JOSIANE OLIVEIRA DOS SANTOS

ÁLGEBRA NO CUBO DE RUBIK

MACAPÁ
2010

JOSIANE OLIVEIRA DOS SANTOS

ÁLGEBRA NO CUBO DE RUBIK

Monografia apresentada ao Colegiado de Matemática como requisito para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá, sob a orientação do Professor Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco .

MACAPÁ
2010

JOSIANE OLIVEIRA DOS SANTOS

ÁLGEBRA NO CUBO DE RUBIK

Monografia apresentada como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciatura Plena em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá, Campus Marco Zero, aprovado pela Comissão de professores:

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
(Orientador)
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Prof. Msc. Marcio Aldo Lobato Bahia
Colegiado de Matemática, UNIFAP

MACAPÁ
2010

Aos meus pais pelo apoio e incentivo de cada dia.

AGRADECIMENTOS

Grande é a minha lista de agradecimentos (o que me torna uma pessoa de sorte).

Primeiramente agradeço a Santíssima Trindade, Fonte de toda Ciência e Sabedoria, pelo Dom da Vida.

Aos meus pais, Leonira Oliveira dos Santos e Joaquim Benjamim dos Santos pelo imenso apoio durante a realização deste curso e pelo carinho recebido sempre, e minha família, agradeço todo o amor, carinho, compreensão e respeito.

Aos meus colegas pelas horas de estudo, divertimento na universidade e pela força recebida nos momentos de dificuldades!

Tenho muito a agradecer aos professores, por todo conhecimento repassado, os quais me auxiliaram em todo o meu caminho até onde estou.

Meus agradecimentos especiais a:

Minha irmã e amiga Lidiane Oliveira dos Santos pelos incentivos sempre presentes em nossas conversas.

Aguinaldo Oliveira dos Santos, pessoa muito importante em minha vida e que sempre incentivou a busca pelo conhecimento.

João Carlos Oliveira dos Santos, que me auxiliou em relação às normas técnicas e principalmente pelo amor e confiança que este possui em mim.

Ao amigo Amaury Gemaque pela ajuda prestada quanto aos meus conhecimentos sobre o LATEX.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gúzman Eulálio Isla Chamilco por suas orientações ao longo desses meses. As nossas engraçadas e pacientes conversas que me ensinaram muito sobre matemática, principalmente no que diz respeito à álgebra.

Obrigada a todos que colaboraram direta ou indiretamente para a concretização deste trabalho.

Para vocês, ofereço esta página...

"Feliz é o homem que acha sabedoria, e o homem que adquire entendimento...".

(Provérbio 3:13 A Bíblia Sagrada)

Resumo

O estudo focaliza uma análise algébrica para efetuar a resolução do quebra-cabeça denominado Cubo de Rubik, dando ênfase às definições de grupo e subgrupos, verificando desta forma como o estudo de elementos algébricos pode ocorrer sem a abstração formal que encontramos em muitos livros e até mesmo durante o processo de ensino-aprendizagem dentro da Universidade. Adota como metodologia uma abordagem de natureza qualitativa, crítica e reflexiva. Desta forma, realiza a princípio uma pesquisa bibliográfica, buscando na literatura pertinente documentos que ajudassem a responder às questões levantadas na problemática do tema em estudo. Apresenta o desenvolvimento da teoria de grupo desde seus inícios num contexto histórico. Faz menção aos matemáticos que contribuiram para esta nova teoria que formalmente marca seu nascimento a fines do século XVIII. Fornece um resumo auto-consistente à Teoria de Grupos e subgrupos, para realizar esta tarefa, o Cubo de Rubik é estudado detalhadamente assim como o grupo algébrico que pode ser definido a partir desse objeto. Demonstra uma solução para o quebra-cabeça em questão através do estudo de elementos presentes no estudo da Álgebra e deixa claro como essa linha de estudo pode ser apresentada ao educando sem tanta abstração e dificuldade de visualização de suas definições e exemplos.

Palavras-chave: Álgebra, Cubo de Rubik, Simetria, Teoria de Grupos, Subgrupo.

Abstract

The study focuses on an algebraic analysis to effect the resolution of the puzzle called Rubik's Cube, with an emphasis on group settings and subgroups, checking this way the study of algebraic elements can occur without the formal abstraction found in many books and even during the process of teaching and learning within the university. It adopts an approach as a qualitative methodology, critical and reflective. Thus, the principle performs a literature search, searching the literature relevant documents that would help answer questions raised in the issue of the theme. Presents the development of group theory since its inception in historical context. Makes mention of all the mathematicians who contributed for this new theory that formally marks its birth the end of the century XVIII. Provides a summary of the self-consistent theory of groups and subgroups, to accomplish this task, Rubik's Cube is studied in detail as well as the algebraic group which can be defined from this object. Demonstrates a solution to the puzzle in question through the study of elements present in the context of algebra and makes clear how this line of research can be presented to the student without much difficulty and abstraction view of their definitions and examples.

Keywords: Algebra, Rubik's Cube, Symmetry, Group Theory, Subgroup.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A Álgebra, juntamente com a Análise e a Topologia, ocupa um papel central na Matemática. Um dos objetos mais importantes e fundamentais da Álgebra são os grupos e estes surgem naturalmente em muitas áreas e em aplicações.

No entanto, o estudo da teoria dos grupos é normalmente feito a partir de um ponto de vista que favorece mais a abstração, onde os conceitos são tradicionalmente apresentados de maneira formal em termos de definições, exemplos e proposições, em detrimento da visualização desses conceitos. Apesar de bem detalhado e rigoroso, esse ponto de vista pode trazer dificuldades para alguns alunos, em especial aqueles que dependem de uma maior intuição visual a fim de poder assimilar os conceitos abstratos.

Diante desta problemática faremos uma abordagem sobre Teoria de Grupos a partir de um exemplo concreto e bem visual: o Cubo de Rubik. Através do estudo dos movimentos e das configurações do Cubo, a teoria vai sendo desenvolvida naturalmente até se chegar ao conceito de grupo. Desta forma concordamos com Antonio Machado dos Santos que em sua obra intitulada Matemática na Escola do Segundo Grau afirma: “Desde os primeiros passos na escola é importante aprender a ler matemática, entender os conceitos, e não apenas decorá-los fechar os olhos, repetir as palavras sem sentir o que se está falando não ajuda em nada” [12].

Existem atualmente várias maneiras de resolução do Cubo de Rubik, mas a álgebra destaca-se por apresentar uma forma repleta de definições de elementos despertando o interesse pelo estudo da matemática.

O Cubo de Rubik (ou também chamado o Cubo mágico) é um quebra-cabeça tridimensional que foi inventado em 1974 pelo húngaro Erno Rubik, professor de design de interiores da Academia de artes e trabalhos manuais de Budapeste, para ilustrar o conceito de Simetria.

Erno Rubik inspirou-se em quebra-cabeças já conhecidos para a criação do Cubo mágico, como o Tangram. No início a idéia de criar um mecanismo para sustentar os cubos parecia impossível, devido à grande quantidade de movimentos existentes, mas segundo fontes históricas Erno Rubik acabou encontrando a solução enquanto observava o curso do Rio Danúbio.

O primeiro cubo montado por Rubik foi feito em madeira e tinha os seis lados pintados com cores distintas, para que quando suas faces fossem giradas, uma melhor visualização dos movimentos realizados fosse obtida.

Figura 1.1: Protótipo do cubo mágico.

Em 1978 o cubo começava a ser produzido sem incentivos. Mesmo sendo inicialmente rejeitado, um ano depois, atingira uma publicidade tal que se podia ver pessoas entretidas com seus cubos nos trens, restaurantes, etc. Começamos a observar a popularidade deste brinquedo e o da Matemática também, pois as pessoas começavam a entender que para se chegar a uma solução faz-se necessário os conhecimentos algébricos.

Originalmente foi chamado "o Cubo mágico"pelo seu inventor, mas o nome foi alterado pela Ideal Toys para Cubo de Rubik em 1980. Neste mesmo ano, ganhou o prêmio alemão do "Jogo do Ano"(Spiel des Jahres).

Uma das diversões mais populares do planeta desde os anos 1980, a traquitana colorida virou obsessão para matemáticos do mundo inteiro. Para muitos matemáticos o número mínimo de movimentos que alguém precisa fazer para solucionar o jogo é denominado simplesmente de

Número de Deus.

O problema para os matemáticos é que esse cenário leva a aproximadamente 43 bilhões de configurações possíveis. Esse monte de Cubos mágicos, empilhados um sobre o outro, poderia se alongar até o Sol e voltar a Terra mais de oito milhões de vezes. E existem 18 caminhos possíveis para alterar qualquer uma dessas configurações - uma meia-volta ou um quarto de volta em qualquer direção para cada uma das seis faces. A complexidade do problema chega ao ponto em que ele não pode ser resolvido com aquilo que os matemáticos chamam de "força bruta". Traduzindo, o brinquedo não permite que você resolva cada um dos seus lados individualmente. Isso faz com que o Número de Deus continue um enigma, levando pesquisadores a utilizar o poder dos computadores para tentar chegar a ele [14].

Fazendo uso de tecnologias como computadores com super memórias, observamos que é muito mais eficiente lidar com centenas ou milhões de configurações a cada cálculo. Porém, nesse ponto, os matemáticos mergulham na Teoria dos grupos, que lida com sistemas simétricos, pois o Cubo Mágico é totalmente simétrico. Segundo Waldeck Schutzer Simetria é o movimento de um objeto geométrico que o faz parecer sempre o mesmo.

Em 1992, Herbert Kociemba, um matemático de Darmstad (Alemanha), apontou um caminho perspicaz para quebrar as 43 bilhões de possibilidades do Cubo. Em vez de basear-se em configurações específicas do brinquedo, ele desenvolveu um subgrupo particular, baseado em um conjunto de 10 movimentos possíveis do Cubo, a partir de um giro de 90 graus na parte de cima ou na de baixo. Usando combinações com apenas esses 10 movimentos, ele descobriu que podia chegar a cerca de 20 milhões de configurações em um Cubo já solucionado.

Esse foi um resultado importante dentro da matemática, pois o subgrupo de Kociemba era suficientemente simples para caber na memória de um computador básico. Com uma tabela dessas configurações já baixada, devidamente listada com o número de movimentos necessários para uma solução eficiente, a máquina ainda teve capacidade para calcular o melhor jeito de transformar qualquer configuração aleatória do cubo em uma das descritas na tabela.

Kociemba escreveu um programa capaz de fazer exatamente isso. Batizado de Cube Explorer (Explorador do Cubo), ele pega qualquer configuração do brinquedo e a compara com a tabela para determinar quantos movimentos são necessários para trazê-la para dentro do subgrupo. A maior seqüência achada, adicionada ao número de movimentos necessários para a solução vinda da configuração no subgrupo, oferece uma estimativa para o Número de Deus [11].

Continuando dentro desta linha de pesquisa obteve-se três anos depois, através dos trabalhos de Michael Reid, matemático da Universidade da Flórida (EUA), um programa baseado no Cube Explorer que ele usou para mostrar que o limite máximo de movimentos chegava a 30 somando-se os movimentos anteriores, até chegar ao subgrupo de Kociemba, e os posteriores. Segundo Richard Korf, matemático da Universidade da Califórnia: "o caminho mais curto do ponto A para o B, combinado ao caminho mais curto do B ao C, geralmente não é o caminho mais curto do ponto A para o C" [14].

Em 2006, a previsão para o tão questionavel Número de Deus já tinha caído para 27. O próximo avanço ocorreu em 2007, quando Dan Kunkle e Gene Cooperman, da Universidade de Boston (EUA), criaram uma estratégia que levou à construção de 1,5 trilhão de grupos batizados de classes laterais, cada um dos quais com aproximadamente 660 mil configurações que poderiam ser atingidas usando apenas seis movimentos, ou uma meia-volta em cada face do Cubo. Considerando as simetrias, eles então identificaram 15 mil combinações únicas em cada classe lateral e depois mostraram que, a partir daí, o brinquedo poderia ser resolvido em 13 movimentos.

Finalmente, Kunkle e Cooperman apareceram com um método para transformar todas as outras configurações na classe lateral em umas das 15 mil identificadas por eles. Solucionar apenas uma dessas 15 mil era o equivalente a solucionar toda a classe lateral. Como esses cálculos requeriam o uso de um computador poderoso, Kunkle e Cooperman conseguiram 7 terabytes de memória para realizar seu trabalho em torno do Número de Deus. Depois de inacreditáveis 8 mil horas (333 dias) de processamento de dados, eles empurraram o Número de Deus para 26.

No Brasil vários trabalhos já foram desenvolvidos dentro desta linha de pesquisa, com destaque para os trabalhos de professores de matemática como Waldeck Schutzer, Robinson Hoto e Marjory Del Vecchio dos Santos. Muitos destes trabalhos servem como base bibliografia para a execução desta monografia.

Esta monografia tem como objetivo principal aplicar a Teoria de Grupos, difundida principalmente pelos trabalhos apresentados por Evariste Galois, ao Cubo mágico, divergindo dos matemáticos que se utilizaram de tecnologias para obter uma solução do mesmo e daqueles que tentam resolver este brinquedo através da força bruta, e ao mesmo tempo serão ilustrados alguns tópicos da álgebra através do Cubo de Rubik.

Para os que conhecem o Cubo mágico, é sabido que suas camadas podem ser rotacionadas, e desta forma, as seis cores acabam embaralhadas entre si, nosso propósito é a partir de qualquer combinação e reagrupar todas as seis cores do cubo, deixando em sua forma homogênea.

Quando o cubo estiver com as suas cores todas agrupado, nós iremos denominá-lo de cubo na forma homogênea, e qualquer outra disposição será denominada de forma combinada. No trabalho intitulado Uma Aplicação da Teoria de Grupos o professor Robinson Hoto ressalta que "naturalmente a forma homogênea é única, mas, existe um grande número de formas combinadas". Assim, nosso propósito é trazer o Cubo para a forma homogênea, partindo de qualquer forma combinada. Para isto, nós iremos adotar algumas convenções que descreveremos a seguir.

Iniciaremos o capítulo dois com uma apresentação do Cubo de Rubik, sua terminologia e estudamos seus movimentos.

Já o capítulo três destina-se a fazer uma ligação entre o Cubo de Rubik e a álgebra, ou seja, iremos fazer uma abordagem dos principais conceitos algébricos que podem ser desenvolvidos juntamente ao brinquedo em questão. Daremos destaque neste capítulo as literaturas dedicadas ao Cubo Mágico.

Continuamos este trabalho desenvolvendo uma proposta de solução para o Cubo de Rubik no capítulo quatro, ou seja, encontraremos uma forma algebrica capaz de deixar o quebra-cabeça em estudo na sua forma homogênea.

Finalizamos fazendo uma conclusão sobre o tema exposto, sempre deixando claro que a matemática atua de forma grandiosa na resolução deste brinquedo, economizando tempo, desenvolvendo o raciocínio lógico do estudante, aprimorando nossos conhecimentos sobre matemáticos, especialmente sobre a Teoria de Grupos e por fim contribuir para que o processo ensino-aprendizagem da álgebra ocorra sem muitos problemas de visualização dos conceitos e exemplos.

Capítulo 2

CONFIGURAÇÕES DO CUBO DE RUBIK.

O objetivo deste capítulo é apresentar o Cubo de Rubik e os movimentos que podem ser efetuados no mesmo.

O Cubo de Rubik é um cubo geralmente fabricado em plástico e possui várias versões, sendo a versão 3x3x3 a mais comum e objeto de nosso estudo, composta por 6 faces de 6 cores diferentes com um total de 54 faces menores, com arestas de aproximadamente 5,5 cm. Outras versões menos conhecidas são a 2x2x2, e de 4x4x4 a 7x7x7.

O Cubo é formado por seis faces, sendo que cada face possui uma cor, geralmente encontramos as seguintes cores: branco, azul, vermelho, verde, amarelo e laranja. Para os que conhecem o Cubo Mágico, é sabido que suas camadas podem ser rotacionadas, e desta forma, as seis cores acabam embaralhadas entre si.

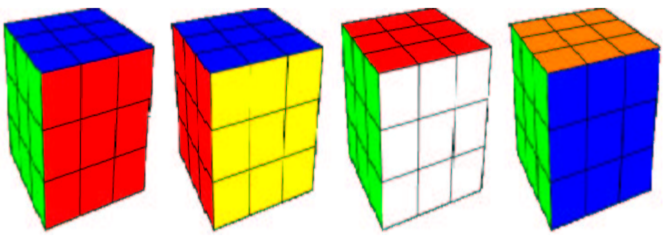

Figura 2.1: As seis faces de um Cubo Mágico.

De forma mais detalhada observamos que este brinquedo é formado por 27 cubinhos, ou seja, cada face possui 9 cubinhos e existe 1 cubinho que localiza-se no centro, por isso ele é chamado como cubinho virtual. Nós iremos classificar estes pequenos cubos como: central, lateral ou de aresta e de canto.

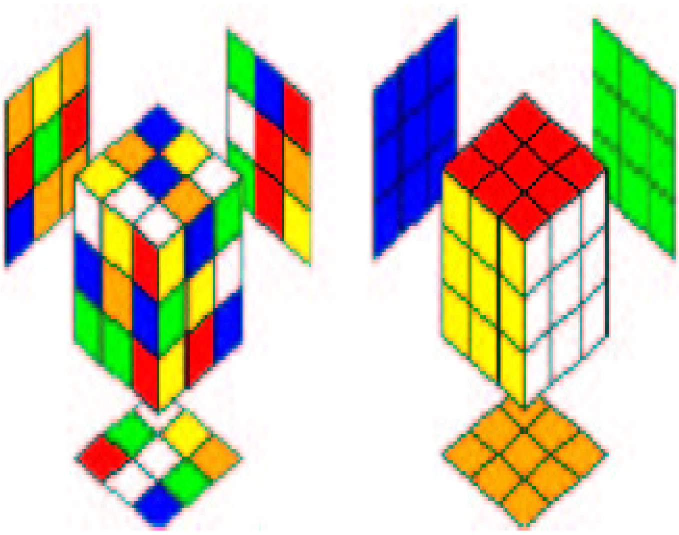

Figura 2.2: O objetivo do Cubo Mágico: na figura da esquerda as cores do cubo estão embaralhadas, na da direita elas estão agrupadas.

Figura 2.3: Um Cubo Mágico desmontado.

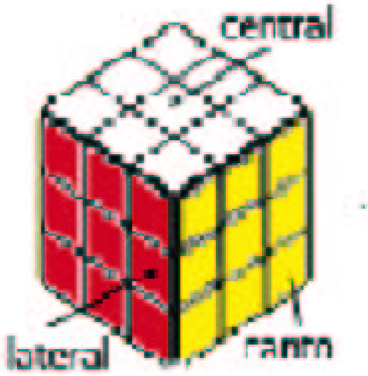

Figura 2.4: Os pequenos cubos de um Cubo Mágico.

2.0.1 Notação de Singmaster:

Pesquisando a literatura dedicada ao Cubo, cada uma das faces do Cubo é didaticamente identificada pela primeira letra de seu nome em inglês: Front, Back, Upper, Down, Left e Right. Nosso Cubo Mágico terá suas faces marcadas como Frente (F), Traseira (T), Superior (S), Inferior (I), Esquerda (E) e Direita (D) que nada mais é do que a tradução para o português das faces do cubo encontradas geralmente em inglês na literatura dedicada ao mesmo como foi dito logo acima.

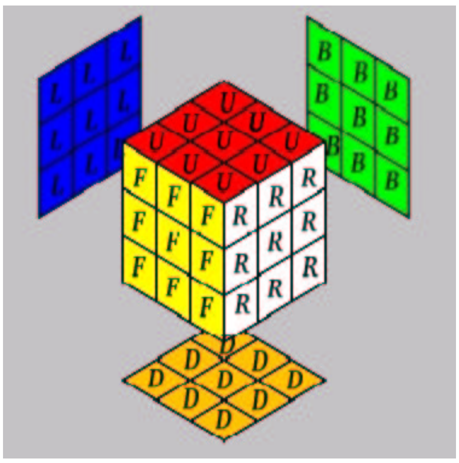

Figura 2.5: Notação de Singmaster.

Quanto à movimentação das faces do cubo destacamos que cada face pode girar um quarto de volta ou meia volta, tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário. Indicamos os respectivos movimentos de um quarto de volta em sentido horário por F, B, U, D, L e R.

Representando por K^{-1} a rotação da face K de 90º no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, poderemos representar um "rearranjo"do cubo por meio de uma palavra no alfabeto U, F, R, D, B, L, U^{-1}, F^{-1}, R^{-1}, D^{-1}, B^{-1}, L^{-1}.

2.1 Movimentos do Cubo:

Os movimentos de rotação serão orientados "positivamente ou diretamente"no sentido horário, e "negativamente ou inversamente"no sentido anti-horário, ambos com a face voltada para nossa frente, além disto, em cada movimentação o ângulo de rotação será de noventa graus.

A seguir iremos destacar 6 (seis) movimentos básicos e seus respectivos movimentos inversos, e para que se possa bem compreendê-los, antes de efetuar a movimentação considere que o cubo encontra-se na sua forma homogênea.

2.1.1 Movimento F e F^{-1}

A letra F indica a face do Cubo que fica sempre apontado para nós, ou seja, a face denominada de front. Esse movimento consiste em girar essa face em sentido horário em um quarto de volta, enquanto o movimento oposto é indicado por F^{-1}, ou seja consiste em girar o Cubo um quarto de volta no sentido anti-horário.

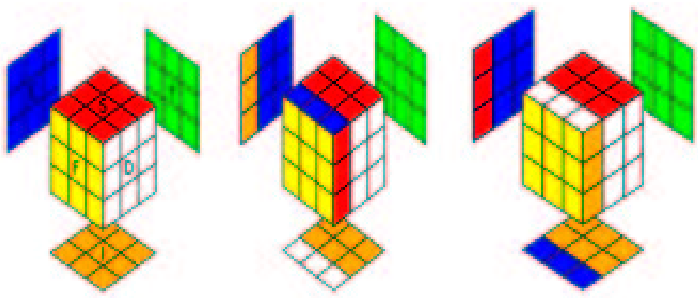

Figura 2.6: Ilustração do movimento F e F^{-1} respectivamente.

2.1.2 Movimento B e B^{-1}

Esse movimento B consiste em girar a face denominada de Back um quarto de volta no sentido horário, enquanto o movimento B^{-1} consiste em girar a mesma face um quarto de volta no sentido anti-horário.

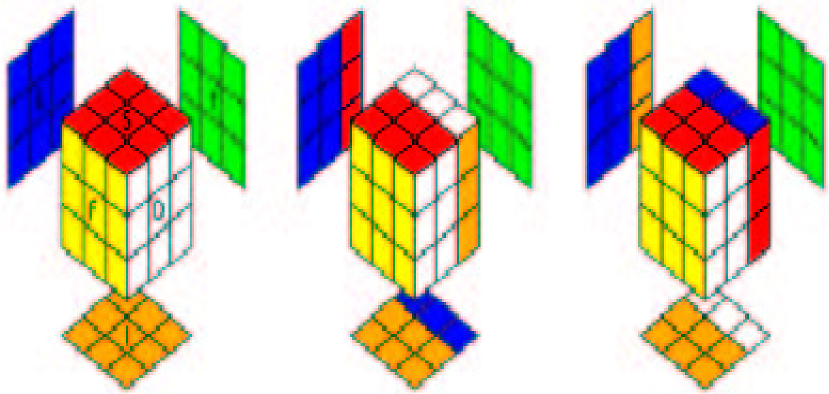

Figura 2.7: Ilustração do movimento B e B^{-1} respectivamente.

2.1.3 Movimento U e U^{-1}

Esse movimento U consiste em girar a face denominada de Upper um quarto de volta no sentido horário, enquanto o movimento U^{-1} consiste em girar a mesma face um quarto de volta no sentido anti-horário.

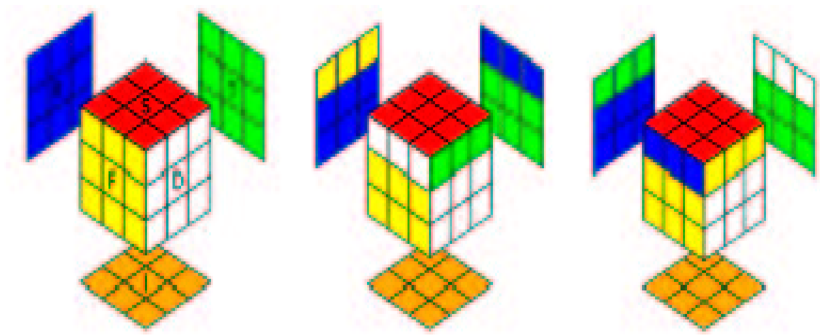

Figura 2.8: Ilustração do movimento U e U^{-1} respectivamente.

2.1.4 Movimento D e D^{-1}

Esse movimento D consiste em girar a face denominada de Down um quarto de volta no sentido horário, enquanto o movimento D^{-1} consiste em girar a mesma face um quarto de volta no sentido anti-horário.

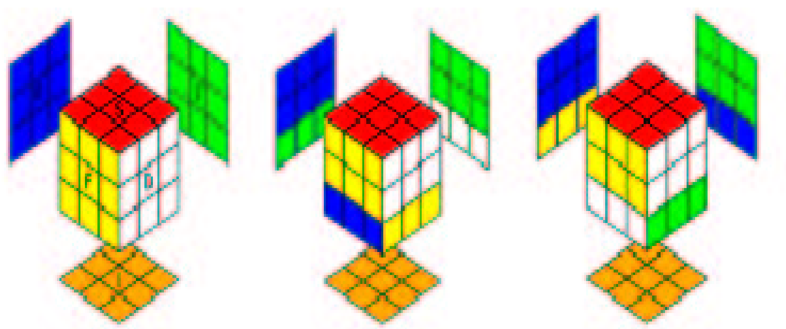

Figura 2.9: Ilustração do movimento D e D^{-1} respectivamente.

2.1.5 Movimento L e L^{-1}

Esse movimento L consiste em girar a face denominada de Left um quarto de volta no sentido horário, enquanto o movimento L^{-1} consiste em girar a mesma face um quarto de volta no sentido anti-horário.

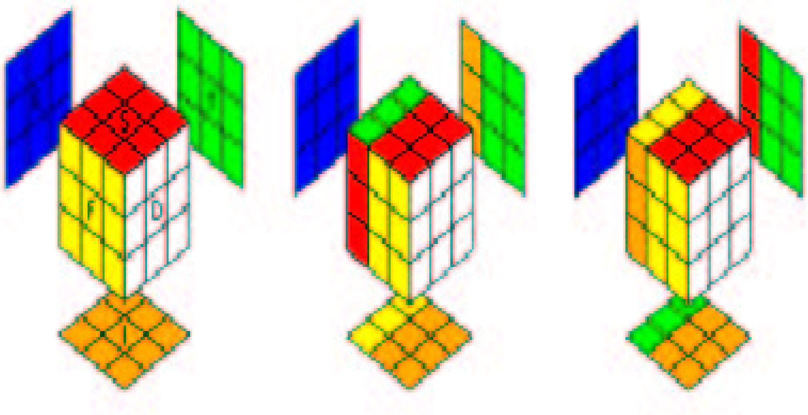

Figura 2.10: Ilustração do movimento L e L^{-1} respectivamente.

2.1.6 Movimento R e R^{-1}

Esse movimento R consiste em girar a face denominada de Right um quarto de volta no sentido horário, enquanto o movimento R^{-1} consiste em girar a mesma face um quarto de volta no sentido anti-horário.

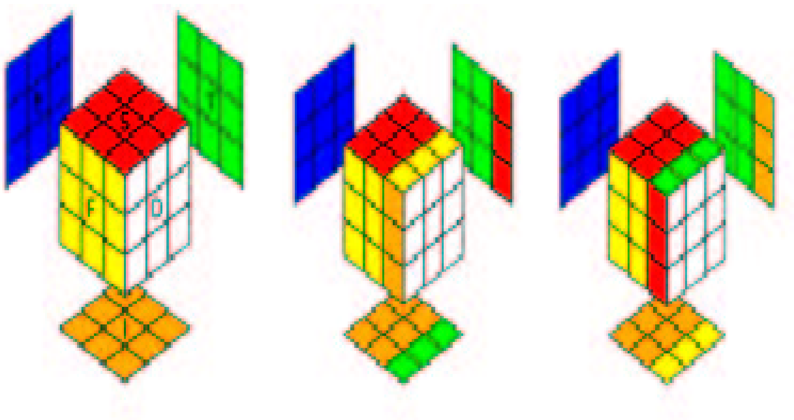

Figura 2.11: Ilustração do movimento R e R^{-1} respectivamente.

É imediato reconhecer que as rotações não são mais que permutações do conjunto dos "cubinhos"que constituem o cubo e que executar rotações sucessivamente corresponde a compor essas permutações. Assim, não é surpreendente que RU^{-1} *e* $U^{-1}R$ *não correspondam ao mesmo rearranjo do cubo, já que a composição de funções não é, em geral, comutativa* [5].

Capítulo 3

CONCEITOS ALGÉBRICOS APLICADOS AO CUBO DE RUBIK.

3.1 Sequência do Cubo:

Após estudos dos movimentos observamos que estes alteram a configuração das facetas dos cubinhos, mas preservam a forma geral do cubo, por isso são denominados de SIMETRIAS do Cubo. O professor Schutzer discorrendo sobre o estudo das configurações das facetas do Cubo Mágico, tece o seguinte comentário: "Nem todas as configurações são possíveis. Por exemplo, cubinhos de aresta não podem ser trocados com os de cantos. Há, portanto algumas restrições óbvias nas possíveis configurações"[18].

Ao trabalharmos esses movimentos no brinquedo será necessário realizarmos vários ao mesmo tempo, por exemplo, L seguido de R seguido de U, talvez repetidos algumas vezes, ou seja, faremos uso de algumas seqüências para deixar o cubo na sua forma homogênea. Para memorizarmos essas seqüências atribuiremos letras para representar certa seqüência, por exemplo, utilizaremos a letra S para indicar os seguintes movimentos FLU, desta forma S=FLU, o que significar fazer primeiramente o movimento F seguido do L e encerrado com o movimento U.

Utilizaremos para fins didáticos neste trabalho o conceito de Macro, definido da seguinte maneira: "Macro é toda seqüência longa finita S consistindo de dois ou mais movimentos"[18]. Esta macro nos fornece um conjunto de informações indivisíveis a ser executado em blocos. Além disso, uma macro pode consistir de outras macros, como descreve Schutzer: "Se T=SDS, então executar T significa fazer, F, L, U, D, F, L, U"[18].

Devemos atentar para o fato de que uma macro muda a situação de um cubo, ou seja, o cubo sai de uma configuração 1 e passa para uma configuração 2 com uma nova situação. É claro que isso é teoricamente possível, mas não é fisicamente possível.

Do mesmo modo se não fizermos nenhuma movimentação no Cubo, ou seja, deixá-lo inalterado este movimento é chamado de I ou identidade. Claramente F F^{-1}= I, pois fazer F seguido de seu oposto é o mesmo que não fazer nada com o Cubo, além disso, temos , e F^4=I.

Utilizamos essa mesma idéia para exemplificar uma seqüência no Cubo de Rubik, seja a macro S=FLU, observar que essa equação nos diz que U^{-1} L^{-1} F^{-1} faz o oposto de S, logo representa S^{-1}. Portanto, para desfazer uma sequência de movimentos, devemos executar em ordem reversa os opostos dos movimentos individuais.

Desta forma, consideremos uma cadeia aleatória C, ou seja, cadeia formada por movimentos sucessivos das facetas e apliquemo-la num Cubo mágico na forma homogênea, resultando numa forma combinada. Note que o Cubo possui um número finito de faces, assim, se aplicarmos no Cubo a cadeia $CCCCCC...C$, tão grande quanto necessário, certamente em algum momento uma forma combinada será repetida. Desta forma, podemos assumir que a forma combinada obtida pela aplicação da cadeia C^k tornará a aparecer quando aplicarmos C^m , naturalmente $m > k > 1$. Neste caso, C^{m-k}=Id.

3.1.1 A Noção de Cadeia:

Nosso objeto de estudo possui ainda movimentos identificados como comutativos e não-comutativos. O primeiro ocorre com faces não-adjacentes, por exemplo, FB=BF ou LR=RL e o segundo ocorre com quaisquer faces adjacentes. É justamente a não-comutatividade que torna o Cubo um quebra-cabeça interessante.

Uma cadeia C de movimentos nada mais é do que uma seqüência finita de movimentos no Cubo, conforme as figuras abaixo:

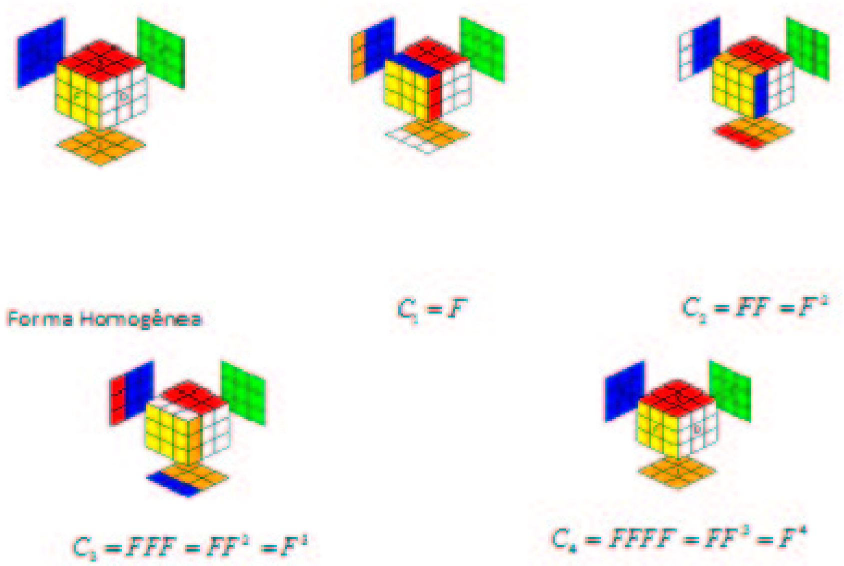

Figura 3.1: Ilustração de Cadeias de Movimentos.

3.2 Permutação:

Definição 3.2.1: Uma permutação é um rearranjo de um conjunto de objetos, tal que a ênfase encontra-se no rearranjo destes objetos e não nos objetos em si.

Exemplo: Dado um conjunto definido da seguinte maneira (a,b,c) temos que b, a, c é um rearranjo ou uma permutação dos elementos que compõem esse conjunto . Outro exemplo é: 2, 1, 3 que é uma permutação dos elementos do conjunto (1, 2, 3).

Verificamos acima que ambas as permutações são iguais, pois trocam o primeiro e o segundo objetos dos conjuntos. Então podemos pensar que o conjunto permutado é $(1, 2, 3, ..., n)$.

O conceito de permutação expressa a idéia de que objetos distintos podem ser arranjados em inúmeras ordens diferentes.

Definição 3.2.2: Chama-se permutação de um conjunto A a uma função bijetiva α, que associa os elementos de A em A, ou seja, $\alpha : A \to$A.

O total de permutações é dado da seguinte maneira: $n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$

Esse número é chamado de n-fatorial, também escrito como $n!$ que é o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n. A notação estudada atualmente é conhecida como $n!$ e foi introduzida por Christian Kramp em 1808.

3.3 Representação de uma permutação:

Uma permutação pode ser representada da forma apresentada acima, ou seja, como uma notação de conjuntos. Mas, também pode ser representada de uma forma diferente, sendo assim, pode ser descrita através de notação matricial, conforme o esquema abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Essa matriz da uma descrição precisa de permutação, o que torna fácil para nós fazermos à composição de permutações. Além de matrizes, podemos também descrever permutações através da notação de ciclos.

3.4 Notação de ciclos:

No estudo da resolução do Cubo de Rubik, devemos dar uma atenção especial à notação de ciclos, pois esta é muito utilizada no estudo dos Grupos de Permutação que observamos nos livros de Álgebra utilizados nas Universidades. Faremos abaixo uma breve definição de ciclo, utilizada por Tom Davis em seu trabalho intitulado Group Teory via Rubik's Cube.

Definição 3.4.1: Um ciclo pode ser pensado como uma série de transições de estado que acaba por retornar ao estado inicial. Conforme esquema abaixo:

$$\mathrm{S}_1 \mapsto \mathrm{S}_2 \mapsto \dots . \mapsto \mathrm{S}_n \mapsto \mathrm{S}_{n-1}$$

Na notação canônica de ciclos o menor objeto entre parênteses deve iniciar o ciclo. No Cubo de Rubik essa notação canônica pode ser vista quando planificamos esse objeto e numeramos as 54 facetas menores que formam esse objeto.

Exemplo 1: α=(1 2) (3 4 5) uma notação canônica de ciclos. Já α=(4 3) (2 1 5) não está na forma canônica, no entanto ao girarmos os elementos do ciclo, podemos reescrevê-lo na forma canônica α=(3 4) (1 5 2).

Exemplo 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

A permutação acima pode escrever-se como produto de ciclos (disjuntos), da seguinte forma: (1, 3, 6) (2, 8) (4, 7, 5) ou ainda como produto de transposições (1, 3) (1, 6)(2, 8) (4, 7) (4, 5).

É fácil ver que:

a) Um ciclo de comprimento par se pode escrever como produto de um número ímpar de transposições;

b) Um ciclo de comprimento ímpar se pode escrever como produto de um número par de transposições;

c) Ciclos disjuntos comutam;

d) Um ciclo de comprimento k tem ordem k (em particular, a permutação que esse ciclo representa composta consigo própria k vezes dá a permutação identidade).

Utilizando as definições acima, temos no Cubo de Rubik as permutações de suas facetas, já que os movimentos R, L, F, B, U, D, permutam o conjunto das facetas. Os movimentos do cubo podem ser vistos como permutações das 54 faces visíveis dos cubinhos, 6 das quais ficam fixas. Planificando o cubo (e atribuindo números às faces que podem ser permutadas) obtemos:

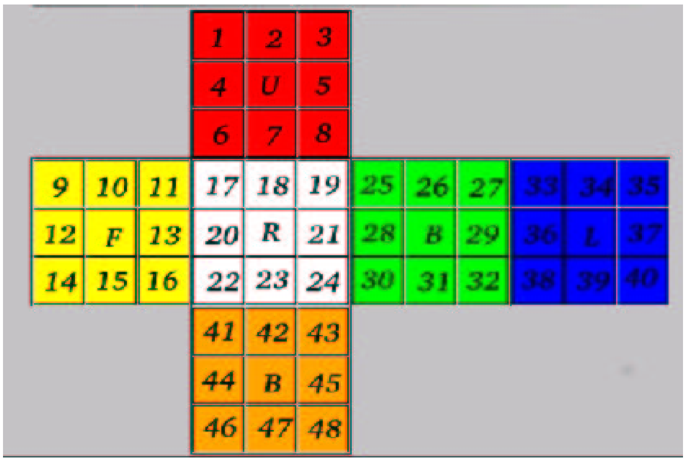

Figura 3.2: Planificação do cubo de Rubik com sua respectiva numeração.

Executando a rotação R obtemos:

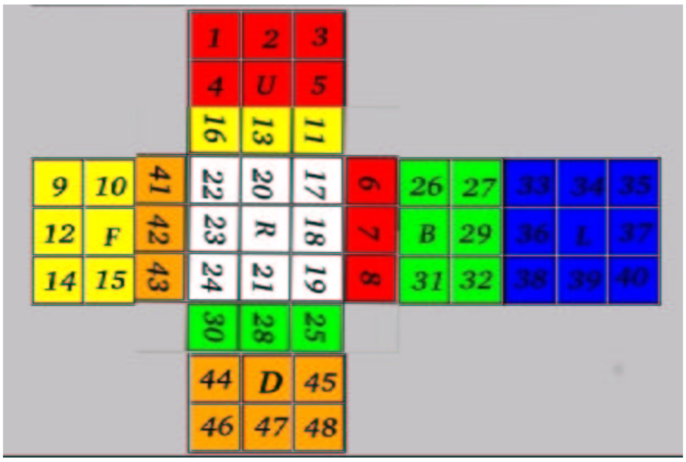

Figura 3.3: Rotação R no Cubo de Rubik.

A rotação R corresponde à permutação:

R= (17,19,24,22) (18,21,23,20) (6,25,43,16) (7,28,42,13) (8,30,41,11);

Analogamente temos:

U= (1, 3, 8, 6) (2, 5, 7, 4) (9,33,25,17) (10,34,26,18) (11,35,27,19);

F= (9,11,16,14) (10,13,15,12) (1,17,41,40) (4,20,44,37) (6,22,46,35);

B= (25,27,32,30) (26,29,31,28) (3,38,43,19) (5,36,45,21) (8,33,48,24);

L= (33,35,40,38) (34,37,39,36) (3, 9,46,32) (2,12,47,29) (1,14,48,27);

D= (41,43,48,46) (42,45,47,44) (14,22,30,38) (15,23,31,39) (16,24,32,40);

As facetas centrais giram em torno de si mesmas, por isso não aparecem nos ciclo, e concordamos com a seguinte idéia: "Um fato importante surge quando usamos a notação de ciclos: toda permutação se decompõe como "produto"de ciclos disjuntos"[17].

3.5 Ordem de uma permutação:

Primeiramente definiremos divisibilidade para uma melhor compreensão de MMC.

Definição 2.5.0: Dados dois inteiros a e b dizemos que b divide a (e escrevemos $b|a$) se existe um inteiro c tal que $a = bc$. Isto equivale a dizer que b é um divisor de a ou que a é divisível por b, ou ainda que a é um múltiplo de b.

Em geral a ordem do n-ciclo $(i_1.i_2...i_n)$ é igual a n. Para uma melhor compreensão do conceito de ordem temos que realizar um breve estudo sobre MMC(mínimo múltiplo comum).

Definição 2.5.1: Um número inteiro m é o mínimo múltiplo comum dos números não nulos a e b (e escrevemos $m = mmc(a, b)$) se:

(i) m > 0;

(ii) $a|m$ e $b|m$;

(iii) Se existe um inteiro c > 0 tal que $a|c$ e $b|c$ então $m\leq$c.

Podemos ver que $mmc(a, b)$ = $mmc(|a|, |b|)$. Além disso, existe uma relação estreita entre MDC(máximo divisor comum) e o MMC(mínimo múltiplo comum) de dois naturais a e b.

Cálculo do MMC por fatoração:

Temos 754 = 2 · 13 · 29 e 221 = 13 · 17. Neste caso, mmc(754, 221) = 2 · 13 · 17 · 29, pois o MMC é dado pelos primos comuns e não comuns com maior expoente.

Demonstração:

Em geral se:

$$\text{a}= p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}\ \ldots\ p_k^{\alpha_k}\ r_1^{\gamma_1}\ r_2^{\gamma_2}\ \ldots r_{t_{\gamma_t}}\ ,$$

p_1, p_2, $\ldots$, p_k, r_1, r_2, $\ldots$, r_t são primos distintos e os expoentes α_i, γ_j são naturais,1 $\leq$i$\leq$k, 1$\leq$j$\leq$t e

$$\text{b}= p_1^{\omega_1}\ p_2^{\omega_2}\ \ldots\ p_k^{\omega_k}\ s_1^{\lambda_1}\ s_2^{\lambda_2}\ \ldots s_{l_{\lambda_l}}\ ,$$

p_1, p_2, $\ldots$, p_k, s_1, s_2, $\ldots$, s_t são primos distintos e os expoentes ω_i, λ_j são naturais,1 $\leq i \leq k$, $1 \leq j \leq t$ então

$$\text{mmc(a,b)}=p_1^{\epsilon_1}\ p_2^{\epsilon_2}\ \ldots\ p_k^{\epsilon_k}\ r_1^{\gamma_1}\ r_2^{\gamma_2}\ \ldots r_t^{\gamma_t}\ s_1^{\lambda_1}\ s_2^{\lambda_2}\ \ldots s_{l_{\lambda_l}}$$

ϵ_t=maxα_i, ω_i

Se uma permutação consiste de m-ciclos e de n-ciclos disjuntos então sua ordem é o $MMC(m, n)$ como observamos em seguida:

Considere ϕ= (1 2) (3 4 5), que consiste de um 2-ciclo e um 3-ciclo. Observe que esses ciclos não têm elementos em comum, por isso a cada aplicação de ϕ podemos olhar apenas para 1,2 ou apenas para 3,4,5. Após 2 aplicações, os elementos de 1,2 voltam à posição original, isso ocorre para ϕ^2, ϕ^4, ϕ^6, ...

Após 3 aplicações, os elementos de 3,4,5 voltam à posição original, isso ocorre para ϕ^3, ϕ^6, ϕ^9, ...

Nota-se que ϕ^6 é o primeiro a aparecer em ambas as listas. Portanto, a ordem de ϕ é 6. Observe que 6 é o mmc de 2 e 3.

Exemplo 1: Se ϕ consiste de ciclos de tamanho 2, 3, 6, 7, então sua ordem é MMC(2, 3, 6, 7)= 42.

Exemplo 2: Considere ϕ= (1 2) (3 4 5) que tem ordem 6. Se repetirmos ϕ 3 vezes. O 3-ciclo desaparece, mas não o 2-ciclo, logo ϕ= (1 2) ou seja, ϕ^3 move apenas 2 elementos.

3.6 Aplicação de ciclos no Cubo:

Quando os objetos permutados são os cubinhos temos os seguintes resultados: a macro S=F^2 L^2 move exatamente 13 cubinhos e S^3 move apenas 4 cubinhos, ou seja, ela troca apenas dois pares de cubinhos.

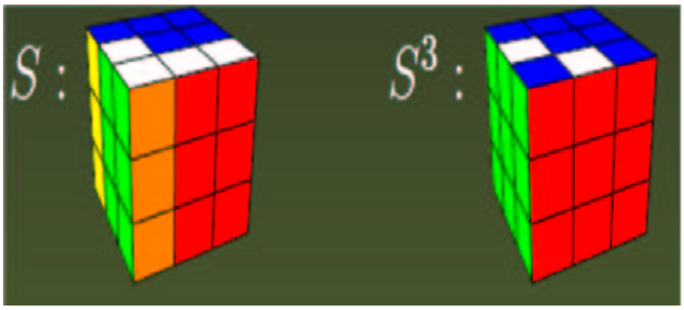

Figura 3.4: Cubinhos da macro S e da macro S^3

Nomeando os cubinhos, a macro S faz: $(DU\ UF)$ $(DL\ UL)$ $(FL\ FR\ BL)$ $(DFL\ UFR\ UBL)$ $(DLB\ ULB\ DRF)$. Após executar a macro S três vezes, os elementos presentes nos 3-ciclos voltam à sua posição original. No entanto, os elementos dos 2-ciclos foram permutados um número ímpar de vezes, por isso permanece trocados. Logo, S^3=($DF\ UF$) ($DL\ UL$).

Desta forma, com os conceitos algébricos apresentados acima podemos tecer várias idéias a respeito de como a noção de permutação aplicada ao Cubo Mágico ajuda-nos a entender o que são as macros e como estas contribuem no processo de resolução do Cubo de Rubik.

3.7 Grupos:

A teoria de grupos é um dos mais antigos ramos da álgebra moderna. Suas origens podem ser encontradas nos trabalhos de J. Lagrange (1736-1813), P. Ruffini (1765-1822) e E. Galois (1811-1832) sobre teoria de equações algébricas. Nestes trabalhos, os grupos consistiam de permutações de variáveis ou de raízes de polinômios e, de fato, em muito do século XIX todos os grupos eram grupos de permutações finitos.

Muitas idéias fundamentais foram introduzidas por estes matemáticos e seus sucessores: A. Cauchy (1789-1857), L. Sylow (1832-1918), C. Jordan (1838-1922), entre outros.

O conceito de grupo abstrato é claramente reconhecível no trabalho de A. Cayley (1821-1895), mas esta idéia não ganhou real aceitação até W. Von Dyck (1856-1934) introduzir as apresentações de grupos.

O estímulo para estudar grupos infinitos veio a partir da geometria e topologia por influência de F. Klein (1849-1925), S. Lie (1842-1899), H. Poincaré (1854-1912) e M. Dehn (1878-1952). Depois disto, a teoria de grupos infinitos foi quase unicamente estudada por O. Schmidt (1891-1956) até o estabelecimento da Escola Russa encabeçada por A. Kurosh (1908-1971).

De acordo com [3] a primeira grande fase da teoria de grupos finitos atingiu seu clímax no período imediatamente antes da Primeira Guerra Mundial com os trabalhos de G. Frobenius (1849-1917), W. Burnside (1852-1927) e I. Schur (1875-1936). Depois de 1928, novas e decisivas contribuições foram feitas por P. Hall (1904-1982), H. Wielandt e, no campo de representações de grupos, por R. Brauer (1901-1977). O intenso interesse subseqüente na classificação dos grupos simples finitos é conseqüência dos trabalhos destes estudiosos. A classificação foi completada em 1982 com a participação de centenas de matemáticos, liderados por D.Gorenstein (1923-1992).

Após essa análise histórica sobre o estudo de grupos seguimos este trabalho apresentando algumas definições para grupos encontradas em várias bibliográfias, algumas bastante simples e outras mais rebuscadas utilizando-se de uma linguagem matemática extremamente apurada.

Definição 3.7.1: Um grupo é definido por meio de leis que combinam seus elementos, de acordo com um célebre dito de Cayley.

Definição 3.7.2: Um grupo é um objeto matemático abstrato que pode ser definido de modo muito elegante com apenas alguns poucos axiomas. A partir desses poucos axiomas muitos teoremas interessantes podem ser provados.

Definição 3.7.3: Seja G um conjunto não vazio para o qual está definida uma operação fechada: G ×G$\mapsto$ G sendo que todos os seus elemenos satisfazem as seguintes propriedades:

(i) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, para quaisquer a, b, $c \in G$;

(ii) Existe $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a$, para qualquer $a \in G$;

(iii) Para qualquer $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = e$.

Nestas condições, dizemos que $(G, .)$ é um grupo. A partir da definição apresentada acima se observa as seguintes propriedades imediatas:

(i) O elemento identidade de G é único;

(ii) Para todo a; x; y pertencentes a G tem-se que: $a * x = a * y \mapsto x = y$;

(iii) Para todo $a \in G$, existe um único elemento simétrico $a^{-1} \in G$;

(iv) Para todo $a \in G$, tem-se que $(a^{-1})\ ^{-1} = a$;

(v) Para todo $a \in$ G, tem-se que $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

Demonstração de (i):

Suponhamos que existam e, f dois elementos identidade de G, logo $e * f = f * e = e$ (caso f elemento identidade) assim como $f * e = e * f = f$ (caso e elemento identidade); porém $e = e * f = f * e = e * f = f$.

Portanto $e = f$.

Demonstração de (ii):

Com efeito, para todo elemento a pertence a G, existe seu elemento simétrico b (pode não ser único) tal que $b * a = e$, assim $x = e * x = (b * a) * x = b * (a * x) = b * (a * y) = (b * a) * y = e * y = y$.

Portanto, da hipótese $a * x = a * y$ concluímos que $x = y$ (de modo análogo podemos mostrar que se, $x * a = y * a \mapsto x = y$.

Demonstração de (iii):

Suponhamos existam dois elementos em $x; y \in G$ tais que sejam simétricos de $a \in G$; isto é $a * x = e$ e $a * y = e$, logo $a * x = a * y$, pela parte (ii) desta propriedade temos que $x = y$, assim na verdade existe somente um simétrico para a pertence a G; este simétrico é denotado por $a^{-1} \in G$.

Demonstração de (iv):

Demonstra-se isto utilizando a parte (ii); observe, $(a^{-1})^{-1} * (a^{-1}) = e = a * a^{-1}$ onde de (ii) segue que $(a^{-1})^{-1} = a$.

Demonstração de (v):

Para todo $a; b \in G$ tem-se que $a*b \in G$, logo existe $(a * b)^{-1} \in G$, assim $(a* b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e$, onde pela própria definição de simétrico tem-se que $b * a^{-1} = (a * b)^{-1}$.

Um grupo é um conjunto não vazio G munido de uma operação fechada que é associativa, admite elemento neutro e admite inverso para cada um de seus elementos. Se, além disso, se a operação for comutativa, dizemos que G é grupo abeliano, em homenagem ao matemático N. Abel (1802-1829), logo observamos que nem todo grupo possui a propriedade comutativa de seus elementos.

Definição 3.7.4: Dizemos que G é um grupo abeliano ou comutativo se, para todo $a; b$ pertencentes a G temos a igualdade $a * b = b * a$. Um grupo que não é abeliano é denominado naturalmente de grupo não abeliano.

Definição 3.7.5: Chamamos de ordem do grupo G e denotamos o(G), ao número de elementos pertencentes ao conjunto G.

Se a ordem de um grupo G é finita, o par (G; *) é chamado de grupo finito e é denotado por o(G) < ∞; caso a ordem de um grupo (G; *) seja infinito, a ordem do grupo infinito denotamos por o(G) =∞.

Evidentemente pelos resultados da teoria de grupos, é mais interessante quando o grupo é da ordem finita.

Exemplos de Grupos:

1- O conjunto dos números inteiros Z com a operação de adição.

2- O conjunto dos racionais Q, reais R e complexos C com a adição.

3.8 Aritmética Modular:

No estudo do Cubo de Rubik podemos introduzir um estudo breve sobre alguns conceitos da aritmética modular.

Definição 3.8.1: Considere o conjunto Z_n= (0,1,2,....,n-1) , definimos nesse conjunto a seguinte operação: para todo a,b pertencentes a Z_n , a*b é o resto da divisão da adição a+b por n. Formando um grupo comutativo finito.

Definição 2.8.2: Considere o conjunto Z_n^*= (1,2,....,n-1) , definimos nesse conjunto a seguinte operação: para todo a,b pertencentes a Z_n^* , a*b é o resto da divisão do produto a*b por n. Se n for um número primo então temos um grupo comutativo finito, mas não se n for composto.

Das definições apresentadas acima podemos deduzir que tanto Z_n quanto Z_p^* são grupos cíclicos: seus elementos são da forma 1, g, g^2,..., para algum g diferente do elemento neutro.

3.9 Grupo Simétrico S_n:

Na virada do século XVI, o algoritmo algébrico introduz na matemática uma abstração mais refinada (as letras e símbolos) de "entes"e operações abstratas, que em definitiva ajudam a "entes"concretos (números, figuras ou objetos físicos).

Permutações foram primeiramente estudadas por Lagrange (1736 - 1813) em 1770 no artigo "Reflexões sobre a solução de equações algébricas", que trata sobre métodos para resolver equações de grau menor do que 4, que não servem para resolver equações de grau maior (do que 4). Isto leva a considerar funções racionais das raízes e seu comportamento como permutações de raízes.

Aplicam-se as pesquisas de Lagrange ao que denominamos "cálculo das combinações"que é o estudo das permutações, onde aparece o mais importante teorema da teoria de grupos finitos, hoje conhecido como Teorema de Lagrange.

Lagrange observou, em notação moderna, que a ordem de um subgrupo do grupo simétrico S_n divide a $n!$.

Definição 3.9.1: O grupo simétrico é o grupo de todas as permutações do conjunto

$(1,2,..,n)$. O número de elemento desse grupo é dado por $n!$

"Como cada permutação pode ser escrita como produto de ciclos disjuntos, toda permutação se escreve como produto de 2-ciclos"[17].

Definição 3.9.2: A permutação β é par quando pode se escrita como produto par de 2-ciclos. Caso contrário, dizemos que β é uma permutação ímpar.

No estudo do grupo S_n nota-se que metade dos elementos de S_n é par e a outra metade é ímpar. A metade par, identificada por A_n, forma um grupo por si mesmo, chamado de grupo alternante. A metade ímpar não é grupo, pois 1 pertence a A_n. Dizemos que A_n é um subgrupo de S_n. A ordem do grupo A_n é dada por $\frac{n!}{2}$.

Podemos aplicar esses conceitos de paridades de permutação no Cubo de Rubik.

"Não existe nenhuma combinação de movimentos que consiga trocar apenas um par de cubinhos, pois isso só pode ser conseguido com uma permutação ímpar"[9].

3.10 Grupo de Rubik:

Definição 3.10.1: O conjunto de todas as permutações das facetas do Cubo forma um grupo R chamado de Grupo de Rubik, em homenagem ao seu criador Erno Rubik.

Esse grupo consiste dos movimentos L,R,F,B,U,D e de todas as macros S, assumindo que duas macros que produzem o mesmo resultado são vistas como iguais, por exemplo F e F^5 são o mesmo elemento do grupo R.

O número total de elementos do grupo R é exatamente o número de todas as possíveis configurações do Cubo. Isso não significa que R deva conter todas as permutações das facetas, mas apenas aquelas que podem ser atingidas por meio dos movimentos L,R,F,B,U,D.

3.10.1 Rotações do Grupo de Rubik:

Para que possamos calcular a quantidade de rotações que podem ser efetuadas neste grupo devemos levar em consideração as restrições quanto a sua posição.

Primeiramente desconsiderando todas as restrições há oito posições possíveis para um cubinho de canto e doze posições possíveis para um cubinho de aresta, num total de 8!$\cdot$ 12! rearranjos. Cada cubinho deve estar em uma das três possíveis rotações: sentido horário, sentido anti-horário e sentido homogêneo, num total de 3^8 possibilidades.

Assim também cada cubinho da aresta deve estar girado ou não, num total de 2^{12} possibilidades. Desta forma temos então um total de 8!$\cdot$ 12! $\cdot\, 3^8 \cdot 2^{12}$ rearranjos.

No trabalho da professora Marjory Del Veccio dos Santos ler-se o seguinte comentário: "Apenas $\frac{1}{3}$ desses rearranjos terá a orientação correta dos cantos. Desses apenas $\frac{1}{2}$ terá a orientação das arestas correta e finalmente, destes apenas $\frac{1}{2}$ terá a paridade correta (par)." [20]

Portanto, a quantidade de rotações do grupo R é dado por:

$$\frac{8! \cdot 12! \cdot 3^8 \cdot 2^{12}}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 43.252.003.274.489.856$$

Este resultado tem como conseqüência imediata que a ordem do grupo de Rubik é 3^8/3 x 2^{12}/2 x (8! x 12!)/2. Esse valor corresponde aproximadamente a 4 $\cdot\, 10^{19}$ elementos nesse grupo.

Em seguida podemos observar a tábua de rotações das faces do Grupo de Rubik e uma tábua com a planificação do Cubo de Rubik contendo os movimentos efetuados pelo mesmo, ou seja, a permutação realizada por essas rotações.

Tábua de multiplicação do Grupo de Rubik:

	1	F	R	U	B	L	D	FF	RR	UU	FR	RB	BL	LF	LB	FL	RF	BR	FRU	RUF	LBD	BUR	LFU	BLU
1	1	F	R	U	B	L	D	FF	RR	UU	FR	RB	BL	LF	LB	FL	RF	BR	FRU	RUF	LBD	BUR	LFU	BLU
F	F	FF	RF	FR	1	LF	FL	B	LFU	LBD	RUF	R	U	FRU	L	BUR	BLU	D	LB	BL	RR	BR	UU	RB
R	R	FR	RR	RB	BR	1	RF	FRU	L	BLU	LBD	BUR	B	U	D	F	RUF	LFU	UU	LB	FL	LF	BL	FF
U	U	LF	FR	UU	RB	BL	1	BUR	RUF	D	FRU	LBD	BLU	LFU	B	L	F	R	BR	FF	LB	RR	RF	FL
B	B	1	RB	BL	FF	LB	BR	F	LBD	LFU	U	BLU	RUF	L	FRU	D	R	BUR	LF	FR	UU	FL	RR	RF
L	L	FL	1	LF	BL	RR	LB	BLU	R	FRU	F	U	LFU	BUR	RUF	LBD	D	B	FF	RF	FR	RB	BR	UU
D	D	RF	BR	1	LB	FL	UU	RUF	BUR	U	R	B	L	F	LBD	BLU	LFU	FRU	FR	RR	RB	FF	LF	BL
FF	FF	B	BLU	RUF	F	FRU	BUR	1	UU	RR	BL	RF	FR	LB	LF	BR	RB	FL	L	U	LFU	D	LBD	R
RR	RR	LBD	L	BUR	LFU	R	RUF	UU	1	FF	FL	LF	BR	RB	RF	FR	LB	BL	BLU	D	F	U	B	FRU
UU	UU	LFU	FRU	D	LBD	BLU	U	RR	FF	1	BR	LB	FL	RF	RB	BL	LF	FR	R	BUR	B	RUF	F	L
FR	FR	FRU	RUF	LBD	R	U	F	BR	BL	FL	LB	RR	RB	UU	1	LF	FF	RF	D	B	L	LFU	BLU	BUR
RB	RB	U	LBD	BLU	BUR	B	R	LF	LB	RF	UU	FL	FF	BL	BR	1	FR	RR	LFU	FRU	D	L	RUF	F
BL	BL	L	U	LFU	BLU	RUF	B	FL	FR	BR	LF	UU	RF	RR	FF	LB	1	RB	BUR	F	FRU	LBD	R	D
LF	LF	BUR	F	FRU	U	LFU	L	RB	RF	LB	FF	FR	UU	BR	BL	RR	FL	1	B	BLU	RUF	R	D	LBD
LB	LB	D	B	L	RUF	LBD	FRU	RF	RB	LF	1	BL	RR	FL	FR	UU	BR	FF	F	R	U	BLU	BUR	LFU
FL	FL	BLU	D	F	L	BUR	LBD	BL	BR	FR	RF	1	LF	FF	RR	RB	UU	LB	RUF	LFU	R	B	FRU	U
RF	RF	RUF	LFU	R	D	F	BLU	LB	LF	RB	RR	BR	1	FR	FL	FF	BL	UU	LBD	L	BUR	FRU	U	B
BR	BR	R	BUR	B	FRU	D	LFU	FR	FL	BL	RB	FF	LB	1	UU	RF	RR	LF	U	LBD	BLU	F	L	RUF
FRU	FRU	BR	FF	LB	FR	UU	LF	R	BLU	L	B	RUF	LBD	D	U	LFU	BUR	F	1	RB	BL	RF	FL	RR
RUF	RUF	LB	BL	RR	RF	FR	FF	D	U	BUR	L	LFU	R	LBD	F	FRU	B	BLU	FL	1	LF	UU	RB	BR
LBD	LBD	UU	LB	FL	RR	RB	FR	LFU	B	F	D	L	BUR	BLU	R	U	FRU	RUF	RF	BR	1	BL	FF	LF
BUR	BUR	RB	FL	FF	LF	BR	RR	U	D	RUF	BLU	F	FRU	B	LFU	R	LBD	L	BL	UU	RF	1	LB	FR
LFU	LFU	RR	LF	BR	UU	RF	BL	LBD	F	B	BUR	FRU	D	R	BLU	RUF	L	U	RB	FL	FF	FR	1	LB
BLU	BLU	BL	UU	RF	FL	FF	RB	L	FRU	R	LFU	D	F	RUF	BUR	B	U	LBD	RR	LF	BR	LB	FR	1

Figura 3.5: Tábua de rotações do Grupo R.

Tábua com os movimentos do Cubo:

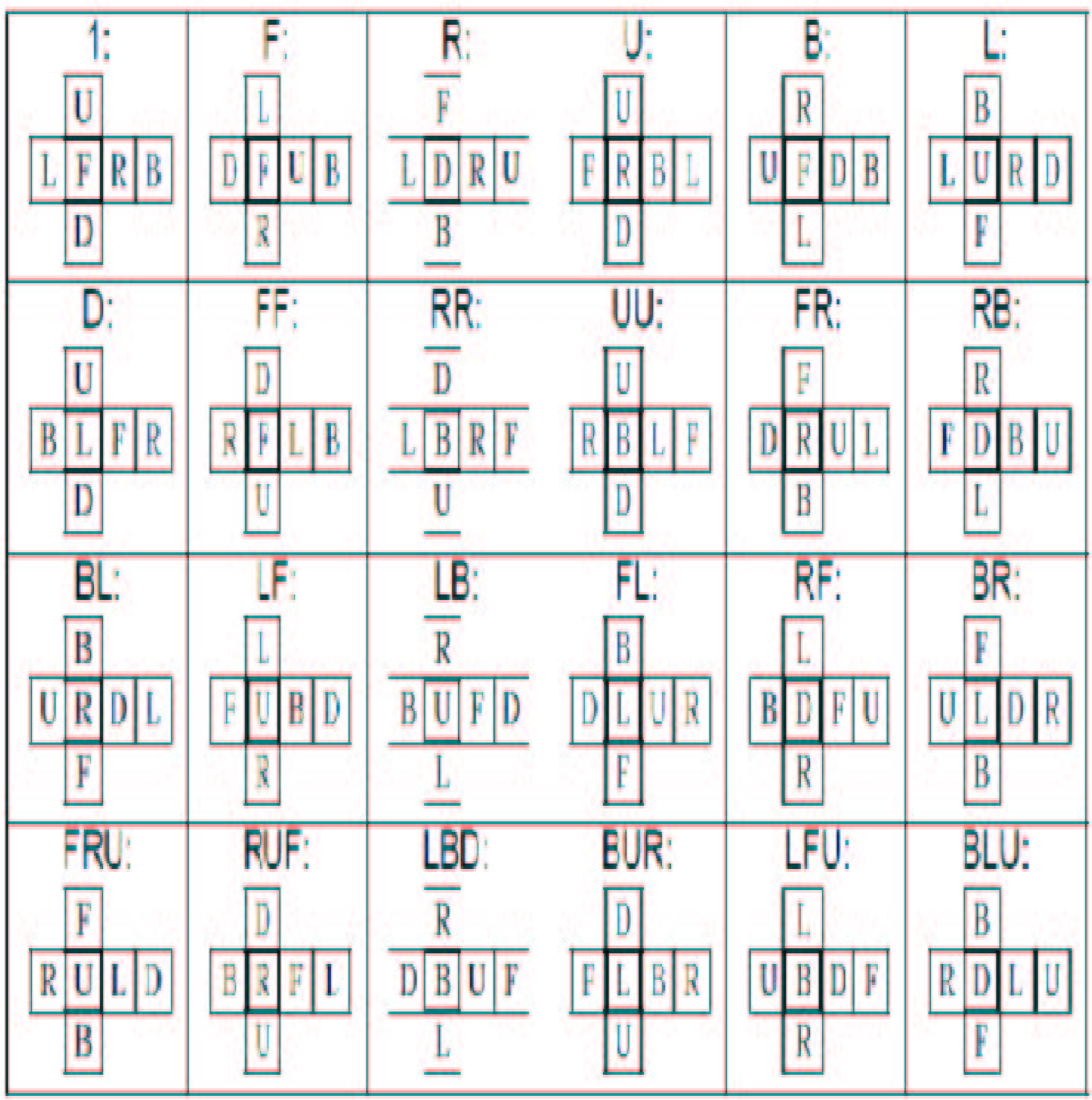

Figura 3.6: Tábua dos movimentos efetuados pelo Cubo.

3.11 Homomorfismo e Isomorfismo de Grupos:

Definição 3.11.1: Considere G um grupo com operação $\diamond$, e H outro grupo com a operação o. Dizemos que uma aplicação $\omega : G \to H$ é um homomorfismo de grupos se ω(1)=1 e ainda para todo g,$h \in G$, temos que ω(g$\diamond$h)= ω(g) o ω(h).

Definição 3.11.2: Se ω estabelece um homomorfismo entre os grupos G e H definidos acima e também é uma função bijetora, dizemos que ω é um isomorfismo de grupo,ou seja, G e H são ditos grupos isomorfos, e os representamos pela seguinte notação $G \approx H$.

3.11.1 Núcleo e Imagem de Homomorfismo:

Definição 3.12.1: Núcleo de um homomorfismo $\omega : G \to H$ é o conjunto:

Ker ω = ($g \in G$ | $\omega(g)$=1) e é um subgrupo de G.

Definição 3.12.2: A imagem de ω é denotada por $\omega(G)$ que consiste do seguinte conjunto Im ω = ($\omega(g)$ | $\forall$ $g \in G$) e é um subgrupo de H.

Teorema: A aplicação θ é injetora se, e somente se, kerθ = (1).

Demonstração:

De fato se θ é injetora então é óbvio que $\theta(g)$= 1 =θ(1) implica g = 1, logo kerθ =(1).

Por outro lado, se ker θ=1, então $\theta(x)$= $\theta(y)$ implica que $\theta(xy^{-1})$=1, logo xy^{-1} pertence a ker θ. Mas daí, xy^{-1}=1 e x=y, ou seja, θ é injetora.

Será abordado em seguida o Teorema que relaciona o núcleo e a imagem de um grupo, nota-se que o estudo desses dois conceitos matemáticos é muito interessante, principalmente quando estamos trabalhando com estruturas algébricas abstratas.

Teorema: Seja $\theta : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Então:

$$|G| = |\ker\theta| \cdot |\theta(G)|$$

Ou seja, a ordem de G é igual à ordem do núcleo vezes a ordem da imagem de θ .

Capítulo 4

UMA PROPOSTA DE RESOLUÇÃO PARA O CUBO DE RUBIK.

Iniciaremos esse capitulo detalhando as fatias que compõem o Cubo de Rubik, em seguida faremos uso das definições algébricas apresentadas anteriormente para propor uma possível resolução deste objeto, ou seja, saindo de um Cubo na forma combinada e resultando na forma homogênea.

4.1 As fatias do Cubo de Rubik:

Trabalharemos com as seguintes fatias apresentadas na figura abaixo:

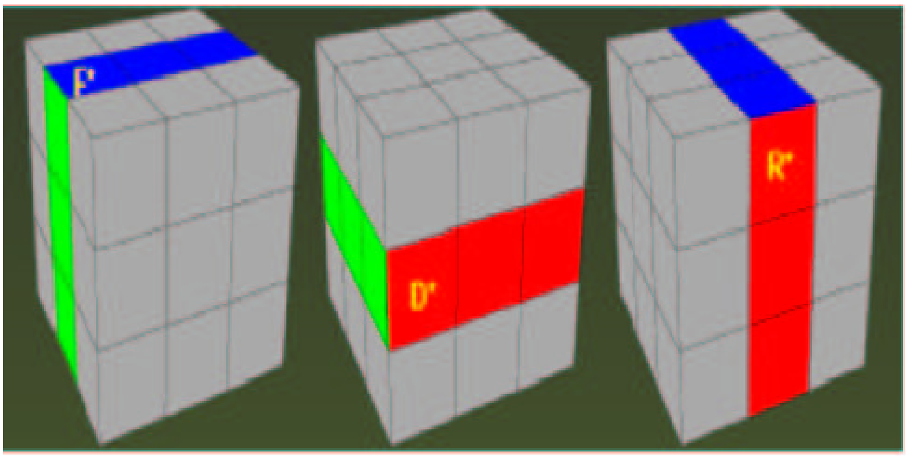

Figura 4.1: Fatias F^*, D^* e R^* do Cubo mágico.

Essas fatias recebem os respectivos nomes F^*,D^*e R^*. Esses movimentos giram as fatias do cubo um quarto de volta no sentido horário e todos eles pertencem a R.

Ao efetuar F^*,D^*e R^* fica claro que é destruída a posição dos cubinhos centrais, porém os cubinhos do canto nunca saem do lugar. Confirmamos nossa análise ao olhar a figura abaixo que mostra o cubo na sua posição inicial e esse após a realização da movimentação de suas fatias.

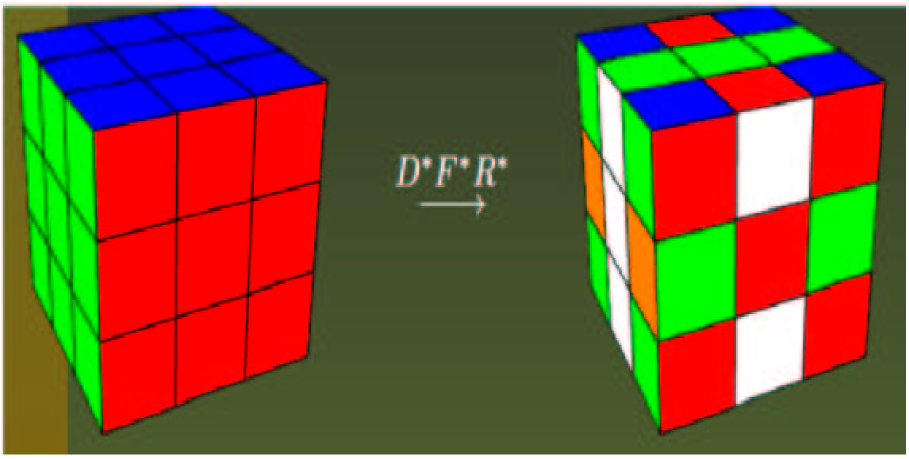

Figura 4.2: Aplicação dos movimentos F^*, D^* e R^* ao Cubo mágico.

O grupo σ altera as configurações de 30 facetas do Cubo, incluindo as facetas centrais, isto é, σ é um grupo de permutações do conjunto X dessas facetas.

Se tomarmos C como sendo o subconjunto de X e consistindo de todas as facetas pertencentes aos cubinhos das arestas notar-se-á que esse conjunto é sempre o mesmo sobre a ação de σ. Isto é, se $x \in C$ e $S \in \sigma$, então $S(x) \in C$. Podemos dizer então que C é fechado sob a ação de σ.

Ao trabalhar com esse subgrupo far-se-a necessário uma pequena explanação sobre conjuntos fechados, por isso citaremos o seguinte teorema.

Teorema: Seja C um conjunto fechado de um conjunto X sob a ação de um grupo σ . Então existe um homomorfismo $\theta : \sigma \mapsto$Sym(C).

Aqui Sym(C) é o conjunto de todas as permutações do conjunto C.

Este teorema nos é bastante útil, pois nos permite ver que σ como um grupo de permutações de C, esquecendo o que σ faz com o restante dos elementos. No caso especifico do Cubo, σ é o grupo das fatias e C é o conjunto das 24 facetas de aresta.

No Cubo, sob a ação do grupo de fatias σ, temos os seguintes conjuntos fechados de cubinhos:

1) Cantos: os cubinhos de cantos não são afetados por σ, logo σ age sobre esse conjunto como identidade.

2) Centros: os seis cubinhos de centro são permutados por σ . O Teorema nos dá um homomorfismo $\theta : \sigma \mapsto S_6$.

3) Arestas: os cubinhos de aresta formam 3 conjuntos fechados disjuntos sob a ação de σ, chamados de E_F, E_D e E_R, com quatro cubinhos cada um.

O Teorema nos dá os seguintes homomorfismos $\mu_F : \sigma \mapsto$ Sym(E_F), $\mu_D : \sigma \mapsto$ Sym(E_D) e $\mu_R : \sigma \mapsto$ Sym(E_R).

Diante destas idéias temos que a ação de $\mu_F(F^*)$ é a do 4-ciclos ($UF\ UB\ BD\ FD$). Já $\mu_F(D^*)$ e $\mu_F(R^*)$ não fazem nada com E_F, logo são ambas iguais a I em Sym(E_F).

Fica claro que $\mu_F(\sigma)$ é gerado por $\mu_F(F^*)$, logo temos que μ_F é sobrejetora e $\mu_F(\sigma)$ é isomorfo ao grupo cíclico Z_4. Essa mesma afirmação pode ser usada para $\mu_D(\sigma)$ e $\mu_R(\sigma)$.

4.2 Uma proposta de Resolução do Cubo de Rubik:

Ao admitir um cubo embaralhado pelos movimentos F^*, D^* e R^* podemos utilizar os seguintes conhecimentos algébricos para resolvê-lo.

Primeiramente vamos utilizar uma sequência de movimentos com as fatias acima estudadas, ou seja, iremos trabalhar com as seguintes macros:

$$X = R^* F^{*-1} D^* F^* = (1,0,1,1)$$
$$Y = R^* D^* F^* D^{*-1} = (1,1,0,1)$$
$$Z = F^* R^* D^* R^{*-1} = (1,1,1,0)$$

Vamos admitir os seguintes movimentos $X^x Y^y Z^z = (1,a,b,c)$, sendo que x, y e z são definidos da seguinte maneira:

$$x = \frac{-a+b+c}{2}$$
$$y = \frac{a+b-c}{2}$$
$$z = \frac{a-b+c}{2}$$

De acordo com [18]: "o núcleo do grupo σ é da forma ker σ = [(1,a,b,c) | a+b+c é $2n$] e para que o cubo fique nesta posição apenas dois movimentos bastam para acertar os centros." Essa definição dada acima nos será bastante útil para compreensão da resolução que propomos.

Esta proposta, baseada nos ensinamentos do professor Waldeck Schutzer, para a resolução do cubo consiste em calcularmos $(1, a, b, c)^{-1}$ = (1,-a,-b,-c), em seguida escrever esses elementos em termos de X,Y e Z usando a solução do sistema dado acima e finalizaremos executado o movimento X^X,Y^Y e Z^Z.

Vamos supor que o cubo esteja na posição (1,2,1,1). Então $(1, 2, 1, 1)^{-1}$ = (1,-2,-1,-1) = (1,2,3,3). Logo:

x = $\frac{-2+3+3}{2}$ = 2

y = $\frac{2+3-3}{2}$ = 1

z = $\frac{2-3+3}{2}$ = 1

Portanto, basta que façamos X^2YZ, ou seja, (R$^*F^{*-1}D^*F^*)^2R^*D^*F^*D^{*-1}F^*R^*D^*R^{*-1}$ para que o Cubo de Rubik recaia na forma homogênea.

O método que utilizamos consiste em dar ênfase na análise algébrica deste objeto, nota-se que para encontrarmos essa solução fez-se necessário que encontrássemos uma sequência:

$$\sigma \supset \text{Ker } T \supset 1$$

Para alguma projeção T: $\sigma \mapsto H$, onde H é um subgrupo maior possível. Se pudermos achar facilmente movimentos que levem o cubo para dentro de Ker T, como esse é relativamente pequeno, poderemos fazer as contas e achar a solução.

CONCLUSÃO

A matemática surgida na antiguidade por necessidade da vida cotidiana converteu-se em um imenso sistema de variedades e extensas disciplinas na qual ajuda na construção da cidadania, tornando-se uma ferramenta da sociedade. Além disso, a multiplicidade de álgebras inventadas no século dezenove poderia ter dado à matemática uma tendência centrifuga se não tivessem sido desenvolvidos certos conceitos estruturais e um dos mais significativo dentre eles foi o conceito que explana a noção de Grupos.

Na álgebra o conceito de Grupo foi sem dúvida a força mais importante para a coesão, e foi um fator primordial no surgimento das idéias abstratas. Apesar de não ter havido uma pessoa responsável pelo surgimento da idéia de Grupo, destaca-se nesse contexto o homem que segundo Carl Boyer foi quem deu nome a esse conceito, o jovem Évariste Galois [3].

Durante o desenvolvimento da álgebra além de Évariste Galois outros matemáticos destacaram-se, dentre eles citamos alguns como: J. Lagrange e P. Ruffini.

É de fato verdade que um processo gradual de generalização na álgebra tinha sido desenvolvido no século dezenove, mas no século vinte o grau de abstração deu uma virada brusca para cima.

Observamos ainda que dentro da matemática a álgebra do século vinte e um destaca-se por apresentar como característica uma abstração na definição de conceitos e exemplos contribuindo para que uma parcela significativa de alunos não prossiga nessa linha de estudo.

De acordo com os objetivos propostos pela monografia, procurou-se demonstrar a construção de uma análise crítica sobre como alguns conceitos algébricos podem ser apresentados sem tanta abstração e de forma mais visual, deparando-nos assim com o Cubo de Rubik ou Cubo Mágico como um auxiliador nesta tarefa.

Os estudos algébricos quando feitos de forma clara e coerente tornam-se muito prazerosos, pois se trata do estudo da matemática quase que pura.

Tratar das mais importantes definições algébricas como a de Grupos e Subgrupos através de um interessante brinquedo é fantástico, pois atrai a atenção do aluno ao mesmo tempo em que este se sente desafiado a resolver o Cubo até obter sua forma homogênea, desenvolvendo desta forma seu raciocino lógico e sua visão crítica.

Fazendo uso de ferramentas como essa fica mais claro e visível estudar a Teoria de Grupos, pois acreditamos ser esse o ponta-pé inicial para que possamos fazer uma construção coerente dos conteúdos estudados na universidade, pois a partir dos conhecimentos obtidos sobre Grupos podemos aprofundá-los estudando a Anéis e Corpos que são outros assuntos extremamente interessantes e de grande importância dentro da matemática.

Focamos nossa pesquisa em um Cubo Mágico da forma 3X3X3 e a partir dele trabalhamos com as definições de Grupo e principalmente Subgrupo para em seguida abordar os conceitos e homomorfismo, isomorfismo, núcleo e imagem. Utilizando todas essas ferramentas algébricas é proposto uma forma de deixar o Cubo Mágico na forma homogênea.

Portanto, notamos ao final deste trabalho que a Álgebra pode sim ser estudada através de metodologias mais atrativas como a resolução de um brinquedo, ou seja, partindo da definição de Grupos podemos concretizar uma vasta gama de conhecimento dentro desta área da matemática.

Finalizamos este trabalho com os seguintes questionamentos: será possível aplicar os conhecimentos aprendidos nesta monografia para um Cubo Mágico da forma 4X4X4 ou até mesmo 7X7X7?

Será possível aplicarmos outras Teorias algébricas na resolução do Cubo de Rubik?

Referências Bibliográficas

[1] ALVES, Ana; VIEIRA, Ana Cristina. Grupo. Disponível em <http://www.mat.ufmg.br>. Acesso em: 13 mar. 2010.

[2] BICUDO, Pedro. B+A=BA do grupo das permutações S_n. Disponível em <http://www.fisica.ist.ut/pt/ bicudo/permutat.ps>. Acesso em: 13 mar. 2010.

[3] BOYER, Carl Benjamim. História da Matemática: tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, 1974.

[4] DOMINGUES, Hygino Hipólito; IEZZI, Gilson. Álgebra moderna. 4.ed. São Paulo: Atual, 2003.

[5] DAVIS, Tom. Group Theory via Rubik's Cube. Disponível em <http://www.geometer.org>. Acesso em: 12 jun. 2009.

[6] DAVIS, Tom. The Rubik Users Guide. Disponível em <http://www.geometer.org>. Acesso em: 12 jun. 2009.

[7] FLEMING, Charles G.; HALCHIN, Judy D. Rubik Algebra. Disponível em <http://archives.math.edu/ICTCM/i/o1/A170.html>. Acesso em: 13 mar. 2010.

[8] GONÇALVES, Adilson. Introdução à Álgebra. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[9] HOTO, Robison. Uma Aplicação da Teoria de Grupos. Diponível em <http://www.icmc.usp.br/ manfio/cubo.pdf>. Acesso em: 03 fev. 2010.

[10] JEAYS, Mark. Como resolver o cubo de Rubik (How to solve the Rubik's Cube). Disponível em <http://www.unesp.br/ jroberto/rubiks>. Acesso em: 12 dez. 2009.

[11] KOCIEMBA, Herbert. Optimal Solvers. Disponível em <http://www.kociemba.or/cube.html>. Acesso em: 19 dez. 2009.

[12] MACHADO, Antônio dos Santos. Matemática na Escola do Segundo Grau. Rio de Janeiro: Atual, 2006.

[13] MAIER, Rudolf R. Álgebra I (texto de aula). Disponível em <http://www.mat.unb.br/ maierr/anotas.pdf>. Acesso em: 04 mai. 2010.

[14] PALMER, Jason. O último enigma do cubo mágico. Revista Galileu, dezembro de 2008. Disponível em <http://www.revistagalileu.globo.com>. Acesso em: 17 dez. 2009.

[15] PIVEDO, Cristian José Quintana. Introdução às estruturas algébricas. Disponível em <http://www.eumed.net/libros/2009a/449/cjpq-cv.pdf>. Acesso em: 09 jan. 2010.

[16] PIVEDO, Cristian José Quintana. Desenvolvimento da teoria de grupo. Pesquisa em educação matemática, CEFET - PR, Unidade de Pato Branco, Boletim Eletrônico da Matemática, Vol. 1 (2003), No.1 , 97-109. Disponível em <http://www.eumed.net/libros/2009a/449/cjpq-cv.pdf>. Acesso em: 09 jan. 2010.

[17] RODRIGUES, Christiane Buffo. Grupos Simétricos. Disponível em <http://www.ime.unicamp.br/ ftorres/ensino/.../chris-sim.pdf>. Acesso em: 09 mar. 2010.

[18] SCHUTZER, Waldeck. Aprendendo Álgebra com o Cubo Mágico. Mini - Curso UFU - Uberlândia Minas Gerais, 2005. Disponível em <http://www.dm.ufcar.br/waldeck/rubik>. Acesso em: 02 dez. 2008.

[19] SILVA, Viviane Ribeiro Tomaz; VIEIRA, Ana Cristina. Números Inteiros: divisibilidade, primos, MDC e MMC. Disponível em <http://www.mat.ufmg.br>. Acesso em 04 abr. 2010.

[20] SANTOS, Marjory Del Vecchio dos Santos; PEREIRA, Cristiane Lopes; RODRIGUES, José Henrique et al. A Álgebra no Cubo Mágico. Mini - Curso UNESP - São Paulo, 2007. Disponível em <http://www.mat.ibilce.unesp.br/XVIIISemat/Minicurso/RESUMOS/MT4.pdf>. Acesso em: 04 out. 2009.

[21] ZANGRADO, Roberto. Representação do grupo simétrico. Disponível em <http://www.prp.uicamp.br/pibic/congressos/xcongresso/pdfN114.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2010.

[22] WEISSTEIN, Eric W. Rubik’s Cube. Disponível em <http://www.mathworld.wolfram.com/Rubikscube.htm>. Acesso em: 25 mar. 2010.

Referências Bibliográficas