o mesmo algarismo pode ser usado mais de uma vez. Há, portanto, 5 possibilidades para o 1º dígito, 5 possibilidades para o segundo, 5 para o terceiro e 5 para o quarto. Aplicando o princípio multiplicativo:

$$\underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} = 625 \text{ possibilidade de Maria escolher sua senha.}$$

Levando em conta a restrição do problema existem três situações a ser consideradas.

1ª situação: Quando o número 1 e 3 estão ocupando o primeiro e o segundo dígitos da senha, respectivamente. Dessa forma, basta encontrar as possibilidades dos dois últimos dígitos.

$$13xx$$

Como o mesmo dígito pode ser usado mais de uma vez, há $5 \cdot 5$ possibilidades para o terceiro e quarto dígitos.

2ª situação: Quando o número 1 e 3 estão ocupando o segundo e terceiro dígitos, respectivamente. Dessa forma, basta calcular as possibilidades do primeiro e do último.

$$x13x$$

Como o mesmo dígito pode ser utilizado mais de uma vez, há $5 \cdot 5$ possibilidades para o primeiro e o quarto dígitos.

3ª situação: Quando o número 1 e 3 estão ocupando, respectivamente, o terceiro e quarto dígitos. Dessa forma, basta determinar as possibilidades do primeiro e segundo dígitos.

$$xx13$$

Como o mesmo dígito pode ser empregado mais de uma vez, há $5 \cdot 5$ possibilidades para o primeiro e segundo dígitos.

Vale ressaltar que a senha "1313" aparece tanto na 1ª situação como na 3ª, de modo que foi contada duas vezes. Portanto, deve-se excluí-la uma vez. Logo, o total de senhas onde a seqüência "13" aparece ao menos uma única vez é dado por:

$$3 \cdot 25 - 1 = 74 \text{ senhas}$$

Subtraindo do total de senhas a seqüência em "13" aparece:

$$625 - 74 = 551 \text{ senhas.}$$

Portanto, o número de senhas que Maria pode criar sem aparecer o 1 seguido do 3 é

$$551.$$

PROBLEMA 14 (IME 2009). Uma urna contém cinco bolas numeradas de 1 a 5. Retiram-se, com reposição 3 bolas desta urna, sendo α o número da primeira bola, β o da segunda e λ o da terceira. Dada a equação quadrática $\alpha x^2 + \beta x + \lambda = 0$, a probabilidade das raízes desta equação serem reais é?

Solução. Partindo da definição de probabilidade.

$$p = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}$$

Os casos possíveis é o número total de possibilidades de retirar três bolas de uma urna que contém cinco. Para a 1ª bola há 5 possibilidades, 5 possibilidades para a 2ª bola, uma vez que as bolas são repostas. Para a 3ª bola há 5 possibilidades também. Aplicando o princípio multiplicativo.

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

Os casos favoráveis é o número de possibilidades de retirar três bolas de forma que as raízes da equação quadrática sejam reais. Para que as raízes sejam reais o discriminante deve ser não negativo, ou seja, $\Delta \geq 0$. Logo, $\beta^2 - 4\alpha\lambda \geq 0$. Daí:

$$\beta^2 \geq 4\alpha\lambda$$

Onde $\beta = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, pois as bolas da urna estão numeradas de 1 a 5. Fazendo β assumir esses valores, acham-se as possibilidades de α , β e λ serem reais. Veja a tabela a seguir:

β	$\beta^2 \geq 4\alpha\lambda$	(α, λ)	Nº de possibilidades
1	$1 \geq 4\alpha\lambda$	\varnothing	0
2	$4 \geq 4\alpha\lambda$	(1,1)	1
3	$9 \geq 4\alpha\lambda$	(1,1);(1,2); (2,1)	3
4	$16 \geq 4\alpha\lambda$	(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(3,1);(4,1)	8
5	$25 \geq 4\alpha\lambda$	(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(2,1);(2,2);(2,3);(3,1);(3,2);(4,1);(5,1)	12

Logo, o número de possibilidades para os casos favoráveis é $0+1+3+8+12=24$

Portanto, a probabilidade das raízes da equação quadrática serem reais é de $24/125$.

PROBLEMA 15 (UERJ 2010).

O MENINO MALUQUINHO

Ziraldo



O Globo,
18/03/2009

Considere como um único conjunto as 8 crianças – 4 meninos e 4 meninas – personagens da tirinha. A partir desse conjunto, podem-se formar n grupos, não vazios, que apresentam um número igual de meninos e de meninas. O maior valor de n é equivalente a?

Solução. Para que seja atendida a restrição do problema (formar grupos com número igual de meninos e de meninas) é necessário que o número de crianças nos grupos formados seja sempre par. Sendo assim, haverá quatro situações.

- 1ª situação: grupo com 8 crianças (quatro meninos e quatro meninas);
- 2ª situação: grupo com 6 crianças (três meninos e três meninas);
- 3ª situação: grupo com 4 crianças (dois meninos e duas meninas);
- 4ª situação: grupo com duas crianças (um menino e uma menina).

Grupo com 8 crianças. Como há somente 8 crianças, é imediato que poderá ser formado apenas **um** grupo.

Grupo com 6 crianças. Dos 4 meninos deve-se escolher 3, sendo que nesse caso, escolher Leandro, Mozer e Marinho é o mesmo que escolher Marinho, Mozer e Leandro. Logo, há C_4^3 possibilidades. Usando o mesmo raciocínio para escolher as meninas, existem C_4^3 possibilidades. Para determinar o número de maneiras de formar grupo com seis crianças, aplica-se o princípio multiplicativo:

$$C_4^3 \cdot C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{4!}{3!1!} = 4 \cdot 4 = 16$$

Grupo com 4 crianças. Dos 4 meninos deve-se escolher 2, sendo que nesse caso, escolher Mozer e Marinho é o mesmo que escolher Marinho e Mozer. Logo, há C_4^2 possibilidades. Usando o mesmo raciocínio para escolher as meninas, existem C_4^2 possibilidades. Para determinar o número de maneiras de formar grupo com quatro crianças, aplica-se o princípio multiplicativo:

$$C_4^2 \cdot C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \cdot 6 = 36$$

Grupo com duas crianças. Dos 4 meninos deve-se escolher 1, há, portanto, 4 possibilidades. Das 4 meninas deve-se escolher uma. Logo, há 4 possibilidades. Para determinar o número de maneiras de formar grupo com duas crianças, aplica-se o princípio multiplicativo:

$$4 \times 4 = 16$$

Como as quatro situações são excludentes, aplica-se o princípio aditivo.

$$1 + 16 + 36 + 16 = 69$$

Portanto, o maior valor de n é equivalente a 69.

PROBLEMA 16 (AFA 2002). *Numa demonstração de paraquedismo, durante a queda livre, participam 10 paraquedistas. Em certo momento, 7 deles devem dar as mãos e formar um círculo. De quantas formas distintas eles poderão ser escolhidos e dispostos no círculo?*

Solução. O problema divide-se em duas partes:

1ª parte: Escolher 7 paraquedistas entre 10.

2ª parte: Dispor 7 paraquedistas em um círculo.

Dos 10 paraquedistas deve-se escolher 7. A ordem não é relevante. Por exemplo, escolher ABCDEFG é o mesmo que escolher GFEDCBA. Logo, há C_{10}^7 possibilidades.

$$C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

Dispor pessoas em círculo é problema clássico de permutação circular. Permutando os 7 paraquedistas no círculo:

$$PC_7 = (7 - 1)! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Para determinar o número de maneiras de escolher e dispor 7 paraquedistas num círculo usa-se o princípio multiplicativo.

$$120 \times 720 = 86\,400$$

Portanto, há 86 400 formas distintas de escolhê-los e dispô-los num círculo.

PROBLEMA 17 (AFA 2004). *Se você vai comprar algo que custa cinquenta e cinco centavos, em uma máquina automática, e dispõe de oito moedas de cinco centavos do mesmo modelo, e cinco de dez centavos também do mesmo modelo, então, existem n seqüências possíveis de introduzir as moedas, totalizando cinquenta e cinco centavos. O valor de n é?*

Solução. Trata-se aparentemente de um problema que envolve permutação com repetição. Contudo, dependendo da forma como são selecionados os elementos outras estratégias poderão ser empregadas na resolução. É o que ocorre a seguir:

Para determinar o valor das n seqüências possíveis de introduzir as moedas, totalizando cinquenta e cinco centavos, deve-se levar em consideração as possibilidades de utilização das cinco moedas de R\$0,10 e das oito de R\$0,05. Veja:

Quantidade de moedas de R\$ 0,10	Quantidade de moedas de R\$ 0,05	Total
5	1	R\$ 0,55
4	3	R\$ 0,55
3	5	R\$ 0,55
2	7	R\$ 0,55

Observe que haverá somente quatro casos.

1º caso: (6 moedas, 5 de R\$ 0,10 e uma de R\$ 0,05).

1ª moeda 2ª moeda 3ª moeda 4ª moeda 5ª moeda 6ª moeda

A única moeda de R\$ 0,05 pode ocupar qualquer uma das seis posições na seqüência, há, portanto, seis possibilidades. Restam cinco posições para as cinco moedas de R\$

0,10. Logo, existem possibilidades. Para determinar o número de seqüências de introduzir as moedas de R\$ 0,10 e R\$ 0,05 aplica-se o princípio multiplicativo.

$$C_6^1 \cdot C_5^5 = \frac{6!}{1!5!} \cdot \frac{5!}{5!0!} = 6 \cdot 1 = 6$$

2º caso: (7 moedas, 4 de R\$ 0,10 e 3 de R\$ 0,05).

Nesse caso, serão introduzidas sete moedas na máquina. As 4 moedas de R\$ 0,10 podem ocupar qualquer uma das 7 posições da seqüência. Logo, há possibilidades. Restam 3 posições para as 3 moedas de R\$ 0,05. Portanto, existem possibilidades. Para determinar o número de seqüências de introduzir as moedas de R\$ 0,10 e R\$ 0,05 aplica-se o princípio multiplicativo.

$$C_7^4 \cdot C_3^3 = \frac{7!}{4!3!} \cdot \frac{3!}{3!0!} = 35 \cdot 1 = 35$$

3º caso: (8 moedas, 3 de R\$ 0,10 e 5 de R\$ 0,05).

Agora serão introduzidas na máquina oito moedas. As 3 moedas de R\$ 0,10 podem ocupar qualquer uma das 8 posições da seqüência. Logo, há possibilidades. Restam 5 posições para as 5 moedas de R\$ 0,05. Portanto, existem possibilidades. Para determinar o número de seqüências de introduzir as moedas de R\$ 0,10 e R\$ 0,05 aplica-se o princípio multiplicativo.

$$C_8^3 \cdot C_5^5 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{5!0!} = 56 \cdot 1 = 56$$

4º caso: (9 moedas, duas de R\$ 0,10 e 7 de R\$ 0,05).

Por fim, serão introduzidas nove moedas na máquina. As duas moedas de R\$ 0,10 podem ocupar qualquer uma das 9 posições da seqüência. Logo, há possibilidades. Restam 7 posições para as 7 moedas de R\$ 0,05. Portanto, existem possibilidades. Para determinar o número de seqüências de introduzir as moedas de R\$ 0,10 e R\$ 0,05 aplica-se o princípio multiplicativo.

$$C_9^2 \cdot C_7^7 = \frac{9!}{2!7!} \cdot \frac{7!}{7!0!} = 36 \cdot 1 = 36$$

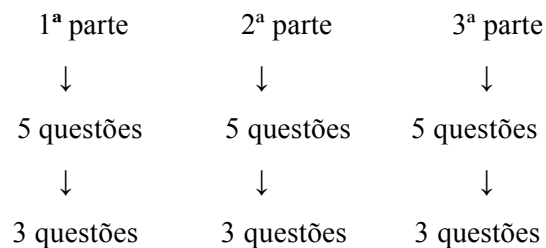
Como os quatro casos são excludentes, aplica-se o princípio aditivo.

$$6 + 35 + 56 + 36 = 133$$

Portanto, existem 133 seqüências possíveis de introduzir as moedas na máquina.

PROBLEMA 18 (AFA 2005). *Uma prova consta de 3 partes, cada uma com 5 questões. Cada questão, independente da parte a que pertença, vale 1 ponto, sendo o critério de correção “certo ou errado”. O número de maneiras diferentes de se alcançar 10 pontos nessa prova, se devem ser resolvidas pelo menos 3 questões de cada parte e 10 questões no total, é igual a?*

Solução. A prova é constituída de três partes, sendo cinco questões em cada parte. Devendo ser resolvidas pelo menos três questões em cada parte.



Como devem ser resolvidas 10 questões no total, necessariamente as três questões de cada parte devem estar corretas. Contudo, para somar 10 pontos (cada questão vale 1 ponto) considere 3 questões em duas das partes e 4 questões na parte restante.

	1ª parte	2ª parte	3ª parte	Total
	Das 5 questões	Das 5 questões	Das 5 questões	
1º caso	4 são resolvidas	3 são resolvidas	3 são resolvidas	10 pontos
2º caso	3 são resolvidas	4 são resolvidas	3 são resolvidas	10 pontos
3º caso	3 são resolvidas	3 são resolvidas	4 são resolvidas	10 pontos

No 1º caso, devem ser selecionadas 4 questões das cinco da 1ª parte. A ordem é irrelevante, por exemplo, selecionar as questões ABCD é o mesmo que selecionar

DCBA. Logo, há C_5^4 possibilidades. Resta selecionar 3 questões da 2ª parte e 3 da 3ª parte. A ordem continua sendo irrelevante, por exemplo, escolher as questões ABC é o mesmo que escolher CBA. Portanto, há C_5^3 possibilidades para a 2ª parte e C_5^3 possibilidades para a 3ª parte. Para determinar o número de possibilidades de se obter 10 pontos usa-se o princípio multiplicativo:

$$C_5^4 \cdot C_5^3 \cdot C_5^3$$

Para determinar o número de possibilidades do 2º e 3º casos será empregado o mesmo procedimento usado no 1º caso.

Como os três casos são excludentes, aplica-se o princípio aditivo.

$$\begin{aligned} C_5^4 \cdot C_5^3 \cdot C_5^3 + C_5^3 \cdot C_5^4 \cdot C_5^3 + C_5^3 \cdot C_5^3 \cdot C_5^4 &= \\ = \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{5!}{4!1!} &= \\ = 5 \cdot 10 \cdot 10 + 10 \cdot 5 \cdot 10 + 10 \cdot 10 \cdot 5 &= \\ = 500 + 500 + 500 = 1500 & \end{aligned}$$

Portanto, é 1500 o número de maneiras diferentes de obter 10 pontos nessa prova.

PROBLEMA 19 (MACKENZIE 2010).

Eu vou ser aprovado no vestibular do Mackenzie

Cada palavra da frase acima é colocada em uma urna. Sorteando-se, sucessivamente, sem reposição, duas palavras, a probabilidade de pelo menos uma das palavras sorteadas ter mais do que 4 letras é?

Solução. Partindo da definição de Probabilidade (P):

$$P = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}$$

Casos favoráveis. São os casos em que pelo menos uma das palavras sorteadas tem mais de 4 letras. Existem duas situações:

1ª situação: as duas palavras sorteadas possuem mais de 4 letras.

2ª situação: apenas uma das palavras sorteadas possui mais de 4 letras.

Analisando cada situação:

1ª situação. Das três palavras com mais de quatro letras deve-se sortear duas. A ordem das palavras sorteadas é irrelevante, por exemplo, sortear as palavras “aprovado” e “vestibular” é o mesmo que sortear “vestibular” e “aprovado”. Há, portanto, C_3^2 possibilidades.

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

2ª situação. Das três palavras com mais de quatro letras deve-se sortear uma. Logo, há 3 possibilidades ou C_3^1 possibilidades. Das cinco palavras com menos de quatro letras deve-se sortear uma. Logo, há 5 possibilidades ou C_5^1 possibilidades. Para determinar o número de possibilidades de uma das palavras possuir mais de quatro letras e a outra menos de quatro, aplica-se o princípio multiplicativo.

$$C_3^1 \cdot C_5^1 = \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{5!}{4!1!} = 3 \cdot 5 = 15$$

Como se trata de situações excludentes aplica-se o princípio aditivo:

$$3 + 15 = 18$$

Casos Possíveis: É o total de possibilidades de sortear duas palavras. Como há 8 palavras e devem-se sortear duas, existem C_8^2 possibilidades, uma vez que a ordem não é relevante no sorteio.

$$C_8^2 = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

Logo.

$$P = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}$$

$$P = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$$

Portanto, a probabilidade de pelo menos uma das palavras sorteadas ter mais que 4 letras é igual a 9/14.

PROBLEMA 20 (EsPCEX 2005). *Um gerente de um hotel, após fazer alguns cálculos, chegou à conclusão de que, para atingir a meta de economia elétrica, bastava apagar 2 lâmpadas de um corredor com 8 lâmpadas alinhadas. Para manter um*

mínimo de claridade ao longo do corredor, o gerente determinou que 2 lâmpadas adjacentes não poderiam ficar apagadas ao mesmo tempo, e as 2 lâmpadas das extremidades deveriam permanecer acesas. Sendo assim, o número de maneiras que esse gerente pode apagar 2 lâmpadas é?

Solução. O problema será resolvido de duas formas:

1ª FORMA: Dispõe-se de 8 lâmpadas (L) alinhadas, sendo que a 1ª e a 8ª permanecem sempre acesas.

$$\frac{\text{Acesa}}{1^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\quad}{2^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\quad}{3^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\quad}{4^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\quad}{5^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\quad}{6^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\quad}{7^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\text{Acesa}}{8^{\text{a}}\text{L}}$$

Apagando duas lâmpadas a partir da 2ª, respeitando sempre a imposição que duas lâmpadas adjacentes não podem ser apagadas ao mesmo tempo, têm-se as seguintes situações:

1ª situação.

$$\frac{\text{Acesa}}{1^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\text{Apagada}}{2^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\quad}{3^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\downarrow}{4^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\downarrow}{5^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\downarrow}{6^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\downarrow}{7^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\text{Acesa}}{8^{\text{a}}\text{L}}$$

Apagando a 2ª lâmpada há 4 opções (4ª, 5ª, 6ª, 7ª lâmpadas) para a ocorrência de duas lâmpadas apagadas. A 3ª lâmpada foi descartada da contagem por ser adjacente a 2ª.

2ª situação.

$$\frac{\text{Acesa}}{1^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\quad}{2^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\text{Apagada}}{3^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\quad}{4^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\downarrow}{5^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\downarrow}{6^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\downarrow}{7^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\text{Acesa}}{8^{\text{a}}\text{L}}$$

Apagando a 3ª lâmpada há 3 opções (5ª, 6ª, 7ª lâmpadas) para a ocorrência de duas lâmpadas apagadas. A 4ª lâmpada foi descartada da contagem por ser adjacente da 3ª.

3ª situação:

$$\frac{\text{Acesa}}{1^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\quad}{2^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\quad}{3^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\text{Apagada}}{4^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\quad}{5^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\downarrow}{6^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\downarrow}{7^{\text{a}}\text{L}} \quad \frac{\text{Acesa}}{8^{\text{a}}\text{L}}$$

Apagando a 4ª lâmpada há **duas** opções (6ª, 7ª lâmpadas) para a ocorrência de duas lâmpadas apagadas. A 5ª lâmpada foi descartada da contagem por ser adjacente da 4ª.

4ª situação:

$$\begin{array}{cccccccc} \text{Acesa} & & & & \text{Apagada} & & \downarrow & \text{Acesa} \\ \hline 1^{\text{a}}\text{L} & 2^{\text{a}}\text{L} & 3^{\text{a}}\text{L} & 4^{\text{a}}\text{L} & 5^{\text{a}}\text{L} & 6^{\text{a}}\text{L} & 7^{\text{a}}\text{L} & 8^{\text{a}}\text{L} \end{array}$$

Apagando a 5ª lâmpada há **uma** opção (7ª lâmpada) para a ocorrência de duas lâmpadas apagadas. A 6ª lâmpada foi descartada da contagem por ser adjacente da 5ª.

Observe que foram esgotados todos os casos possíveis. Como as situações são excludentes, aplica-se o princípio aditivo.

$$\begin{array}{cccccccc} 1^{\text{a}} \text{ situação} & + & 2^{\text{a}} \text{ situação} & + & 3^{\text{a}} \text{ situação} & + & 4^{\text{a}} \text{ situação} & \\ 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 & = 10 \end{array}$$

Portanto, o número de maneiras que o gerente pode apagar essas duas lâmpadas é 10.

2ª FORMA: Visualizando o problema:

$$\begin{array}{cccccccc} \text{Acesa} & & & & & & & \text{Acesa} \\ \hline 1^{\text{a}}\text{L} & 2^{\text{a}}\text{L} & 3^{\text{a}}\text{L} & 4^{\text{a}}\text{L} & 5^{\text{a}}\text{L} & 6^{\text{a}}\text{L} & 7^{\text{a}}\text{L} & 8^{\text{a}}\text{L} \end{array}$$

Observe que há apenas 6 lâmpadas disponíveis (1ª e 8ª sempre acesas) para apagar duas.

Repare que apagar a 2ª e a 5ª lâmpadas, por exemplo, é o mesmo que apagar a 5ª e 2ª.

Logo, existem C_6^2 possibilidades.

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Contudo, note que até o momento a restrição do problema (duas lâmpadas adjacentes não podem ser apagadas ao mesmo tempo) não foi levada em consideração. Analisando as 6 lâmpadas disponíveis (na ordem de posição crescente), nota-se que todas terão lâmpadas adjacentes subsequentes, menos a que está na 7ª posição. Logo, deve-se retirar do total que foi encontrado 5 possibilidades, que são os casos de lâmpadas adjacentes.

$$15 - 5 = 10$$

Portanto, é 10 o número de maneiras que o gerente pode apagar essas duas lâmpadas.

PROBLEMA 21 (IME 2010). *Três dados iguais, honestos e com seis faces numeradas de um a seis são lançados simultaneamente. Determine a probabilidade de que a soma dos resultados de dois quaisquer deles ser igual ao resultado do terceiro dado.*

Solução. Partindo da definição de probabilidade.

$$P = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}$$

Casos Favoráveis são os casos em que um dado é resultado da soma dos outros dois. O leitor menos atento poderia entender a expressão “terceiro dado” do final do texto, como sendo realmente o 3º dado, contudo, tal expressão refere-se ao dado que sobra quando são considerados dois dados quaisquer. Sendo assim, ocorrerão três situações:

1ª situação: o 1º dado sendo o resultado da soma dos outros dois.

2ª situação: o 2º dado sendo o resultado da soma dos outros dois.

3ª situação: o 3º dado sendo o resultado da soma dos outros dois

Listando as possibilidades de cada situação.

1ª situação:

1º dado	2º dado	3º dado	Possibilidades
2	1	1	Uma
3	2	1	Duas
	1	2	
4	1	3	Três
	2	2	
	3	1	
5	1	4	Quatro
	2	3	
	3	2	
	4	1	
	1	5	
	2	4	

6	3	3	Cinco
	4	2	
	5	1	

Note que, logicamente, a soma jamais será igual a 1. Uma vez esgotadas as possibilidades do 1º dado ser o resultado da soma dos outros dois, usa-se o princípio aditivo nas possibilidades.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Como são três dados iguais e honestos na 2ª situação também haverá 15 possibilidades e na 3ª situação da mesma forma. Então, o número de casos favoráveis é:

$$3 \times 15 = 45$$

Casos Possíveis é o total de possibilidades ao ser lançado três dados. Como são três dados e para cada dado há 6 possibilidades, pelo Princípio Multiplicativo há $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ possibilidades. Logo:

$$P = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}$$

$$P = \frac{45}{216} = \frac{5}{24}$$

Portanto, a probabilidade de que a soma dos resultados de dois quaisquer dados seja igual ao resultado do outro dado é $5/24$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do Trabalho procuramos enfatizar os princípios basilares da contagem: aditivo e multiplicativo. Entendemos que isso seja uma forma de facilitar a resolução de problemas envolvendo métodos de contagem. Isso foi evidente no capítulo 4, com a resolução de vários problemas de concursos públicos e vestibulares. Tentamos seguir um padrão para a resolução da maioria das questões.

Inicialmente foi necessária uma leitura apurada do enunciado, para familiarização e compreensão do problema proposto. Em seguida, os problemas foram divididos em várias etapas excludentes, isto é, foi usado o princípio Aditivo. E a partir daí passou-se à análise minuciosa de cada uma dessas etapas, aqui, na maioria das vezes, recorreu-se ao princípio multiplicativo.

Tentar identificar se um problema ou uma etapa do problema de contagem é uma permutação, arranjo ou combinação é uma abordagem correta desde que o problema seja realmente um desses tipos de contagem. Acontece que muitos problemas de contagem não se encaixam exclusivamente em algum desses tipos mencionados, assim um esforço adicional é necessário para procurar o resultado correto usando o princípio aditivo e/ou princípio multiplicativo.

No caso em que o problema ou uma das etapas em que foi dividido o problema é um dos métodos de contagem clássicos pode surgir a dúvida: o problema é de combinação, permutação ou arranjo? Uma maneira prática de diferenciá-los é perguntar-se: a ordem dos elementos é importante? No caso afirmativo, estamos diante de uma permutação ou arranjo, e em caso negativo, trata-se de uma combinação.

A abordagem desse trabalho é recorrer às fórmulas somente quando a estrutura da resolução já tenha sido montada. Eis a dificuldade de muitos, que usam a estratégia inversa, ou seja, possuem como prioridade o uso direto de fórmulas. Vale ressaltar também, que as soluções dos problemas no capítulo 4 e no restante do trabalho são resultados matemáticos que estão baseados no princípio aditivo e multiplicativo. Sempre que possível foi justificado o porquê de sua utilização na resolução dos problemas.

É importante esclarecer que não temos como pretensão estabelecer uma fórmula geral de como resolver problemas de contagem, mesmo porque não é conhecido que

exista tal fórmula geral. Cabe ao leitor utilizar sua criatividade e os meios que lhe forem mais conveniente e adequado ao seu nível de conhecimento. Os próprios autores deste Trabalho de Conclusão de Curso têm experimentado ao tentar resolver novamente um problema (após um período de tempo), seguir uma estratégia totalmente diferente para achar a solução.

Além do mais cada problema vai apresentar peculiaridades e restrições próprias. Contudo, o conhecimento teórico e prático do Princípio Aditivo e Multiplicativo é indispensável em qualquer situação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARDENAS, J. W. **Probabilidade e Estatística**. 2007. 25 f. Notas de aulas. Universidade Federal do Amapá. Macapá, 2007. Disponível em <[http:// cardenas.webnode. com/](http://cardenas.webnode.com/)> Acesso em: 24 set. 2009.

FONSECA, Jairo Simon de. ; MARTINS, Gilbert de Andrade. **Curso de Estatística**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 1996.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1998. 2 v.

MILONE, Giuseppe. **Estatística Geral**. 1. ed. São Paulo: Thomson, 2004.

SANTOS, José Plínio O. ; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. 4. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna

VIEIRA, Fernanda Maria de Sousa. **Uma Introdução à Combinatória: Técnicas de Contagem**. 2007. 166 f. Dissertação (Mestre em Matemática/Educação). Universidade Portucalense, Porto, 2007. Disponível em: <[http://repositorio.uportu. Pt / dspace / bitstream/ 123456789/ 101/1/ TMMAT%2097. Pdf](http://repositorio.uportu.pt/dspace/bitstream/123456789/101/1/TMMAT%2097.Pdf) > Acesso em: 26 mar. 2010.

WILKS, Daniel S. **Statistical Methods in the Atmospheric Sciences**. 2. ed. UK: Elsevier, 2006.