



**Universidade Federal do Amapá
Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Pós-graduação
Mestrado Profissional em Matemática**

ABORDAGENS NO ENSINO DAS GEOMETRIAS

Valéria Costa

**UNIFAP
MACAPÁ - 2016**

VALÉRIA COSTA

ABORDAGENS NO ENSINO DAS GEOMETRIAS

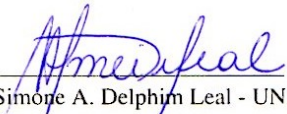
Dissertação apresentada ao Programa de pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal do Amapá, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob a orientação da professora Dr.^a Simone A. Delphim Leal.

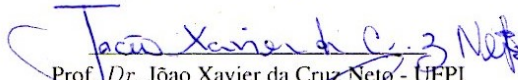
**UNIFAP
MACAPÁ - 2016**

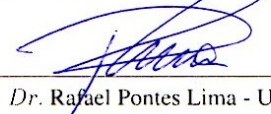
VALÉRIA COSTA

ABORDAGENS NO ENSINO DAS GEOMETRIAS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá, Campus Marco Zero, aprovado pela Comissão de professores:


Prof. Dr^a Simone A. Delphin Leal - UNIFAP


Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto - UFPI


Prof. Dr. Rafael Pontes Lima - UNIFAP

UNIFAP
MACAPÁ - 2016

À Deus, pela força, saúde e sabedoria.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela força e sabedoria concedida.

À minha família, especialmente meu esposo, pelo apoio e companheirismo.

Aos meus mestres do PROFMAT, que permitiram-me alcançar novos degraus na escada do conhecimento.

À minha professora orientadora *Dr^a* Simone A. Delphim Leal, pela dedicação nas orientações e excelentes contribuições.

Ao programa Nacional de Mestrado Profissional- PROFMAT, pela oportunidade de cumprir mais uma etapa da minha vida estudantil e profissional.

Lista de Figuras

1.1	Quadrilátero de Saccheri	13
1.2	Quadrilátero de Lambert	14
1.3	Tractriz	15
1.4	Representando um tractriz	15
1.5	Tractriz	15
1.6	Representação do Postulado das Paralelas	19
1.7	Representação de retas na esfera	20
1.8	Interseção de retas	20
1.9	Modelos geométricos	22
1.10	Triângulo na superfície esférica	22
2.1	Pseudoesfera de Beltrami	27
2.2	Retas hiperbólicas paralelas no modelo de Felix Klein	28
2.3	Representação de retas hiperbólicas no “Disco de Poincaré”	29
2.4	Construção do inverso de um ponto	30
2.5	Circunferências ortogonais	30
2.6	Potência de um ponto	31
2.7	Apoio para demonstração: circunferências ortogonais	32
2.8	Apoio para demonstração: γ e β são ortogonais nos pontos T e U	34
2.9	Reta hiperbólica AB - arco ortogonal ao Disco	35
2.10	Razões no cálculo de distâncias hiperbólicas	35
2.11	Ângulo entre duas retas hiperbólicas	36
2.12	Retas s_1 e s_2 paralelas a r no ponto P e ângulo de paralelismo θ	37
2.13	Retas ultraparalelas	37
2.14	Retas hiperbólicas	38
2.15	Apoio para demonstração - regiões angulares	39

2.16	Apoio para demonstração - infinidade de paralelas	39
2.17	Apoio para demonstração: retas assintóticas	40
2.18	Apoio para demonstração: ângulo de paralelismo	40
2.19	Paralelismo em um sentido- apoio para demonstração	42
2.20	Paralelismo - apoio para demonstração	42
2.21	Paralelismo na Geometria Hiperbólica	43
2.22	Propriedade transitiva do paralelismo- apoio para demonstração	44
2.23	Triângulos Generalizados	45
2.24	Quadrilátero de Saccheri- apoio para demonstração	45
2.25	Quadrilátero de Lambert- apoio para demonstração	46
2.26	Ângulos e lados em um quadrilátero hiperbólico- apoio para demonstração . . .	47
2.27	Ângulos e lados em um quadrilátero hiperbólico- apoio para demonstração . . .	47
2.28	Quadrilátero hiperbólico- apoio para demonstração	48
2.29	Relações no quadrilátero de Lambert- apoio para demonstração	49
2.30	Hipercírculo - pontos equidistantes da linha base do feixe	49
2.31	Horocírculo	50
2.32	Soma dos ângulos do triângulo - apoio para demonstração	50
2.33	Soma dos ângulos do quadrilátero hiperbólico - apoio para demonstração . . .	51
2.34	Triângulos semelhantes são congruentes - apoio para demonstração	52
2.35	Perpendicular única à retas paralelas- apoio para demonstração	52
3.1	Retas e segmentos de retas hiperbólicas	57
3.2	Distâncias no Disco de Poincaré	58
3.3	Infinitas retas hiperbólicas passando por um ponto A	59
3.4	Reta hiperbólica passando por dois pontos dados	59
3.5	Ponto em comum de retas hiperbólicas	60
3.6	Construção de retas paralelas passando por um ponto externo A	61
3.7	Infinitas retas hiperbólicas passando por um ponto A	62
3.8	Ângulos opostos pelo vértice no plano euclidiano	63
3.9	Ângulos opostos pelo vértice no plano hiperbólico	64
3.10	Reta perpendicular a uma reta r dada por um ponto P	66
3.11	Construção geométrica de retas perpendiculares	66

3.12	Reta hiperbólica perpendicular passando por A	67
3.13	Retas paralelas interceptadas por uma transversal	68
3.14	Retas hiperbólicas paralelas interceptadas por uma transversal	68
3.15	Retas hiperbólicas paralelas interceptadas por uma transversal perpendicularmente	69
3.16	Ângulos correspondentes iguais nas retas hiperbólicas paralelas	69
3.17	Retas paralelas a uma terceira no plano euclidiano	70
3.18	Circunferências hiperbólicas com raio unitário	72
3.19	Triângulo equilátero hiperbólico	74
3.20	Triângulo isósceles hiperbólico	75
3.21	Triângulo retângulo hiperbólico	76
3.22	Soma dos ângulos internos do triângulo	77
3.23	Demonstração da soma dos ângulos internos do triângulo	78
3.24	Ângulo externo de um triângulo	80
3.25	Demonstração da propriedade de um ângulo externo ao triângulo	81
3.26	Baricentro de um triângulo	82
3.27	Incentro de um triângulo	83
3.28	Localização dos circuncentros nos triângulos	85
3.29	Reta de Simson	86
3.30	Localização dos ortocentros nos triângulos	87
3.31	Reta de Euler	88
3.32	Quadriláteros de Saccheri e Lambert	89
3.33	Sequência na construção da tesselação	92
3.34	Rotações na tesselação	92
3.35	Translações na tesselação	93
3.36	Tesselação no plano euclidiano	93
3.37	Construção do ângulo de 60° e da circunferência α	94
3.38	Construção do Disco de Poincaré α	95
3.39	Parte 1 da construção geométrica α	95
3.40	Tesselando o Disco de Poincaré	96
3.41	Tesselando o Disco de Poincaré	96
3.42	Tesselando o Disco de Poincaré	96
3.43	Tesselando o Disco de Poincaré	97

3.44 Tesselção no Disco de Poincaré	97
---	----

Sumário

Lista de Figuras	vi
Sumário	x
Resumo	xii
1 Aspectos Historiográficos das Geometrias Não-euclidianas	1
1.1 Surgimento das Geometrias	1
1.2 Os Elementos de Euclides	5
1.3 O enigmático Quinto Postulado	11
1.4 Tentativas de demonstração do Quinto Postulado	13
1.4.1 Girolamo Saccheri	13
1.4.2 Johann Heinrich Lambert	14
1.4.3 Adrien- Marie Legendre	16
1.5 Pioneiros das Geometrias não euclidianas	16
1.5.1 Carl Fridrich Gauss	16
1.5.2 Ferdinand Karl Schweikart	17
1.5.3 Franz Adolf Taurinus	17
1.5.4 Nicolas Ivanovich Lobachewsky	17
1.5.5 Janos Bolyai	18
1.6 O Surgimento de outras Geometrias	18
2 Geometria Hiperbólica	24
2.1 Modelos	27
2.2 Conceitos Preliminares	29
2.2.1 Circunferências Ortogonais	29
2.3 Geometria no Disco de Poincaré	34
2.4 Paralelismo no Plano Hiperbólico	36

3	Possibilidades Didáticas no Ensino das Geometrias	54
3.1	Explorando as noções básicas das Geometrias Euclidiana e Hiperbólica	56
3.1.1	Conceitos geométricos primitivos	56
3.1.2	Segmento de Reta e Reta	56
3.1.3	Retas hiperbólicas	58
3.1.4	Paralelismo	59
3.1.5	Construção de retas paralelas	60
3.1.6	Ângulos	62
3.1.7	Construção geométrica de retas perpendiculares	64
3.1.8	Ângulos formados por retas paralelas interceptadas por uma transversal	67
3.1.9	Paralelismo	70
3.1.10	Circunferências Hiperbólicas	71
3.2	Triângulos	73
3.2.1	Triângulo Equilátero	73
3.2.2	Triângulo Isósceles	73
3.2.3	Triângulo Retângulo	75
3.2.4	Soma dos ângulos internos do triângulo	76
3.2.5	Ângulos externos do triângulo	79
3.3	Pontos Notáveis do Triângulo	81
3.3.1	Quadriláteros	88
3.3.2	Tesselações nos Planos Euclidiano e Hiperbólico	89
	Referências Bibliográficas	100

Resumo

O presente tema aborda uma proposta metodológica para a inserção dos conceitos básicos da Geometria Hiperbólica no ensino das Geometrias não euclidianas na Educação Básica por meio da utilização de softwares de geometria dinâmica como instrumento na construção e apropriação de novos conceitos geométricos, em específico, do Geogebra. Apresenta-se um resgate histórico sobre o surgimento e desenvolvimento das Geometrias não euclidianas, mostrando a problematização que envolveu o quinto postulado de Euclides. Sob as considerações teóricas da Geometria Hiperbólica faz-se a proposta de ensino, que constitui-se de sequências didáticas que buscam explorar os conceitos e propriedades da Geometria Hiperbólica no “Disco de Poincaré”, comparando-a e confrontando-a com a Geometria Euclidiana.

Palavras-chave: Geometrias não euclidianas, geometria hiperbólica, geometria dinâmica

Introdução

Caracterizando-se como um objeto de uso sociocultural e um componente importante na construção da cidadania e avanço da humanidade, que se desenvolveu a partir da observação e do estudo da natureza e seus fenômenos, o conhecimento matemático possibilita a investigação, a representação e a comprovação de fenômenos por meio de uma linguagem particular, permitindo transformar e interpretar a realidade através de seus códigos e regras. Como componente curricular obrigatório do núcleo comum no Ensino Médio, conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio - DCNEM [19], a Matemática tem como objetivo proporcionar aos estudantes a apropriação da linguagem, a construção de conceitos, a relação com as demais áreas do conhecimento, no qual a aprendizagem matemática contribui na construção de competências tais como: capacidade de resolver situações-problema, de investigar, argumentar, entender fenômenos, expressar-se simbolicamente, tomar decisões e elaborar propostas.

Neste contexto, o estudo dos conceitos geométricos constitui-se essencial no currículo de Matemática na Educação Básica ao permitir o desenvolvimento de um tipo de pensamento que permite compreender, descrever e representar o mundo em que vive de forma organizada. Dentre os quatro tipos específicos de pensamentos ou raciocínios que a Matemática permite desenvolver configura-se a visão geométrica espacial, mais utilizado no aprendizado da geometria e suas aplicações, que diz respeito à habilidade de construir representações mentais a partir da interação com os objetos e com os movimentos no espaço físico [16].

Para Pais [36], o conhecimento geométrico constitui-se de três aspectos epistemológicos, a saber: o intuitivo, o experimental e o teórico. O objetivo do ensino da geometria é chegar ao seu aspecto teórico, entendido como conceito geométrico. Mas, nesse processo, a intuição e a experimentação desempenham papéis fundamentais, sendo que a intuição é uma forma de conhecimento imediato que está sempre disponível no espírito das pessoas e cuja explicitação não requer uma dedução racional guiada por sequência lógica de argumentos deduzidos uns dos outros. Dentre as justificativas apontadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais [12] para o

ensino de outras geometrias no currículo escolar está o desenvolvimento de habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica, utilização de propriedades geométricas na representação e visualização das partes do mundo que o cerca, tendo em vista que a Matemática não evolui de forma linear, mas sofre rupturas e mudança de paradigmas no seu processo de legitimação, superando a visão de uma única geometria para a aceitação de uma "pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico"[12]. Além disso, é necessário propiciar a compreensão da natureza da Matemática, em específico da Geometria, que a partir de verdades aceitas são deduzidas novas verdades.

Apesar de sua importância, a geometria não é um dos assuntos tratados com ênfase na Educação Básica, tendo em vista que a má formação dos profissionais da educação repercute em um ensino de geometria que se prioriza a aplicação de fórmulas e comprovação de propriedades em detrimento do desenvolvimento da argumentação dedutiva como parte do processo de construção desse conhecimento.

Diante desse contexto e com o objetivo de contribuir com novas perspectivas para o ensino de Matemática, em especial da Geometria, na Educação Básica, é que se propõe o presente estudo, que traz ao educador a proposta de ensino das geometrias não euclidianas, restringindo-se à Geometria Hiperbólica, que possam servir de apoio didático para o ensino da Geometria Hiperbólica em ambiente informatizado. O modelo escolhido a ser trabalhado é o plano de Poincaré conhecido como "Disco de Poincaré", pelo fato de poder ser construído e visualizado com softwares de geometria dinâmica, neste caso o Geogebra, um software livre que pode ser implantado nas escolas da rede pública de educação. Nas sequências de atividades propõe-se explorar as relações entre as geometrias hiperbólica e euclidiana por meio da manipulação dos entes geométricos no plano euclidiano e hiperbólico, do modo a desenvolver aspectos como: experimentações, intuição e inferência de resultados, construção de enunciados formais de resultados e justificativas formais.

O estudo estrutura-se da forma descrita a seguir. No primeiro capítulo traça-se um panorama histórico a fim de mostrar o desenvolvimento da geometria euclidiana e as discussões do quinto postulado de Euclides que deram origem às novas geometrias. No segundo capítulo descreve-se os aportes teóricos axiomáticos que dão suporte à Geometria Hiperbólica. No terceiro capítulo trata-se da proposta de ensino, no qual concebe-se uma sequência de atividades a serem exploradas num ambiente de geometria dinâmica os conceitos e propriedades básicas do mundo euclidiano e hiperbólico de forma comparativa. Espera-se que, através desse trabalho, ampliem-se

possibilidades de ensino das geometrias para os professores de matemática da Educação Básica, ao mesmo tempo em que se propiciem oportunidades para novas discussões metodológicas e a instrumentalização de processos educativos mais construtivos para todos os envolvidos.

Capítulo 1

Aspectos Historiográficos das Geometrias Não-euclidianas

1.1 Surgimento das Geometrias

O desenvolvimento de diversos conhecimentos empíricos de caráter geométrico dá-se com a ação humana na natureza ao longo dos tempos, em paralelo a diversas sociedades. Com a invenção da agricultura, um dos marcos históricos por volta de 9000 a.C, o homem revoluciona seu modo de viver fazendo-o a organizar-se socialmente no planejamento das terras e cultivo de frutos. No Antigo Egito, surgem as necessidades práticas de demarcação de terras com maior precisão de espaço devido às inundações do rio Nilo, daí ser esta uma das referências por muitos historiadores da origem da Geometria. A origem etimológica do termo *Geometria* vem do grego: medida da terra. Os arquitetos e construtores primitivos construía conceitos matemáticos ao resolverem problemas de maneira prática sem se preocupar com formalidades, sendo assim que a Matemática começou, por experimentação, indução e raciocínios [23].

A tomada de consciência progressiva da dimensão do espaço enquanto fator econômico não foi o único incentivo ao estudo da Geometria, conforme expõe Bivar [9]. A observação dos fenômenos periódicos naturais, as fases da Lua, o ciclo anual do Sol com a sucessão de estações, o caráter cíclico das variações climáticas, a sucessão de dias e noites, o ciclo anual do Sol que regula as estações do ano, a variação da posição do Sol, a estruturação dos calendários, a construção de templos e locais sagrados, permitiram ao homem desenvolver medidas de tempo, observar regularidades e fazer previsões acerca dos movimentos observados. Assim, pode-se dizer que “a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia.” [22, p.57]

Reconhecida como um corpo de conhecimentos social e politicamente construídos ao longo da história, a Geometria enquanto área da Matemática desenvolve-se primeiramente intuitivamente a partir da ação humana na natureza e nas sociedades. Embora sua origem tenha sido creditada aos egípcios, pelo historiador grego Herótodo - pai da História (séc. V a.C), outras civilizações (sumérios, babilônicos, hindus e chineses) já utilizavam os conhecimentos geométricos vinculados com os problemas práticos. De acordo com Garbi [23], os documentos históricos egípcios que chegaram até nós datam de aproximadamente 2220 a.C, já os tabletas sumérios datam em cerca de 3.500 a.C, no qual já utilizavam registros numéricos. As descobertas feitas no Oriente Antigo, segundo Eves [22], pouco se têm conhecimento, principalmente porque os primitivos chineses e indianos usavam como material de escrita materiais perecíveis, como casca de árvore e bambu, ao contrário dos babilônicos e egípcios, que registravam em tábulas de argila cozida, em pedras e, papiros.

As escolas sumérias acumularam e propagaram conhecimentos matemáticos com a invenção da escrita, que deixaram como herança aos babilônios após suas terras serem conquistadas por outros povos. Familiarizados com problemas de mensuração prática, infere-se que os babilônios (2000-1600 a.C) tinham conhecimento de regras para o cálculo da área de algumas figuras planas (retângulo, triângulos retângulo e isósceles, trapézio retângulo), do volume de um paralelepípedo, e do comprimento aproximado de uma circunferência. Consideravam o comprimento da circunferência como aproximadamente o triplo de seu diâmetro, no qual usavam o valor $3\frac{1}{8}$ como estimativa para π . Dentre os conhecimentos deixados pelos babilônios registrados em tabletas, também estão as “trincas pitagóricas”, registrados no *Plimpton 322*, produzido entre 1900 a.C e 1600 a.C. A divisão da circunferência em 360 partes iguais também deve-se aos babilônios, que tiveram como marca principal na construção de conhecimentos geométricos o caráter algébrico [22].

Os egípcios (1800 a.C), de acordo com o *papiro de Rhind* (1950 a.C), tiveram a aproximação para o valor de $\pi \cong 3,1604$. No papiro de Ahmes, ensina-se como calcular a área do círculo com uma boa aproximação por meio da área de polígonos. Nem sempre os egípcios obtinham êxito em suas conclusões. Por outro lado, eles pensaram que uma fórmula para a área de retângulos poderia ser aplicada para qualquer quadrilátero. Segundo Garbi [23], o *Papiro de Moscou* foi um dos mais importantes documentos matemáticos deixados pelos egípcios, escrito por volta de 1850 a.C, no qual são apresentados e resolvidos problemas de Álgebra e Geometria. Neste documento destacou-se um efeito notável que foi a “fórmula” (receita verbal) correta para o

volume do tronco de uma pirâmide quadrada [22].

Há registros de conhecimentos matemáticos desenvolvidos na China por meio de observações e deduções por volta de 1200 a.C, como o mais antigo quadrado mágico. No livro Suan-Ching encontra-se uma demonstração para o que hoje chama-se de teorema de Pitágoras, por volta do século XII a.C. [23].

Os babilônios também eram muito avançados em aritmética e álgebra, assim como os egípcios, tendo como marca principal o caráter algébrico na Geometria. Dentre os conhecimentos matemáticos que eles dominavam, Eves [22] cita: a utilização de regras para obtenção das áreas de figuras planas e volume de sólidos geométricos, o teorema de Pitágoras, a divisão da circunferência em 360 partes iguais, a utilização de medidas para grandes distâncias como a milha babilônica, dentre outros.

As contribuições dos feitos egípcios, da engenhosidade dos babilônios e outras civilizações, forneceram aos gregos um arcabouço de conhecimentos concretos que foram sendo estudados e aperfeiçoados no decorrer dos anos. Deduzir casos conhecidos e aplicar conhecimentos herdadas de outros povos foi o embrião da matemática grega, conforme argumenta Montoito [30]. Para os gregos, começando com o comerciante Tales de Mileto (658- 548 a.C), as declarações geométricas estabelecidas pelo raciocínio dedutivo eram melhores que as de tentativa e erro. Tales estava familiarizado com os cálculos transmitidos pelos egípcios e babilônios. Famoso por ter previsto o eclipse do Sol em 585 a.C, desenvolveu a primeira geometria lógica demonstrativa, fazendo nascer uma esfera de racionalismo, conforme narra Eves [22]. Em sua visita ao Egito, Tales buscou explicações teóricas e calculou a altura das pirâmides por meio da semelhança de triângulos. O desenvolvimento harmonioso de teoremas e provas era característica da matemática grega, indo além do seu caráter prático. Para Platão, a “matemática era concebida como um conhecimento importante não pelo seu valor prático, mas por sua capacidade de despertar o pensamento do Homem.” [34, p.18]

A sistematização iniciada por Tales foi continuada ao longo dos próximos dois séculos por Pitágoras (580-500 a.C) e seus discípulos. Pitágoras, considerado por seus contemporâneos como um profeta religioso, pregou a imortalidade da alma e da reencarnação, organizando uma irmandade de crentes que tinha seus próprios ritos, seguindo uma dieta vegetariana. Os pitagóricos diferenciavam-se de outras seitas religiosas por acreditarem que a elevação da alma e a união com Deus eram alcançadas pelo estudo da música e da matemática. Na música, Pitágoras calculou as proporções corretas dos intervalos harmônicos. Na matemática, ele ensinou as

propriedades misteriosas e maravilhosas dos números.

Dessa forma, a escola pitagórica formada por aristocratas foi responsável pelo “estabelecimento da matemática como uma disciplina racional” [11, p.64]. Acredita-se que os pitagóricos foram os primeiros a produzirem demonstrações razoavelmente rigorosas. O famoso “Teorema de Pitágoras” não foi descoberto por Pitágoras, mas sim foi demonstrado por ele, tendo em vista que já havia registro da utilização do teorema pelos babilônios [22]. Os pitagóricos ficaram muito chocados quando descobriram comprimentos irracionais, como a $\sqrt{2}$. No Livro VII dos Elementos de Euclides, fala-se sobre a teoria dos números ensinada na escola pitagórica. Uma vez que os pitagóricos não consideraram $\sqrt{2}$ um número, eles transformaram a álgebra na forma geométrica, a fim de representar $\sqrt{2}$ e outros comprimentos irracionais por segmentos ($\sqrt{2}$ por uma diagonal do quadrado de lado unitário). Dentre as notáveis descobertas dos pitagóricos pode-se também citar o estudo científico das escalas musicais, no qual relacionava intervalos musicais com razões numéricas [22]. Os pitagóricos nunca foram capazes de desenvolver uma teoria das proporções que também era válido para comprimentos irracionais. Posteriormente foi alcançado por Eudoxus, cuja teoria foi incorporada no Livro V dos Elementos de Euclides. Garbi [23] destaca a concepção pitagórica da Matemática como abstrata e ideal, porém percebida no mundo físico.

No século IV a.C, viu-se o surgimento da academia de Platão, um centro de estudos de filosofia, matemática, e ciências naturais (fundada cerca de 387 a.C). Dessa academia provieram pesquisadores e discípulos, como Eudoxo de Cnido (408-355 a.C), célebre matemático e astrônomo. Para Platão, o universo de ideias é mais importante do que o mundo material dos sentidos, sendo este último apenas uma sombra do primeiro. A crença de que o estudo da matemática desenvolve o raciocínio lógico vem de Platão, no qual “a matemática trataria apenas de objetos do mundo das ideias, e o trabalho do matemático seria o de “descobrir” as relações já existentes entre os objetos do mundo ideal” [37]. Enquanto à Pitágoras fora atribuído por tornar a matemática uma disciplina liberal, à Platão por tê-la tornada parte do currículo para a educação de homens do estado [11]. Além do mais, Platão “frisou que o raciocínio usado na geometria não se refere às figuras visíveis desenhadas, mas às ideias absolutas que elas representam” [11, p.79]. Platão foi citado repetidamente pela prova da irracionalidade do comprimento da diagonal de um quadrado unitário como uma ilustração do método de demonstração indireta (redução ao absurdo). A questão é que essa irracionalidade de comprimento nunca poderia ter sido descoberta por medições físicas, que incluem sempre um pequeno erro de margem experimental. Na visão

de Bicudo [8], o filósofo Platão contribuiu para o desenvolvimento da Geometria, sendo que suas contribuições estão mais na melhora do método, ao transformar a lógica intuitiva distinguindo as definições de postulados e axiomas.

Um dos primeiros sistemas axiomáticos para a Geometria foi desenvolvido por volta de 430 a.C, por Hipócrates de Chios, que viveu em Atenas como mercador e dedicando-se ao estudo e ensino de geometria. Da sua obra restou apenas um fragmento que descreve sobre a quadratura de lunas, figuras geométricas planas limitadas por dois arcos circulares, que fora copiado por Simplicio (por volta de 520 a.C) da obra *History of mathematics*, de Eudemo. Para Boyer e Merzbach [11], sua obra indica a habilidade que os matemáticos atenienses de sua época tinham em transformar áreas em proporções. Outras tentativas de compilar o conhecimento científico da época deu-se por Leon, que continha uma quantidade maior de proposições do que a obra de Hipócrates, e por Teúdio da Magnésia, na primeira metade do século IV. Esses autores foram os precursores do trabalho *Elementos*, título comumente dado aos tratados gregos de matemática [30].

1.2 Os Elementos de Euclides

Neste ambiente filosófico de distinção entre a idealidade e a realidade aparece na Antiguidade, na fase alexandrina da cultura grega, Euclides, um jovem que provavelmente foi discípulo de Platão. Oriundo de Atenas, Euclides foi convidado para liderar o departamento de matemática na grande “biblioteca de Alexandria” [1]. Tratava-se de uma instituição cujos objetivos assemelham-se aos das universidades atuais, criada por Ptolomeu (306 a.C) quando começou a governar o Egito. Neste cenário, oportunizou-se os debates e exposições dos gregos que começaram a ser registrados em textos escritos. [22]

Cerca de 300 a.C, Euclides sistematizou o tratamento definitivo da geometria grega e da teoria dos números na obra *Os Elementos*, tendo como objetivo organizar a transmissão e a conservação dos conhecimentos adquiridos [30]. A obra é constituída por 13 volumes, por meio de conceitos primitivos e intuitivos (o ponto, a reta, o plano) e hipóteses básicas (verdades básicas ou postulados), como o fundamental *Postulado das Paralelas*. O livro contém 465 proposições, além de definições, postulados e axiomas distribuídos nos 13 livros que dão lógica ao conhecimento da matemática grega. As versões que restaram da obra de Euclides derivam de manuscritos, revisões, reconstituições ou comentários feitas por Theon da Alexandria no séc.

IV d.C, por François Peyrard encontradas no Vaticano no começo do séc. XIX, e por Proclo no séc. IV [42]. Foram impressas mais de mil edições dos *Elementos* desde a primeira impressão. Em 1428, feita do latim por Campanus, de Veneza. Em 1572, tem-se uma tradução latina feita a partir do grego por Commandino, derivando daí outras edições inglesas, no qual teve como precursora a tradução feita por Billingsley em 1570. A primeira tradução para o português deu-se por Irineu Bicudo, em 2009, lançada pela editora Unesp. O autor introduz a tradução dizendo: “Se com Homero a língua grega alcançou perfeição, atinge com Euclides a precisão”.

A obra-prima de Euclides foi construída sobre as experiências e os resultados de seus antecessores em séculos anteriores: sobre os pitagóricos (livros de I à IV, VII, e IX), Archytas (Livro VIII), Eudoxus (Livros V, VI e XII) e Theaetetus (Livros X e XIII). Alguns traços do esforço de Euclides de apresentar a geometria permaneceram, sendo ele um dos autores mais lidos na humanidade. Mais do que compilar conhecimentos matemáticos, Euclides foi responsável por deixar registrado uma nova forma de pensar matemática, “tal foi o êxito dos seus *Elementos* no resumir, corrigir, dar base sólida e ampliar os resultados até então conhecidos que apagou quase que completamente, os rastros dos que o procederam” [8, p.83]. Sua abordagem de geometria tem dominado o ensino da Matemática há mais de dois mil anos ao estabelecer um padrão lógico-expositivo como um edifício que se apoia em bases muito rígidas garantindo sua solidez [23]. Além disso, o método axiomático utilizado por Euclides é o protótipo para toda matemática que hoje chamamos de “matemática pura”. É pura, no sentido de que não há experimentos físicos que precisam ser realizados para verificar se as declarações são válidas. Acredita-se que sua obra representa a “culminação dos esforços de organização e rigorização desta ciência [sugerindo-se] que a obra possa ter sido escrita com vistas a dar à matemática a organização requerida pelo então novo ideal de ciência” [42]. Desta forma, serviu como modelo de raciocinar e demonstrar resultados e verdades matemáticas aceitas para os matemáticos de todas as épocas [29].

Os Elementos de Euclides não incluem aplicações práticas. Naturalmente, a geometria de Euclides teve um número enorme de aplicações para os problemas práticos de engenharia, mas não são mencionados nos Elementos. A obra admirada pelos matemáticos e filósofos de todos os países e de todos os tempos, pela pureza do estilo geométrico e pela concisão luminosa da forma, tornou-se modelo lógico para todas as ciências físicas pelo rigor das demonstrações e pela maneira como são postas as bases da Geometria em conceitos fundamentais, apresentados sob o nome de definições, axiomas e postulados. Nesta mesma obra aparece, sob forma geométrica, a origem da Álgebra, com a resolução das equações do segundo grau. É bem sabido

que os antigos matemáticos gregos, tendo a noção de grandeza incomensurável, mas não tendo a noção correspondente de número irracional, constituíram a Matemática sob forma geométrica, considerando em vez de números, segmentos de reta, para assim abrangerem nas suas teorias as grandezas comensuráveis, e portanto os números racionais e as grandezas incomensuráveis [40].

De maneira original ou não, o mérito dos Elementos está em apresentar a geometria de uma maneira sistemática, dedutiva e com base em um número reduzido de princípios explicitamente admitidos de antemão. Os temas distribuídos em cada livro, de acordo com a descrição de Vaz [42] em sua tese de doutorado, são: geometria retilínea plana cuja figura central é o triângulo (livro I), aplicação de áreas com álgebra contendo também generalizações do teorema de Pitágoras (livro II), círculo e suas propriedades (livro III), problemas de inscrição e circunscrição de figuras no círculo (livro IV), introdução da teoria das proporções (livro V), aplicações na geometria (livro VI), teoria dos números (livros VII,VIII,IX), grandezas incomensuráveis ou irracionais (livro X), geometria espacial, inscrição dos cinco sólidos platônicos em esferas. (livros XI, XII, XIII). Desta forma, Euclides deu, ao conteúdo diversificado, a genialidade de organização e uniformidade [42].

Sobre as histórias contadas por Euclides, Alves e Filho [1] relatam que quando Euclides foi questionado se havia conhecimento mais curto para a geometria, ele teria respondido que “não há estradas reais na Geometria”. Outra atitude de Euclides ao ser indagado por um aluno sobre a utilidade da disciplina foi mandar dar-lhe uma moeda para que tivesse algum ganho com o que estava aprendendo, o que serve como aplicação persistente entre muitos matemáticos: estuda-se matemática para seu próprio bem, pela sua beleza intrínseca e elegância. Surpreendentemente, a matemática pura, muitas vezes acaba por ter aplicações jamais sonhadas por seus criadores. Além disso, as partes da matemática que não tenham sido “aplicadas” também são importantes para a sociedade, seja como a estética funciona comparável a música e a arte ou, como contribuições para a expansão das capacidades humanas.

Euclides começa seu livro apresentando 23 definições, que segundo Vaz [42] introduz uma espécie de vocabulário básico. Tem-se algumas das definições abaixo traduzidas por [8]:

1. Ponto é aquilo que de nada é parte.
2. Linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.

4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
6. E extremidade de uma superfície são retas.
7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.
8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.
10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou.
15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha, em relação à qual todas as retas que a encontram, a partir de um ponto dos pontos no interior da figura, são iguais entre si.
16. E o ponto é chamado centro do círculo.
17. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Em seguida, Euclides introduziu os postulados e os axiomas. Atualmente não se faz distinção entre os termos, porém para os gregos havia. Um dos significados para diferenciá-los pelos gregos é descrito por Alves e Filho [1], no qual entende-se que axioma é uma suposição óbvia e aceitável enquanto postulado é uma suposição peculiar da ciência em estudo que não é necessariamente óbvia e aceitável. De maneira geral, “os conceitos não definidos são chamados de *conceitos ou termos derivados*. As proposições admitidas sem demonstração são ditas *axiomas*, e as demais, demonstradas, *teoremas*” [8, p.82]. Com conceitos primitivos, conceitos derivados, axiomas e teoremas compõe-se essa arquitetura matemática legada dos gregos e civilizações anteriores, que faz com que um matemático debruce-se em definir e demonstrar.

As noções comuns dos *Elementos* dizem:

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais as coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais serem subtraídas iguais, as restantes são iguais.

4. E, caso de iguais serem adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E, os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E, as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo é maior do que a parte.
9. E duas retas não contém uma área.

Santaló [39] destaca que a sétima noção trata-se da congruência de figuras, trazendo a ideia implícita do movimento de sobreposição que se deve fazer de uma figura sobre a outra para verificar a igualdade. Uma quantidade mínima, porém suficiente para construir a geometria, consistem *Os postulados de Euclides*, que dizem:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Apesar de Euclides não mencionar o uso da régua e compasso, Eves [22] comenta que as primeiras proposições do Livro I são problemas de construção geométrica, como por exemplo realizar a transferência de uma reta em determinada posição a outra posição. Após realizar as definições, Euclides organizou os resultados obtidos de forma coerente, generalizando resultados por meio das demonstrações, que consiste em mostrar que um teorema é consequência lógica de postulados ou axiomas que são tomados como verdades.

As demonstrações apresentadas nos Elementos estavam por meio de prosa, dividindo-se em enunciado do problema, exposição da figura a ser tratada, especificação da propriedade a ser demonstrada, construções necessárias por meio dos postulados, prova e conclusão, não havendo

diferenciação entre uma inferência e uma proposição condicional [42]. Um axioma deveria ser tão simples e intuitivamente óbvio que ninguém poderia duvidar de sua validade. Para que um axioma seja considerado bom, Alves e Filho [1] descrevem as seguintes propriedades: completude, consistência, independência, categórico. A independência significa que nenhum dos axiomas é uma consequência dos outros, sendo um dos fatores que levaram ao questionamento plausível do quinto postulado de Euclides, no qual vários matemáticos começam a acreditar que o quinto postulado poderia ser deduzido dos quatro primeiros ou ser substituído por outro. Por dois mil anos os matemáticos tentaram fazê-lo derivar os outros quatro postulados ou substituí-lo por outro postulado mais evidente. Os postulados substitutos, alegadamente mais evidentes, acabaram por ser logicamente equivalente ao postulado das paralelas, de modo que nada foi adquirido pela substituição.

Os *Elementos* tornaram-se referência nos estudos de matemática na Europa na Idade Média, com os jesuítas a partir do século XV, permanecendo com as mudanças na Física, na mecânica de Galileu, com a gravitação de Newton e com as transformações nas diversas ciências como a Biologia, a Química, a Fisiologia, dentre outras. Com Descartes, a geometria euclidiana serviu como exemplo para validar seu método científico, haja vista que seu método pautava-se nas regras: “não aceitar como verdadeiro nada que não tivesse antes passado pelo crivo da razão; dividir tudo o que parecesse complexo em tantas quantas fossem as partes mais simples possíveis; (...) e depois de feita essa decomposição, ela deveria ser ordenada” [29, p.108].

Descartes escreve que quando imagina um triângulo, apesar de não conseguir visualizá-lo em nenhum lugar do mundo fora dos seus pensamentos, não deixa, entretanto, de acreditar em uma certa natureza ou forma, ou essência determinada por triângulo, pelo fato de que se pode demonstrar diversas propriedades desses triângulos, tais como, que a soma dos três ângulos é igual a 180 graus. Observa-se assim, sua visão euclidiana de mundo ao traçar uma analogia entre os conhecimentos matemáticos e a prova da existência de Deus [30].

Ao fazer um percurso pelo pensamento grego, pelo racionalismo de Descartes, pelo Empirismo de Hume e pelo Criticismo de Kant, Montoito e Garnica [29] argumentam que a geometria euclidiana para esses filósofos foi necessária para a compreensão de mundo, servindo como parâmetro para se atingir a verdade.

1.3 O enigmático Quinto Postulado

Os méritos de Euclides foram alvos de diversos tipos de críticas devido às insatisfações com relação aos conceitos, a escolha dos princípios, aos métodos de demonstração, dentre outros. A descoberta das geometrias não euclidianas foi consequência positiva das críticas que levaram a expansão da geometria euclidiana. As primeiras críticas, de acordo com Vaz [42], são encontradas nos comentários escritos pelos matemáticos Heron, Porfírio, Pappus, Simplicio, Proclus (410-485), Apolônio, Theon de Alexandria. Essas críticas referiam-se principalmente as definições de Euclides, que muitas vezes estavam equivocadas e, assim novas alternativas eram apresentadas. Destaca-se a definição de retas paralelas, tendo em vista que na definição de Euclides não mencionava a característica de equidistância. Theon de Alexandria foi “o primeiro a reeditar o texto euclidiano, alterou muito do seu conteúdo com vistas a torná-lo mais claro”[42, p.81] devido aos desacordos quanto às formulações de alguns princípios e demonstrações. Ao longo do séc. XX, a apresentação axiomática euclidiana passou por outras reconstruções, com Pash e Hilbert ganhou um caráter mais abstrato, no qual as primeiras definições estabelecidas por Euclides são vistas como inúteis e são tomadas como noções primitivas. As definições de ponto, e reta são consideradas apenas explanações informais de significados, tendo em vista que são consideradas ideias primitivas. Os postulados são enunciados nas novas versões com afirmações de existência e unicidade.

Nenhuma das definições ou postulados gerou tanta polêmica quanto o *Quinto Postulado*. Observa-se ao sondar o livro I dos *Elementos*, que o quinto postulado não foi utilizado na prova de qualquer uma das 26 primeiras proposições do livro I, sendo que continuam sendo válidas na exclusão ou troca do quinto postulado [5]. As versões que foram apresentadas diferentes da formulação de Euclides geraram mais polêmicas. Quanto a isso, Vaz [42] diz que a versão mais justa e mais conhecida foi apresentada por Jonh Playfair: “Por um ponto externo a uma reta passa apenas uma paralela”. De acordo com os estudiosos modernos, essa versão muda o caráter do postulado, introduz a paralela como única, criando uma geometria de caráter mais teórico sem necessitar de diagramas. Outras versões alternativas para o postulado das paralelas que foram lançadas, sendo chamadas de substitutos, de acordo com Eves [21] foram:

- 1) Há pelo menos um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a um ângulo raso.
- 2) Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.

- 3) Existe um par de retas igualmente distantes uma da outra em todos os pontos.
- 4) Por três pontos não colineares pode-se traçar uma circunferência.
- 5) Por qualquer ponto no interior de um ângulo menor que 60° pode-se sempre traçar uma reta que intercepta ambos os lados do ângulo.

Para verificar se uma proposição P é um substituto do quinto postulado, Barbosa [5] sugere:

1º) *É preciso saber se P é uma proposição da Geometria Euclidiana;*

2º) *Demonstrar que, na teoria desenvolvida os quatro primeiros postulados e mais P , pode-se provar o quinto postulado de Euclides como uma proposição.*

Desde a formulação por Euclides do *Postulado das Paralelas*, dentre os comentadores e críticos que tentaram demonstrá-lo a partir dos axiomas anteriores estão: Ptolomeu (87-165), Proclus (410-485 a.C), Nasiradin (1201-1274), John Wallis (1616-1703), Gerolamo Saccheri (1667-1733), John H.Lambert (1728-1777), Adrien M. Legendre (1752- 1733), Louis Bertrand (1731-1812) e Carl F. Gauss (1777-1855).

Ptolomeu escreveu um livro apresentando uma prova para o quinto postulado, assumindo que o paralelismo acarreta a congruência de figuras, conforme narrou Proclus. Proclus (410-485) foi um historiador, filósofo e matemático que deixou relatos sobre a Geometria grega, no qual encontra-se os relatos das tentativas de prova do quinto postulado [4]. Proclus também propôs uma demonstração para o quinto postulado, tentando provar que se uma reta intersecta outra reta pertencente a um par de paralelas, necessariamente intersecta a outra, assumindo que a distância entre duas paralelas pode variar. Nenhum deles obteve êxito nesta tentativa. Alves [1] salienta que as primeiras notas críticas que chegaram a Europa relativa ao quinto postulado de Euclides apareceram nos séculos XVI e XVII, com a tradução dos comentários de Proclus. Inumeráveis tentativas foram feitas para provar o quinto postulado por meio da redefinição de retas paralelas, conforme expõe Barbosa [4]. Os matemáticos europeus que fizeram críticas em seus trabalhos ao quinto postulado assumindo a ideia de retas paralelas com a ideia de equidistantes foram: Federico Comandico(1509-1575, Itália), Chistopher S. Clavio(1537-1612, Alemanha). Pietro A. Cataldi (1548-1626, Itália), G. A. Boreli (1608-1679, Itália), Giordano Vitale (1633- 1711, Itália).

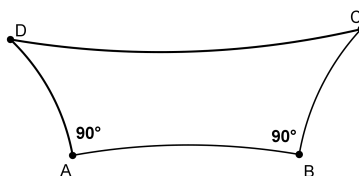
1.4 Tentativas de demonstração do Quinto Postulado

1.4.1 Girolamo Saccheri

Jesuíta italiano que ensinava retórica, filosofia e teologia na universidade de Milão, Girolamo Saccheri (1667-1733) tentou obter uma contradição, substituindo o quinto postulado por um enunciado equivalente a sua negação, com o método de redução ao absurdo [22]. Em seu livro “Euclides de toda imperfeição” (*Euclides ab omni naevo vindicatus*) publicado no ano da sua morte, em 1733, Saccheri utiliza as primeiras 28 proposições de Euclides, que não dependiam do 5º postulado, para estudar um quadrilátero $ABCD$ (figura 1.1) e demonstrar o postulado das paralelas. No quadrilátero $ABCD$, os ângulos A e B são retos, os lados AD e BC são congruentes.

Ao traçar as diagonais do quadrilátero e utilizar teoremas de congruência, provou que os ângulos dos vértices do topo C e D eram congruentes e daí ele contemplou três hipóteses para os ângulos dos vértices do “topo” C e D : os ângulos seriam agudos, obtusos, ou retos. Eliminou a hipótese dos ângulos serem obtusos e agudos, provando muitos resultados que vieram a se tornar teoremas clássicos das Geometrias não euclidianas.

Figura 1.1: Quadrilátero de Saccheri



Fonte: a autora

Segundo Boyer e Merzbach [11], ele permitiu que seu preconceito interferisse em sua lógica por estar convencido que a Geometria Euclidiana era a única válida. Alves e Filho [1] destacam as seguintes conclusões de Saccheri:

- Se uma hipótese é verdadeira para um quadrilátero de Saccheri então ela é verdadeira para todos os quadriláteros.

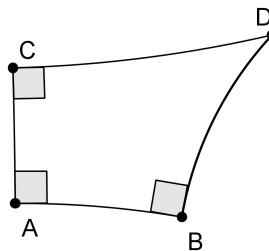
- Nas hipóteses consideradas, a soma das medidas dos ângulos é menor, maior ou igual a 180° .
- Duas retas coplanares ou têm uma perpendicular comum, ou se encontram em um ponto, ou são assintóticas.

Apesar da importância do trabalho de Saccheri, seus contemporâneos não o reconheceram como tal, sendo lembrado apenas por Eugênio Beltrami em 1889 [22].

1.4.2 Johann Heinrich Lambert

Johann H. Lambert (1728-1777), um suíço alemão, seguiu o mesmo caminho de demonstração de Saccheri, após 33 anos da publicação de Saccheri, todavia não caiu no mesmo erro de pensar que teria provado o postulado. Ao prosseguir o que Saccheri estava tentando demonstrar, Lambert adota um quadrilátero com três ângulos retos (metade de um quadrilátero de Saccheri), e considera as hipóteses para o quarto ângulo: ser agudo, reto ou obtuso. Dessa forma, mostrou que a soma dos ângulos de um triângulo seria “menor que”, “igual a” ou “maior que” 180° (figura 1.2). Também demonstrou que, o quanto a soma excede ou é menor que 180° é proporcional à área do triângulo [22].

Figura 1.2: Quadrilátero de Lambert

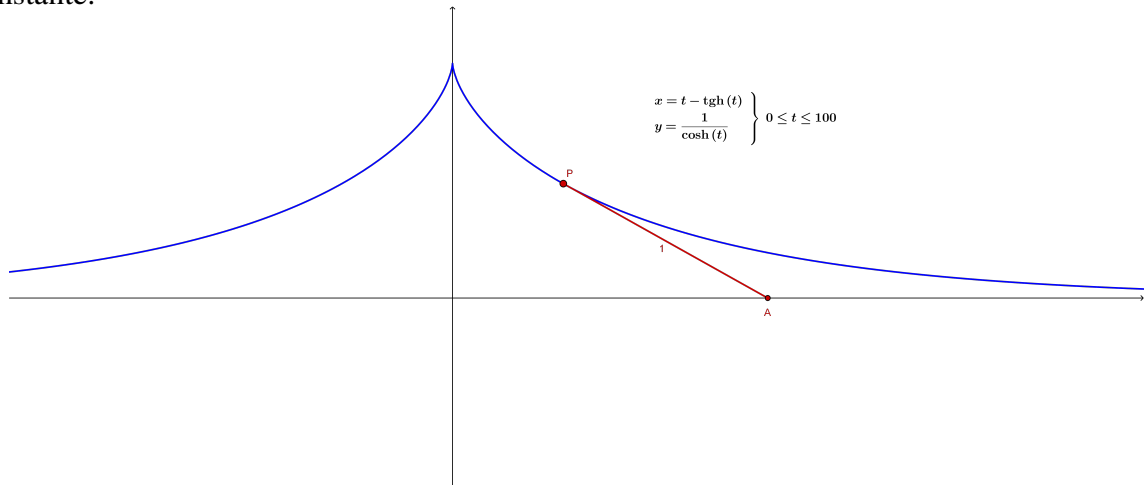


Fonte: a autora

Lambert inferiu que, sobre uma superfície esférica a soma dos ângulos de um triângulo é maior que 180° e, seria possível encontrar uma superfície em que a soma fosse menor que 180° , sem no entanto determiná-la. Sua hipótese, sobre a existência de uma superfície esférica com raio imaginário para o ângulo agudo, foi confirmada em 1868, por Eugênio Beltrami, porém uma superfície de curvatura negativa gerada pela rotação de uma tractriz ¹ sobre seu eixo [11].

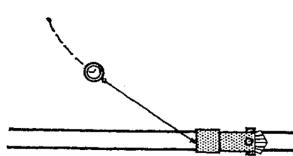
¹O estudo da tractriz, inicia-se com o questionamento de Claude Perrault à Leibniz sobre a curva que o seu

Figura 1.3: Tractriz é a curva que uma partícula descreve num plano horizontal, ao ser arrastada por uma outra partícula que se move em linha reta, sendo a distância entre as duas sempre constante.

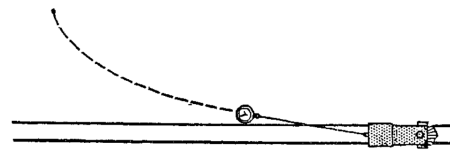


Fonte: figura construída no software Geogebra

Figura 1.4: Maneira de representar uma tractriz



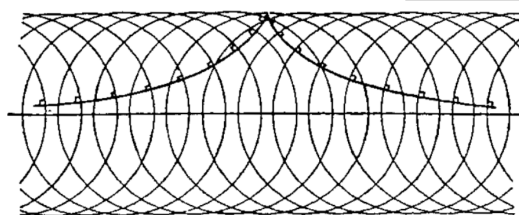
(a) a locomotiva L está ligada ao relógio W



(b) Quando a locomotiva começa a puxar, o caminho feito pelo relógio é uma tractriz

Fonte: Kasner, E.; Newnan J. [32]

Figura 1.5: A tractriz é, também, uma curva que é perpendicular a uma família de círculos iguais, com seus centros sobre uma linha.



Fonte: Kasner, E.; Newnan J. [32]

relógio de bolso, preso por uma corrente, descrevia quando o “bolso” se deslocava em linha reta. Ao ser estudada por Isaac Newton demonstrou-se que o comprimento dos segmentos da tangente à curva delimitada pelos pontos de tangência e pelo eixo das abscissas era constante, sendo designada por curva equitangencial. A expressão “tractriz” foi designada por Christien Huygens (1692), que do latim “trahere” designa puxar, arrastar. [38]. Assim, tractriz é definida como a trajetória de um objeto, começando com um deslocamento horizontal, quando é arrastado por

Além de suas preocupações em provar o postulado de Euclides, Lambert escreveu sobre geometria descritiva, cartografia, lógica, filosofia, e cosmografia, destacando-se por diversas contribuições na construção do conhecimento da Matemática, como por exemplo, ter apresentado uma das primeiras demonstrações de que π é irracional.

1.4.3 Adrien- Marie Legendre

Legendre (1752-1833) caiu no mesmo erro dos matemáticos anteriores ao tentar realizar a demonstração do postulado, no entanto, destacou-se pela elegância nas provas e pela publicação de um livro didático e acessível, *Éléments de Géométrie*. Como hipótese, considerou que a soma dos ângulos internos de um triângulo poderia ser menor que, igual ou maior que 180° . Dessa forma, “assumindo tacitamente a infinitude da reta, foi capaz de eliminar a terceira hipótese, mas, apesar de várias tentativas, não conseguiu descartar-se da primeira”. [22, p.541]

1.5 Pioneiros das Geometrias não euclidianas

No século XIX, outros matemáticos dedicaram-se a resolver o enigma do “Postulado das Paralelas”, dentre estes menciona-se Gauss, Lagrange, D’Alembert, Wachter, Schweikart, Far- kas Bolyai e seu filho Janos Bolyai, até que conclusões como a proposta em Eves [22] fossem elaboradas:

a geometria desenvolvida a partir de uma coleção de axiomas compreendendo um conjunto básico acrescido da hipótese do ângulo agudo é tão consistente quanto a geometria euclidiana desenvolvida a partir do mesmo conjunto básico acrescido da “hipótese do ângulo reto”, isto é, o postulado das paralelas é independente dos demais postulados e devido a isso não pode ser deduzido dos demais. [22, p.541]

Na busca de comprovar este fato, neste momento da história, a contribuição dos vários matemáticos que se empenharam em procurar contradições na hipótese do ângulo agudo foram importantes para o surgimento de outras *Geometrias*.

1.5.1 Carl Fridrich Gauss

Assim como seus antecessores, Gauss esforçou-se para demonstrar o “Quinto Postulado” a partir dos quatro primeiros. Ao convencer-se que tal demonstração não era possível, abandonou a tentativa e começou a extrair consequências da negação do postulado. De acordo com

Bonola[10] os documentos que comprovam seus trabalhos na investigação do “Postulado das Paralelas” são as cartas enviadas a W. Bolay, Olbers, Schumacher, Gerling, Taurinus e Bessel, e suas notas pessoais, não havendo publicações. Desta forma, Gauss foi um dos primeiros a visualizar uma Geometria independente do “Quinto Postulado” e a desenvolver uma série de resultados da Geometria Hiperbólica, reconhecendo assim uma geometria diferente da euclidiana, nas quais usou os termos : *Anti-Euclidean*, *Astral Geometry*, e *Non-Euclidean*, registrados em cartas enviadas a Wachter, Schweikart, Schumacher (1831) e F. A. Taurinus (1824).

1.5.2 Ferdinand Karl Schweikart

Schweikart (1780-1859) desenvolveu uma geometria independente, em 1818, registrada em um memorando enviado a Gauss sobre suas descobertas, no qual fala que havia dois tipos de geometria, a *Strict Sense (euclidiana)* e a *Astral Geometry*. Gauss respondeu-o, parabenizando-o pela “*Altral Geometry*”, e acrescentou resultados para a área de triângulos. Infelizmente, as investigações de Schweikart também não foram publicadas [10].

1.5.3 Franz Adolf Taurinus

Influenciado por seu tio Schweikart e por Gauss, Taurinus (1794-1874) retoma suas investigações sobre o “Quinto Postulado” após também fracassar na tentativa de prová-lo, em 1824. Em 1825, Taurinus publica *Theorie der Parallellinien*, um tratado sobre a geometria não-euclidiana, semelhante aos trabalhos de Saccheri e Lambert, no qual assume a “hipótese do ângulo agudo”. No ano seguinte, publicou “*Geometriae Prima Elementa*”, desenvolvendo fórmulas e teoremas de trigonometria na geometria esférica.

1.5.4 Nicolas Ivanovich Lobachevsky

Nicolas Ivanovich Lobachevsky (1793-1856), matemático russo que dedicou grande parte da sua vida na universidade de Kazan, na qual foi aluno, professor e reitor. Revolucionou a geometria pelo tratamento que deu à negação do quinto postulado, precedendo às geometrias não euclidianas e mostrando que a geometria euclidiana não era a ciência absoluta. Assim, mostrara-se que o quinto postulado é independente dos demais e, a sua negação teria muitas consequências, desenvolvendo assim a Geometria Hiperbólica, denominada por ele de “Pangeometria” ou “Geometria Imaginária”.

Em 1829, dá-se o marco das geometrias não euclidianas com a publicação do artigo “Sobre os princípios da Geometria” de Lobachevsky. O novo postulado dizia que: *por um ponto exterior a uma reta dada passam pelo menos duas paralelas*. Lobachevsky não via uma aplicação no espaço físico dessa geometria, chamando-a de imaginária. Para ele, “não há ramo na matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia ser aplicado aos fenômenos do mundo real”. Lobachevsky escreveu também os trabalhos: *Novos Fundamentos da Matemática* em russo (1835-1838), *Investigações geométricas sobre a Teoria das Paralelas* em alemão (1840), e *Pangeometria*(1855) em francês e russo. Seus trabalhos foram elogiados por Gauss, que o recomendou a Sociedade Científica de Gottingen, em 1842. Do fruto do seu trabalho, Lobachevsky foi chamado de “Copérnico da Geometria” [22].

1.5.5 Janos Bolyai

Farkas Bolyai (1775-1856), amigo húngaro de Gauss, professor provinciano de matemática que passou toda sua vida tentando demonstrar o “Postulado das Paralelas”. Frustrado, ao saber que seu filho Janos Bolyai (1802-1860) também estava nessa batalha pediu-o por meio de uma carta que ele desistisse. Não atendendo a solicitação de seu pai, em 1829, ele chegou às mesmas conclusões que Lobachevsky, desenvolvendo a “Ciência absoluta do espaço”. Seu pai ao receber os manuscritos das suas descobertas, publicou com o título em latim “*Tentamen*” (1829), porém só apareceu em 1832. A falta de reconhecimento do trabalho de Jonas Bolyai por Gauss e a publicação do trabalho de Lobachevsky, em 1840, fez com que Bolyai deixasse de publicar. Bonola [10], descreve os resultados mais importantes encontrados no trabalho de Jonas Bolyai:

1. a definição de retas paralelas e as propriedades independentes desenvolvidas do “Postulado de Euclides”;
2. a circunferência e esfera de raios infinitos;
3. a demonstração de fórmulas da trigonometria esférica;
4. a aplicação em cálculo de áreas e volumes na trigonometria plana não-euclidiana.

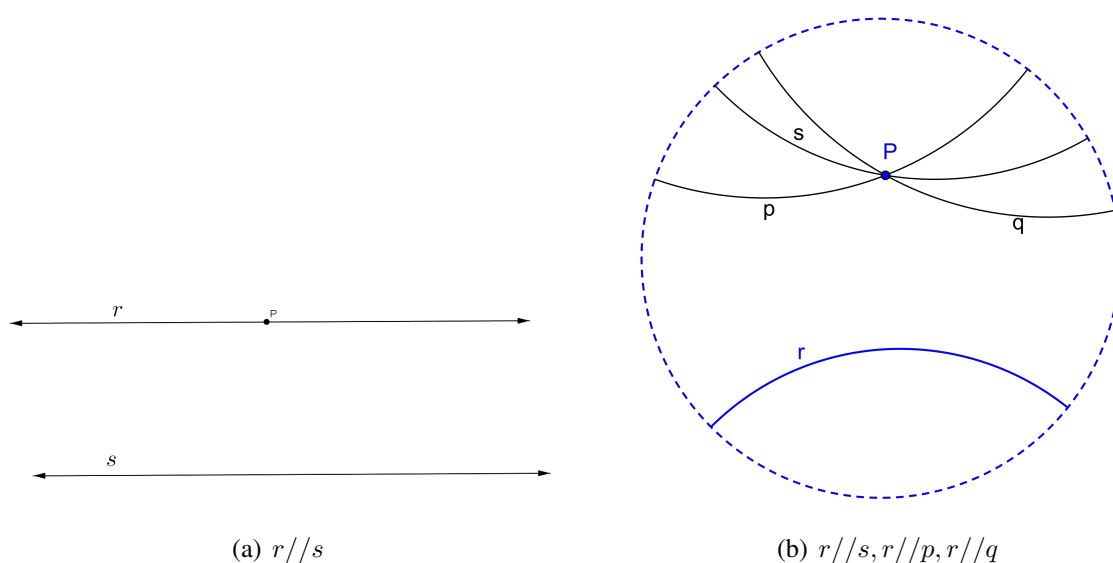
1.6 O Surgimento de outras Geometrias

Retomando a análise do quinto postulado de Euclides, observa-se que a formulação de Euclides e a mais usual de Playfair são consideradas equivalentes, porém a de Playfair continha uma

cláusula de unicidade que não poderia ser deduzida da de Euclides. A formulação de Euclides estabelece uma relação entre a intersecção entre duas retas e a magnitude dos ângulos que elas formam com uma terceira. Já a de Playfair estabelece que por um ponto externo passa apenas uma paralela a uma reta dada (chamado de postulado das paralelas). Desta forma, a negação do postulado pode ser feita de duas maneiras:

- 1°) estabelecendo que há retas que obedecem às relações de magnitude entre os ângulos mencionados, mas que não se encontram;
- 2°) estabelecendo que por tal ponto externo:
 - a) não passa nenhuma paralela à reta dada;
 - b) passam várias

Figura 1.6: Representação do Postulado das Paralelas no plano euclidiano (a) e no plano hiperbólico (b)

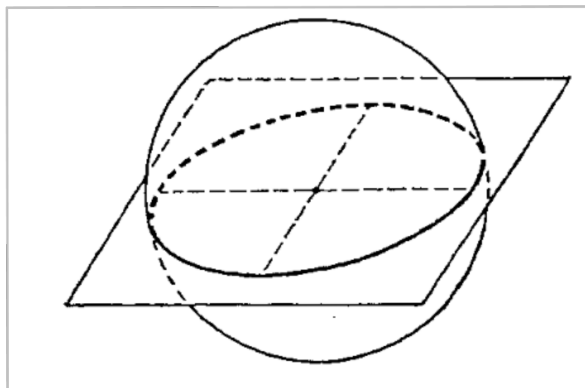


Fonte: a autora

A primeira é uma maneira de negar mais diretamente a formulação euclidiana, já a segunda a formulação de Playfair. A versão alternativa adotada pela geometria hiperbólica é a 1° e a 2°b. A geometria elíptica, criada por Riemann, adota a 2°a, no qual assegura que duas retas sempre se encontrarão, não existindo paralelas.

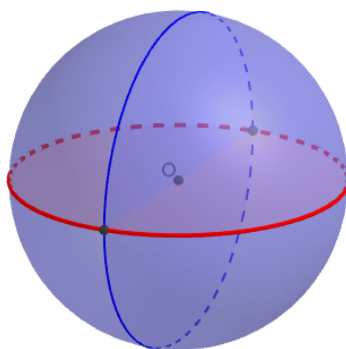
O modelo² usual da geometria elíptica é a superfície esférica, sobre a qual entende-se reta em termos de círculos máximos³. Portanto, em uma esfera, a circunferência máxima corresponde à linha reta do plano, sendo a menor distância entre dois pontos. Desta forma, as retas não são univocamente determinadas por dois pontos quaisquer e não são prolongadas indefinidamente.

Figura 1.7: Representação de geodésicas (retas) na Geometria Elíptica



Fonte: Kasner, E.; Newnan J.[32]

Figura 1.8: Intersecção de geodésicas na Geometria Elíptica



Fonte: a autora

Em qualquer superfície, uma curva que represente a menor distância entre dois pontos é chamada de *Geodésica* daquela superfície [32]. Assim, em uma esfera, observa-se que um par de geodésicas (círculos máximos) sempre intersectam-se em dois pontos (Figura 1.8), não

²Modelo: esquema teórico de um sistema ou realidade complexa; resultado do processo de criar uma representação abstrata, conceitual, gráfica ou visual para analisar, descrever, explicar, simular, e prever fenômenos ou processos.

³Um plano que passa pelo centro da esfera corta a circunferência em um círculo máximo.

existindo retas paralelas, ou seja, retas que não possuem ponto em comum. Daí, na geometria esférica, por um ponto exterior a uma reta não podemos traçar nenhuma paralela a esta reta. Ao aproximarmos a superfície terrestre à uma superfície esférica, as retas seriam os meridianos que intersectam-se nos pólos.

Na geometria de Lobachevsky, a geometria hiperbólica, a paralela não é única. Assim, a geometria hiperbólica diferencia-se da euclidiana e da elíptica, pela quantidade de retas paralelas por um ponto.

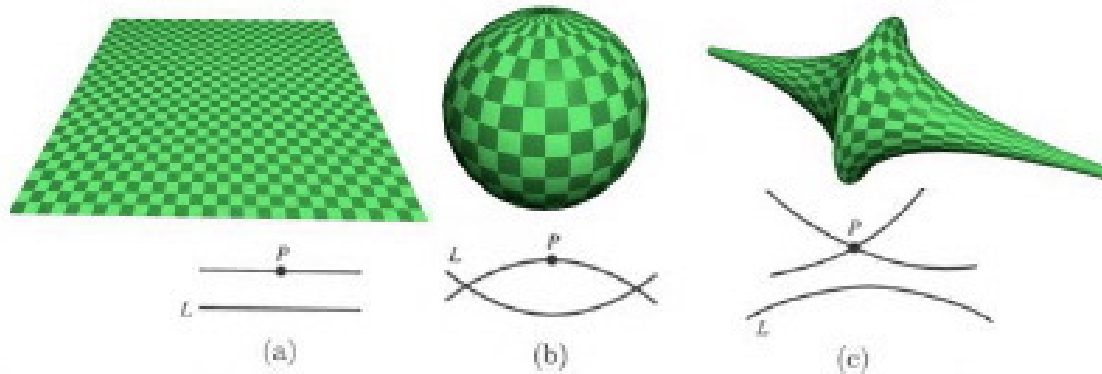
Em lugar de *Geometria* abre-se caminho para as *Geometrias*. A necessidade de visualizar um espaço onde seria possível outras geometrias e a estratégia utilizada para provar a consistência dessas geometrias consistiu na obtenção de modelos, na geometria euclidiana, de modo a satisfazer os axiomas das novas geometrias. Nessa árdua tarefa dedicaram-se os matemáticos Eugênio Beltrami (1835-1900, Itália), Arthur Cayley (1821-1895, Inglaterra), Felix Klein (1849-1925, Alemanha) e Henri Poincaré (1854-1912, França) e G.F.B. Riemann (1826-1866, Alemanha). Estes apresentaram trabalhos que fornecem demonstrações da consistência do ângulo agudo.

Beltrami mostrou que o modelo disponível para a geometria de Lobachevsky é uma pseudoesfera, superfície gerada pela revolução de um tratriz em torno de sua assíntota. Felix Klein contribuiu na geometria não-euclidiana com os nomes “geometria elíptica” e “geometria hiperbólica”, para as hipóteses do ângulo obtuso e do ângulo agudo e, com a proposta de um modelo simples como alternativa ao de Beltrami. Também mostrou que as diferentes geometrias podem ser vistas como partes da geometria projetiva, sendo que, o que as diferencia é o conceito de congruência.

Em se tratando de superfícies, as geodésicas de uma superfície são determinadas por sua curvatura. Ao considerarmos a superfície de uma esfera, pode-se definir a curvatura como o inverso do quadrado do seu raio. Assim, quanto menor o raio, maior a curvatura e vice-versa. Aumentando o limite do raio infinitamente, tem-se uma superfície plana com curvatura nula. Ao considerarmos uma superfície hiperbólica, tal como uma superfície como uma sela, tem-se uma curvatura negativa.

Educado em condições modestas, porém com boa instrução em Berlim e Gotting, Riemann propôs uma visão geral da geometria como um estudo de variedades de qualquer número de dimensões em qualquer tipo de espaço. Para ele a geometria “nem sequer deveria necessariamente tratar de pontos ou retas do espaço no sentido ordinário, mas de conjuntos de n -uplas ordenadas que são combinadas segundo certas regras” [11, p.336]. Riemann mostrou que a soma dos ân-

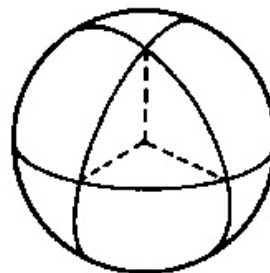
Figura 1.9: Modelos euclidiano (a), esférico (b) e hiperbólico (c).



Fonte: (Disponível em: <http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php>)

gulos maior que dois retos se dá numa superfície esférica. O trabalho de Riemann unifica toda a geometria, sendo a euclidiana e a de Lobachevsky casos particulares. Dessa forma, contribui grandemente para muitos ramos da física teórica, dentre as quais a teoria da relatividade, no qual considera-se o espaço curvo.

Figura 1.10: Triângulo na superfície esférica



Fonte: (Disponível em: <http://weather.org/singer/chapt02.htm>)

Por conta das inovações pelas quais passou a geometria, os matemáticos Pasch (1843-1931) em 1882, Veronese, Pieri, David Hilbert (1862 - 1943), George David Birkhoff (1864-1944), Edward G. Begle dedicaram-se a reconstruir a geometria euclidiana. O conjunto de postulados devem ser consistentes e completos, ou melhor, um postulado não pode contradizer o outro e deve haver um única geometria que satisfaça o sistema de postulados estabelecidos. A priori, as noções de espaço, plano, reta e ponto devem ser indefinidas. As teorias axiomáticas modernas

rejeitam diagramas nas provas euclidianas, caracterizando-se por relacionar entidades de forma abstrata com procedimentos meramente lógicos.

A partir da retomada historiográfica dos avanços das Geometrias, percebe-se que a inserção de conteúdos provenientes das diversas Geometrias constitui-se uma rica oportunidade para contribuir e ampliar os conhecimentos geométricos voltados à formação de alunos da Educação Básica sob diversas abordagens. O desenvolvimento do conhecimento geométrico faz-se necessário para a compreensão e construção de modelos que interpretem questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento, conforme expõe os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio ao ressaltar que “perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetivos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências”[12, p.44].

No próximo capítulo elencar-se-á as definições e os resultados básicos envolvidos na construção da Geometria Hiperbólica, tendo como objetivo apropriar-se dos conceitos elementares da Geometria Hiperbólica por meio da mobilização de conhecimentos apreendidos da geometria euclidiana, os quais serão utilizados para as sequências de atividades propostas para o ensino na Educação Básica da geometria no plano de Poincaré por meio da geometria dinâmica.

Capítulo 2

Geometria Hiperbólica

Historicamente sabe-se que diversos matemáticos tentaram demonstrar o quinto postulado, o “Postulado das Paralelas”, conforme já foi mencionado. Dessas tentativas infrutíferas levou-se a independência desse postulado dos demais, ou seja, sua negação levou a gerar outras geometrias consistentes de forma axiomática. Busca-se neste capítulo apresentar os principais conceitos, definições e teoremas referentes à Geometria Hiperbólica além dos conceitos preliminares da Geometria Euclidiana, tendo como referência os trabalhos de Euclides (traduzido por Bicudo [8]), Arcari [3], Greenberg [25], Souza [20], Barbosa [4], Andrade [2] e Hilbert [27]. As demonstrações que não forem apresentadas ou detalhadas no trabalho, assim como outros teoremas da Geometria Hiperbólica, podem ser encontradas nos trabalhos dos autores citados acima.

Como dito por Farkas Bolyai: “Muitas coisas têm uma época na qual elas são descobertas em vários lugares ao mesmo tempo, assim como as violetas aparecem por todos os lados na primavera”[10, p.99]. Os matemáticos Lobachevsky e Janos Bolay desenvolveram independentemente a Geometria Hiperbólica, conforme fora contextualizado anteriormente, embora, construções explícitas sem publicações já haviam sido obtidas por Saccheri, Lambert e Gauss. A honra da descoberta coube a Lobachewsky por ser o primeiro a publicar. De acordo com Boyer [11], em 1829 deu-se a publicação do primeiro trabalho de Lobachewsky, em russo, sobre a geometria não euclidiana, no *Kasan Bulletin*, atraindo pouca atenção do público. A próxima publicação deu-se em alemão, intitulada “Investigações Geométricas da Teoria das Paralelas”. Por fim, publicou seu trabalho em francês, em 1855, com o título *Pangeometria*.

A etimologia da palavra hipérbole está relacionada à excesso, na geometria hiperbólica o número de retas paralelas a uma reta dada por um ponto excede a quantidade da geometria euclidiana (uma), justificando assim o nome dado à Geometria Hiperbólica pelo matemático Felix Klein em 1871. A Geometria Hiperbólica caracteriza-se por admitir todos os postulados

de Euclides com exceção do quinto, que foi substituído pelo *Postulado de Lobachewsky*:

“Por um ponto não pertencente a uma reta dada, podem ser traçadas pelo menos duas retas distintas que não encontram a reta dada.”

De modo semelhante à Geometria Euclidiana, tem-se que ponto, reta, e plano são conceitos primitivos na Geometria Hiperbólica, ou melhor, indefiníveis. Lembrando, que em sua obra “Os Elementos”, Euclides definiu esses conceitos. As relações primitivas coincidem no sentido euclidiano, a saber: “estar entre”, “estar em”, e “congruentes”. Assim, tem-se que o sistema axiomático da Geometria Hiperbólica é composto pelo *Postulado de Lobachewsky* e pelos quatro primeiros grupos de axiomas de Hilbert, a saber:

- (i) Axiomas de Incidência
- (ii) Axiomas de Ordem
- (iii) Axiomas de Congruência
- (iv) Axiomas de Continuidade

Axiomas de Incidência:

- I 1. *Dados quaisquer dois pontos A e B , existe uma única reta que os contém.*
- I 2. *Sobre uma reta, existem pelo menos dois pontos.*
- I 3. *Existem pelo menos três pontos que não pertencem a uma mesma reta.*

Axiomas de Ordem:

Os axiomas de ordem descrevem uma ordem de sequência dos pontos sobre uma reta, sendo utilizado a noção de *estar entre* para descrevê-la.

- O 1. *Para quaisquer três pontos distintos colineares, apenas um deles está entre os outros dois.*
- O 2. *Se A , B , e C são pontos, tais que C está entre A e B , então estes três pontos são distintos, colineares, e C está entre A e B .*
- O 3. *Dados dois pontos distintos, A e B , existem um ponto C entre A e B e um ponto D , tal que B está entre A e D .*

- O 4. *Sejam, A , B e C três pontos não colineares e seja a uma reta no plano ABC , que não passa por nenhum dos pontos. Então, se a reta a corta o segmento AB , cortará também os segmentos BC ou AC .*

Axiomas de Congruência:

Garantem a possibilidade para medida de distância entre pontos em certas construções.

- C 1. *Se A e B são dois pontos distintos de uma reta l e A' é outro ponto sobre l' , não necessariamente distinta de l , então é sempre possível encontrar um ponto B' em l' (um dado lado da reta), tais que os segmentos \overline{AB} e $\overline{A'B'}$ sejam congruentes. Em símbolos, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$*
- C 2. *Se os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{A''B''}$ são congruentes com o mesmo segmento \overline{AB} , também o segmento $\overline{A'B'}$ é congruente com o segmento $\overline{A''B''}$.*
- C 3. *Sejam AB e BC dois segmentos da reta r que tenham somente B como ponto comum, e por outro lado $A'B'$ e $B'C'$ dois segmentos de uma outra reta s que tenham somente B' como ponto comum: se $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ então $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.*
- C 4. *Sejam dados um ângulo $\angle(h, k)$, uma reta a' e um dos lados determinados por a' , e representemos por h' uma semirreta de a' que parte de O' : existe, então, uma única semirreta k' tal que o ângulo $\angle(h, k)$ seja congruente ou igual ao ângulo $\angle(h', k')$; utilizando símbolos: $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$, tal que por sua vez todos os pontos interiores do ângulo $\angle(h', k')$ estão situados no lado dado em relação a' . Todo ângulo é congruente consigo mesmo.*
- C 5. *Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se as congruências $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ são válidas, então, tem-se sempre, também, que $\angle BAC \equiv \angle A'B'C'$*

Axiomas de Continuidade

Garantem a possibilidade para medida de distância entre pontos em certas construções.

- I 1. *Se AB e CD são segmentos quaisquer, então existe um número natural n , tal que n segmentos congruentes a CD construídos continuamente a partir de A sobre a semi-reta AB , conterá o ponto B .*
- I 2. *Se uma circunferência c tem um ponto no interior e um ponto no exterior de outra circunferência c' , então as duas circunferências se cortam em dois pontos.*

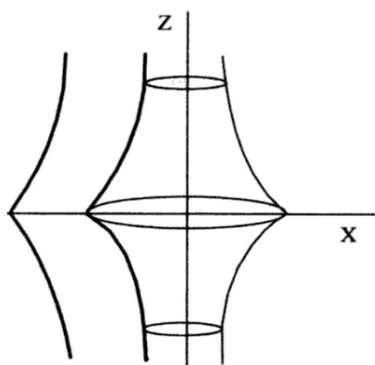
- I 3. *Se uma extremidade de um segmento de reta está no interior de uma circunferência e a outra extremidade no exterior, então o segmento corta a circunferência em um ponto.*

2.1 Modelos

Para representar ou interpretar os conceitos primitivos em relação aos axiomas foi necessário desenvolver modelos que provam a consistência das geometrias. O plano euclidiano é um modelo para o sistema axiomático de Euclides, tendo em vista que nele pode-se representar os entes primitivos e validar propriedades de tal modo que os axiomas passam a ser afirmações aceitas como verdadeiras.

Lobachevsky, apesar de ser um dos idealizadores da Geometria Hiperbólica, não conseguiu uma representação para essa geometria no espaço euclidiano. Riemann e Ferdinand Minding (1806-1885) haviam buscado superfícies de curvatura negativa, porém não relacionaram com a Geometria Hiperbólica. Beltrami foi quem conseguiu realizar essa tarefa, posteriormente Klein e Poincaré. Para a representação do plano hiperbólico, Beltrami utilizou uma superfície tridimensional chamada de pseudoesfera (figura 2.1). Neste plano, as retas eram as geodésicas desta superfície. Segundo Coutinho [14], o modelo de Beltrami contraria o segundo postulodo de Euclides, pois muitas geodésicas não poderiam ser prolongadas além da aresta que a pseudoesfera possui.

Figura 2.1: Pseudoesfera de Beltrami

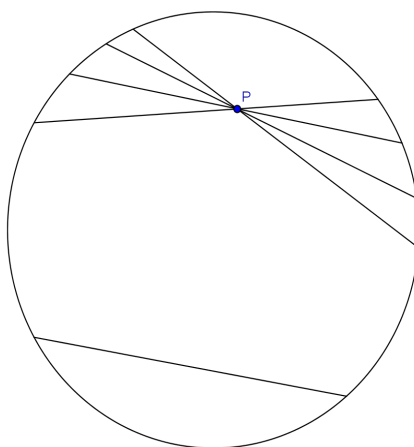


Fonte: Zuning [33]

Sendo este modelo de difícil interpretação, o matemático Felix Klein propôs outro modelo no plano euclidiano, no qual o plano é interpretado como o interior de um círculo. Neste modelo, os pontos estão no interior círculo, os pontos da circunferência (fronteira) são os pontos do

infinito e as cordas são as “retas” (que possuem dois pontos ao infinito). Para satisfazer os postulados de Lobachevsky, “é preciso que as retas tenham uma extensão infinita dentro de uma área finita”. Para isso, introduz-se uma unidade de medida variável, ou seja, seu tamanho diminui na proporção que se aproxima da fronteira do plano (circunferência). Dessa forma, a extensão de uma reta torna-se infinita. Observa-se, neste modelo (figura 2.2), que dado uma reta e um ponto P fora dela, existem infinitas retas paralelas à primeira reta, pois elas não têm ponto em comum com esta.

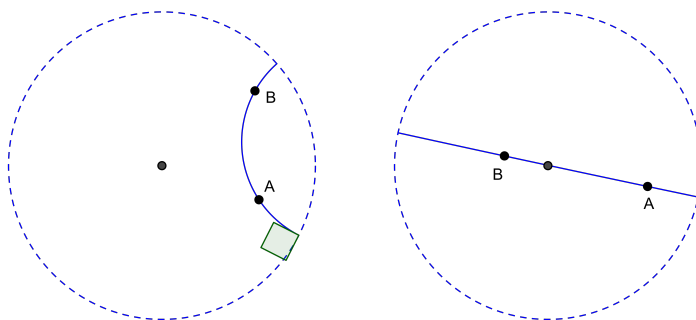
Figura 2.2: Retas hiperbólicas paralelas no modelo de Felix Klein



Fonte: a autora

Outro modelo, o “Disco de Poincaré”, foi criado pelo matemático Jules Henri Poincaré (1854- 1912) para representar a Geometria Hiperbólica em duas dimensões, no qual vamos apresentar mais detalhes a seguir, tendo em vista que a proposta de ensino é feita neste modelo. Neste modelo, o plano hiperbólico é definido a partir da região limitada por uma circunferência, a representação das retas são arcos de circunferências perpendiculares ao círculo, que representa o plano hiperbólico, chamado de “Disco” (figura 2.3). Os pontos internos a esta circunferência são denominados *pontos do plano hiperbólico* (ou *ordinários*), os pontos que pertencem à circunferência de *pontos ideais*, tendo em vista que são idealizados no “infinito”, e a circunferência é dita *horizonte hiperbólico*.

Figura 2.3: Representação de retas hiperbólicas no “Disco de Poincaré”



Fonte: a autora

2.2 Conceitos Preliminares

O estudo da geometria hiperbólica sobre o Disco de Poincaré requer a retomada de algumas definições, proposições e construções geométricas no plano euclidiano que serão realizadas a seguir. Para a compreensão das retas hiperbólicas no “Disco de Poincaré” apresenta-se a construção de circunferências ortogonais e consequentemente os teoremas que fundamentam a construção.

2.2.1 Circunferências Ortogonais

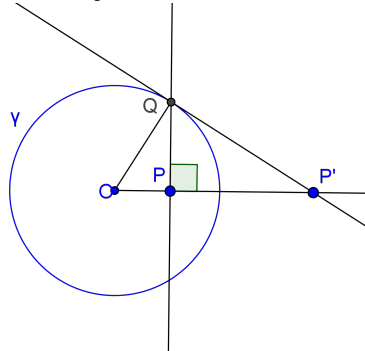
Para a construção de circunferências ortogonais primeiramente descreve-se a construção do inverso de um ponto P em relação à uma circunferência γ (figura 2.4):

- Construa uma circunferência de centro O ;
- Marque um ponto P no interior da circunferência traçada;
- Construa uma semirreta \overrightarrow{OP} de origem O e passando por P ;
- Trace uma reta perpendicular a semirreta \overrightarrow{OP} passando por P e intersectando a circunferência em Q ;
- Trace uma reta perpendicular ao raio \overline{OQ} em Q , que intersectará a semirreta \overrightarrow{OP} em P' .

A transformação que associa o ponto P ao ponto P' é denominada de “Inversão”. Na construção descrita acima, a inversão está definida para um ponto do interior da circunferência. Caso

o ponto P esteja sobre a circunferência, tem-se que $P = P'$. Se P estiver fora da circunferência, o inverso é um ponto no interior da circunferência.

Figura 2.4: Construção do inverso de um ponto



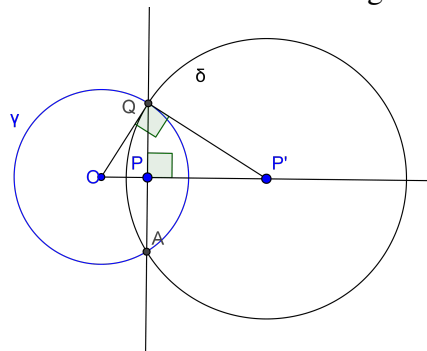
Fonte: a autora

Definição 1 Seja P um ponto euclidiano qualquer e considere uma circunferência γ de raio r e centro O . O inverso de P em relação a γ é um único ponto P' que pertence a semirreta \overrightarrow{OP} tal que $(\overline{OP}) \cdot (\overline{OP'}) = r^2$.

De fato, como os triângulos retângulos OPQ e OQP' são semelhantes, por possuírem três ângulos congruentes, tem-se que $\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP'}}$. Como $\overline{OQ} = r$, segue que $\frac{\overline{OP}}{r} = \frac{r}{\overline{OP'}}$ e portanto, $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r \cdot r = r^2$.

Para traçar uma circunferência ortogonal a γ basta construir uma circunferência δ com centro em P' e raio $\overline{P'Q}$ (figura 2.5).

Figura 2.5: Circunferências ortogonais



Fonte: a autora

Definição 2 (Circunferências Ortogonais) Sejam as circunferências γ e δ , elas são ortogonais se seus raios são perpendiculares nos pontos de interseção de γ e δ .

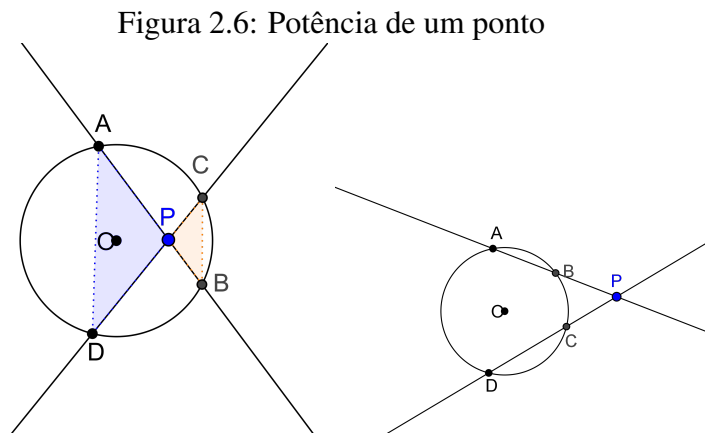
Proposição 1 (Potência de um ponto) *Seja um ponto P , exterior ou interior a uma circunferência δ , se duas retas por P interceptam δ em pares de pontos (A, B) e (C, D) , respectivamente, então:*

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

Demonstração: O ponto P pode estar no (i) interior ou (ii) exterior da circunferência δ :

i) De acordo com a figura 2.6, observa-se que os ângulos \widehat{DAP} e \widehat{DCB} subtendem o mesmo arco \widehat{DB} , logo são congruentes. Os ângulos \widehat{APD} e \widehat{CPB} são opostos pelos vértice, dessa forma congruentes. Daí, os triângulos Δ_{APD} e Δ_{PBC} são semelhantes pelo caso AAA (ângulo, ângulo, ângulo). Conseqüentemente, pode-se afirmar que $\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}}$, ou melhor, $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.

ii) De modo análogo, mostra-se para o caso do ponto estar no exterior da circunferência.



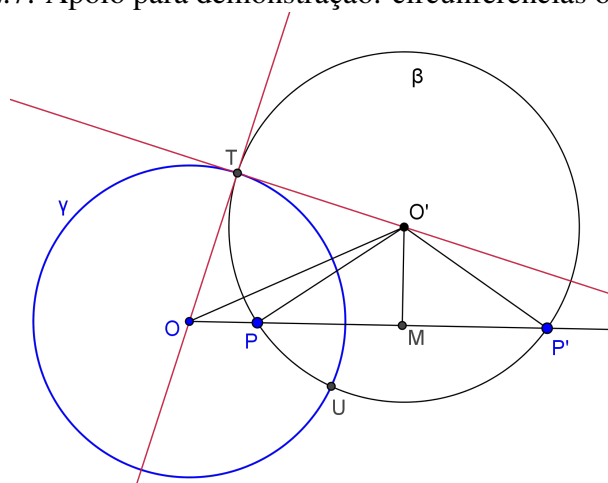
Fonte: a autora

Proposição 2 *Seja um ponto P do plano euclidiano e γ uma circunferência de centro O e raio r , tal que, P não pertença a γ e $P \neq O$. Os pontos P e P' são inversos à circunferência γ se, e somente se, qualquer circunferência que passa por P e P' é ortogonal a γ .*

Demonstração

i) \Rightarrow) Considera-se P' o inverso de P em relação a circunferência γ que tem centro no ponto O (figura 2.7), e β uma circunferência arbitrária que passa por P e P' e que tem centro em O' . O ponto T é uma das interseções entre γ e β , e M é o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$. Deseja-se provar que γ é ortogonal a β , sendo necessário mostrar que as retas \overrightarrow{OT} e $\overrightarrow{O'T}$ são perpendiculares, ou melhor, que o triângulo $\Delta_{TOO'}$ é retângulo em T .

Figura 2.7: Apoio para demonstração: circunferências ortogonais



Fonte: a autora

Ora, os segmentos $\overline{PO'}$ e $\overline{P'O'}$ são congruentes, pois os pontos P e P' pertencem à mesma circunferência β , daí o triângulo $\Delta_{POP'}$ é isósceles. Sendo M o ponto médio de $\overline{PP'}$, os segmentos $\overline{PP'}$ e $\overline{O'M}$ são perpendiculares. Portanto, o triângulo $\Delta_{OO'M}$ é retângulo em M :

$$\overline{OO'}^2 = \overline{O'M}^2 + \overline{OM}^2 \quad (2.1)$$

Sendo M o ponto médio de $\overline{PP'}$:

$$\overline{PP'} = \overline{MP} + \overline{MP'} = 2 \cdot \overline{MP} \quad (2.2)$$

$$\overline{OP'} = \overline{OP} + \overline{PP'} = \overline{OP} + 2 \cdot \overline{MP} \quad (2.3)$$

Segue de (2.3) que:

$$\overline{MP} = \frac{\overline{OP'} - \overline{OP}}{2} \quad (2.4)$$

$$\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{MP} = \overline{OP} + \frac{\overline{OP'} - \overline{OP}}{2} \quad (2.5)$$

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OP'} + \overline{OP}}{2} \quad (2.6)$$

Como o triângulo $\Delta_{O'MP}$ é retângulo em M tem-se:

$$\overline{O'P}^2 = \overline{O'M}^2 + \overline{MP}^2 \Rightarrow \overline{O'M}^2 = \overline{O'P}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{O'P}^2 - \left(\frac{\overline{OP'} - \overline{OP}}{2}\right)^2 \quad (2.7)$$

Segue de (2.4) e (2.7):

$$\overline{O'M}^2 = \overline{O'P}^2 - \left(\frac{\overline{OP'} - \overline{OP}}{2}\right)^2 \Rightarrow \quad (2.8)$$

$$\overline{O'M}^2 = \overline{O'P}^2 + \frac{2 \cdot \overline{OP'} \cdot \overline{OP} - (\overline{OP'}^2 + \overline{OP}^2)}{4} \quad (2.9)$$

Fazendo (2.6) e (2.9) em (2.1) tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{OO'}^2 &= \overline{O'P}^2 + \frac{2 \cdot \overline{OP'} \cdot \overline{OP} - (\overline{OP'}^2 + \overline{OP}^2)}{4} + \left(\frac{\overline{OP'} + \overline{OP}}{2}\right)^2 \quad (2.10) \\ &= \overline{O'P}^2 + \frac{2 \cdot \overline{OP'} \cdot \overline{OP} - (\overline{OP'}^2 + \overline{OP}^2)}{4} + \frac{2 \cdot \overline{OP'} \cdot \overline{OP} + (\overline{OP'}^2 + \overline{OP}^2)}{4} \end{aligned}$$

Por fim,

$$\overline{OO'}^2 = \overline{O'P}^2 + \overline{OP'} \cdot \overline{OP} \quad (2.11)$$

Por hipótese, P e P' são inversos em relação à γ e T é um ponto de interseção entre γ e β , então

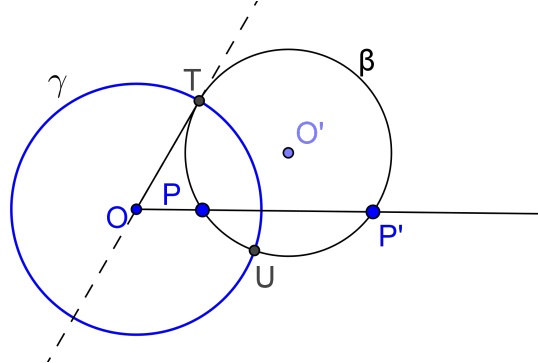
$$\begin{cases} \overline{OP'} \cdot \overline{OP} = \overline{OT}^2 \\ \overline{O'P} = \overline{O'T} \end{cases}$$

Segue da hipótese e de (2.11):

$$\overline{OO'}^2 = \overline{O'T}^2 + \overline{OT}^2 \quad (2.12)$$

Verifica-se que o triângulo $\Delta_{OTO'}$ é retângulo em T ao satisfazer o Teorema de Pitágoras, conseqüentemente \overleftrightarrow{OT} e $\overleftrightarrow{O'T}$ são perpendiculares e as circunferências γ e β são ortogonais.

Figura 2.8: Apoio para demonstração: γ e β são ortogonais nos pontos T e U



Fonte: a autora

- ii) \Leftarrow) Agora vamos provar que, se uma circunferência β passando por P corta γ ortogonalmente, então β passa por P' . De fato, considera-se que as circunferências β e γ são ortogonais (figura 2.8), sendo que β corta γ nos pontos T e U . Seja \overrightarrow{OP} uma semirreta que corta β nos pontos P e P' , tem-se por potência de ponto em relação à circunferência γ que $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OT}^2$, conseqüentemente P' é o inverso de P em relação à γ .

2.3 Geometria no Disco de Poincaré

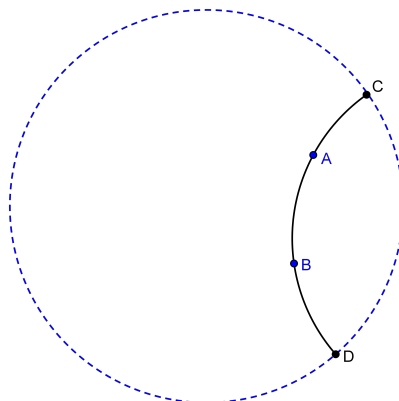
No estudo da Geometria Hiperbólica sobre o “Disco de Poincaré” vamos fixar um disco D , ou seja, uma circunferência euclidiana D . O *plano hiperbólico* é a região convexa D' delimitada por essa circunferência. Os pontos hiperbólicos são os pontos que estão sobre essa região D' , os pontos que pertencem à circunferência D são denominados de *pontos ideais*, tendo em vista que são idealizados no infinito. O local dos pontos ideais pode ser referido como “horizonte”.

Considerando-se dois pontos A e B em uma circunferência, traça-se uma reta que passa pelos pontos A e B , que separa o plano em dois semiplanos, denominados de *arcos* determinados pelos pontos A e B . Caso os pontos A e B estejam nas extremidades de um diâmetro, estes arcos são denominados de *semicircunferências* [5].

Para definir reta hiperbólica (geodésica), primeiramente foi necessário definir circunferências ortogonais. Assim, define-se reta hiperbólica (h-reta) como: *arcos de circunferências D' , ortogonais a D , contidas no plano hiperbólico e cordas que passam pelo centro de D* (figura 2.9).

O cálculo da distância hiperbólica entre dois pontos A e B é feita determinando-se primei-

Figura 2.9: Reta hiperbólica AB - arco ortogonal ao Disco

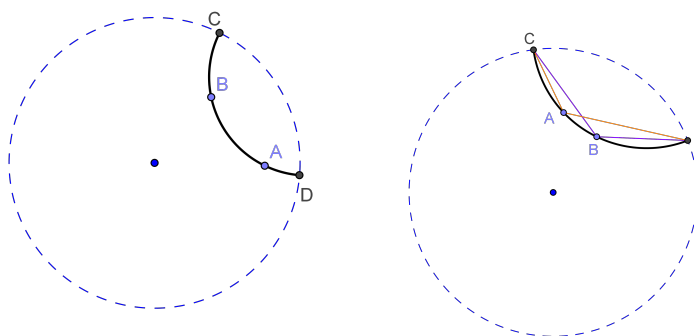


Fonte: a autora

ramente a reta hiperbólica que passa pelos pontos A e B (figura 2.10), e em seguida, os pontos C e D que estão na borda do disco de Poincaré. Poincaré definiu a distância hiperbólica como:

$$d(A, B) = \ln \left| \left(\frac{AC/AD}{BD/BC} \right) \right|.$$

Figura 2.10: Razões no cálculo de distâncias hiperbólicas



Fonte: a autora

Como as medidas de \overline{AC} , \overline{BC} , \overline{AD} e \overline{BD} correspondem as medidas de segmentos euclidianos, é possível fazer as observações:

- Quando o ponto A tende ao ponto C (aproxima-se do horizonte) tem-se que a distância \overline{AC} tende a zero. Assim, o numerador da razão $\frac{AC/AD}{BD/BC}$ também tende a zero. Portanto, a $d(A, B)$ tende ao infinito. Analogamente, o mesmo ocorre quando o ponto B tende ao ponto D .

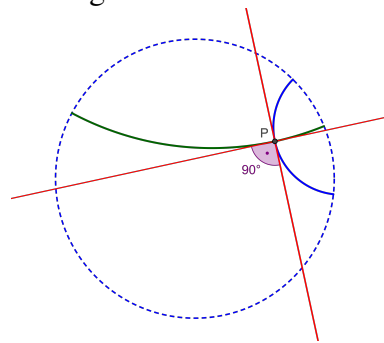
- Quando o ponto B tende ao ponto A tem-se que a distância \overline{BC} tende a medida de \overline{AC} . Assim, a razão $\frac{AC/AD}{BD/BC}$ tende a um. Portanto, a expressão $\ln \left| \left(\frac{AC/AD}{BD/BC} \right) \right|$ tende a zero, ou melhor, a distância hiperbólica entre os pontos A e B tende a zero. Analogamente, o mesmo ocorre quando o ponto A tende ao ponto B .

2.4 Paralelismo no Plano Hiperbólico

A partir dos axiomas da Geometria Neutra, geometria elementar na qual admitem-se como verdadeiros os axiomas de incidência, ordem, congruência e continuidade, pode-se criar outras Geometrias adicionando mais axiomas. Para a Geometria Hiperbólica, adiciona-se o “Axioma das Paralelas” e a partir daí desenvolvem-se os teoremas. A seguir apresentam-se os axiomas da Geometria Hiperbólica, algumas definições e teoremas. Na Geometria euclidiana, o fato de uma reta não interceptar a outra indica que elas são paralelas. Na geometria hiperbólica, há outras nomenclaturas para as retas que não cruzam a reta dada, como “ultraparalelas”, “hiperparalelas”, “superparalelas”, “paralelas assintóticas”, “paralelas divergentes” [25].

Definição 3 *Define-se o ângulo hiperbólico formado por duas retas hiperbólicas como sendo o ângulo (euclidiano) formado pelas semirretas euclidianas tangentes aos arcos (retas hiperbólicas) no ponto de intersecção (figura 2.11) [25].*

Figura 2.11: Ângulo entre duas retas hiperbólicas



Fonte: a autora

Definição 4 *Seja r uma reta, Z_1 um dos pontos ideais de r e $P \in D'$ um ponto não incidente a r . Dizemos que uma reta s é paralela a r no ponto P em direção a Z_1 se $r \cap s = \emptyset$*

Definição 5 (Ângulo de Paralelismo) *Seja r e s retas paralelas no ponto P em direção Z_1 , seja t uma reta perpendicular a r que passa por P , o ângulo formado por t e s no ponto P é chamado de “ângulo de paralelismo” em relação a P .*

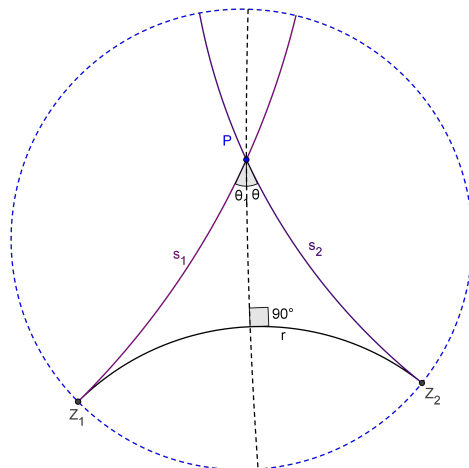
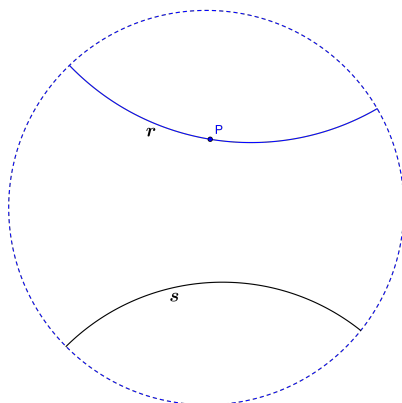


Figura 2.12: Retas s_1 e s_2 paralelas a r no ponto P e ângulo de paralelismo θ

Observe, na figura 2.12, que as retas hiperbólicas s_1 e s_2 passam pelo ponto P e incidem sobre os pontos ideais de r formando o ângulo de paralelismo com a reta perpendicular à reta dada r , sendo assim denominadas de *retas paralelas assintóticas*. Na geometria euclidiana, o ângulo de paralelismo é $\frac{\pi}{2}$, já na hiperbólica este ângulo foi definido por Lobachevsky por $\pi(\theta)$, sendo que $\lim_{\theta \rightarrow 0} \pi(\theta) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \pi(\theta) = 0$. Desta forma, quanto menor o valor de θ , o plano hiperbólico se assemelha ao euclidiano.

Definição 6 Uma reta hiperbólica r é *ultraparalela* à reta hiperbólica s no ponto P se r incide em P , não intercepta s e não tem ponto ideal em comum com a reta s .

Figura 2.13: Retas ultraparalelas

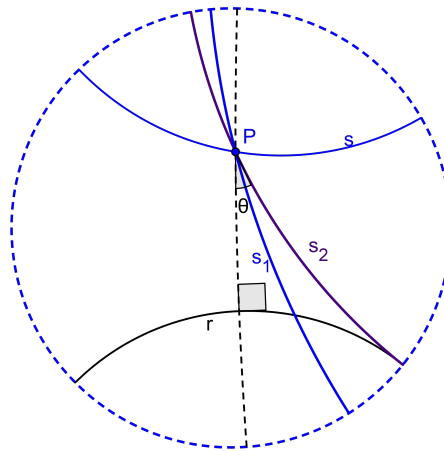


Fonte: a autora

Na figura 2.14, a reta s não intercepta a reta r e forma com a reta perpendicular à r um ângulo maior que o ângulo de paralelismo, sendo denominada de *ultraparalelas* ou *paralela divergente*.

Já a reta s_1 não é paralela à reta r pois a intercepta. A reta s_2 encontra-se no limite entre as retas que interceptam e as que não interceptam à reta r , portanto, na terminologia de Lobachevsky, elas são paralelas.

Figura 2.14: Retas hiperbólicas



Fonte: a autora

Proposição 3 *Sejam r uma reta e P um ponto não pertencente a r . Então existem infinitas retas paralelas a r .*

Demonstração:

De fato, as retas s e s' passam por P e não intersectam r de acordo com o Postulado de Lobachevsky. Deste modo, as retas s e s' dividem o plano hiperbólico em quatro regiões angulares, conforme mostra a figura 2.15.

Seja Q o pé da perpendicular baixada de P à reta r . Consideremos os ângulos α e β de vértice comum P formados pelas retas s e \overrightarrow{PQ} e; s' e \overrightarrow{PQ} , respectivamente. Seja R um ponto em umas das regiões angulares, tal que o ângulo $\gamma = \hat{R}PQ$ esteja contido na região angular formado pelo ângulo β mas não esteja contido na região angular α , conforme mostra a figura 2.16.

Seja a reta s'' que passa por P e R . Logo, $s'' \neq s$, $s'' \neq s'$, s'' está contida nas regiões opostas pelo vértice que não contém r . Tem-se que $s'' \cap r = \emptyset$.

De fato, caso $s'' \cap r = A$, teríamos um triângulo Δ_{PQA} e:

- i) s entra em Δ_{PQA} por P . Tem-se que $s \cap QA \neq \emptyset$ pelo axioma de Pash, logo uma contradição.

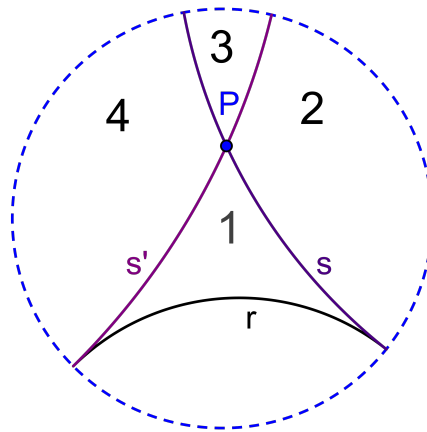


Figura 2.15: Apoio para demonstração - regiões angulares

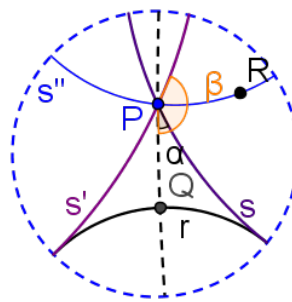


Figura 2.16: Apoio para demonstração - infinidade de paralelas

ii) s' entra em Δ_{PQA} por P . Tem-se que $s' \cap QA \neq \emptyset$ pelo axioma de Pash, logo uma contradição.

De (i) e (ii), conclui-se que $s'' \cap r = \emptyset$. Observa-se que há infinitos pontos R que podem ser escolhidos, conseqüentemente há infinitas retas s'' que passam por P e não intersectam r .

Proposição 4 *Seja r uma reta qualquer e P um ponto fora desta reta. Existe uma única reta assintótica em cada sentido em relação à reta r que passa por P .*

Demonstração:

Dados a reta r , o ponto P não pertencente à r , as retas paralelas assintóticas, s e s' , respectivamente à direita e esquerda da reta r pelo ponto P . Vamos supor que exista, além de s , outra reta paralela assintótica p à reta r por P . Seja t a reta perpendicular à r que passa pelo ponto P . Seja Q a interseção de t com r . Tem-se as seguintes situações:

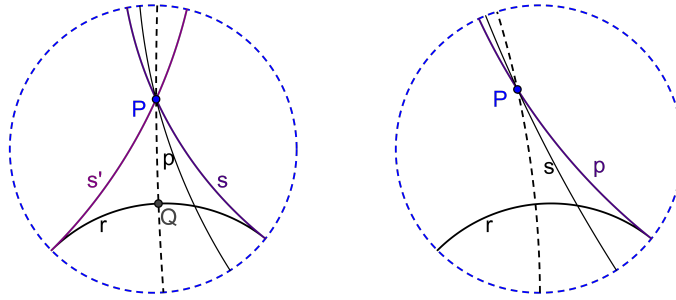


Figura 2.17: Apoio para demonstração: retas assintóticas

- i) a reta p está no interior do ângulo sPQ : neste caso, a reta q interceptaria r , ou seja, q seria secante a r (figura 2.17);
- ii) a reta s está no interior do ângulo pPQ : neste caso, a reta s seria secante à reta r , o que é contradição à hipótese.

De (i) e (ii) conclui-se que s é única. De modo equivalente ocorre no outro sentido da reta (esquerda), concluindo-se que a reta s' também é única.

Proposição 5 *As retas paralelas assintóticas s_1 e s_2 à reta r formam ângulos congruentes agudos com a perpendicular baixada de P à reta r .*

Sejam as retas s e s' paralelas assintóticas à reta r por P , os ângulos de paralelismo, $X\hat{P}Q$ e $Y\hat{P}Q$, de \overline{PQ} com r , sendo $\overline{PQ} \perp r$ (figura 2.18).

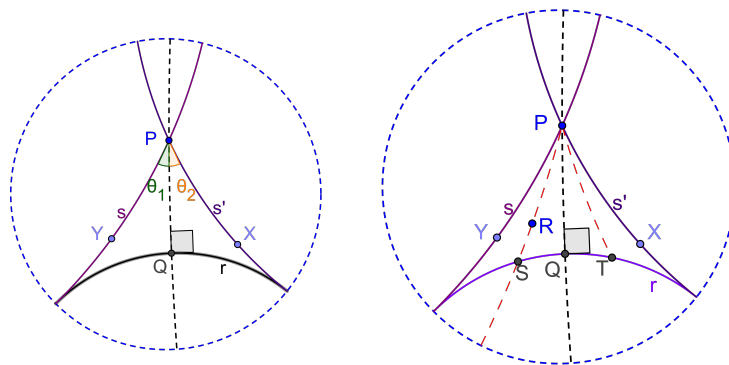


Figura 2.18: Apoio para demonstração: ângulo de paralelismo

Queremos mostrar que $Y\hat{P}Q \equiv X\hat{P}Q$.

- i) Vamos supor que $Y\hat{P}Q > X\hat{P}Q$. Traça-se PR de modo que $R\hat{P}Q \equiv X\hat{P}Q$. Tem-se que $Y\hat{P}Q > R\hat{P}Q$, logo PR está no interior de YPQ . Sendo assim, PR não é paralela

à r por P , pois t é paralela assintótica e PR está abaixo dela. Vamos prolongar PR até intersectar a reta r no ponto S .

Seja T um ponto em r tal que $\overline{QS} \equiv \overline{QT}$ e tracemos PT . Observa-se que os triângulos Δ_{PSQ} e Δ_{PTQ} são congruentes pelo caso LAL (lado, ângulo, lado), pois $\overline{QS} \equiv \overline{QT}$ (construção), $\hat{PQS} \equiv \hat{PTQ}$ (retos) e \overline{PT} é comum. Consequentemente, $\hat{QPR} \equiv \hat{QPT}$ e $X\hat{P}Q \equiv Q\hat{P}T$. Chega-se a uma contradição, pois $X\hat{P}Q > Q\hat{P}T$. Logo, $X\hat{P}Q$ não é maior que $X\hat{P}Q$.

ii) Ao supor que $Y\hat{P}Q < X\hat{P}Q$ chega-se de maneira semelhante ao item (i) que $Y\hat{P}Q$ não é menor que $X\hat{P}Q$.

Concluir-se de (i) e (ii) que os ângulos de paralelismo ($Y\hat{P}Q$ e $X\hat{P}Q$) são congruentes. O próximo passo é demonstrar que os ângulos $X\hat{P}Q$ e $Y\hat{P}Q$ são agudos:

iii) Supondo que os ângulos $X\hat{P}Q$ e $Y\hat{P}Q$ são retos, teríamos que as retas s e t seriam uma única reta, porém elas são distintas. Assim, os ângulos não são retos.

iv) Supondo que os ângulos $X\hat{P}Q$ e $Y\hat{P}Q$ são obtusos. Vamos traçar a reta PF tal que ângulo $F\hat{P}Q$ seja reto. Tem-se que $X\hat{P}Q > F\hat{P}Q$ e PF passará pelo interior do ângulo $X\hat{P}Q$, logo PF intercepta a reta r . Todavia, PF é paralela à reta r por P , contradizendo a hipótese. Logo $X\hat{P}Q$ e $Y\hat{P}Q$ não são obtusos.

De (i) e (ii) conclui-se que os ângulos $X\hat{P}Q$ e $Y\hat{P}Q$ são agudos.

Proposição 6 *Sejam m reta paralela a n passando por um ponto P e em um determinado sentido. Então, a reta m é paralela a n nesse mesmo sentido por qualquer de seus pontos.*

Demonstração:

Sejam as retas m (passa pelos pontos A e B) e n , de modo que m é paralela a n pelo ponto P à direita (figura 2.19). Considere R um ponto qualquer de m . Deve-se mostrar que a reta m é também uma das paralelas à reta n passando por R e que é paralela à direita. Para isso, consideram-se os casos:

i) Neste caso, o ponto R está no lado do ponto P que fica na direção do paralelismo. Traça-se PQ e RS perpendiculares à reta n . Deve-se mostrar que toda reta que passa por R e entra no ângulo $S\hat{R}B$ corta a reta n . Seja RT um segmento de uma das tais retas. Considera-se no segmento RT um ponto qualquer U e traça-se PU e RQ . Pelo paralelismo no ponto

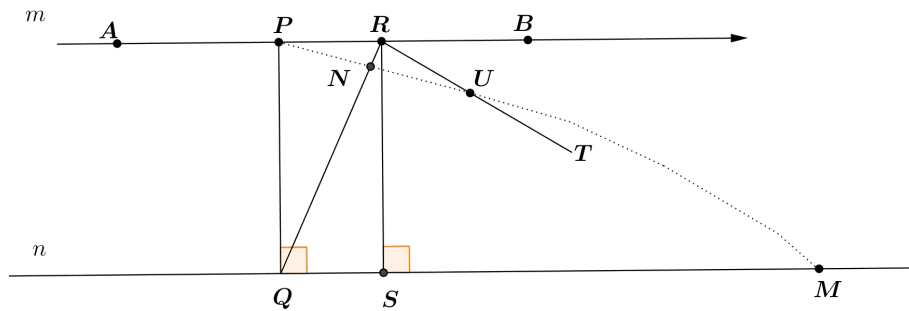


Figura 2.19: Paralelismo em um sentido- apoio para demonstração

P , tem-se que a reta PU deve cortar n em um ponto M e, pelo axioma de Pasch, deve cortar n em um ponto N . Usando o axioma de Pasch, concluí-se que RU , se prolongado, também cortará o lado QM do triângulo Δ_{QNM} , como queria-se chegar.

- ii) Neste caso, se ponto R está no lado do ponto P oposto ao paralelismo, a demonstração é semelhante a anterior.

Proposição 7 *Se s é paralela a r , então r é paralela a s .*

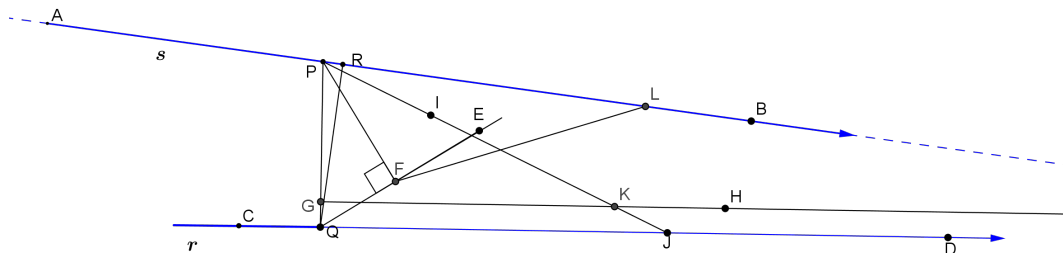


Figura 2.20: Paralelismo - apoio para demonstração

Demonstração:

Sejam as retas s (passa pelos pontos A e B) e r (passa pelos pontos C e D), conforme a figura 2.20. Seja um ponto P pertencente ao segmento \overline{AB} . Supõe-se que s seja paralela à r passando por um ponto P à direita. Vamos traçar uma reta perpendicular PQ a r e QR perpendicular a s . O ponto R ficará a direita do ponto P , caso contrário o triângulo Δ_{PQR} teria dois ângulos não agudos, contradizendo o teorema do ângulo externo.

Deve-se mostrar que a reta r é paralela à reta s passando pelo ponto Q , ou seja, temos que mostrar que toda reta que passa pelo ponto Q e divide o ângulo $R\hat{Q}D$ intersecta a reta s . Seja uma dessas retas que intersecta o ângulo $R\hat{Q}D$ e seja E um dos pontos dentro deste ângulo. Trace a perpendicular PF a esta reta. O ponto F pertence à semirreta de origem Q passando por E . Na semirreta \overrightarrow{PQ} , marque um ponto G , tal que $\overline{PG} \equiv \overline{PF}$. Observa-se que o ponto $G \in \overrightarrow{PQ}$, pois $\overline{PF} < \overline{PQ}$, PF é cateto e PG é hipotenusa do triângulo retângulo Δ_{PFQ} . Trace uma perpendicular GH ao segmento PQ e construa um ângulo $G\hat{P}I$ congruente ao ângulo $F\hat{P}B$. Denota-se por J o ponto onde a semirreta \overrightarrow{PI} corta a reta r . A semirreta \overrightarrow{GH} deve cortar PJ em algum ponto K , pois corta o lado PQ do triângulo Δ_{PQJ} e não corta QJ . Seja um ponto L na semirreta \overrightarrow{PB} tal que $\overline{PL} \equiv \overline{PK}$. Trace FL . Os triângulos Δ_{PGK} e Δ_{PFL} são congruentes e, daí $\angle PFL \equiv \angle PGK = 90^\circ$. Logo, os pontos Q, F, E, L são colineares. Conclui-se que a semirreta \overrightarrow{QE} corta a reta s , como queria-se demonstrar.

Proposição 8 *Se s e r são paralelas a m num determinado sentido, então s é paralela a r .*

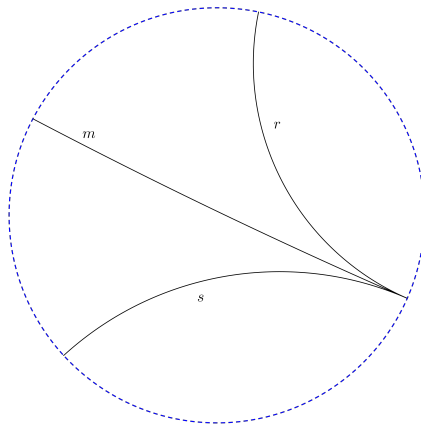


Figura 2.21: Paralelismo na Geometria Hiperbólica

Demonstração:

Para a demonstração, considera-se os seguintes casos:

- i) Neste caso, considera-se a terceira reta m entre as retas r e s (figura 2.22). Seja uma reta qualquer r , que passa por A e B , e uma reta s que passa por C e D , de modo que r e s estejam na mesma direção e sejam paralelas à reta m , que passa por E e F . Supõe-se que o segmento AC seja perpendicular a CD . Considere uma reta que passe pelos pontos A e H , com H no interior do ângulo $C\hat{A}B$. Como r é paralela a s , esta corta a reta que passa

pelos pontos E e F em algum ponto I . Trace o segmento CI . Sabe-se, pela proposição anterior, que a reta que passa por E e F é paralela à reta que passa por C e D , o que prova que r é paralela a s .

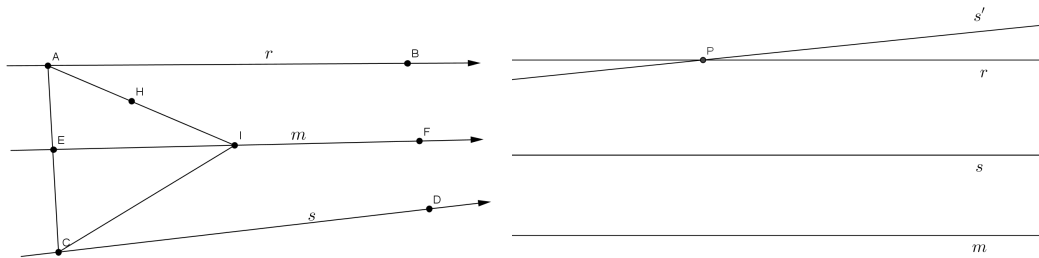


Figura 2.22: Propriedade transitiva do paralelismo- apoio para demonstração

- ii) Neste caso, considera-se que as retas r e s estão do mesmo lado em relação à reta m . Supõe-se que s seja a reta que esteja entre as outras duas. Considere um ponto $P \in r$, e uma reta s' passando por P paralela a m' na mesma direção de paralelismo. De acordo com o item (i) provado, s' é paralela a m . como r também é paralela a m e o paralelismo de r e s' é na mesma direção, conclui-se que $s' = r$, já que a paralela em uma direção é única. Consequentemente r é paralela a s .

Definição 7 Dizemos que duas semirretas s_1 e s_2 são paralelas se suas retas suportes assim o forem. Indica-se por $s_1 // s_2$.

É importante observar que no plano hiperbólico tem-se os **pontos ideais**, que não são pontos do plano hiperbólico, e os **pontos ordinários**, que são os pontos pertencentes ao plano hiperbólico.

Definição 8 (Triângulos Generalizados) Sejam:

- i) A e B pontos ordinários e Z_1 ponto ideal do plano hiperbólico. Denomina-se **triângulo generalizado** (ou triângulo com um vértice ideal ou triângulos ômeças) a figura geométrica formada pelas semirretas AZ_1 , BZ_1 e AB .
- ii) A um ponto ordinário e Z_1 e Z_2 pontos ideais do plano hiperbólico. Denomina-se **triângulo generalizado** (ou triângulo com um vértice ideal ou triângulos ômeças) a figura geométrica AZ_1Z_2
- iii) Z_1 , Z_2 e Z_3 pontos ideais do plano hiperbólico. Denomina-se **triângulo generalizado** (ou triângulo com um vértice ideal ou triângulos ômeças) a figura geométrica $Z_1Z_2Z_3$

Definição 9 Um **quadrilátero de Saccheri** é um quadrilátero no qual dois de seus lados opostos são congruentes e perpendiculares a um outro seu lado, chamado base. O lado oposto à base é chamado de topo.

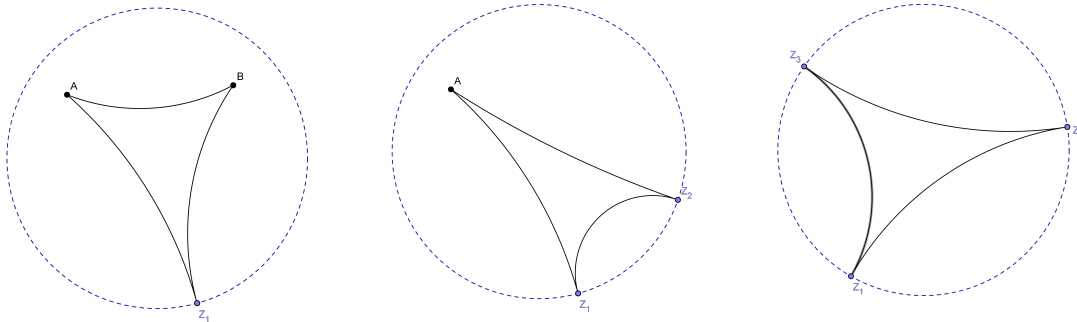


Figura 2.23: Triângulos Generalizados

Proposição 9 *A reta que une os pontos médios do topo e da base de um quadrilátero de Saccheri é perpendicular a ambos e os ângulos do topo são congruentes;*

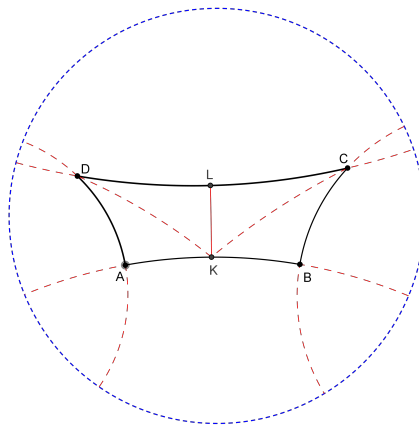


Figura 2.24: Quadrilátero de Saccheri- apoio para demonstração

Demonstração:

Seja $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri (figura 2.24), sendo \overline{AB} a base e K e L os pontos médios, respectivamente de \overline{AB} e \overline{DC} .

i) Primeiramente demonstrar-se-á que os ângulos do topo são congruentes ($\hat{D} \equiv \hat{C}$): ao traçar os segmentos \overline{KL} , \overline{CK} e \overline{DK} , observa-se que os triângulos Δ_{ADK} e Δ_{BCK} são congruentes, pois $\overline{AK} \equiv \overline{BK}$ (hipótese); $\hat{A} \equiv \hat{B}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. Daí, $\overline{CK} \equiv \overline{DK}$ e $\hat{ADK} \equiv \hat{BCK}$. Os triângulos Δ_{CKL} e Δ_{DKL} também são congruentes, pois $\overline{CK} \equiv \overline{DK}$; $\overline{CL} \equiv \overline{DL}$ (hipótese) e \overline{KL} é comum. Consequentemente, $\hat{KDL} \equiv \hat{KCL}$. Tem-se que $m(\hat{ADK}) + m(\hat{KDL}) = m(\hat{BCK}) + m(\hat{KCL})$, logo $\hat{ADC} \equiv \hat{BCD}$.

ii) Demonstrar-se-á que \overline{KL} é perpendicular à base \overline{AB} ($\overline{KL} \perp \overline{AB}$):

- Tem-se que $D\hat{K}L \equiv C\hat{K}L$ e $A\hat{B}K \equiv B\hat{K}C$;
- Como $m(A\hat{K}D) + m(D\hat{K}L) \equiv m(C\hat{K}L) + m(B\hat{K}C)$, segue que $m(A\hat{K}L) \equiv m(B\hat{K}C)$; Os ângulos $A\hat{K}L$ e $B\hat{K}L$ são congruentes e suplementares, logo são retos e $\overline{KL} \perp \overline{AB}$.

iii) De modo semelhante, demonstra-se que \overline{KL} é perpendicular ao topo \overline{CD} . Partindo-se da congruência dos triângulos Δ_{CKL} e Δ_{DKL} prova-se que os ângulos $C\hat{K}L$ e $D\hat{K}L$ são congruentes e retos.

Definição 10 *Um quadrilátero de Lambert é um quadrilátero com três ângulos internos retos.*

Proposição 10 *O ângulo não reto de um quadrilátero de Lambert é agudo.*

Demonstração

Seja $ABCD$ um quadrilátero de Lambert com $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} = 90^\circ$ (figura 2.25).

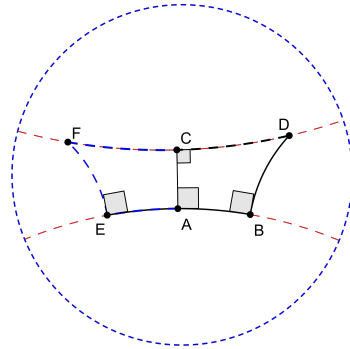


Figura 2.25: Quadrilátero de Lambert- apoio para demonstração

Seja $E \in \overleftrightarrow{AB}$ e $F \in \overleftrightarrow{CD}$ de tal modo que $\overline{EA} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{FC} \equiv \overline{CD}$, como mostra a figura. Observa-se que $EBD'F$ é um quadrilátero de Saccheri, pois $\hat{E} = 90^\circ$ e $\overline{FE} \equiv \overline{DB}$ por congruência de triângulos. Daí, $\hat{D} < 90^\circ$, como foi demonstrado anteriormente.

Proposição 11 *Seja um quadrilátero $ABCD$, com os ângulos \hat{A} e \hat{B} retos e $\overline{AD} < \overline{BC}$, então tem-se que $\hat{D} > \hat{C}$.*

Demonstração:

Seja D' um ponto sobre o segmento \overline{CB} tal que $\overline{AD} \equiv \overline{BD'}$, conforme mostra a figura 2.26.

Tem-se que os ângulos α e β são congruentes, pois o quadrilátero $ABDD'$ é de Saccheri.

Pelo teorema do ângulo externo tem-se que: $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma \Rightarrow \alpha + \delta > \gamma \Rightarrow \hat{D} > \hat{C}$.

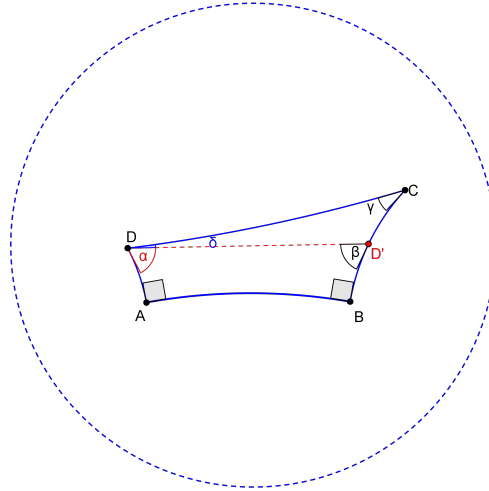


Figura 2.26: Ângulos e lados em um quadrilátero hiperbólico- apoio para demonstração

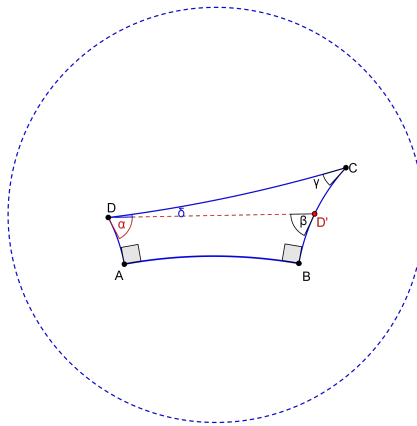


Figura 2.27: Ângulos e lados em um quadrilátero hiperbólico- apoio para demonstração

Proposição 12 *Seja um quadrilátero $ABCD$ (figura 2.27), com \hat{A} e \hat{B} retos e $\hat{C} < \hat{D}$, então tem-se que $\overline{BC} > \overline{AD}$.*

Demonstração:

Vamos supor os seguintes casos:

- i) Se $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$: o quadrilátero $ABCD$ seria de Saccheri, e conseqüentemente $\hat{C} \equiv \hat{D}$, gerando contradição.
- ii) $\overline{AD} > \overline{BC}$ (figura 2.28): seja o ponto $C' \in \overline{AD}$ de tal forma que $\overline{AC'} \equiv \overline{BC}$. Tem-se que o quadrilátero $ABC'D$ é de Saccheri, logo $\alpha = \beta$. Pelo teorema do ângulo externo, tem-se $\alpha > \gamma$. Conseqüentemente, $\beta > \gamma \Rightarrow \beta + \delta > \gamma \Rightarrow \hat{C} > \hat{D}$ (Contradição).

De i) e ii), chega-se a conclusão que $\overline{BC} > \overline{AD}$.

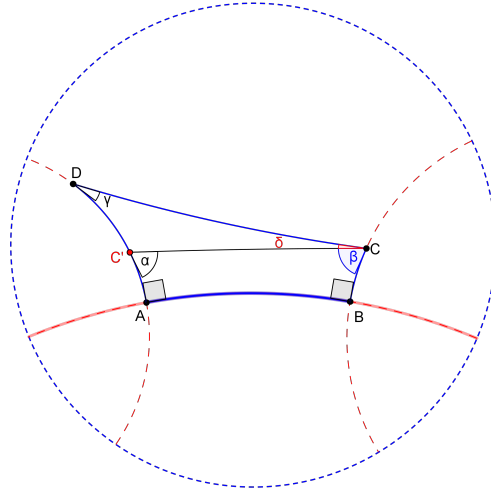


Figura 2.28: Quadrilátero hiperbólico- apoio para demonstração

Proposição 13 *Seja um quadrilátero $ABCD$ de Lambert, com os ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} retos, tem-se que os lados adjacentes ao ângulo agudo D são maiores do que seus respectivos lados opostos.*

Demonstração

Considerando um quadrilátero $ABCD$ de Lambert com os ângulos retos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} e o ângulo agudo D (figura 2.29). Queremos provar que $\overline{BC} < \overline{AD}$ e $\overline{AB} < \overline{CD}$. Vamos considerar os casos:

- i) Supondo que $\overline{BC} \cong \overline{AD}$, $ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri, daí os ângulos \hat{C} e \hat{D} são congruentes e agudos. Tem-se uma contradição, pois o ângulo \hat{C} é reto e o ângulo \hat{D} é agudo. Logo \overline{BC} não é congruente a \overline{AD} .
- ii) Supondo que $\overline{BC} > \overline{AD}$, tem-se que $\hat{C} < \hat{D}$, gerando uma contradição, pois \hat{C} é reto e \hat{D} é agudo. Logo \overline{BC} não é maior que \overline{AD} .

De (i) e (ii), tem-se que $\overline{BC} < \overline{AD}$. Analogamente, prova-se que $\overline{AB} < \overline{CD}$.

Definição 11 *Circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo denominado centro, que está inteiramente contido no plano hiperbólico.*

Definição 12 *Feixe de retas na geometria hiperbólica:*

- i) *feixe de retas paralelas: constituído de todas as retas do plano perpendiculares a uma mesma reta.*
- ii) *feixe de retas não secantes: constituído por todas as retas do plano paralelas entre si no mesmo sentido.*

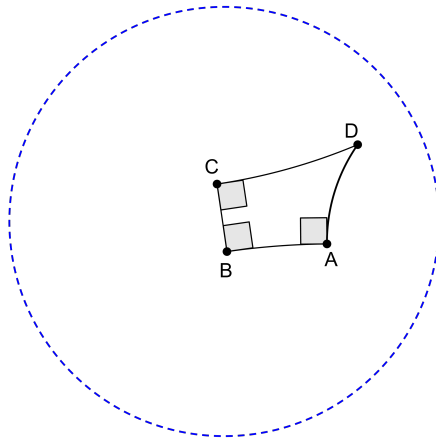


Figura 2.29: Relações no quadrilátero de Lambert- apoio para demonstração

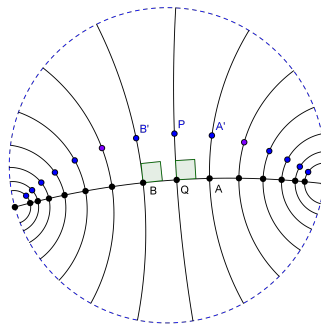


Figura 2.30: Hiper-círculo - pontos equidistantes da linha base do feixe

Definição 13 *Hiper-círculo* é a trajetória ortogonal de um feixe de retas paralelas com uma perpendicular comum, sendo o lugar geométrico dos pontos equidistantes a linha base do feixe, que estão do mesmo lado em relação a ela.

Definição 14 *Horocírculo* ou curva limitante, é a trajetória ortogonal de um feixe de retas com vértice num ponto ideal, sendo o lugar geométrico dos pontos equidistantes do ponto ideal O .

Observa-se que o horocírculo (figura 2.31) é determinado por um ponto Z_1 ideal, que é o centro localizado no infinito, e um ponto ordinário (no interior do disco hiperbólico). No “Disco de Poincaré”, o horocírculo possui a forma de uma circunferência euclidiana tangente à borda.

Proposição 14 A soma dos ângulos internos de um triângulo Δ_{ABC} é menor que 180° .

Demonstração:

Seja o triângulo hiperbólico Δ_{ABC} (figura 2.32), D e E os pontos médios de \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente.

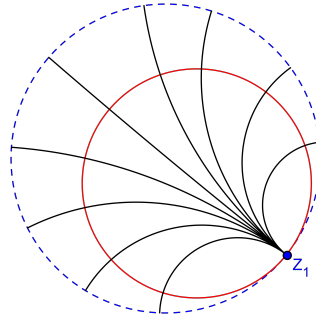


Figura 2.31: Horocírculo

Vamos fazer as construções: traça-se o segmento \overline{DE} ; traça-se pelo ponto B uma reta perpendicular à reta DE que a intercepta no ponto F ; traça-se pelo ponto C uma reta perpendicular à reta DE que a intercepta em G .

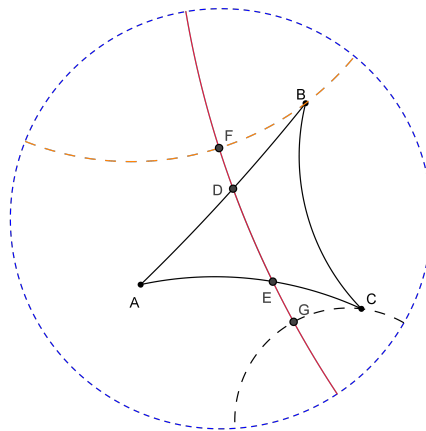


Figura 2.32: Soma dos ângulos do triângulo - apoio para demonstração

Observa-se que o quadrilátero $GFBC$ é um quadrilátero de Saccheri de base \overline{FG} . Como $m(\widehat{FBC}) + m(\widehat{GCB})$ é igual a medida dos ângulos internos do triângulo Δ_{ABC} , e $m(\widehat{FBC}) < 90^\circ$ e $m(\widehat{GCB}) < 90^\circ$, chega-se a conclusão que $m(\widehat{FBC}) + m(\widehat{GCB}) < 180^\circ$, ou melhor, a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor que 180° .

Definição 15 A *deficiência* de um triângulo qualquer ABC é a diferença entre 180° e a soma das medidas dos seus ângulos internos.

Proposição 15 A soma dos ângulos internos de um quadrilátero $ABCD$ é menor que 360° .

Demonstração:

Dado um quadrilátero $ABCD$ (figura 2.33), trace a diagonal AC e considere os triângulos Δ_{ABC} e Δ_{ACD} . A soma dos ângulos internos de cada um desses triângulos é menor que 180° , como fora mostrado anteriormente. Assumindo que no quadrilátero $ABCD$, a semirreta \overrightarrow{AC} está entre \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AD} e a semirreta \overrightarrow{CA} está entre \overrightarrow{CB} e \overrightarrow{CD} , então $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{BAD})$ e $m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BCD})$. Somando os seis ângulos, chega-se que a soma dos ângulos do quadrilátero $ABCD$ é menor que 360° .

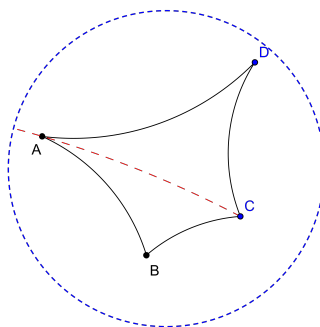


Figura 2.33: Soma dos ângulos do quadrilátero hiperbólico - apoio para demonstração

Proposição 16 *Se dois triângulos são semelhantes, então, são congruentes.*

Demonstração:

Vamos provar por contradição, assumindo que os triângulos Δ_{ABC} e $\Delta_{A'B'C'}$ são semelhantes, porém não congruentes (figura 2.34), significando que seus ângulos correspondentes são congruentes, mas seus lados correspondentes, não. Sem perda de generalidade, supõe-se que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ e $\overline{AC} > \overline{A'C'}$. Assim, pode-se encontrar o ponto B'' em \overline{AB} e o ponto C'' em \overline{AC} de modo que $\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{AC''} \cong \overline{A'C'}$. Então, pelo caso lado, lado, lado (LAL), o triângulo $\Delta_{A'B'C'}$ é congruente ao triângulo $\Delta_{AB''C''}$. Daí, $\widehat{AB''C''} \cong \widehat{B'}$ e $\widehat{AC''B''} \cong \widehat{C'}$. Assim, os segmentos \overline{BC} e $\overline{B''C''}$ são paralelos e o quadrilátero $BB''C''C$ é convexo e tem a soma de seus ângulos igual a 360° , o que contradiz o teorema da soma dos ângulos internos de um quadrilátero hiperbólico. Portanto, triângulos semelhantes são congruentes na geometria hiperbólica.

Observa-se que na geometria hiperbólica não existem triângulos semelhantes não congruentes, ou seja, é impossível ampliar ou reduzir um triângulo sem distorção.

Proposição 17 *A medida de um ângulo externo de um triângulo é maior que a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Proposição 18 *Duas retas que não se interceptam apresentam uma única perpendicular em comum.*

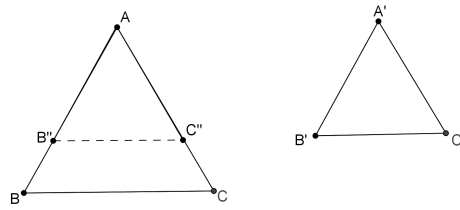


Figura 2.34: Triângulos semelhantes são congruentes - apoio para demonstração

Demonstração:

Sejam as retas m e n que não se interceptam. Considera-se dois pontos quaisquer A e B que pertençam a reta n , e por estes pontos traça-se os segmentos AC e BD perpendiculares à m . Caso, $\overline{AC} = \overline{BD}$, tem-se que o quadrilátero $ACDB$ é um quadrilátero de Saccheri. Consequentemente, m e n possuem uma perpendicular comum. Caso, \overline{AC} não for congruente a \overline{BD} , vamos supor que $\overline{AC} > \overline{BD}$. Vamos denotar por Z_1 o ponto ideal da semirreta \overrightarrow{AB} . Seja E um ponto pertencente à AC de modo que $\overline{EC} > \overline{BD}$, e H um ponto qualquer na semirreta \overrightarrow{CD} fora do segmento CD . Com o ponto F no quadrilátero $ACDB$ constrói-se os ângulos $\hat{C}EF$ e $\hat{D}BZ_1$ congruentes.

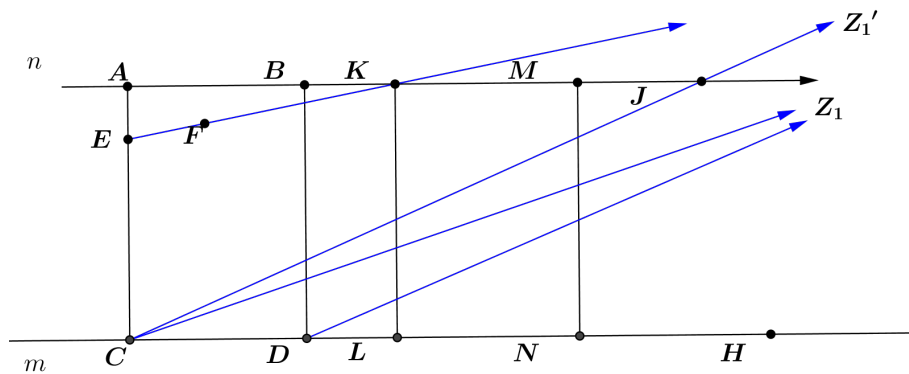


Figura 2.35: Perpendicular única à retas paralelas- apoio para demonstração

Para mostrar que a semirreta \overrightarrow{EF} intercepta n , considera-se as semirretas $\overrightarrow{CZ_1}$ e $\overrightarrow{DZ_1}$ que estão dentro dos ângulos \hat{ACH} e \hat{BDH} , respectivamente. Desde que $\hat{ACH} > \hat{BDH}$ (teorema do ângulo externo), pode-se traçar uma reta CJ , penetrando no ângulo $\hat{ACZ_1}$, tal que $\hat{HCJ} = \hat{HDZ_1}$, que interceptará a reta n em um ponto J .

Da análise das informações obtidas das figuras $FECJ$ e $JBDZ_1$ deduz-se que as semirretas \overrightarrow{EF} e \overrightarrow{CJ} são paralelas. Consequentemente, \overrightarrow{EF} intercepta a reta n em um ponto K situado entre A e J .

Traça-se o segmento KL perpendicular à reta m . Na semirreta $\overrightarrow{BZ_1}$, marca-se um ponto M tal que $\overline{MB} = \overline{EK}$. Na semirreta \overrightarrow{DH} , marca-se um ponto N tal que $\overline{ND} = \overline{CL}$. Traça-se MN . Por congruência de triângulos verifica-se que os quadriláteros $EKLC$ e $BMND$ são congruentes. Consequentemente, MN é perpendicular a m e $\overline{MN} = \overline{KL}$. Portanto, $KLMN$ é um quadrilátero de Saccheri e o resultado se segue.

Para provar a unicidade, basta observar que, caso existissem duas retas perpendiculares às duas retas, teria-se um quadrilátero com quatro ângulos retos, o que, é impossível na geometria hiperbólica [4].

Após o resgate dos principais resultados da geometria hiperbólica, será apresentada no próximo capítulo a possibilidade de inserção desses resultados aos alunos do ensino básico, por meio da aplicação de sequências didáticas a serem desenvolvidas com a utilização do software Geogebra.

Capítulo 3

Possibilidades Didáticas no Ensino das Geometrias

Propõe-se neste capítulo, uma análise das possibilidades da inserção das Geometrias Não-Euclidianas no currículo do Ensino Médio. Desta forma, apresenta-se sequências didáticas para que o professor do Ensino Médio possa desenvolver os conceitos das Geometrias num ambiente de Geometria Dinâmica. Entende-se por sequência didática como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos estudantes” [45]. As atividades propostas tem como finalidade habituar o educando às novas geometrias, neste caso a geometria hiperbólica e relacioná-la com a geometria euclidiana.

A proposta didática, que constitui-se de sequências didáticas dos conceitos básicos da geometria hiperbólica, foi aplicada por meio de uma oficina a vinte professores de matemática previamente inscritos. Os participantes atuam na rede estadual de ensino do estado do Amapá no ensino da disciplina de matemática na educação básica. Nesta oficina foram apresentados os conceitos básicos das geometrias euclidiana e hiperbólica por meio da utilização do software Geogebra.

A coleta de informação durante a oficina consistiu na aplicação de questionários semiestruturados para o pré e o pós teste e, na observação dos participantes no decorrer da realização das atividades solicitadas. Os participantes foram convidados a responder questionários que tinham por intuito diagnosticar os conhecimentos prévios acerca do tema a ser desenvolvido, no qual expressaram suas opiniões por meio de questões abertas e fechadas. Apresentou-se a problemática do trabalho por meio da contextualização histórica do desenvolvimento das geometrias não euclidianas e do ensino da geometria na educação básica. Os axiomas de Euclides, os conceitos

elementares da Geometria Hiperbólica e os modelos hiperbólicos foram os tópicos discutidos neste primeiro momento. A condução da oficina deu-se por meio da metodologia de resolução de problemas, na qual os participantes ao desenvolverem as sequências didáticas no ambiente do software Geogebra construíram suposições, resgataram conhecimentos e por fim formalizaram os conhecimentos. As primeiras atividades aplicadas (especificadas a seguir no decorrer do trabalho) oportunizaram aos participantes a familiarização com as ferramentas do software, tendo em vista que indicaram no pré-teste que não tinham experiência com o programa e que durante as suas formações não tiveram contato com as geometrias não euclidianas.

As sequências didáticas traziam questionamentos preliminares à exposição dos conceitos e propriedades da geometria hiperbólica para a verificação das estratégias e argumentos utilizados na solução dos problemas apresentados. Após a realização de cada atividade verificava-se e fazia-se a socialização dos resultados obtidos. A utilização do software geogebra foi fundamental nas construções geométricas, no teste de hipóteses, na visualização das propriedades geométricas, auxiliando na elaboração e aquisição do conhecimento, proporcionando momentos de experimentação e conjecturas. Verificou-se no término das atividades que as aquisições das definições e propriedades básicas da geometria hiperbólica quando comparadas as da geometria euclidiana deu-se de forma satisfatória, levando os participantes à reflexão quanto ao ensino das geometrias na Educação Básica. Observou-se que tanto o conhecimento das geometrias não euclidianas quanto à utilização do software utilizado, não faziam parte da prática pedagógica dos participantes.

Para a realização das sequências didáticas no software Geogebra utilizando o modelo hiperbólico “Disco de Poincaré” é necessário criar as ferramentas hiperbólicas, ou baixar o pacote das ferramentas, disponível no site “ www.geogebra.org/m/7005”. As justificativas em utilizar o software Geogebra dá-se principalmente por ser um “software livre”, de fácil manipulação, interação e visualização das propriedades das geometrias. Outra alternativa, é a utilização do software Cinderella, software de construções geométricas que oferece “régua e compasso”, já apresenta versão gratuita no site: www.cinderella.de/tiki-index.php. A vantagem do software Cinderella é que apresenta as interfaces para trabalhar nas geometrias euclidianas, hiperbólica e esférica. A seguir, será apresentado a proposta didática que foi utilizada na oficina com a utilização das ferramentas hiperbólicas disponível no software Geogebra.

3.1 Explorando as noções básicas das Geometrias Euclidiana e Hiperbólica

Ao introduzir os conceitos básicos da Geometria Hiperbólica é fundamental o resgate dos conhecimentos prévios da geometria euclidiana. Dessa forma, as atividades que seguem buscam primeiramente a sondagem dos conhecimentos prévios, a problematização com as propriedades da geometria hiperbólica e, a interação com o software a ser utilizado, neste caso, o Geogebra. Ao realizar as atividades no Geogebra, no plano euclidiano, desmarque a opção “eixos” no menu exibir. Para testar as propriedades no plano hiperbólico no Geogebra, utilize as ferramentas do menu hiperbólico e faça as atividades no “Disco de Poincaré” construído.

3.1.1 Conceitos geométricos primitivos

Intenções Educativas: sondar os conhecimentos prévios e, familiarizar o educando com construções elementares num ambiente de Geometria Dinâmica.

- a) Crie pontos, movimente-os, renomeie-os, mude a cor e a espessura; Para isso, selecione a opção “Ponto”(Janela 2) no Geogebra.
- b) É possível conceituar o que é um ponto? Na geometria hiperbólica, ponto é um conceito primitivo?

Considerações: o propósito desta atividade é focar que em ambas as geometrias, ponto é um conceito primitivo. Além do mais, permitir o manuseio e a interação das ferramentas que o software disponibiliza. Deve-se salientar que, no plano hiperbólico, os pontos que estão representados na borda do Disco de Poincaré, estão no infinito.

3.1.2 Segmento de Reta e Reta

Intenções Educativas: visualizar a representação geométrica de segmento de reta e reta na geometria euclidiana e na geometria hiperbólica;

Problematização: Qual é o caminho mais curto entre dois pontos?

- a) No plano euclidiano, marque dois pontos. Para isso, selecione a opção “Ponto” (Janela 2) no Geogebra. O Geogebra nomeará os pontos como A e B , caso queira renomeá-los clique com o botão direito do mouse e escolha a opção “Renomear”. Selecione a opção

“Segmento” (Janela 3) e clique sobre os pontos A e B . Movimente os pontos e, utilize a ferramenta “Distância, comprimento ou perímetro” (Janela 8) para medir a distância entre estes pontos. Como se nomeia o objeto geométrico construído?

- b) Repita o procedimento no plano hiperbólico. Para isso, utilize a ferramenta “Hyperbolic Segment”. Após construir o segmento hiperbólico, mova as extremidades do segmento e descreva em que locais do “Disco de Poincaré”, ele assemelha-se ao segmento euclidiano.
- c) Trace retas nos planos euclidiano e hiperbólico. Para isso, utilize a opção “Reta” (3ª janela) e a opção “Hyperbolic Line” no menu hiperbólico. Na geometria hiperbólica, as retas são infinitas?

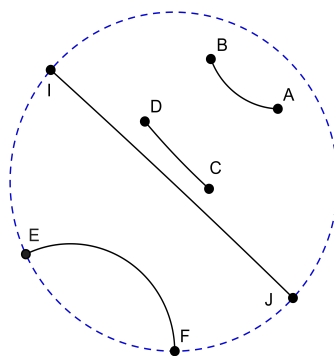


Figura 3.1: Retas e segmentos de retas hiperbólicas

- d) Dados os pontos A e B no plano hiperbólico, trace uma reta que passe pelos pontos dados. Sobre a reta marque os pontos C e D . Utilize a opção “ponto em objeto” (2ª janela). Verifique a distância entre os pontos, utilizando a ferramenta hiperbólica “Hyperbolic Distance”. Mova os pontos sobre a reta, de tal forma que as distâncias \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CD} sejam próximas. Observe se os comprimentos aparentemente parecem ter o mesmo comprimento. Imagine, se uma criatura fosse orientada a caminhar no sentido da fronteira do disco com passos de igual comprimento, para um observador do lado de fora qual seria a impressão quanto ao tamanho dos passos? Registre suas observações.

Considerações: na geometria hiperbólica, um segmento de reta é definido como um arco de circunferência que é ortogonal à circunferência do disco (Figura 3.1). Deve-se atentar que as retas no disco hiperbólico não são finitas, pois o limite do disco hiperbólico representa o infinito.

Isto significa que, se uma criatura for orientada no sentido da fronteira do disco com passos de mesmo comprimento, para um observador do lado de fora iria parecer que os passos estavam ficando progressivamente mais curtos. As distâncias no plano hiperbólico são distorcidas para quem visualiza com olhar euclidiano, ou seja, os segmentos possuem o mesmo comprimento hiperbólico apesar de parecerem diferentes. Observa-se também que, quando o segmento está mais longe do centro do disco ele parece mais curvado e, quando se aproxima do centro torna-se aparentemente ao segmento euclidiano (Figura 3.2). Espera-se que o educando manipule os elementos geométricos, explore as diferenças entre segmento de reta e reta quanto à finitude e limitabilidade e, por fim formalize os conceitos ao estabelecer as semelhanças e diferenças nas geometrias estudadas.

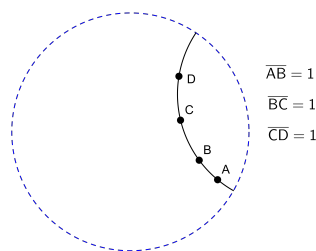


Figura 3.2: Distâncias no Disco de Poincaré

3.1.3 Retas hiperbólicas

Intenção Educativa: visualizar a quantidade de retas que passam por um ponto nas geometrias euclidiana e hiperbólica.

Problematizações:

- Dado um ponto A , quantas retas passam por ele?
- Dados dois pontos A e B , quantas retas distintas é possível traçar passando por A e B ?

Sequência Didática:

- a) Marque um ponto A , em ambos os modelos de geometria, e verifique quantas retas podem ser traçadas passando pelo ponto A .
- b) Agora, marque dois pontos A e B , sendo A distinto de B , trace retas distintas que passem por A e B . Visualize as retas traçadas nos modelos euclidiano e hiperbólico. A quantidade de retas traçadas é igual?

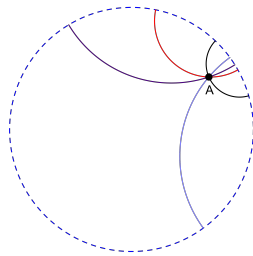


Figura 3.3: Infinitas retas hiperbólicas passando por um ponto A

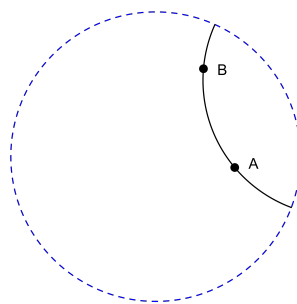


Figura 3.4: Reta hiperbólica passando por dois pontos dados

Considerações: deve-se verificar que em ambas as geometrias, por um ponto passam infinitas retas, e por dois pontos distintos A e B é possível traçar apenas uma reta, conforme mostram as figuras 3.3 e 3.4.

3.1.4 Paralelismo

Intenções Educativas: analisar a quantidade de pontos que duas retas distintas podem ter em comum;

Problematização: dadas duas retas distintas, quantos pontos elas podem ter em comum?

- a) No plano euclidiano, construa duas retas distintas a e b . Selecione a opção “Reta” (Janela 3) no Geogebra. Clique em dois pontos no plano e estará definida a reta a e, em seguida, construa a reta b da mesma forma. Movimente os pontos que definem cada reta e, verifique quantos pontos as retas podem ter em comum. Utilizando a opção “Interseção de Dois objetos” (Janela 2) é possível determinar a interseção das retas.
- b) Repita o procedimento no plano hiperbólico. Para isso, utilize a ferramenta “Hyperbolic Line” no menu hiperbólico. A interseção das retas é feita de modo semelhantes ao plano

euclidiano (Janela 2). Mova as retas hiperbólicas e observe se as retas podem interceptar-se em mais de um ponto.

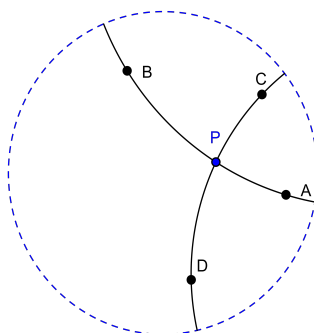


Figura 3.5: Ponto em comum de retas hiperbólicas

Considerações: na geometria hiperbólica, assim como na euclidiana, duas retas distintas podem interceptar-se em no máximo um ponto ou não terem ponto em comum (figura 3.5). Na formalização, pode-se apresentar a proposição: “*duas retas distintas ou não se intersectam ou se intersectam em um único ponto*”[5].

3.1.5 Construção de retas paralelas

Problematização: Como construir duas retas que não se intersectam?

Intenção Educativa: verificar se o “Postulado das Paralelas” é válido na Geometria Hiperbólica.

Sequência Didática:

- Construa uma reta a no plano euclidiano (selecione a opção “Reta” na janela 3). Marque no plano um ponto C que não esteja sobre a reta a . Construa uma reta b paralela a reta a passando por C . Para isso, pode-se utilizar a opção “Reta Paralela” (Janela 4) ou, utilizar a construção geométrica que será descrita a seguir. Analise quantas retas paralelas podem ser traçadas por A .
- Vamos realizar a mesma construção no “Disco de Poincaré”. De modo semelhante, construa uma reta p no plano hiperbólico (Menu hiperbólico, escolha “Hyperbolic Line”). Em seguida, marque um ponto P no interior do Disco e trace retas paralelas a reta p passando por P . Há quantas possibilidades de construção? O “Postulado das Paralelas” de Euclides é válido na Geometria Hiperbólica?

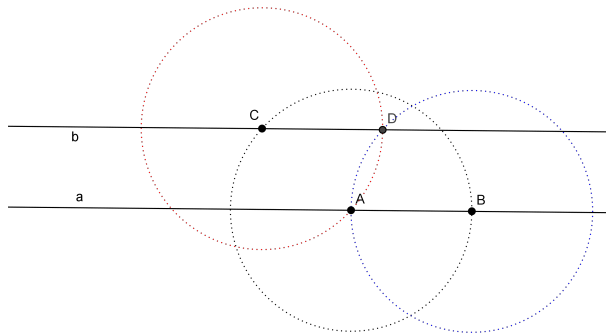


Figura 3.6: Construção de retas paralelas passando por um ponto externo A

Construção Geométrica:

No plano euclidiano, pode-se utilizar a sequência abaixo para a construção de retas paralelas (figura 3.6):

- Construa uma reta definida pelos pontos A e B. Selecione a opção “Reta” (Janela 3), clique sobre os dois pontos na área de trabalho para construir a reta.
- Trace uma circunferência com centro em A, passando por B (raio \overline{AB}). Selecione a opção “Círculo dados centro e um de seus Pontos” (Janela 6), clique sobre o ponto A e depois em B.
- Trace uma circunferência com centro em B e passando por A.
- Marque um ponto C sobre a circunferência centrada em A. Selecione a opção “Ponto em Objeto” (Janela 2) e clique sobre a circunferência com centro em A.
- Trace uma circunferência com centro C e raio \overline{AC} . Selecione a opção “Círculo dados centro e um de seus Pontos” (Janela 6), clique sobre o ponto A e depois em C.
- Marque o ponto D, interseção das circunferências centradas em C e B. Selecione a opção “Interseção de dois objetos” (Janela 2), clique sobre as duas circunferências.
- Trace a reta que passa pelos pontos C e D (Janela 3).
- Verifique que a reta que passa pelos pontos C e D é a reta procurada. Para visualizar, movimente os pontos e analise a posição entre as retas;

- Observe que, o polígono $CABD$ é um losango (as três circunferências construídas possuem o mesmo raio), daí seus lados opostos são paralelos.

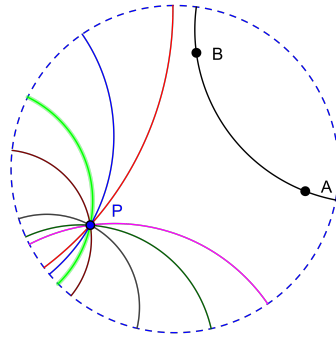


Figura 3.7: Infinitas retas hiperbólicas passando por um ponto A

Considerações: Nas geometrias euclidiana e hiperbólica, o conceito de retas paralelas é o mesmo, define-se que duas retas são paralelas quando não possuem ponto em comum. Deve-se retomar o conceito de retas paralelas na atividade e, verificar que o “Quinto Postulado” de Euclides não é válido na Geometria Hiperbólica. É possível observar que por um ponto exterior a uma reta hiperbólica passam infinitas retas paralelas (Figura 3.7). A partir desta atividade é possível fazer o resgate histórico das Geometrias não-euclidianas.

3.1.6 Ângulos

Problematização:

Qual a relação que pode-se estabelecer entre as medidas de ângulos opostos pelo vértice na Geometria Hiperbólica?

Intenção Educativa: verificar se os ângulos opostos pelo vértice são congruentes e se os ângulos adjacentes são suplementares, nas Geometrias Euclidiana e Hiperbólica;

Sequência Didática:

No plano euclidiano, trace duas retas que se interceptam, ou seja, concorrentes. Para isso:

- (i) Marque um ponto qualquer, digamos O (Janela 2). Utilizando a opção “Reta” (Janela 3), construa duas retas que passem por O , ponto de interseção das retas.
- (ii) Determine a medida dos ângulos formados entre as retas concorrentes. Para isso, utilize a opção “Ângulo” (Janela 8) do menu de ferramenta do Geogebra. Ao medir os ângulos

formados entre as retas sugere-se marcar pontos sobre as retas (opção “Ponto em objeto” na janela 2) e usar a ferramenta “ângulo”, clicando em três pontos que estejam sobre as semirretas que definem cada ângulo. Caso a medida do ângulo que aparecer não for a desejada, deve-se alterar o sentido da seleção dos pontos.

- (iii) Movimente as retas e verifique se a medida dos ângulos opostos pelo vértice são congruentes.
- (iv) O que pode-se concluir com relação aos ângulos opostos pelo vértice formados por um par de retas concorrentes no plano euclidiano?

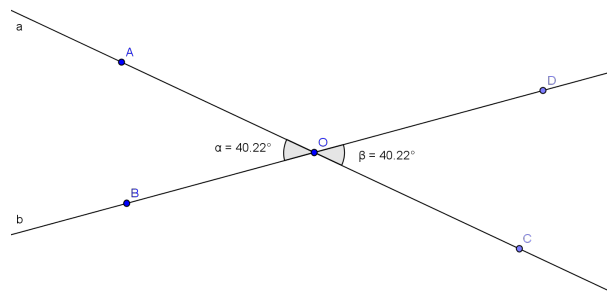


Figura 3.8: Ângulos opostos pelo vértice no plano euclidiano

- (v) No disco de Poincaré, marque um ponto O e construa duas retas concorrentes a e b hiperbólicas no ponto O (menu hiperbólico, opção “Hiperbolic Line”).
- (vi) Meça os pares de ângulos adjacentes e os pares de ângulos opostos pelo vértice. Lembrando que, para medir um ângulo no Disco hiperbólico deve-se utilizar no menu hiperbólico a opção “Angle” e selecionar três pontos que definem o ângulo. Marque pontos sobre as retas traçadas utilizando a opção “Ponto em objeto”(Janela 2).

Considerações: Deve-se verificar que os ângulos opostos pelo vértices são congruentes em ambas as geometrias. Quanto aos ângulos adjacentes, é possível observar que na Geometria Hiperbólica eles são suplementares.

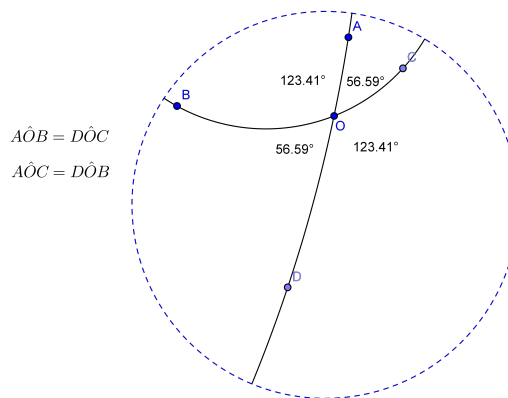


Figura 3.9: Ângulos opostos pelo vértice no plano hiperbólico

3.1.7 Construção geométrica de retas perpendiculares

Problematização: Dada uma reta qualquer e um ponto P fora desta reta, quantas retas perpendiculares a esta reta, passando por P , podem ser traçadas?

Intenção Educativa: construir retas perpendiculares nos planos euclidiano e hiperbólico;

Sequência Didática:

- a) Trace uma reta a no plano euclidiano. Marque um ponto P , de modo de P seja exterior à reta a . Construa uma reta perpendicular à reta a passando pelo ponto P . Para isso, pode-se utilizar a opção “reta perpendicular” (Janela 4) e selecionar o ponto P e a reta a . Utilizando a opção “ângulo” (Janela 8) seleciona-se as retas no sentido anti-horário para confirmar a medida do ângulo reto entre as retas. Caso opte-se pela construção geométrica com régua e compasso utilizando o Geogebra, pode-se utilizar uma das descrições que seguem.

Construção Geométrica - Dado um ponto P , construir uma reta perpendicular a uma reta r dada:

- Construa uma reta r . Selecione a opção “Reta” (Janela 3) e clique duas vezes sobre a área de trabalho. Aconselha-se ocultar os pontos utilizados para a construção da reta r (clicar com o botão direito do mouse sobre os pontos e desmarcar a opção “Exibir objeto”).

- Marque um ponto P que não pertença à reta r . Selecione a opção “Ponto” (Janela 2) e clique sobre a área de trabalho.
- Construa uma circunferência centrada em P com um raio qualquer cortando a reta r . Selecione a opção “Círculo dados centro e raio” (Janela 6), clique sobre o ponto P e digite uma medida x qualquer para o raio, de maneira que a circunferência intercepte a reta r .
- Marque as interseções da circunferência com a reta r , digamos os pontos A e B . Selecione a opção “Interseção de Objetos” (Janela 2) e clique sobre a circunferência e a reta. Caso necessário, renomeie os pontos.
- Construa uma circunferência com centro em A e mesmo raio com medida x .
- Construa uma circunferência com centro em B e mesmo raio com medida x .
- Determine o ponto de interseção das circunferências centradas em A e B , digamos o ponto Q . Selecione a opção “Interseção de dois objetos” (Janela 2) e clique sobre as circunferências (renomear o ponto, caso necessário).
- Construa a reta que passa pelos pontos P e Q . Selecione a opção “Reta” (Janela 3) e clique sobre os pontos P e Q .
- Movimente as retas e meça o ângulo entre elas. Selecione a opção “Ângulo” na janela 8, e clique sobre as retas. Verifica-se que a reta PQ é perpendicular à reta r (figura 3.10).

É importante a compreensão da construção geométrica, daí a importância em justificá-la [43]. Ao construir a primeira circunferência centrada em P tem-se que $\overline{PA} = \overline{PB}$. Ao construir as circunferências centradas em A e em B garante-se que $\overline{QA} = \overline{QB}$. Observe que os pontos P e Q pertencem à mediatriz do segmento AB passando pelo seu ponto médio, pois equidistam de A e B .

Construção Geométrica - retas perpendiculares:

- Construa uma reta a pelos pontos A e B . Para isso selecione a opção “Ponto” (Janela 2) e marque os pontos A e B . Selecione a opção “Reta” (Janela 3) e clique sobre os pontos A e B .

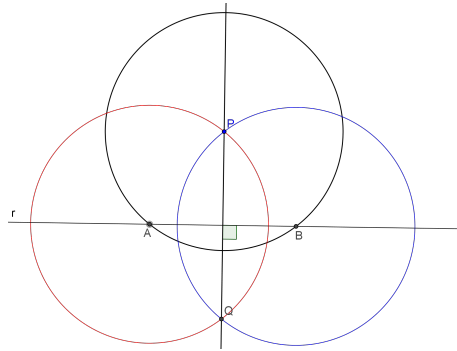


Figura 3.10: Reta perpendicular a uma reta r dada por um ponto P

- Construa uma circunferência centrada em A , passando por B . Selecione a opção “Círculo dados centro e um de seus Pontos” (Janela 6), clique sobre o ponto A e depois em B .
- Construa, da mesma forma, uma circunferência centrada em B , passando por A .
- Marque as interseções das duas circunferências traçadas, obtendo os pontos C e D . Selecione a opção “Interseção de dois objetos” (Janela 2) e clique sobre as circunferências.
- Trace uma reta que passa pelos pontos C e D . (Janela 3, opção “Reta”)
- Marque a interseção das duas retas.
- Movimente as retas e meça o ângulo entre as retas.

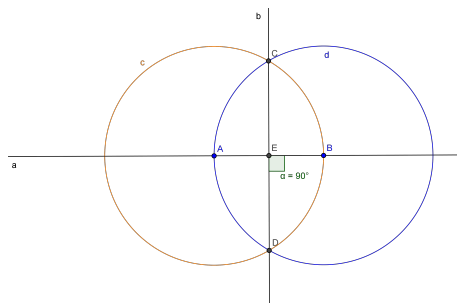


Figura 3.11: Construção geométrica de retas perpendiculares

- b) Trace uma reta hiperbólica p no “Disco de Poincaré” e marque um ponto A que não pertença a reta p . Pode-se construir uma reta q perpendicular a reta p pelo ponto A ? Caso seja possível, quantas perpendiculares podem ser traçadas? Para fazer a construção utilize as ferramentas hiperbólicas.

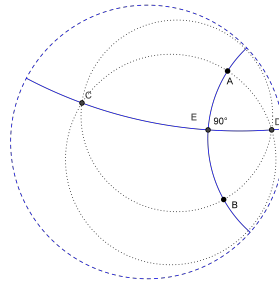


Figura 3.12: Reta hiperbólica perpendicular passando por A

Considerações: em ambas as geometrias, apenas uma reta perpendicular pode ser traçada por um ponto externo à reta dada (Figuras 3.10, 3.11 e 3.12).

3.1.8 Ângulos formados por retas paralelas interceptadas por uma transversal

Problematização:

A relação entre as medidas dos ângulos formados por duas retas paralelas interceptadas por uma transversal na geometria euclidiana é válida na Geometria hiperbólica?

Intenção Educativa: analisar a relação entre as medidas dos ângulos formados por duas retas interceptadas por uma transversal;

Sequência Didática:

- a) Construa um par de retas paralelas interceptadas por uma transversal no plano euclidiano:
 - Marque dois pontos A e B sobre o plano (Janela 2). Em seguida trace uma reta a (Janela 3) que passa pelos pontos A e B . Marque um ponto C , externo à reta a , e pelo ponto C trace uma reta b paralela à reta a (Janela 4). Por fim, trace uma reta c transversal às retas paralelas a e b , selecionando a opção “Reta” (Janela 3) e selecionando os pontos A e C .
 - Para medir os ângulos formados entre as retas no Geogebra deve-se selecionar no sentido anti-horário três pontos que estão localizados sobre as semirretas que definem o ângulo, sendo um deles o vértice do ângulo. Dessa forma, para não haver confusão nas medidas dos ângulos, marque pontos sobre as retas (opção “Ponto em Objeto” na Janela 2) para selecioná-los na medição dos ângulos. (Figura 3.13)

- Após medir os ângulos, estabeleça quais são os ângulos congruentes e quais são suplementares. Meça as amplitudes dos ângulos e verifique quais relações podem ser estabelecidas.

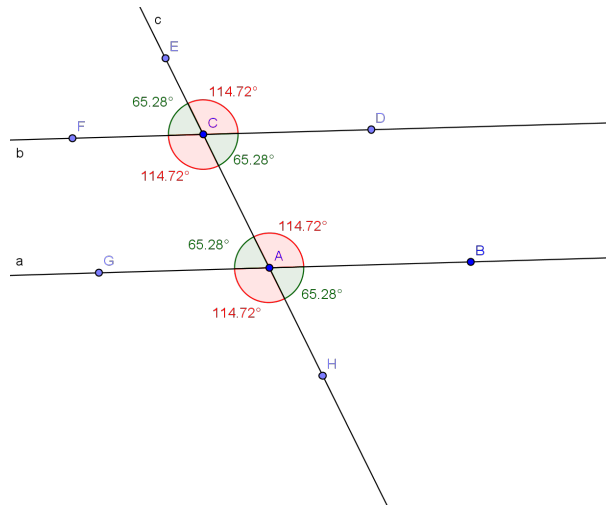


Figura 3.13: Retas paralelas interceptadas por uma transversal

- b) De modo semelhante, trace duas retas hiperbólicas p e q paralelas no “Disco de Poincaré” interceptadas por uma transversal. Neste caso, deve-se utilizar no Geogebra, o menu hiperbólico. Meça os ângulos formados entre as retas hiperbólicas e verifique se as relações estabelecidas entre os ângulos, na Geometria euclidiana, são válidas na Geometria hiperbólica.

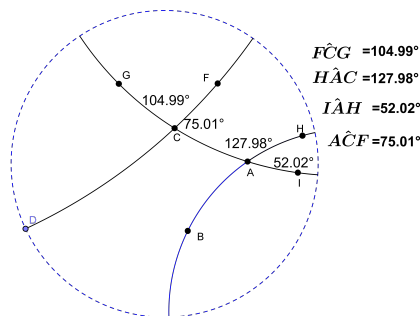


Figura 3.14: Retas hiperbólicas paralelas interceptadas por uma transversal

- c) Na Geometria Euclidiana, se uma reta transversal a duas retas paralelas for perpendicular a uma das duas, então é perpendicular a outra. Pode-se afirmar que na Geometria Hiperbólica é válido o enunciado acima? Construa duas retas paralelas no plano hiperbólico.

Trace uma reta perpendicular a uma das retas e verifique se ela também é perpendicular a outra.

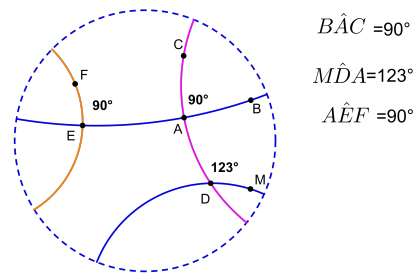


Figura 3.15: Retas hiperbólicas paralelas interceptadas por uma transversal perpendicularmente

- d) Quando duas retas são cortadas por uma reta transversal no plano euclidiano, se formarem ângulos correspondentes congruentes então são paralelas. Investigue se o mesmo é válido no plano hiperbólico.

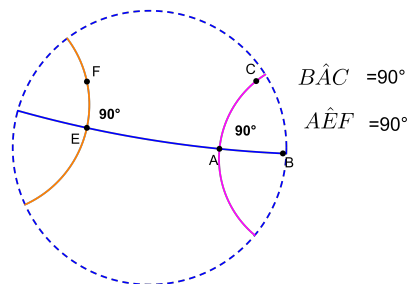


Figura 3.16: Ângulos correspondentes iguais nas retas hiperbólicas paralelas

Considerações: observa-se que na Geometria Hiperbólica, em geral:

- os ângulos correspondentes nem sempre são congruentes (Figura 3.14);
- os ângulos alternos nem sempre são congruentes;
- os ângulos colaterais nem sempre são suplementares;
- as retas paralelas não são equidistantes;

- quanto ao item (c), observa-se que em alguns casos a reta transversal de uma das retas paralelas não intercepta a outra. Caso intercepte as duas, se for perpendicular a primeira reta, nem sempre será perpendicular a segunda reta. Portanto, o teorema não é válido no plano hiperbólico (Figura 3.15).
- quanto a item (d), deve-se verificar que se os ângulos correspondentes forem congruentes então, as retas são paralelas no plano hiperbólico (Figura 3.16).

3.1.9 Paralelismo

Problematização:

Se duas retas são paralelas a uma terceira então, elas são paralelas entre si?

Intenção Educativa: analisar se duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si em ambas as geometrias;

Sequência Didática:

a) Vamos construir duas retas paralelas a uma terceira reta do seguinte modo:

- Construa uma reta a no plano euclidiano (Janela 3).
- Marque um ponto P no plano, que não pertença à reta a (Janela 2).
- Trace uma reta b paralela à reta a passando pelo ponto P (Selecione a opção “Reta paralela” na janela 4 e clique no ponto P e em seguida na reta a).
- Marque um ponto Q sobre o plano euclidiano, de modo que não pertença às retas a e b traçadas.
- Trace uma reta c paralela à reta a passando pelo ponto Q .
- As retas b e c são paralelas entre si?

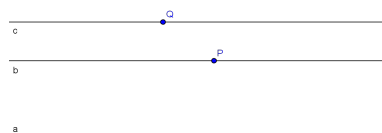
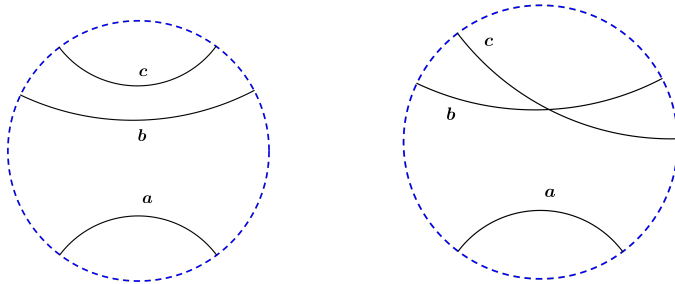


Figura 3.17: Retas paralelas a uma terceira no plano euclidiano

- b) De modo semelhante, construa duas retas b e c paralelas a uma terceira a no plano hiperbólico e, verifique se as retas a e c são paralelas entre si.



(a) Retas hiperbólicas paralelas (b) Retas hiperbólicas não paralelas a terceira

Considerações: almeja-se chegar a conclusão que no plano euclidiano, se duas retas são paralelas a uma mesma reta, então elas são paralelas entre si. No plano hiperbólico, no entanto, é possível que duas retas paralelas a uma terceira reta sejam paralelas ou não. Observa-se na figura 3.18(a) que as retas hiperbólicas c e b são paralelas a reta a e são paralelas entre si, enquanto que na figura 3.18(b) que as retas hiperbólicas b e c são ambas paralelas à reta a e não são paralelas entre si.

3.1.10 Circunferências Hiperbólicas

Problematização:

O que ocorre com a circunferência hiperbólica quando seu centro se aproxima da borda do “Disco de Poincaré”?

Intenção Educativa: construir circunferências nos planos euclidiano e hiperbólico;

Sequência Didática:

- a) O terceiro postulado de Euclides afirma que uma circunferência pode ser traçada com qualquer centro e qualquer raio. Construa circunferências no plano euclidiano de acordo com a definição. Selecione a opção “Ponto” (Janela 2) e clique em um ponto da janela de construção para criar o ponto A. Selecione a opção “Segmento definido por dois pontos” (Janela 3) e clique no ponto A e em outro lugar na janela de construção para criar o segmento AB . Selecione a opção “círculo definido pelo centro e um de seus pontos” (Janela 6) e clique no ponto A e no ponto B. Assim construiu-se uma circunferência de

raio \overline{AB} . Mova os pontos A ou B para alterar a posição e raio da circunferência construída. Defina com suas palavras o que é circunferência.

- b) Construa várias circunferências no plano hiperbólico com raio unitário, de modo que os centros das circunferências estejam localizadas em pontos distintos. Para isso, utilize a ferramenta hiperbólica “Hyperbolic circle w given radius”. Após selecionar a ferramenta, clique em um ponto qualquer no disco hiperbólico e digite “1” ao aparecer a janela solicitando a medida do raio. Observe o comportamento das circunferências ao movê-las sobre o plano hiperbólico.

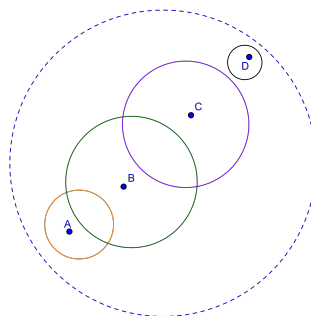


Figura 3.18: Circunferências hiperbólicas com raio unitário

- c) Dados os pontos A e B no plano hiperbólico, construa uma circunferência com centro em A e raio \overline{AB} . Sobre a circunferência construída, marque um ponto C . Verifique qual é a distância do ponto C ao centro da circunferência. Mova o ponto C sobre a circunferência e verifique se essa distância é conservada.

Considerações: Deve-se enfatizar que as distâncias euclidianas não são conservadas na geometria hiperbólica. Todos os pontos da circunferência estão à mesma distância do centro no plano hiperbólico. Observa-se que o centro da circunferência euclidiana difere da euclidiana. Ao mover as circunferências o educando deve perceber que as circunferências hiperbólicas, apesar de terem o mesmo raio, aparentam ter tamanhos diferentes, como pode ser visto na figura 3.18.

3.2 Triângulos

3.2.1 Triângulo Equilátero

Problematização:

É possível construir um triângulo equilátero no plano hiperbólico?

Intenção Educativa: apresentar a construção geométrica de um triângulo equilátero no plano hiperbólico;

Sequência Didática:

Vamos construir triângulos equiláteros nos planos euclidiano e hiperbólico seguindo o roteiro:

- Marque dois pontos A e B ;
- Construa uma circunferência com centro em A , passando por B (Selecione a opção “Círculo dados centro e um de seus pontos” na janela 6).
- Construa uma circunferência com centro em B , passando por A .
- Marque o ponto C , uma das interseções das circunferências (Selecione a opção “Interseção de dois objetos” na janela 2 e clique sobre as circunferências).
- Trace os segmentos \overline{AB} , \overline{AD} e \overline{BD} .
- Como classifica-se o triângulo ABC construído quanto à medida dos lados e ângulos?
- Ao repetir o procedimento no plano hiperbólico, verifique se as medidas dos lados e ângulos do triângulo são congruentes. Para isso, utilize as ferramentas do menu hiperbólico no Geogebra.

Considerações: o procedimento de construção é válido para a construção de triângulos equiláteros no plano hiperbólico. Observe, que o triângulo equilátero possui todos os lados e ângulos congruentes, porém diferentemente da geometria euclidiana, a medida dos ângulos variam (figura 3.19).

3.2.2 Triângulo Isósceles

Problematização:

As propriedades do triângulo isósceles são válidas na Geometria Hiperbólica?

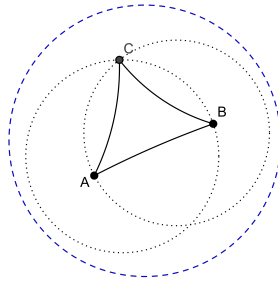


Figura 3.19: Triângulo equilátero hiperbólico

Intenção Educativa: utilizar os procedimentos de construção geométrica euclidiana do triângulo isósceles no Disco de Poincaré, retomar as propriedades do triângulo isósceles na geometria euclidiana e verificar se os mesmos são válidos na Geometria Hiperbólica;

Sequência Didática:

Vamos utilizar os procedimentos para construir triângulos isósceles nos planos euclidiano e hiperbólico:

- Marque dois pontos, digamos A e B ;
- Trace o segmento \overline{AB} , que será a base do triângulo isósceles (selecione a opção “Segmento” na Janela 3 e clique duas vezes na área de trabalho);
- Trace a reta mediatriz do lado \overline{AB} (pode-se utilizar a opção “Mediatriz” na Janela 4);
- Marque o ponto C sobre a mediatriz (selecione a opção “Ponto em Objeto” na Janela 2 e clique sobre a mediatriz);
- Trace os segmentos \overline{AB} , \overline{AD} e \overline{BD} .
- Como classifica-se o triângulo ABC construído quanto à medida dos lados e ângulos?
- Mova o ponto C sobre a mediatriz e, verifique se o triângulo ABC é isósceles.
- Ao repetir o procedimento no plano hiperbólico, verifique se as medidas dos lados e ângulos do triângulo são congruentes. Para isso, utilize as ferramentas do menu hiperbólico no Geogebra.

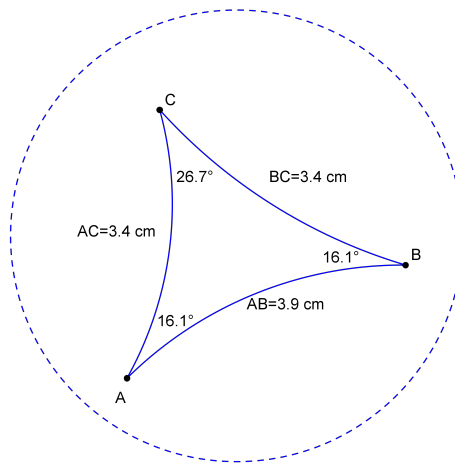


Figura 3.20: Triângulo isósceles hiperbólico

Considerações: o educando verificará que um triângulo isósceles possui os ângulos da base congruentes e, dois lados com medidas congruentes, apesar de no plano hiperbólico sua aparência ser diferente (figura 3.20).

3.2.3 Triângulo Retângulo

Problematização:

Como construir um triângulo retângulo no plano hiperbólico?

Intenção Educativa: utilizar os procedimentos de construção geométrica euclidiana do triângulo retângulo no Disco de Poincaré, retomar as propriedades do triângulo retângulo na geometria euclidiana e verificar se os mesmos são válidos na Geometria Hiperbólica;

Sequência Didática:

Vamos utilizar os procedimentos descritos abaixo para construir triângulos retângulos nos planos euclidiano e hiperbólico:

- Marque dois pontos, digamos A e B ;
- Construa o segmento \overline{AB} ;
- Construa uma circunferência centrada em A , passando por B .
- Construa uma circunferência centrada em B , passando por A ;
- Marque os pontos C e D , pontos de interseção das circunferências traçadas.

- Construa o segmento \overline{CD} ;
- Marque o ponto E , interseção dos segmentos hiperbólicos \overline{CD} e \overline{AB} ;
- Marque um ponto F sobre o segmento \overline{CE} ;
- Construa o polígono AFE ;
- Meça o ângulo $\hat{A}EF$ do triângulo AEF .
- Esconda os objetos que foram utilizados na construção, com exceção do triângulo AEF ;
- Ao repetir o procedimento no plano hiperbólico, verifique se o triângulo ABC construído é retângulo, movimente-o no plano hiperbólico analisando sua aparência. Para isso, utilize as ferramentas do menu hiperbólico no Geogebra.

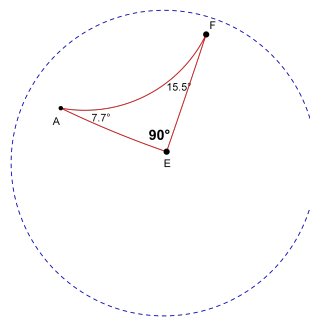


Figura 3.21: Triângulo retângulo hiperbólico

Considerações: deve-se observar um triângulo retângulo hiperbólico, que possui um ângulo reto, apesar de, no plano hiperbólico sua aparência ser diferente (figura 3.21).

3.2.4 Soma dos ângulos internos do triângulo

Problematização:

A soma dos ângulos internos de um triângulo na superfície hiperbólica é 180° ?

Intenção Educativa: deduzir a soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano qualquer e verificar se o mesmo é válido para um triângulo hiperbólico qualquer;

Sequência Didática:

Utilize a sequência abaixo, nos planos euclidiano e hiperbólico, a fim de comparar os resultados:

- Construa um triângulo ABC : no plano euclidiano, selecione a opção “Polígono” (Janela 5). Clique em três lugares distintos para criar os vértices do triângulo e na quarta vez no ponto inicial para fechar o polígono.
- Meça os ângulos internos do triângulo. Para isso, selecione a opção “Ângulo” (Janela 8). Clique sobre as retas adjacentes ao ângulo para que seja mostrado a medida do ângulo interno. Caso o programa mostre a medida do ângulo externo, altere a ordem de seleção das retas, ou clique com o botão direito do mouse em cima do ângulo, selecione a opção “Propriedades” e desmarque a opção “Permite ângulos maiores que 180° ”.
- Digite no campo de entrada: $\alpha + \beta + \gamma$ (utilizando as letras gregas ao lado do comando). Aperte a tecla “ENTER”. Observe que deverá aparecer no campo de Objetos Independentes uma variável igual a 180° .
- Selecione a opção “Mover” (Janela 1) e movimente os vértices do triângulo.
- O que pode-se observar quanto a soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano?
- Ao repetir o procedimento no plano hiperbólico, construa o triângulo ABC com segmentos hiperbólicos e, utilize as ferramentas do menu hiperbólico para realizar a medida dos ângulos.
- Mova os vértices do triângulo sobre o plano hiperbólico e analise a soma dos ângulos internos. Como deve ser o triângulo para que a soma dos ângulos aproxime-se de 180° ?

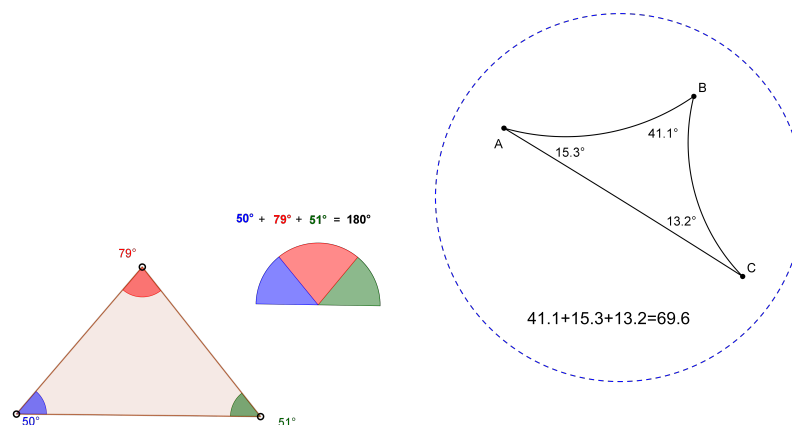


Figura 3.22: Soma dos ângulos internos do triângulo

Considerações: verifica-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano é 180° , enquanto que na Geometria Hiperbólica o mesmo não é válido, sendo a soma menor que 180° (figura 3.22). A soma se aproxima de 180° quando o triângulo aproxima-se do centro do “Disco de Poincaré”. Pode-se desenvolver a demonstração no plano euclidiano:

- Construa um triângulo qualquer $\triangle ABC$;
- Trace as retas suportes dos lados dos triângulos;
- Construa uma reta paralela ao segmento \overline{BC} passando pelo vértice A ;
- Para auxiliar na medição dos ângulos, marque os pontos D e E na reta paralela traçada, de modo que o ponto A esteja entre D e E ;
- Meça os ângulos internos do triângulo ABC , e os ângulos $B\hat{A}D$ e $C\hat{A}E$;
- Compare as medidas dos pares de ângulos $B\hat{A}D$ com $A\hat{B}C$, $C\hat{A}E$ com $B\hat{C}A$; Observe que os pares de ângulos são alternos internos em relação às retas paralelas traçadas, logo são congruentes;
- Observe que $A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = B\hat{A}D + C\hat{A}E + C\hat{A}B = 180^\circ$, como queríamos (figura 3.23).

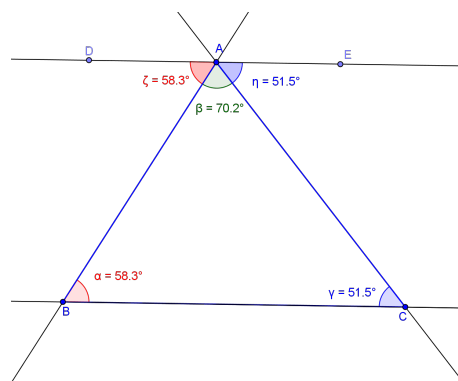


Figura 3.23: Demonstração da soma dos ângulos internos do triângulo

3.2.5 Ângulos externos do triângulo

Problematização:

Em um triângulo euclidiano, a medida do ângulo externo é igual a soma dos outros dois ângulos internos não adjacentes a ele. Em um triângulo hiperbólico ocorre o mesmo?

Intenção Educativa: verificar se a propriedade do ângulo externo à um triângulo é válido no plano hiperbólico.

Sequência Didática:

Primeiramente, vamos retomar a propriedade no plano euclidiano e, em seguida, testar nos triângulos hiperbólicos:

- Construa um triângulo ABC : no plano euclidiano, selecione a opção “Polígono” (Janela 5). Clique em três lugares distintos para criar os vértices do triângulo e na quarta vez no ponto inicial para fechar o polígono.
- Prolongue um dos lados do triângulo, digamos \overline{BC} . Construa uma semirreta que passa pelos pontos B e C . Selecione a opção “Semirreta” (Janela 3) e clique nos pontos B e C .
- Meça os ângulos internos do triângulo ABC ; Meça também o ângulo externo do ângulo C . Para isso, selecione a opção “Ângulo” (Janela 8). Clique sobre as retas adjacentes ao ângulo para que seja mostrado a medida do ângulo interno.
- Digite no campo de entrada: $\alpha + \beta =$ (utilizando as letras gregas ao lado do comando). Aperte a tecla “ENTER”. Observe que deverá aparecer no campo de Objetos Independentes uma variável igual a soma dos ângulos internos A e B .
- Selecione a opção “Mover” (Janela 1) e movimente os vértices do triângulo, analisando a relação da soma das medidas dos ângulos internos A e B com a medida do ângulo externo C .
- O que pode-se concluir em relação a soma dos ângulos internos não adjacentes a um ângulo externo?
- Ao repetir o procedimento no plano hiperbólico, construa o triângulo ABC com segmentos hiperbólicos e, utilize as ferramentas do menu hiperbólico para realizar a medida dos ângulos.

- Mova os vértices do triângulo sobre o plano hiperbólico e analise se a propriedade do ângulo externo é válida.

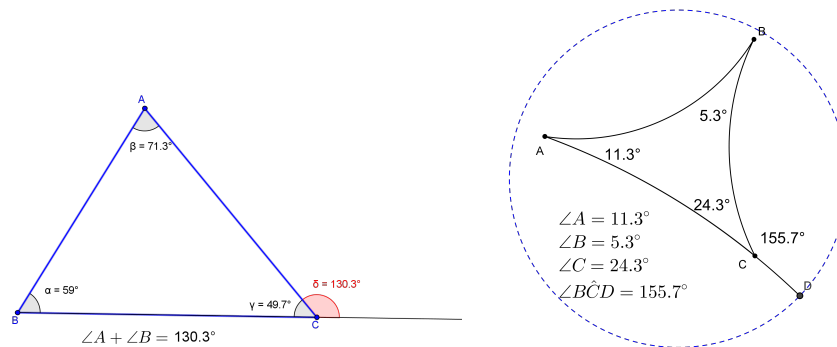


Figura 3.24: Ângulo externo de um triângulo

Considerações: verifica-se que a propriedade do ângulo externo só é válida na geometria euclidiana (figura 3.24). Pode-se desenvolver a construção geométrica no plano euclidiano para demonstrar a propriedade do ângulo externo:

- Construa um triângulo qualquer $\triangle ABC$ (figura 3.25).
- Prolongue um dos lados do triângulo, digamos \overline{BC} . Construa uma semirreta que passa pelos pontos B e C . Selecione a opção “Semirreta” (Janela 3) e clique nos pontos B e C .
- Sobre a semirreta traçada, marque um ponto D de modo que C fique entre B e D .
- Construa uma reta paralela ao segmento \overline{AB} passando pelo vértice C .
- Marque um ponto E sobre a reta paralela traçada, de modo que a semirreta \vec{CE} divida o ângulo \hat{ACD} em dois ângulos, \hat{ACE} e \hat{ECD} .
- Meça os ângulos internos do triângulo $C\hat{B}A$, $B\hat{A}C$, e os ângulos \hat{ACE} e \hat{ECD} .
- Observe que os ângulos \hat{ECD} e $C\hat{B}A$ são congruentes, pois são correspondentes.
- Observe que os ângulos \hat{ACE} e $B\hat{A}C$ são congruentes, pois são alternos internos.
- Daí, chega-se que $\hat{ACD} = \hat{ACE} + \hat{ECD} = B\hat{A}C + C\hat{B}A$, como queríamos.

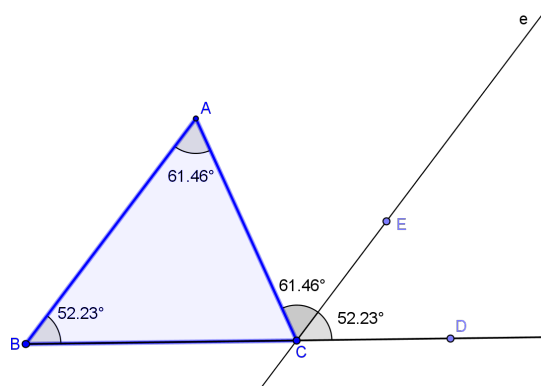


Figura 3.25: Demonstração da propriedade de um ângulo externo ao triângulo

3.3 Pontos Notáveis do Triângulo

Problematização:

Quais pontos notáveis é possível construir em um triângulo hiperbólico?

Intenção Educativa: construir os pontos notáveis nos triângulos euclidiano e hiperbólico;

Sequência Didática:

a) Baricentro

- Construa um triângulo ABC. Selecione a opção “Polígono” (Janela 5), clique em três lugares distintos para criar os vértices do triângulo ABC e uma quarta vez no ponto inicial para fechar o triângulo;
- Determine o ponto médio de cada lado do triângulo. Selecione a opção “Ponto Médio” (Janela 2) e clique sobre os pontos A e B para marcar o ponto médio D do lado \overline{AB} e, assim sucessivamente marque os pontos E e F sobre os lados \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente;
- Construa a mediana relativa ao lado AB do triângulo. Selecione a opção “Segmento”(Janela 3) e crie o segmento com extremidades no ponto D e no vértice C.
- Construa a mediana relativa ao lado BC do triângulo. Selecione a opção “Segmento”(Janela 3) e crie o segmento com extremidades no ponto E e no vértice A.
- Construa a mediana relativa ao lado AC do triângulo. Selecione a opção “Segmento”(Janela 3) e crie o segmento com extremidades no ponto B e no vértice F.

- Marque o ponto de interseção das três medianas. Selecione a opção “Interseção de dois objetos” (Janela 2) e crie o ponto G . Como denomina-se o ponto G ?
- Mova os vértices do triângulo e verifique qual é a relação entre as medidas dos pares de segmentos \overline{AG} com \overline{GE} , \overline{BG} com \overline{GF} , \overline{CG} com \overline{GD} . Meça estes segmentos e registre suas conclusões.
- Ao repetir o procedimento no plano hiperbólico, verifique se as relações verificadas no plano euclidiano são válidas no plano hiperbólico. Para isso, utilize as ferramentas do menu hiperbólico no Geogebra.

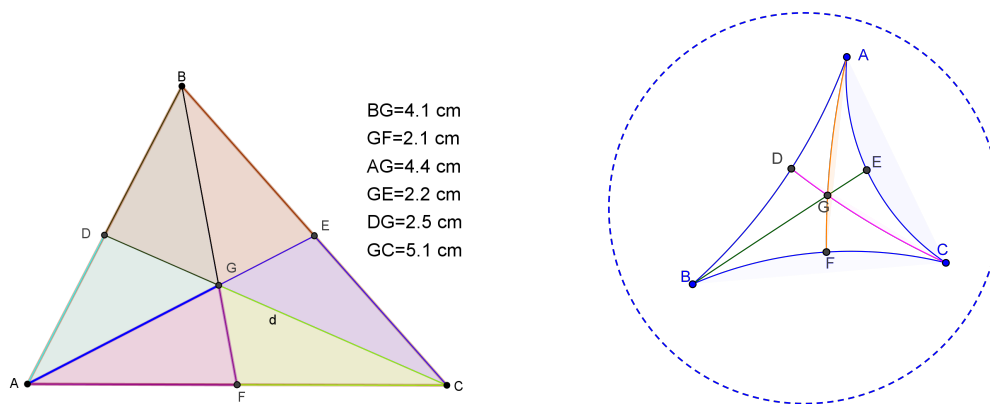


Figura 3.26: Baricentro de um triângulo

b) Incentro

- Construa um triângulo ABC. Selecione a opção “Polígono” (Janela 5), clique em três lugares distintos para criar os vértices do triângulo ABC e uma quarta vez no ponto inicial para fechar o triângulo;
- Selecione a opção “Bissetriz” (Janela 4) e crie as bissetrizes de dois ângulos internos do triângulo.
- Marque a interseção I das bissetrizes. (Selecione a opção “Interseção de Objetos”(Janela 2);
- Construa a bissetriz do outro ângulo interno do triângulo. Observe que ela passa pelo ponto I ;

- Marque as interseções entre cada bissetriz com o respectivo lado do triângulo. Em seguida, selecione a opção “Segmento” e ligue o vértice A com o ponto de interseção entre a reta bissetriz e o lado oposto do vértice A , ou seja, crie os segmentos \overline{AG} , \overline{BE} , \overline{CF} ;
- Esconda as bissetrizes, selecionando a opção “Esconder/exibir objeto” (Janela 11) e clicando em todas as retas.
- Construa uma reta perpendicular ao lado \overline{AB} passando por I . Selecione a opção “Reta perpendicular” (Janela 4);
- Marque o ponto T , interseção da reta perpendicular com o lado AB ;
- Construa uma circunferência com centro em I e passando pelo ponto T . Selecione a opção “Circunferência definida pelo centro e um de seus pontos”(Janela 6);
- Esconda a reta perpendicular, e obtenha a interseção da circunferência com os outros lados do triângulo;
- Mova os vértices do triângulo e, verifique se a circunferência fica inscrita no triângulo. Como denomina-se o ponto I ?
- Analogamente, utilizando as ferramentas hiperbólicas, verifique se é possível construir uma circunferência inscrita em um triângulo hiperbólico.

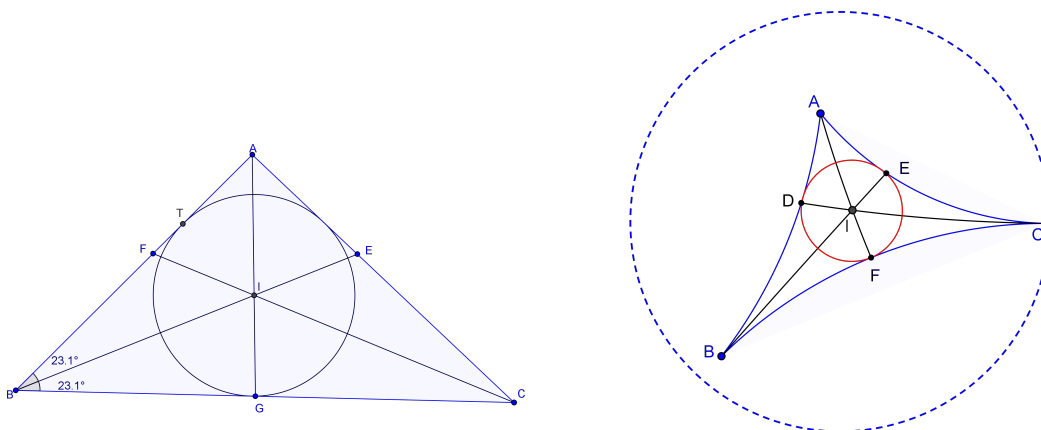


Figura 3.27: Incentro de um triângulo

c) Circuncentro

- Construa um triângulo ABC . Selecione a opção “Polígono” (Janela 5), clique em três lugares distintos para criar os vértices do triângulo ABC e uma quarta vez no ponto inicial para fechar o triângulo.
- Selecione a opção “Mediatriz” (Janela 4) e crie as mediatrizes de dois lados do triângulo. Como pode-se definir mediatriz?
- Marque a interseção M das mediatrizes. Selecione a opção “Intersão de Objetos” (Janela 2).
- Construa a mediatriz do outro lado do triângulo. Observe que ela passa pelo ponto M .
- Esconda as mediatrizes, selecionando a opção “Esconder/exibir objeto” (Janela 11) e clicando em todas as mediatrizes.
- Construa uma circunferência com centro em M e passando pelo ponto A . Selecione a opção “Circunferência definida pelo centro e um de seus pontos” (Janela 6). A circunferência passa pelos pontos B e C ?
- Observe que M é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC . Como denomina-se o ponto M ?
- Meça os ângulos do triângulo e, mova os vértices do triângulo ABC . Quando o ponto M (circuncentro) será interno, externo ou estará sobre um dos lados do triângulo?
- Analogamente, utilizando as ferramentas hiperbólicas, verifique se é possível construir uma circunferência circunscrita a um triângulo hiperbólico.

d) Reta de Simson

- Construa um triângulo ABC .
- Determine o circuncentro do triângulo ABC .
- Construa a circunferência circunscrita ao triângulo ABC .
- Marque um ponto P sobre a circunferência.
- Construa uma reta perpendicular ao lado AB do triângulo, passando pelo ponto P . Para isso, selecione a opção “Reta perpendicular” (Janela 4), clique no ponto P e no segmento \overline{AB} . De modo semelhante, construa retas perpendiculares aos lados BC e AC passando pelo ponto P .

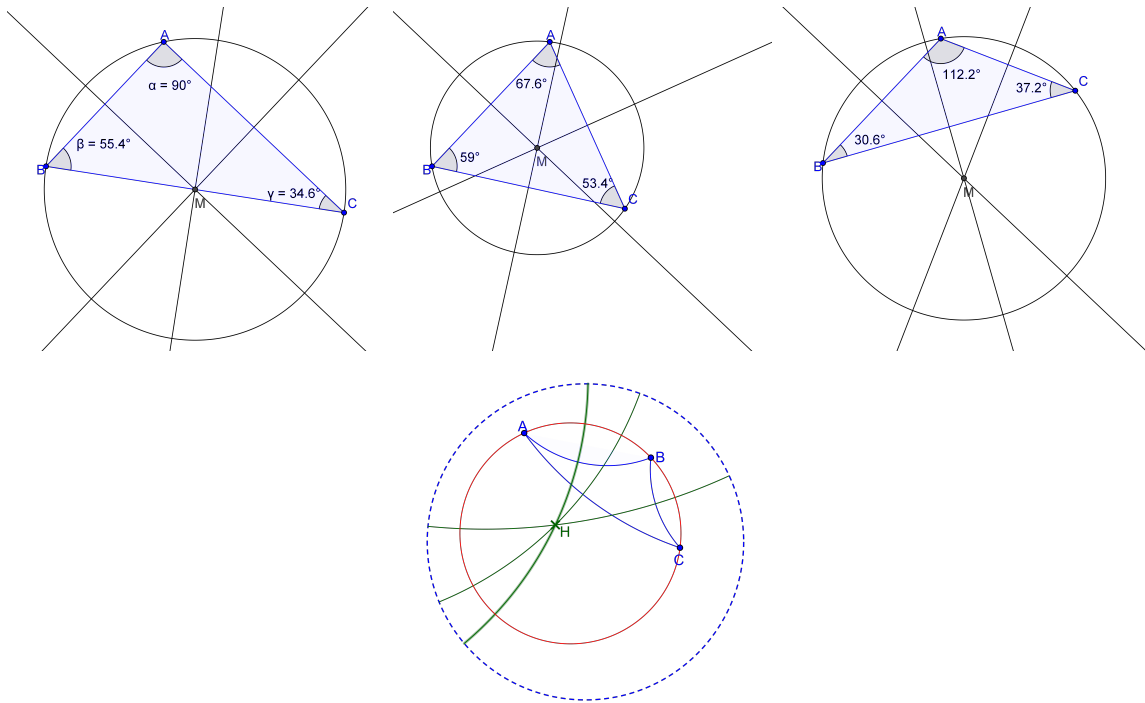


Figura 3.28: Localização dos circuncentros nos triângulos

- Marque os pontos de interseção de cada reta construída com o respectivo lado perpendicular. Por exemplo, ao selecionar a opção “Interseção de objetos” (Janela 2), clique sobre o segmento de reta \overline{AB} e sobre a reta perpendicular a AB construída.
- Selecione a opção “Reta” e clique em dois pontos de interseção criados anteriormente. Observe que os três pontos são colineares. Esta reta é denominada “Reta de Simson”.
- Mova os vértices do triângulo e verifique a posição da reta de Simson.
- Analogamente, utilizando as ferramentas hiperbólicas, verifique se é possível construir a reta de Simson no plano hiperbólico.

e) Ortocentro

- Construa um triângulo ABC. Selecione a opção “Polígono” (Janela 5), clique em três lugares distintos para criar os vértices do triângulo ABC e uma quarta vez no ponto inicial para fechar o triângulo;
- Selecione a opção “Reta perpendicular”(Janela 4), construa uma reta perpendicular ao lado AB passando por C, uma reta perpendicular ao lado AC passando por B,

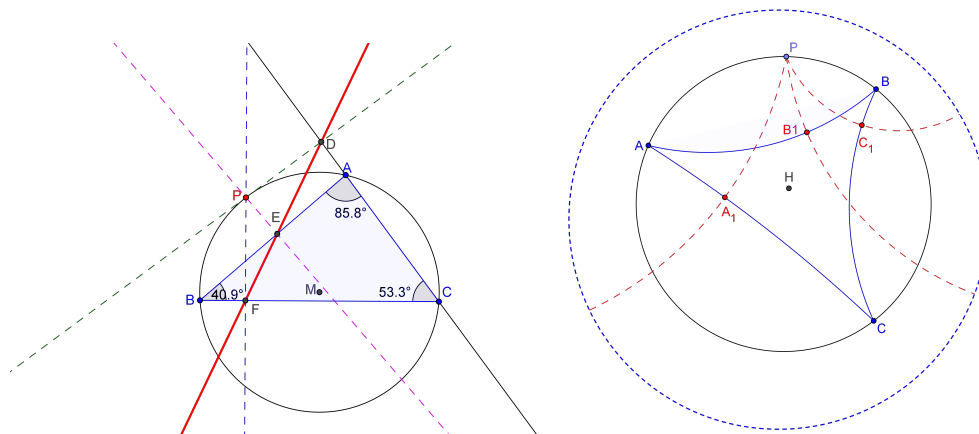


Figura 3.29: Reta de Simson

uma reta perpendicular ao lado BC passando pelo vértice A . Como denominam-se estes segmentos?

- Marque a interseção O das alturas do triângulo (selecione a opção “Intersão de Objetos” na Janela 2). Como denomina-se o ponto de interseção das alturas?
- Verifique a medida dos ângulos internos do triângulo, e de cada ângulo formado entre os lados com as alturas traçadas. Mova os vértices do triângulo e analise a medida dos ângulos e a posição do ortocentro.
- Ao analisar a posição do ortocentro no triângulo ABC , responda:
 - (a) Como classifica-se o triângulo, cujo ortocentro está no interior do triângulo?
 - (b) Como classifica-se o triângulo, cujo ortocentro está no exterior do triângulo?
 - (c) Como classifica-se o triângulo, cujo ortocentro coincide com um dos vértices do triângulo?
- Analogamente, utilizando as ferramentas hiperbólicas, verifique se é possível encontrar o ortocentro em um triângulo hiperbólico.

f) Reta de Euler

Vamos construir em um mesmo triângulo ABC os pontos notáveis: baricentro (G), circuncentro (H) e ortocentro (O):

- Construa um triângulo ABC .
- Construa os três pontos notáveis no triângulo ABC : baricentro (G), circuncentro (H) e o ortocentro (O);

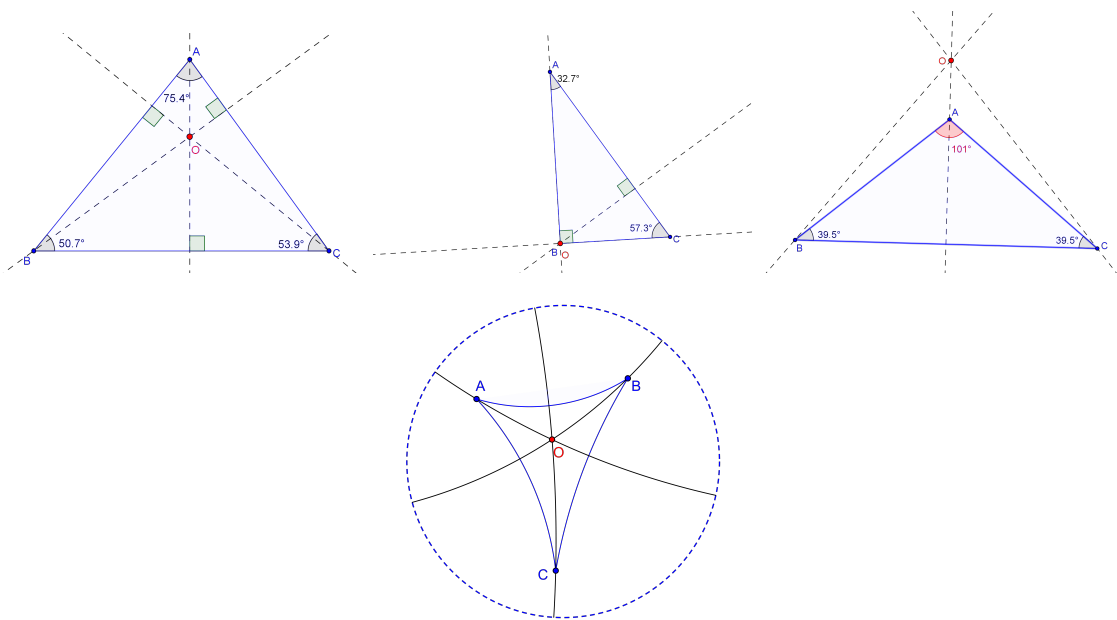


Figura 3.30: Localização dos ortocentros nos triângulos

- Movimente os vértices do triângulo e verifique se os pontos notáveis estarão sempre alinhados. Construa uma reta que passe pelos pontos notáveis.
- Meça os comprimentos dos segmentos \overline{GH} e \overline{GO} . O que pode-se concluir?
- Meça os comprimentos dos lados do triângulo ABC e responda:
 - (a) Qual é o tipo de triângulo em que os três pontos notáveis são coincidentes?
 - (b) Qual é a posição do ortocentro e do circuncentro quando o triângulo é retângulo?
 - (c) Qual é a posição do ortocentro e do circuncentro quando o triângulo é acutângulo?
 - (d) Qual é a posição do ortocentro e do circuncentro quando o triângulo é obtusângulo?
- Analogamente, utilizando as ferramentas hiperbólicas, verifique se é possível construir a reta de Euler em um triângulo hiperbólico.

Considerações: verifica-se que na Geometria hiperbólica não é possível construir a reta de Euler (figura 3.31), pois o baricentro, o circuncentro e o ortocentro não estão alinhados como na geometria euclidiana.

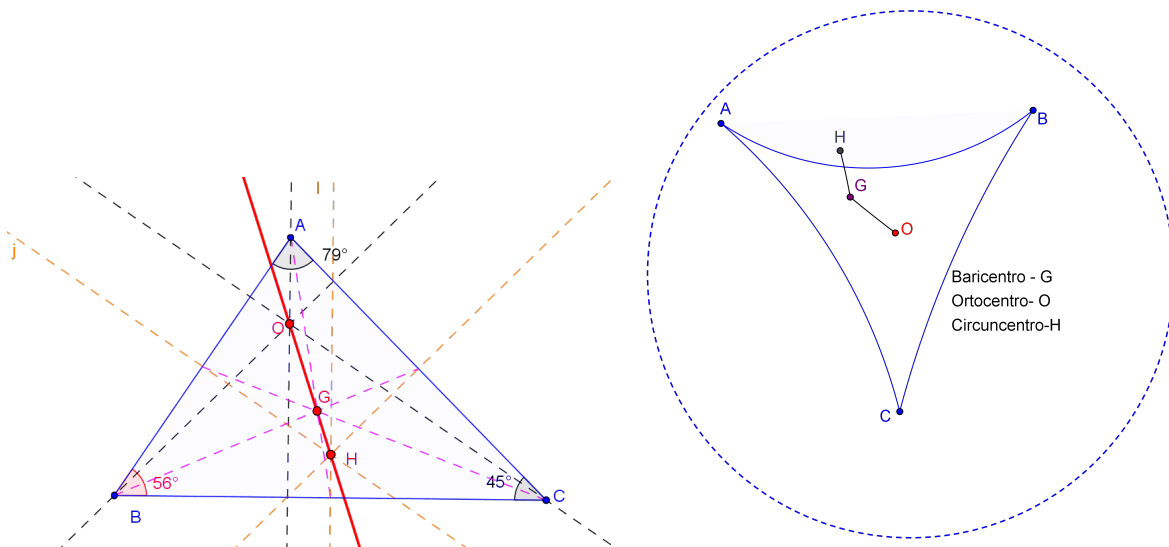


Figura 3.31: Reta de Euler

3.3.1 Quadriláteros

Problematização:

Quais quadriláteros é possível construir no plano hiperbólico?

Intenção Educativa: construir os quadriláteros especiais no plano hiperbólico;

Sequência Didática:

a) Quadriláteros de Saccheri e Lambert

- No plano hiperbólico, marque dois pontos A e B .
- Utilizando o menu hiperbólico, construa uma reta hiperbólica que passa pelos pontos A e B .
- Construa uma reta a perpendicular ao segmento hiperbólico \overline{AB} passando pelo ponto A (opção “Hyperbolic Perpendicular at point” no menu hiperbólico).
- Construa uma reta b perpendicular ao segmento hiperbólico \overline{AB} passando por B .
- Construa a reta mediatriz relativa ao segmento \overline{AB} .
- Marque o ponto E , interseção da mediatriz com o segmento hiperbólico \overline{AB} .
- Marque um ponto P sobre a mediatriz traçada.
- Construa uma reta c perpendicular à mediatriz que passa pelo ponto P .
- Marque os pontos C e D , pontos de interseção da reta a com c e da reta b com c .

- Construa os segmentos hiperbólicos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{AD} . O quadrilátero $ABCD$ denomina-se “Quadrilátero de Saccheri”.
- Verifique a medida dos ângulos e lados do quadrilátero $ABCD$ construído. Quais são as características do quadrilátero? Qual é a soma dos ângulos internos do quadrilátero? Movimente o ponto P e verifique a alteração dos ângulos.
- A partir da construção do quadrilátero de Saccheri, vamos construir o quadrilátero de Lambert (quadrilátero $AEPD$). Para isso, construa os segmentos \overline{AE} , \overline{EP} , \overline{PD} , e \overline{DA} . Verifique as medidas dos ângulos e lados do quadrilátero de Lambert.

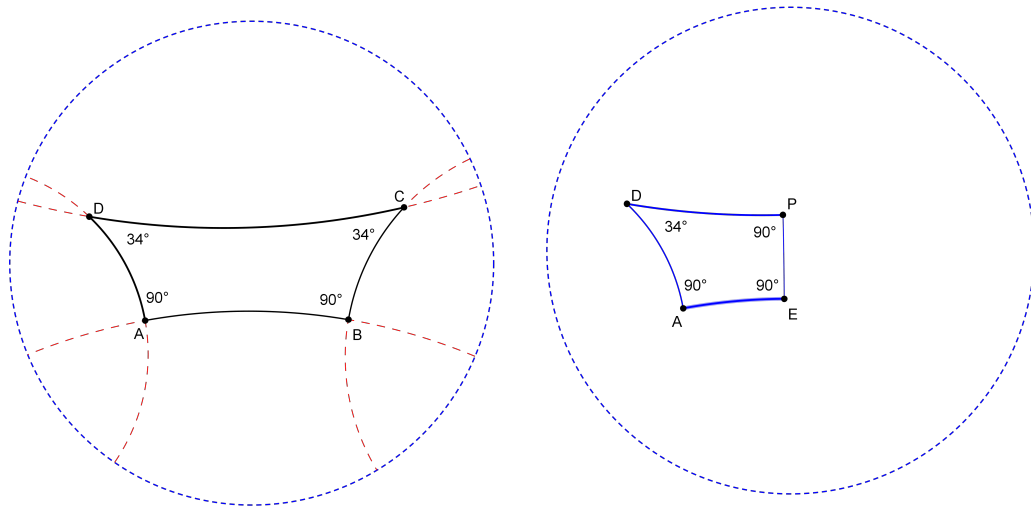


Figura 3.32: Quadriláteros de Saccheri e Lambert

Considerações: um quadrilátero $ABCD$ é dito **quadrilátero de Saccheri** de base AB , topo CD e laterais AD e BC quando os lados laterais são congruentes e perpendiculares ao lado da base. Assim, deve-se observar que o quadrilátero de Saccheri possui dois ângulos retos nas bases e dois ângulos agudos no topo (figura 3.32). Um quadrilátero convexo é dito **quadrilátero de Lambert** quando possui três ângulos retos e um ângulo agudo. Observa-se também, que nos quadriláteros hiperbólicos, a soma dos ângulos internos é menor que 360° .

3.3.2 Tesselações nos Planos Euclidiano e Hiperbólico

Apesar dos mosaicos já estarem presentes no artesanato e nos utensílios das civilizações babilônica, grega, chinesa, entre outras, o estudo das propriedades matemáticas nas pavimentações

é recente, bem como suas potencialidades didáticas [6]. É possível observar padrões geométricos obtidos pelas tesselações na natureza, como nas escamas do peixe, cristais de moléculas, nas colméias de abelhas, dentre outros. Tesselar ou pavimentar consiste em cobrir uma superfície com figuras de um ou mais tipos, regulares ou não, sem que existam espaços entre as figuras e sem sobreposição. Há pavimentações no plano e também espaciais, como as esféricas e hiperbólicas.

Quanto às potencialidade didáticas das tesselações, diversos autores apresentaram em suas pesquisas sugestões educacionais às pavimentações planas, destacando o caráter artístico e a exploração dos conceitos geométricos no ensino da geometria euclidiana. Pode-se citar os trabalhos de Barbosa [6], Murari [31], Martins [28], Almeida (2003)[18]. Uma proposta didática para trabalhar tesselações no ensino da geometria esférica é abordada no trabalho de Reis (2006)[17], no qual utiliza materiais manipuláveis e software para desenvolver as tesselações e comparar as geometrias euclidiana e elíptica. Os Parâmetros Curriculares Nacionais também enfatizam a importância de desenvolver atividades de pavimentações, de maneira a explorar a composição e decomposição de figuras, as transformações no plano, relacionando às obras de arte e outras áreas de conhecimento.

Para pavimentar o plano euclidiano de forma regular, ou seja, pavimentações formadas apenas por polígonos regulares de um só tipo, tem-se três possibilidades: utilizando o triângulo equilátero, o quadrado ou o hexágono regular. Isso ocorre devido ao fato que a soma dos ângulos do vértice ao redor de um nó deve ser 360 graus na superfície plana. A pavimentação do plano de forma semirregular possui oito possibilidades, no qual pode-se utilizar mais de um polígono com o mesmo padrão em cada vértice. A pavimentação demirregular é aquela construída apenas com polígonos regulares, sendo os vértices de diferentes tipos. Independente do tipo de pavimentação, é importante observar os padrões matemáticos que estão por trás de cada pavimentação, analisando as transformações matemáticas utilizadas, como a rotação, translação e a reflexão [7], [26]. Na geometria hiperbólica, há infinitas formas de pavimentações, que dependem de dois parâmetros: número de lados do polígono regular (n) e número de polígonos regulares que concorrem em cada vértice (m) [13]. É possível construir uma ferramenta no Geogebra para pavimentar regularmente o Disco de Poincaré, disponibilizado em [http : //geogebra.org/en/upload/files/piman/PoincarDisk/H_regular_tesselations.html](http://geogebra.org/en/upload/files/piman/PoincarDisk/H_regular_tesselations.html). Com a ferramenta, é possível explorar a relação entre os valores iniciais de n e m que são dados [41].

Um das principais referências com a utilização de padrões geométricos em pavimentações

é o holandês M. C. Escher, no qual desenvolveu obras de arte utilizando-se das isometrias de rotação, translação e reflexão. A riqueza de suas obras ultrapassa o plano euclidiano e deslumbrase no hiperbólico, com as obras “Circle Limit I”, “Circle Limit II”, e “Circle Limit IV” (Heaven and Hell), nas quais retrata os triângulos hiperbólicos congruentes que vão se repetindo até o infinito dentro dos limites da circunferência hiperbólica[44].

Nas atividades seguintes busca-se descrever sequências a serem realizadas no software “Geogebra”, a fim de construir tesselações nos planos euclidiano e hiperbólico, no qual pode-se explorar as transformações matemáticas utilizadas nas tesselações, como rotação, translação e reflexão.

a) Tesselação no plano euclidiano

- Construa um triângulo equilátero ABC . Selecione a ferramenta “Polígono Regular” (Janela 5), clique na área de trabalho duas vezes para definir os pontos A e B e, em seguida, digite “3” na caixa de diálogo para definir a quantidade de lados do polígono.
- Sobre o lado AB do triângulo, marque os pontos D e E . Para isso, selecione a opção “Ponto sobre objeto” (Janela 2).
- Marque um ponto F no interior do triângulo.
- Vamos rotacionar o ponto D um ângulo de 60° no sentido horário sobre o ponto B , obtendo o ponto D' . Selecione a opção “Rotação em torno de um ponto” (Janela 9), clique primeiramente no ponto D e após no B , digite na caixa de diálogo 60° e marque a opção de rotação no sentido horário.
- Da mesma forma, rotacione o ponto E sobre B , e o ponto F sobre B . Obtém-se assim, os pontos E' e F' .
- Esconda o triângulo ABC . Pode-se clicar com o botão direito do mouse sobre o triângulo e escolher a opção “esconder objeto” ou, na janela algébrica desmarcar o polígono.
- Construa o polígono $ADFEBE'F'D'C$. Selecione a opção “Polígono”, e selecione os vértices do polígono a ser construído em ordem.

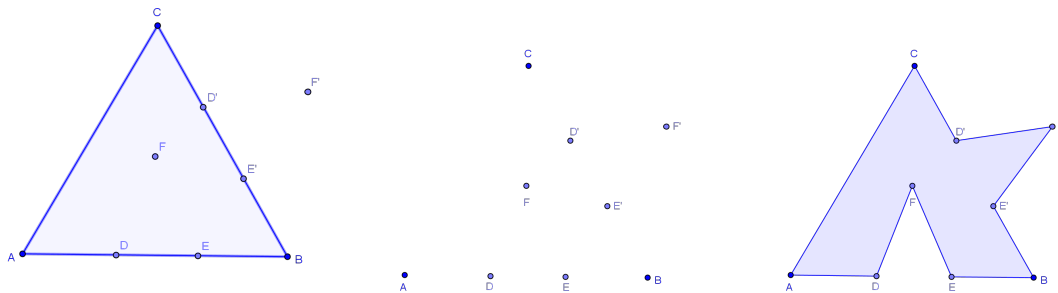


Figura 3.33: Sequência na construção da tesselação

- Vamos rotacionar o polígono um ângulo de 60° sobre o vértice B . Selecione a opção “rotação em torno de um ponto”, clique sobre o polígono e em seguida sobre o ponto B .
- Continue realizando rotações sobre os polígonos obtidos em torno do ponto B , até completar o hexágono. Em seguida, selecione a opção “Propriedades” e pinte os polígonos como desejar. Oculte os pontos do polígono. Para esconder os rótulos dos objetos geométricos durante a construção, pode-se clicar com o botão direito do mouse sobre o triângulo ou sobre a janela algébrica e desmarcar a opção “exibir rótulo”.

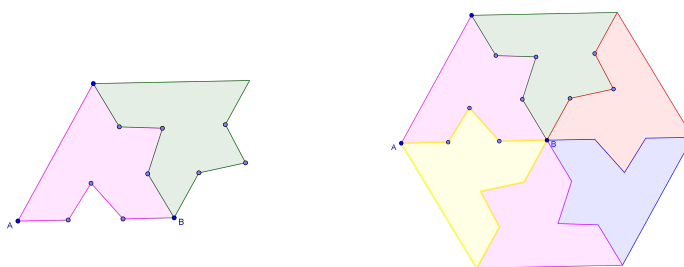


Figura 3.34: Rotações na tesselação

- Marque os pontos médios, digamos P e Q , de dois lados opostos do hexágono. Em seguida, construa o vetor PQ . Selecione a opção “Vetor” (Janela 3), clique sobre os pontos P e Q .
- Vamos transladar cada um dos seis polígonos na direção do vetor construído.
- Marque os pontos médios dos outros lados opostos do hexágono e construa vetores

em todas as direções para transladar os polígonos em todas as direções.

- Por fim, pode-se mudar a forma da tesselação mexendo nos pontos A, B, C, D, E, F (figura 3.36).

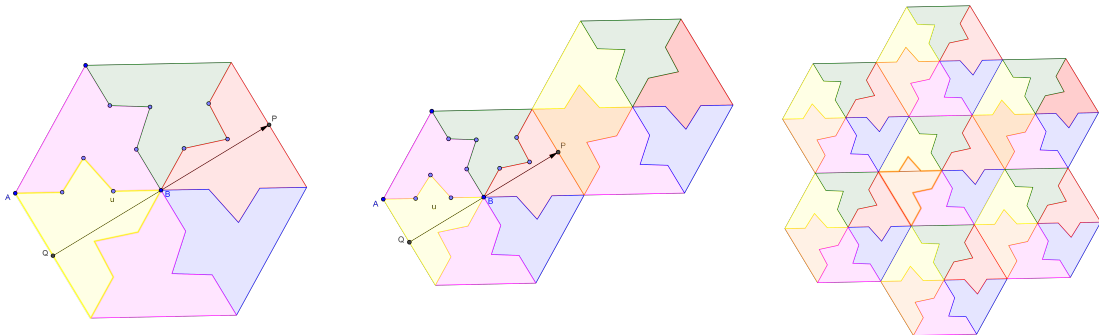


Figura 3.35: Translações na tesselação

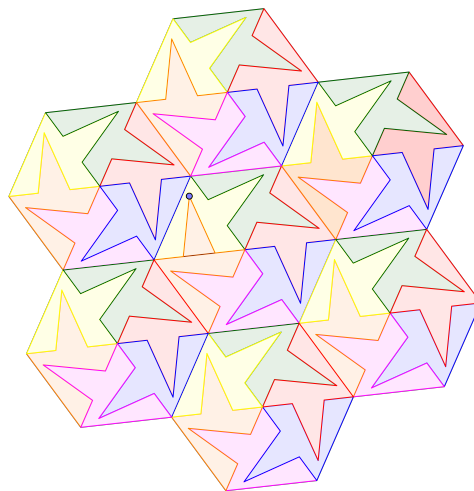


Figura 3.36: Tesselação no plano euclidiano

b) Tesselação no plano hiperbólico

Vamos pavimentar o Disco de Poincaré com triângulos hiperbólicos, semelhante ao que Escher fez em suas obras, que foram inspiradas nos trabalhos de Coxeter [15],[24], [35]. Para realizar a pavimentação, é necessário construir um triângulo cujas medidas dos lados sejam $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$, sendo que $\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{r} < 1$.

- Vamos construir um triângulo hiperbólico, cujas medidas dos ângulos sejam de $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$. Marque, no plano euclidiano, dois pontos O e A . Rotacione o ponto A em

torno do ponto O um ângulo de $\frac{\pi}{3}$. Para isso, escolha a opção “Rotação em torno de um ponto por um ângulo” (Janela 8), clique sobre o ponto A , depois sobre o ponto B , escolha o ângulo de 60° no sentido anti-horário. Gerou-se o ponto A' .

- Determine o ponto médio B do segmento AA' . Selecione a opção “Ponto médio” (Janela 2), clique sobre os pontos A e A' .
- Construa uma circunferência α centrada em B que passa pelos A e A' . Selecione a opção “Círculo” (Janela 6) e clique sobre o ponto B para definir o centro e em seguida no ponto A .

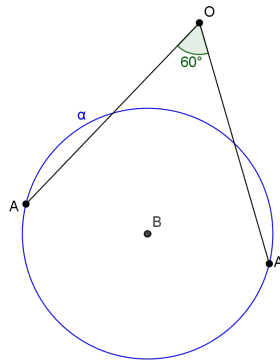


Figura 3.37: Construção do ângulo de 60° e da circunferência α

- Marque o ponto médio M do segmento \overline{OB} . Construa uma circunferência β com centro em M passando por O .
- Marque o ponto C , um dos pontos de interseção das circunferências α e β .
- Construa o Disco de Poincaré, uma circunferência d com centro no ponto O e que passa pelo ponto C .
- Marque os pontos de interseção D e E , sendo as interseções de α com AO e de α com BO . Observe que o triângulo hiperbólico DEO tem os ângulos internos iguais a 90° , 45° e 30° .
- Construa uma circunferência γ com centro em A passando por E , pois A pertence ao lugar geométrico dos centros das circunferências ortogonais que passam por E .
- Marque, no interior do Disco de Poincaré, o ponto de interseção F do segmento \overline{AO} com a circunferência γ . A circunferência β pode ser escondida na construção.

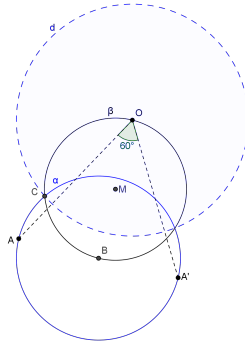


Figura 3.38: Construção do Disco de Poincaré α

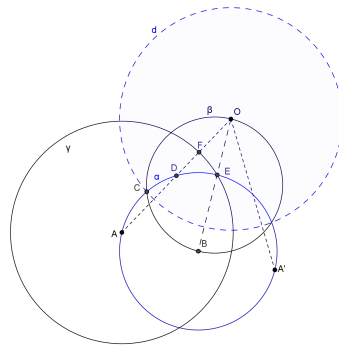


Figura 3.39: Parte 1 da construção geométrica α

- Vamos tesselar o Disco de Poincaré por meio de triângulos congruentes aos triângulos OEF e DEF . Para isso, rotacione os triângulos e as circunferência α e γ um ângulo de 60° em torno de O no sentido anti-horário até preencher o Disco de Poincaré. Observe que as interseções das circunferências formam o hexágono hiperbólico.
- Dado o ponto D na circunferência α , vamos construir um conjunto de circunferências passando por D . Para isso, primeiramente deve-se encontrar os centros dessas circunferências que estão sobre PB . Vamos rotacionar o segmento \overline{AP} (m) um ângulo de 30° sobre D obtendo o segmento m' , que intercepta BD no ponto P' . De maneira semelhante, rotaciona-se m' e m'' obtendo as intercessões P'' , P''' sobre o segmento \overline{PB} .
- Construa as circunferências ortogonais ao Disco de Poincaré d , centradas nos pontos P' , P'' , P''' , de modo que todas passem por D , como está representado na figura.
- Deve-se aplicar rotação nas circunferências construídas.

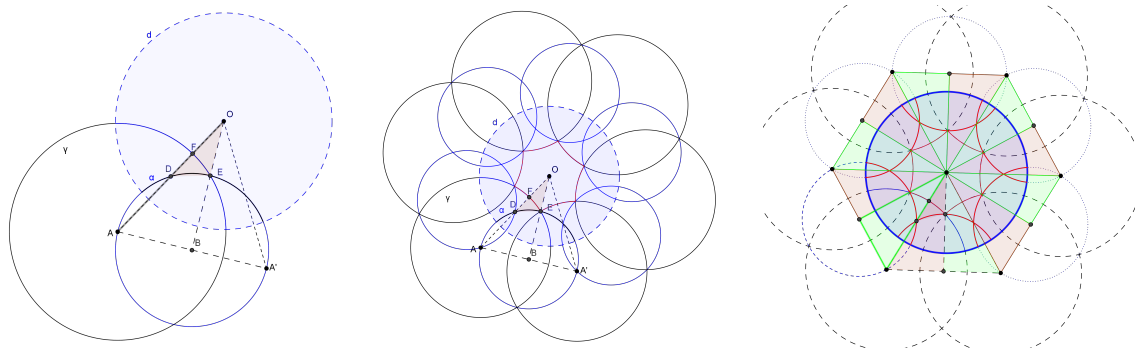


Figura 3.40: Tessellando o Disco de Poincaré

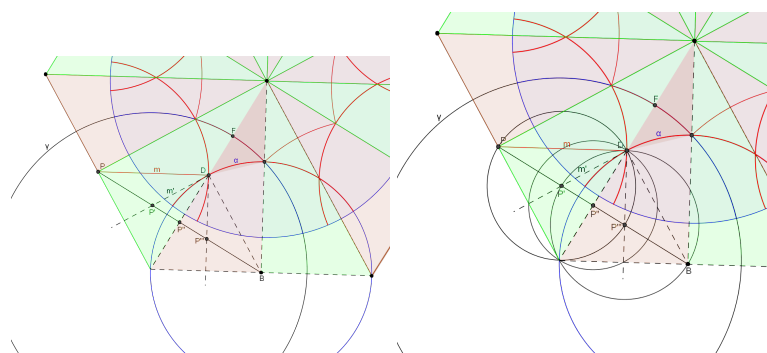


Figura 3.41: Tessellando o Disco de Poincaré

- Para realizar o próximo estágio da pavimentação, repete-se o processo, fazendo a rotação do segmento $P'''A_2$ um ângulo de $\frac{k \cdot \pi}{6}$ em torno de A_2 , obtendo-se os novos centros das circunferências ortogonais que estão sobre o segmento $P'''Q$. Deve-se construir circunferências com centros em C_2 , D_2 , e E_2 passando pelo ponto A_2 , conforme mostra a figura. Por fim, realiza-se novamente as rotações.
- Por fim, deve-se esconder os objetos utilizados na construção e colorir inspirando-se nas obras de Escher.

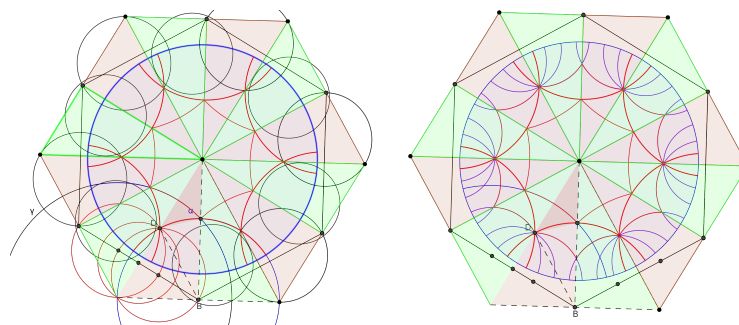


Figura 3.42: Tessellando o Disco de Poincaré

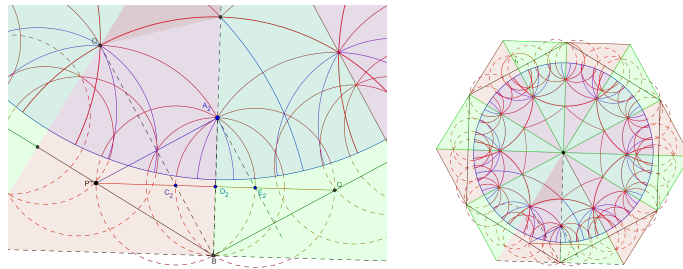


Figura 3.43: Tesselando o Disco de Poincaré

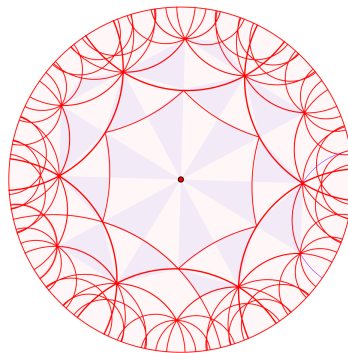


Figura 3.44: Tesselação no Disco de Poincaré

Considerações Finais

Ao traçar o percurso histórico das geometrias, viu-se que a constituição das geometrias não euclidianas, em específico da hiperbólica como uma geometria consistente, deu-se por meio de um longo processo de questionamentos do “Postulado das Paralelas” e de diversas tentativas de provas fracassadas por vários matemáticos que deixaram contribuições importantes para a independência do “Quinto postulado de Euclides”. Observa-se que a construção da Matemática, em específico das geometrias não euclidianas, dá-se de modo lento por enfrentar diversos paradigmas que imperavam com o domínio de uma geometria que aparentemente já estava bem estruturada, a geometria euclidiana. Sendo assim, o fazer matemático como produto da criação humana caracteriza-se em um processo passível de mudanças, que vai aperfeiçoando-se e modelando-se por vários atores em diversos palcos.

A reconstrução histórica do surgimento das geometrias não euclidianas contemplando os vários aspectos adjacentes e os vários personagens envolvidos torna-se uma rica oportunidade para a apresentação da geometria hiperbólica na Educação Básica, sendo possível envolver discussões sobre a natureza do conhecimento matemático, o desenvolvimento da lógica formal e da axiomática moderna, a noção de modelo matemático, fazendo assim uma releitura da geometria euclidiana. Os aspectos históricos que culminaram no surgimento de outras geometrias e as aplicações das mesmas tornam-se fundamentais para a compreensão da matemática enquanto área do saber. Desta forma, almeja-se superar a visão que muitos estudantes ainda possuem, que o único modelo de geometria válida é a euclidiana.

É importante observar que, neste processo de ensino-aprendizagem das geometrias, o professor enquanto gerenciador do processo ensino-aprendizagem, deve ter um aprofundamento maior neste ramo vasto e complexo do conhecimento matemático, para que evitem-se obstáculos epistemológicos na construção dos conceitos e propriedades da geometria, na compreensão da natureza do conhecimento matemático e, na utilização dos softwares de geometria dinâmica. De maneira planejada e cautelosa, dentro dos limites de compreensão dos educandos, torna-se

possível introduzir conceitos das geometrias não euclidianas por meio de sequências didáticas que utilizem softwares de geometria dinâmica, visualizando e analisando propriedades geométricas hiperbólicas e euclidianas, de modo a contextualizar o ensino da geometria, fazer conexões entre novos conhecimentos, estimular a capacidade de resolver problemas e, permitir percepções entre os saberes matemáticos envolvidos com a criação de obras artísticas, como por exemplo as obras de Escher.

A defesa das abordagens das geometrias não euclidianas na Educação Básica é vista em pesquisas brasileiras em Educação Matemática e, em esforços institucionais, como nos Parâmetros Curriculares Nacionais, no *National Council of Teachers of Mathematics* dos EUA, e na Secretaria de Educação do Estado do Paraná. Almeja-se que este trabalho sirva como mais uma referência e inspiração para o aperfeiçoamento do ensino das geometrias na Educação Básica com a utilização de softwares de geometria dinâmica.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Alves and L. Filho. Encontro com o mundo não euclidiano. In *Congresso de Matemática Aplicada e Computacional*, 2006.
- [2] P. Andrade. *Introdução à Geometria Hiperbólica: o modelo de Poincaré*. SBM, 2013.
- [3] I. Arcari. Um texto de geometria hiperbólica. Monografia, UNICAMP, São Paulo, Abril 2008.
- [4] J. L. M. Barbosa. *Geometria hiperbólica*. IMPA, 2002.
- [5] J. L. M. Barbosa. *Geometria Euclidiana Plana*. SBM, Rio de Janeiro, 11 edition, 2012.
- [6] R. M. Barbosa. *Descobrendo Padrões em Mosaicos*. Atual, 1993.
- [7] A. Barth. The link between math and art. Onde foi publicado. Se Internet, colocar: Consultado na Internet em: dd/mm/aaaa, April 2007. <http://ramanujan.math.trinity.edu/tumath/students/projects/amanda.barth.nm.pdf>.
- [8] I. Bicudo. *Os Elementos-Euclides*, volume 2. Editora UNESP, 2009.
- [9] A. Bivar. *Treze viagens pelo mundo da Matemática*, capítulo Geometria: da intuição ao rigor, pages pp.91–pp.151. Universidade do Porto, Porto, 2010.
- [10] R. Bonola. *Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of Its Development*. Courier Corporation, New York, 1955.
- [11] C. B. Boyer and U. C. Merzbach. *História da Matemática*. Blucher, São Paulo, 3 edition, 2012.
- [12] S. d. E. M. e. T. Brasil. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática, 1999.
- [13] M. H. G. A. College. Exploring geometry, October 2012.

- [14] L. Coutinho. *Convite às Geometria não- euclidianas*, volume 2^a edição. Interciência, Rio de Janeiro, 2001.
- [15] H. Coxeter. The non-euclidean symmetry of escher's picture'circle limit iii'. *Leonardo*, 12:19–25, 1979.
- [16] B. M. da Educação. Secretaria de Educação Básica. Formação de professores do ensino médio, etapa ii- caderno v: Matemática. UFPR/Setor de Educação, 2014.
- [17] J. d'Arc da Silva Reis. Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis. Mestrado em educação matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.
- [18] S. T. de Almeida. Um estudo de pavimentação do plano utilizando caleidoscópios e o software cabri-géomètre ii. Dissertação (mestrado em educação matemática), Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2003.
- [19] B. S. de Educação Básica. Orientações curriculares para o ensino médio - ciências da natureza, matemática e suas tecnologias., 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb>.
- [20] C. B. de Souza. Geometria hiperbólica : Consistência do modelo do disco de poincaré. Dissertação, UFRPE, Recife- PE, 2014.
- [21] H. Eves. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: geometria*. Atual Editora, 1992.
- [22] H. Eves. *Introdução à história da matemática*. Editora da Unicamp, São Paulo, 5 edition, 2011.
- [23] G. G. Garbi. *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 3.ed.rev. e ampl. edition, 2009.
- [24] C. Goodman-Strauss. Compass and straightedge in the poincaré disk. *The American Mathematical Monthly*, 108(1):38–49, 2001.
- [25] M. J. Greenberg. *Euclidean and Non-Euclidean*. Freeman, New York, 3 ed edition, 2001.
- [26] A. F. H. Guzon and L. A. N. de Las Peñas. *Tilings, patterns and technology*, 2012.

- [27] D. Hilbert. *The Foundations of Geometry*. Open Publishing Co., Illinois- E.U.A, 2005.
- [28] R. A. Martins. Ensino-aprendizagem de geometria: uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e software educacionais. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.
- [29] R. Montoito and A. V. M. Garnica. Ecos de euclides: breves notas sobre a influência dos elementos a partir de algumas escolas filosóficas. *Educação Matemática Pesquisa*, 16(1):95–123, 2014.
- [30] R. Montoito and A. V. M. Garnica. O euclides e seus rivais modernos, de lewis carroll (1879): uma apresentação. *Bolema: Boletim de Educação matemática*, pages 1386–1414, 2014.
- [31] C. Muraci. Um caleidoscópio educacional modificado para trabalhos em grupo. *Revista da Educação Matemática*, (n.2), 1995.
- [32] E. K. J. Newman. *Matemática e Imaginação*. Zahar, 1968.
- [33] Ángel Ruiz Zuniga. *Geometrías No Euclidiana: Breve historia de una gran revolución intelectual*. Editorial de La Universidad de Costa Rica, 1.ed, 1999.
- [34] M. Ângela Miorim. *Introdução à história da educação matemática*. Atual, São Paulo, 1998.
- [35] M. T. C. Pagés;. Geometría hiperbólica en la obra de escher. In *Consejo de Formación en Educación - Uruguay*, volume 2301 of VII, page 266. Actas del VII CIBEM ISSN 2301.0797, 2013.
- [36] L. C. Pais. Intuição, experiência e teoria geométrica. *Zetetiké*, v.4(n.6):p. 65–74, jul./dez 1996.
- [37] R. M. Pavanello and C. M. I. Nogueira. Avaliação em matemática: algumas considerações. *Estudos em avaliação educacional*, 17(33):29–42, 2006.
- [38] C. S. C. M. Raposo. Curvas famosas e não só: teoria, história e atividades. Master's thesis, Universidade de Lisboa, 2013.

- [39] L. A. Santaló. *Geometrías no euclidianas*. Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 3 edition, 1966.
- [40] F. G. Teixeira. *História das matemática em portugal*, 1934.
- [41] C. M. L. Vandembroucq. *Introdução ao plano hiperbólico com o geogebra*, 2015.
- [42] B. R. L. Vaz. *O papel dos diagramas na Geometria Euclidiana*. Tipo.tese, PUC/RJ, Rio de Janeiro, 2010.
- [43] E. Wagner. *Uma Introdução às Construções Geométricas*. IMPA, Rio de Janeiro, 2015.
- [44] T. Wieting. Capturing infinity: The circle limit series of m. c. escher. *Reed Magazine*, 2010.
- [45] A. Zabala. *A prática educativa: como ensinar*. Artmed, 2007.