

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL -
PROFMAT
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Aplicação das operações com Matrizes Movimentando um robô no plano

WALTER RAFAEL DA SILVA PANTOJA

MACAPÁ-AP

Universidade Federal do Amapá
Mestrado Profissional em Rede Nacional-PROFMAT
Curso de Pós-Graduação em Matemática

Aplicação das operações com matrizes Movimentando um robô no plano

Discente: Walter Rafael daSilva Pantoja
Orientador: Prof. Dr.Erasmo Senger

Trabalho de conclusão de curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional- PROFMAT realizado na Universidade Federal do Amapá-UNIFAP como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática , área de concentração Matemática do Ensino Básico.

Walter Rafel da Silva Pantoja
Aplicação das operações com Matrizes
Movimentando um robô no plano

Trabalho de conclusão de curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional- PROFMAT realizado na Universidade Federal do Amapá-UNIFAP como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado em xx de outubro de 2016, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof Dr Erasmo Senger
Universidade Federal Amapá- UNIFAP
Presidente da Banca

Prof Msc
Universidade Federal Amapá- UNIFAP
Examinador

Prof Msc
Universidade Federal Amapá- UNIFAP
Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus colegas de turma do PROFMAT 2014, que mostraram união e companheirismo durante o curso.

Agradeço a minha esposa que divide comigo a correria dodia a dia e me da o suporte para desenvolver minhas atividades.

Agradeço ao professor Erasmo Senger, pela orientação deste TCC.

Agradeço aos demais professores do PROFMAT que contribuíram para minha formação.

Agradeço a minha mãe que sempre me deu forças para continuar lutando.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo facilitar o trabalho do professor do ensino médio com as aplicações de matrizes. Através do deslocamento de um robô no plano é sugerido uma sequência de atividades organizando e direcionando o trabalho do professor em sala de aula. As atividades são voltadas para turmas do 2º e 3º anos do ensino médio. São utilizadas as transformações no plano (rotação, reflexão e translação) e através da matriz canônica de cada transformação são desenvolvidas varias atividades simulando o deslocamento de cada objeto ou figura.

PALAVRAS-CHAVE: Matrizes , Transformação no plano, Robótica

ABSTRACT

This work aims to facilitate high school teacher's work with applications matrices. By displacing a robot in the plan suggested a sequence of activities by organizing and directing the work of teachers in the classroom. The activities are geared to the 2nd and 3rd year high school classes. the changes in the plan are used (rotation, reflection and translation) and through the canonical matrix of each transformation are developed several activities simulating the movement of each object or figure.

KEY- WORDS: DIES, CHANGES IN THE PLAN, ROBOTICS

Conteúdo

1	Introdução	2
1.1	Introdução	2
2	Os Parâmetros Curriculares Nacionais	4
3	Construção da proposta	6
3.1	Construção da proposta	6
3.2	Contextualização e interdisciplinariedade	7
4	Matrizes	9
4.1	Matrizes	9
4.1.1	Definição de matriz	9
4.2	Operações com Matrizes	10
4.2.1	Igualdade	10
4.2.2	Adição de matrizes	10
4.2.3	Multiplicação por escalar	10
4.2.4	Multiplicação de matrizes	11
4.2.5	Diferenças entre o produto de matrizes e o produto de números:	11
5	Transformações Lineares	12
5.1	Transformações Lineares	12
5.1.1	Espaços Vetoriais	12
5.1.2	O que são transformações lineares?	13
6	Transformações no Plano	14
6.1	Transformações lineares no plano	14
6.2	Reflexão em relação a uma reta	14
6.2.1	Reflexão em relação ao eixo Y	14
6.2.2	Reflexão em relação ao eixo X	15
6.3	Rotação	16
6.3.1	Rotação em relação a origem	16
6.3.2	Rotação de objeto fora da origem	17
6.4	Dilatação	17
6.5	Translação	18
7	Proposta de ensino	20
7.1	Aplicação das operações com Matrizes	20
7.2	Atividade 1	22
7.3	Atividade 2	23
7.4	Atividade 3	25

7.5	Atividade 4	27
7.6	Atividade 5	29
7.7	Atividade 6	32

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

Este trabalho tornou-se uma semente quando realizei curso de robótica, voltado para professores, na Universidade Federal do Amapá- UNIFAP, onde foram trabalhadas as noções básicas de programação utilizando o microcontrolador Arduino e o software arduino desenvolvido para programar em linguagem C utilizando blocos gráficos.

Nas tarefas mais básicas, como controlar o funcionamento de um motor alimentado a pilha, estabelecer uma sequência de comandos a ser obedecida por um robô entre outras, percebi que poderia ser desenvolvido uma proposta contextualizada e interdisciplinar na área da matemática.

Atuo em uma escola no município de Santana, estado do Amapá, situada no bairro central. O público da escola em sua maioria são oriundos das áreas periféricas, quase todos recebem apoio através de algum programa de assistência social do governo, famílias de baixa renda. Ao abordar o tema robótica em sala de aula, pouco vi de motivação no semblante dos alunos, a não ser uma aluna que esboçou comentários pois já havia tido contato com as atividades de robótica desenvolvida em outra escola.

A robótica para os alunos era algo distante, longe da sua realidade educacional e financeira. Foi então que resolvi levá-los como visitantes a uma feira de robótica realizada no Instituto Federal do Amapá- IFAP, no município de Macapá.

Os alunos perceberam que havia outras escolas públicas participando e começaram a indagar sobre o valor destes materiais, dos kits de robótica, ver os robôs utilizados nas competições.

Assim surgiu a ideia de criar uma proposta de ensino contextualizada e interdisciplinar abordando aplicações das operações com matrizes e robótica, juntando duas áreas diferentes de conhecimento. O foco do trabalho seria instigar o aluno a trabalhar ou conceber estratégias de soluções já conhecidas e até mesmo descobrir novas soluções.

Este trabalho foi dividido em sete capítulos:

No primeiro capítulo temos uma introdução.

No segundo capítulo falamos sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio e a sua proposta para a reformulação do ensino médio.

No terceiro capítulo é abordado o conceito de contextualização e interdisciplinaridade dois objetivos desta proposta didática, e feita uma breve introdução sobre robótica educativa.

No quarto capítulo é abordado o tema matrizes indo da definição até as operações de soma, multiplicação por escalar e multiplicação entre matrizes. O conteúdo abordado é o mínimo necessário para o desenvolvimento do assunto.

No quinto capítulo abordamos de maneira introdutória o conceito de espaço vetorial que dará suporte para desenvolver o conceito de transformações lineares. As atividades propostas são direcionadas para transformações no plano cartesiano, ou seja o \mathbb{R}^2 .

No sexto capítulo falamos sobre as transformações no plano e associação de uma figura a uma matriz.

No sétimo e último capítulo foi sugerido uma proposta de trabalho para auxiliar o professor que deseja trabalhar uma proposta contextualizada e interdisciplinar sobre o uso de matrizes. Também pode servir de material auxiliar na preparação dos alunos para a Olimpíada Brasileira de robótica.

Capítulo 2

Os Parâmetros Curriculares Nacionais

O ensino médio está passando por um processo de rearranjo em que interdisciplinariedade e contextualização passam a ser uma necessidade no conteúdo trabalhado em sala de aula. O ensino médio deixa de ser visto como uma preparação para uma próxima etapa e passa a ser uma etapa final da escolaridade básica.

A Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. O ensino da matemática não foge deste contexto.

Os PCN's preveem três competências, no ensino da matemática, básicas: comunicar e representar; investigar e compreender; contextualizar social ou historicamente os conhecimentos.

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) aponta cinco competências gerais: dominar diferentes linguagens, desde idiomas até representações matemáticas e artísticas; compreender processos, sejam eles sociais, naturais, culturais ou tecnológicos; diagnosticar e enfrentar problemas reais; construir argumentações; e elaborar proposições solidárias.

Cada uma destas competências pressupõe algumas habilidades. O ensino das disciplinas é estruturado em forma de tópicos e não em competências. Assim os PCN's vêm esboçar uma estrutura contemplando tanto o ensino com base em competências como em tópicos como atualmente está estruturado.

A atividade proposta neste trabalho, segue a orientação dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN ao trabalhar os três temas estruturadores da matemática no ensino médio: Álgebra, Geometria e Análise de dados.

Ao lado de cada tema procura-se trabalhar habilidades específicas:

- Álgebra: Ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas; Identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis;
- Geometria: Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas; Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentos matemáticos, de acordo com suas características. Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa
- Análise de dados: Fazer o aluno perceber que um mesmo problema pode então ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos de acordo com suas características; Compreender o uso de representações gráficas, identificação de regularidades, interpretação

e uso de modelos matemáticos e conhecimento de formas específicas de raciocinar em Matemática.

Capítulo 3

Construção da proposta

3.1 Construção da proposta

O desenvolvimento das proposta de ensino a madureceu quando tive contato com as provas da olimpíada brasileira de robótica - OBR. Uma questão aparentemente simples, mais que despertou minha atenção. Faz referência ao deslocamento de um robô:

OBR - 2016 - Prova Nível 5 - O astronauta enviou suas coordenadas cartesianas $(52, 30)$ para o robô, considerando que o robô se encontra na origem do eixo de coordenadas. Neste sistema, cada unidade é contada em quilômetros (km).

- Qual a sequência de comandos de programação que faz com que o robô alcance seu objetivo, percorrendo a menor distância possível?

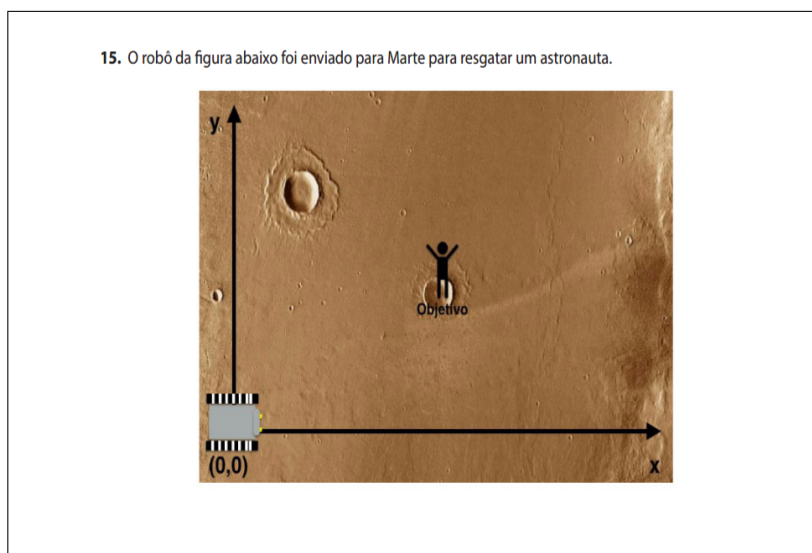


Figura 3.1: Prova OBR- nível 4- 2016

Para o desenvolvimento deste documento foi utilizado como ferramenta auxiliar o software de geometria dinâmica GEOGEBRA para efetuar as transformações e simular o deslocamento a ser realizado nos pontos escolhidos.

3.2 Contextualização e interdisciplinariedade

Para D'Ambrosio, “Do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta. Poderia ser tratada como fato histórico” (D'AMBROSIO, 2012, p. 29).

Muito se deve ao distanciamento da realidade do aluno. Segundo Meyer “A maioria das pessoas não consegue relacionar a Matemática nem com as outras ciências e muito menos com situações de seus cotidianos, porque foi criado um universo à parte, ou seja, para elas, a Matemática não está presente em outros contextos” (MEYER et al, 2011, p.24).

Mas o que seria contextualizar. Segundo Fogaça contextualização pode ser definida como “o ato de vincular o conhecimento à sua origem e à sua aplicação” (FOGAÇA, 2012). Contextualizar o assunto é aproximar a teoria e a prática.

Mas não basta somente contextualizar o ensino e necessário aproximar a realidade do aluno. Atuo em uma escola no município de Santana, estado do Amapá, situada no bairro central. O público da escola em sua maioria são oriundos das áreas periféricas, quase todos recebem apoio através de algum programa de assistência social do governo, famílias de baixa renda. Ao abordar o tema robótica em sala de aula, pouco vi de motivação no semblante dos alunos, a não ser uma aluna que esboçou comentários pois já havia tido contato com as atividades de robótica desenvolvida em outra escola.

De acordo com Valente,

“A aplicação da informação exige sua interpretação e seu processamento, o que implica a atribuição de significados de modo que a informação passe a ter sentido para aquele aprendiz. Assim, aprender significa apropriar-se da informação segundo os conhecimentos que o aprendiz já possui e que estão sendo continuamente construídos. Ensinar deixa de ser o ato de transmitir informação e passa a ser o de criar ambientes de aprendizagem para que o aluno possa interagir com uma variedade de situações e problemas, auxiliando-o em sua interpretação para que consiga construir novos conhecimentos”. (VALENTE, 2002, p.24).

A Interdisciplinaridade pode ser compreendida como uma forma de trabalhar em sala de aula, no qual se propõe um tema com abordagens em diferentes disciplinas. É compreender, entender as partes de ligação entre as diferentes áreas de conhecimento, unindo-se para transpor algo inovador, abrir sabedorias, resgatar possibilidades e ultrapassar o pensar fragmentado. É a busca constante de investigação, na tentativa de superação do saber.

Para que ocorra a interdisciplinaridade não se trata de eliminar as disciplinas, trata-se de torná-las comunicativas entre si, concebê-las como processos históricos e culturais, e sim torná-la necessária a atualização quando se refere às práticas do processo de ensino-aprendizagem.

De acordo com Morin (2000), as disciplinas como estão estruturadas só servirão para isolar os objetos do seu meio e isolar partes de um todo. A educação deve romper com essas fragmentações para mostrar as correlações entre os saberes, a complexidade da vida e dos problemas que hoje existem. Caso contrário, será sempre ineficiente e insuficiente para os cidadãos do futuro.

Ainda que a noção do termo interdisciplinaridade não se configure como um sentido unívoco e preciso, em vista do conjunto de enfoques que ela recebe, mesmo que não possamos generalizar uma concepção de interdisciplinaridade, o certo é que há uma compreensão comum, por parte dos seus diversos teóricos, na necessidade de relação de sentidos e significados na busca do conhecimento, objetivando uma percepção de saberes em conjunto.

Robótica educativa- (R.E)

Para Schons et al., a R.E “[...] constitui nova ferramenta que se encontra à disposição do professor, por meio da qual é possível demonstrar na prática muitos dos conceitos teóricos, às

vezes de difícil compreensão, motivando tanto o professor como principalmente o aluno”.

D’Ambrosio defende a robotica educativa com um meio de oferecer aos alunos experiências próximas as encontradas na vida real além de trabalhar o desenvolvimento do raciocínio lógico, criatividade, interações em grupo bem como a utilização de conceitos aprendidas em diversas áreas do conhecimento.

O aluno na intenção de ver um robô estruturado e funcionando não espere que lhe sejam fornecidos todos os detalhes técnicos (eletrônica, programação ou mecânica), desta forma a cada busca por informação e interação com o objeto (robô), o discente se vê autossuficiente, percebe seu conhecimento ampliado e que não é o mesmo de outrora, pois evoluiu na maneira de aprender a pensar e de aprender a aprender.

Capítulo 4

Matrizes

4.1 Matrizes

4.1.1 Definição de matriz

A aplicação das transformações lineares, no ensino médio, geralmente vem associada a ideia de matrizes.

Dados dois números naturais m e n , definimos uma matriz de ordem m por n , ou simplesmente uma matriz m por n (escreve-se mxn), como uma tabela formada por elementos distribuídos em m linhas e n colunas. Estes elementos são chamados entradas da matriz. E usual indicarmos as entradas de uma matriz arbitrária A pelos símbolos a_{ij} , onde os índices indicam nessa ordem, a linha e a a coluna onde o elemento se encontra. Uma matriz é usualmente representada por $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ou simplesmente $[a_{ij}]$.

A matriz A representa um quadro com m linhas e n colunas, no qual o elemento a_{ij} situa-se no cruzamento de i -ésima linha com a j -ésima coluna:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Uma matriz $n \times n$, em que o número de linhas é igual ao de colunas, é chamada de matriz quadrada de ordem n .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada de ordem n , as entradas em que $i = j$, forma a diagonal principal de A . Uma matriz diagonal de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n em que os elementos que não pertencem a diagonal principal são iguais a zero.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A matriz Identidade é uma matriz diagonal de ordem n cujas entradas da diagonal principal são iguais ao número natural 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2 Operações com Matrizes

Para o estudo das transformações lineares será necessário realizar algumas operações entre matrizes como soma, subtração, igualdade e multiplicação.

4.2.1 Igualdade

Dizemos que duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, de mesma ordem, são iguais, escreve-se $A = B$, quando $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $1 < i < m$ e $1 < j < n$.

$$A = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

4.2.2 Adição de matrizes

A adição de matrizes tem propriedade semelhantes a adição dentro do conjunto dos números reais desde que estabelecemos as convenções de que a matriz nula 0 do tipo $m \times n$ é aquela cujos elementos são todos iguais a zero e que se $M = [a_{ij}]$ então $-M = [-a_{ij}]$.

Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ são duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, a soma de A e B , denotada $A+B$, é a matriz $C = [c_{ij}]$ de ordem $m \times n$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 < i < m$ e $1 < j < n$. Considere a matriz A e B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+0 & 1+(-1) \\ 0+0 & -3+1 & 0+0 \\ -1+0 & 0+0 & 1+1 \end{bmatrix}$$

4.2.3 Multiplicação por escalar

Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, definimos o produto de A pelo número real k , como $k.A = [k.a_{ij}]_{m \times n}$.

Vamos efetuar a operação de multiplicação de um escalar k por uma matriz A .

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

a multiplicação por um escalar resulta na matriz $k.A =$

$$A = \begin{bmatrix} k.2 & k.3 & k.1 \\ k.1 & k.1 & k.-1 \\ k.1 & k.4 & k.0 \end{bmatrix}$$

4.2.4 Multiplicação de matrizes

Entre elas daremos ênfase a multiplicação entre matrizes. Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ duas matrizes. O produto $A.B$ de A por B , é definido como a matriz $C = [c_{ij}]_{m \times p}$ tal que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Segue abaixo o produto de duas matrizes 2×2 ,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 2.1 + 3.(-2) & 2.(-1) + 3.1 \\ 0.1 + 1.(-2) & 0.(-1) + 1.1 \end{bmatrix}$$

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ do tipo $m \times n$ e uma matriz $B = (b_{ij})$ do tipo $n \times p$, o produto da matriz A pela matriz B é a matriz $C = (c_{ij})$ do tipo $m \times p$ tal que o elemento c_{ij} é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i , da matriz A , pelos elementos da coluna j , da matriz B , e somando-se os produtos obtidos. Para dizer que a matriz c é o produto de a por B , vamos indicá-la por AB :

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = AB_{m \times p}$$

4.2.5 Diferenças entre o produto de matrizes e o produto de números:

Lima, esclarece as quatro diferenças fundamentais entre o produto de matrizes e o produto de números:

1. A primeira é que o produto entre duas matrizes A e B , definido por $A.B$ não está definido para quaisquer matrizes A e B ; pois só faz sentido quando o número de linhas de A é igual ao número de colunas de B .
2. A segunda é que o produto $A.B$ não é comutativo.
3. A terceira diferença é que o produto de duas matrizes não-nulas pode ser a matriz nula.
4. A quarta diferença é que para o produto de números todo número a diferente de zero possui inverso multiplicativo a^{-1} , pois $a.a^{-1} = a.a^{-1} = 1$. Por outro lado, dada a matriz quadrada A , do tipo $n \times n$, nem sempre existe uma matriz C , do tipo $n \times n$, tal que $A.C = C.A = I_n$. Quando um tal matriz C existe, a matriz A se diz invertível e C chama-se inversa de A . Escreve-se então $C = A^{-1}$.

Capítulo 5

Transformações Lineares

5.1 Transformações Lineares

5.1.1 Espaços Vetoriais

Seja V um conjunto não-vazio qualquer de objetos no qual estão definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalares. Por adição entendemos uma regra que associa a cada par de objetos \mathbf{u} e \mathbf{v} em V um objeto $u + v$; por multiplicação entendemos uma regra que associa a cada escalar k e cada objeto v em V um objeto $k.v$, chamado múltiplo de v por k . Se os seguintes axiomas são satisfeitos por todos os objetos \mathbf{u}, \mathbf{v} e \mathbf{w} em V e quaisquer escalares k e l , então nos dizemos que V é um espaço vetorial e que os objetos de V são vetores.

1. A adição é associativa $(u + v) + w = u + (v + w)$, onde $u, v, w \in V$.
2. A adição é comutativa $u + v = v + u$, para todo $u, v \in V$
3. A adição possui elemento neutro
existe $0 \in V$, tal que $v + 0 = v$, para todo $v \in V$
4. a adição possui simétricos para todo $v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $(-v) + v = 0$
5. se k é um escalar qualquer $k(u + v) = ku + kv$
6. $(k + l)v = kv + lv$
7. $k(lu) = (kl)u$
8. $1v = v$, para todo $v \in V$.

A definição de um espaço vetorial não especifica nem a natureza dos vetores nem das operações. Qualquer tipo de objeto pode ser um vetor e as operações de adição e multiplicação por escalar podem não guardar semelhança ou ter relação alguma com as operações usuais em \mathbb{R}^n . A única exigência é que os axiomas de espaço vetorial sejam satisfeitos

A abordagem feita neste trabalho sobre o tema transformações lineares foge da abordagem tradicional utilizando vetores e utiliza equações lineares.

5.1.2 O que são transformações lineares?

Uma transformação linear de V em W é uma função $T : V \rightarrow W$ que possui as seguintes propriedades:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2), \text{ para quaisquer } v_1 \text{ e } v_2 \text{ em } V.$$

$$T(a.v) = a.T(v), \text{ para quaisquer } v \text{ em } V \text{ e } a \text{ em } \mathbb{R}.$$

Se o domínio de uma função é R_n e o contradomínio é R_m , então escrevemos $f : R_n \rightarrow R_m$ e f é chamada uma aplicação ou transformação de $R_n \rightarrow R_m$, neste caso dizemos que a função leva ou aplica $R_n \rightarrow R_m$.

Para o caso em que $n = m$, ou seja, a transformação $f : R_n \rightarrow R_n$ é chamada um operador linear de R_n . Neste trabalho focaremos o caso em que $n = 2$, ou seja, um operador linear em \mathbb{R}^2 .

Suponha que f_1, f_2, \dots, f_m são funções de n variáveis reais, digamos:

$$w_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$w_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

⋮

$$w_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Estas m equações associam um ponto (w_1, w_2, \dots, w_m) em R_m a cada ponto (x_1, x_2, \dots, x_n) em R_n . E portanto definem uma transformação de $T : R_n \rightarrow R_m$. Assim temos

$$T : R_n \rightarrow R_m$$

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (w_1, w_2, \dots, w_m)$$

No caso especial em que as equações são lineares, a transformação $T : R_n \rightarrow R_m$ definida por estas equações é chamada uma transformação linear. Assim uma transformação linear $T : R_n \rightarrow R_m$ é definida por equações da forma

$$w_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

$$w_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n$$

⋮

$$w_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n$$

escrevendo, em notação matricial,

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ou mais precisamente, por $W = A.X$

A matriz $A = [a_{ij}]$ é chamada a matriz canônica da transformação linear T e a transformação é chamada multiplicação pela matriz A .

Capítulo 6

Transformações no Plano

6.1 Transformações lineares no plano

6.2 Reflexão em relação a uma reta

Vamos analisar as transformações lineares no plano que preservam distâncias, ou seja, as simetrias.

6.2.1 Reflexão em relação ao eixo Y

É um operador que leva cada vetor em seu simétrico em relação ao eixo Y.

Considere o operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que aplica cada vetor na sua imagem simétrica em relação ao eixo Y.

Na figura abaixo o operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leva o ponto A em A' simétrico em relação ao eixo Y.

Considere o ponto genérico $A(x, y)$. Se escrevermos $w = T(x)$, então as equações relacionando os componentes de x e de w são:

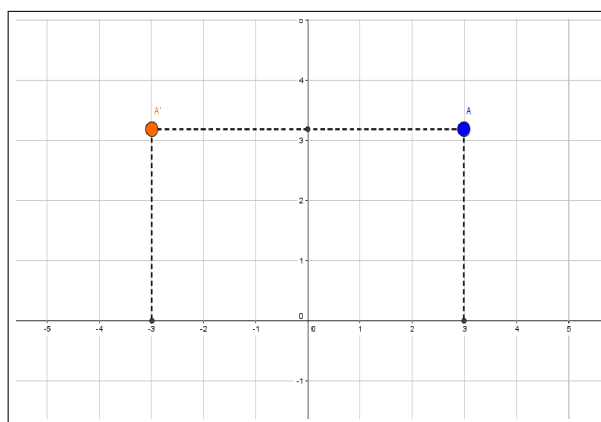


Figura 6.1: Reflexão em relação ao eixo Y

$$\begin{aligned}w_1 &= -x = -x + 0y \\w_2 &= y = 0x + y\end{aligned}$$

ou em formato matricial

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Como as equações de w_1 e w_2 são lineares, T é um operador linear e analisando a forma matricial da transformação a matriz canônica de T é

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.2.2 Reflexão em relação ao eixo X

É um operador que leva cada vetor em seu simétrico em relação ao eixo X.

Considere o operador $T : R^2 \rightarrow R^2$ que aplica cada vetor na sua imagem simétrica em relação ao eixo X.

Na figura abaixo o operador $T : R^2 \rightarrow R^2$ leva o ponto A em A' simétrico em relação ao eixo X.

Considere o ponto genérico $A(x, y)$. Se escrevermos $w = T(x)$, então as equações relacionando os componentes de x e de w são:

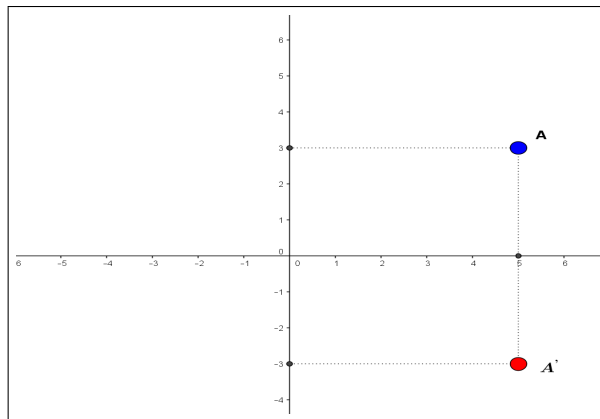


Figura 6.2: Reflexão em relação ao eixo X

$$w_1 = x = x + 0y$$

$$w_2 = -y = 0x - y$$

ou em formato matricial

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Como as equações de w_1 e w_2 são lineares, T é um operador linear e analisando a forma matricial da transformação a matriz canônica de T é

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6.3 Rotação

6.3.1 Rotação em relação a origem

É um operador que gira cada ponto em \mathbb{R}^2 por um ângulo fixado θ .

Considere o operador que gira cada vetor no sentido anti-horário por um ângulo positivo θ fixado.

Para encontrar as equações relacionando x com $w = T(x)$, seja β o ângulo entre o segmento ox e o eixo x positivo e seja r o comprimento comum de x e de w .

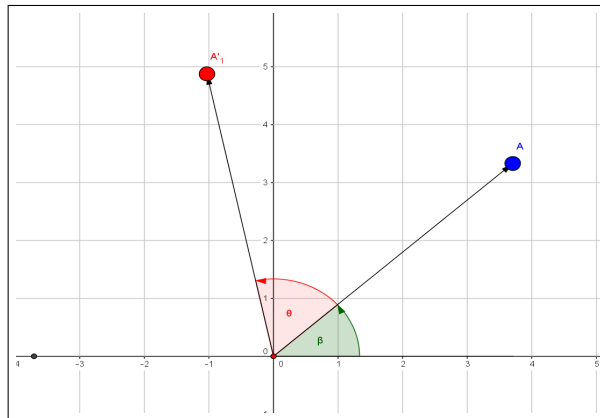


Figura 6.3: Rotação do ponto A em relação a origem por um ângulo θ em relação ao eixo X

Por trigonometria $x = r \cos \beta$, $y = r \sin \beta$ e

$$w_1 = r \cos(\beta + \theta)$$

$$w_2 = r \sin(\beta + \theta)$$

Aplicando a fórmula do seno / cosseno da soma de arcos, temos :

$$w_1 = r \cos \beta \cos \theta - r \sin \beta \sin \theta$$

$$w_2 = r \sin \theta \cos \beta + r \cos \theta \sin \beta$$

substituindo os valores acima de x e y em w_1 e w_2 , temos

$$w_1 = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$w_2 = x \sin \theta + y \cos \theta$$

As equações acima são lineares, de modo que T é um operador linear. Escrevendo na forma matricial

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Esse tipo de rotação funciona quando a figura esta com o ponto, que será a base da rotação no eixo X , posicionado na origem.

Quando o ponto está fora da origem é necessário fazer uma translação de eixos.

6.3.2 Rotação de objeto fora da origem

Quando o objeto esta situado fora da origem a rotação dele e composta de uma transformação de translação de iexos

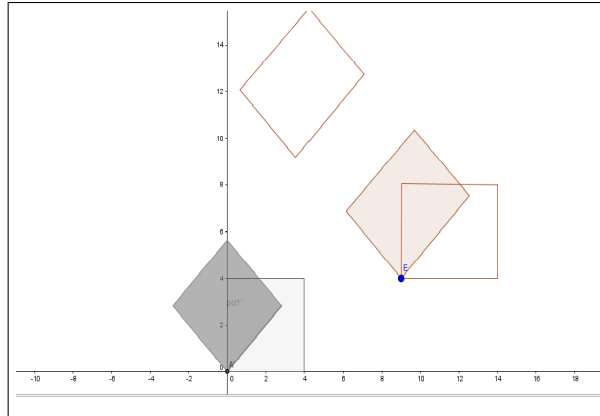


Figura 6.4: Rotação no plano

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A seguir, vamos mostrar que de fato a Transformação T é uma rotação de ângulo θ em torno do ponto P . Considere $(x; y)$ um ponto qualquer, faça uma translação do mesmo por $-P = (-x_0; y_0)$, rotacione-o em torno da origem por θ unidades angulares, faça uma translação por $P = (x_0; y_0)$. A menos que $(x_0; y_0) = (0; 0)$, esta transformação não é linear.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

6.4 Dilatação

A matriz canônica da dilatação será utilizada como a matriz deslocamento pois ela efetua o deslocamento do objeto situado no plano. A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$T(x, y) = K(x, y)$ é denominada dilatação ou contração do vetor OP com coordenadas na origem do plano cartesiano e no ponto $P(x, y)$.

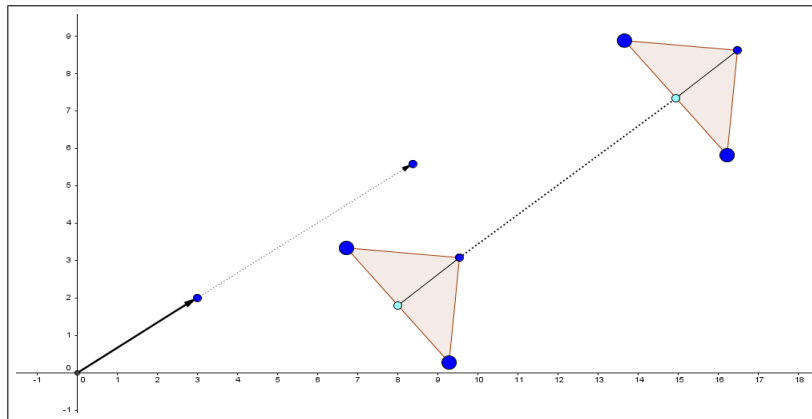


Figura 6.5: Dilatação corresponde ao deslocamento de uma figura ou um ponto no plano

Na forma matricial temos,

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Como não estamos considerando o vetor OP mas o ponto P , o valor de K corresponde ao deslocamento que queremos efetuar na direção a frente do objeto considerado.

Se $K > 1$, temos um deslocamento para frente. Se $k < 1$ temos um deslocamento para trás.

6.5 Translação

Observe a figura abaixo

As matrizes relacionadas às figuras acima são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } A' = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

A região triangular A sofreu uma translação dando origem à região triangular A' . Podemos descrever essa translação usando uma matriz coluna:

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Movemos 8 unidades à direita ao longo do eixo x , e depois, movemos 2 unidades para baixo ao longo do eixo Y .

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De modo geral, para transladar um ponto $P(x, y)$, de a unidades para a direita e b unidades para cima, efetuamos a adição de matrizes:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \end{bmatrix}$$

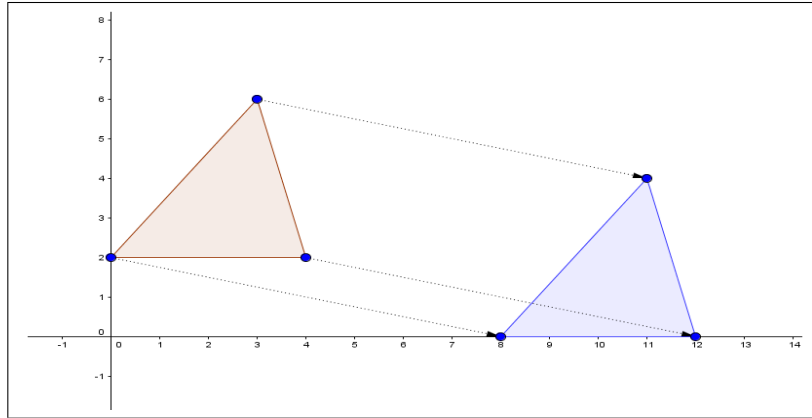


Figura 6.6: Dilatação corresponde ao deslocamento de uma figura ou um ponto no plano

Capítulo 7

Proposta de ensino

7.1 Aplicação das operações com Matrizes

DETERMINAR O DESLOCAMENTO A SER REALIZADO
POR UM ROBÔ NO PLANO \mathbb{R}^2

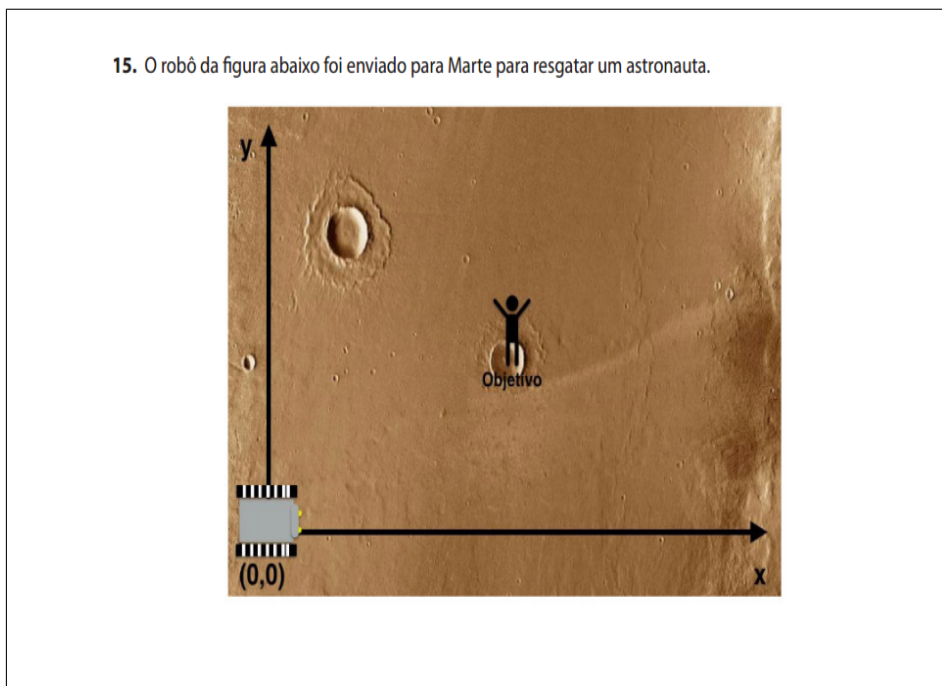


Figura 7.1: Prova OBR- nível 4- 2016

A figura acima foi retirada da prova da Olimpíada Brasileira de Robótica- OBR ano 2016. O comando da questão segue abaixo:

O astronauta enviou suas coordenadas cartesianas $(52, 30)$ para o robô, considerando que o robô se encontra na origem do eixo de coordenadas. Neste sistema, cada unidade é contada em quilômetros (km).

- Qual a sequência de comandos de programação que faz com que o robô alcance seu objetivo, percorrendo a menor distância possível?

- Considerando que o astronauta possui mantimentos suficientes para sobreviver apenas mais 4 dias e que o robô se desloca a uma velocidade de 8 cm/s, o robô chegará a tempo de salvá-lo?

1. Vá em frente por 52 km; Gire 90° para esquerda; Vá em frente por 30 km. O robô não chegará a tempo.
2. Gire 45° para esquerda; Vá em frente por 60 km. • O robô chegará a tempo.
3. Gire 90° para esquerda; Vá em frente por 30 km; Gire 90° para direita; Vá em frente por 52 km. • O robô chegará a tempo.
4. Gire 30° para esquerda; Vá em frente por 60 km. • O robô não chegará a tempo.
5. Gire 60° para esquerda; Vá em frente por 60 km. • O robô não chegará a tempo.

Percebendo as dificuldades dos alunos em trabalhar e responder esta tipo de questão, desenvolvida uma atividade utilizando o software GEOGEBRA. O aluno precisa encontrar e calcular o caminho a ser percorrido por um veículo. Porém segue como sugestão uma sequência didática de atividades para dar suporte ao professor antes de trabalhar as questões no nível da OBR.

7.2 Atividade 1

Atividade 1

Entender o que é uma transformação no plano.

O objetivo da atividade um é mostrar o aluno que cada figura pode ser tratada com um conjunto de pontos

ou até mesmo um único ponto no plano.

Podemos estender essa representação com a utilização de matrizes.

Como associar uma figura a uma matriz.

Observar a figura abaixo e associar os pares ordenados correspondentes a cada vértice a uma matriz $A_{2 \times n}$ em que n representa o número de vértices.

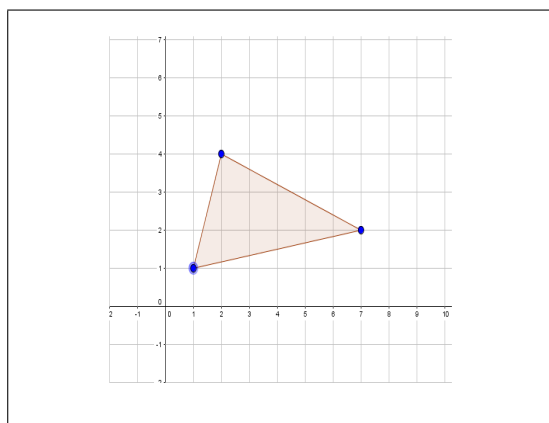


Figura 7.2: Relacionando figuras, vertices e matrizes

Os vértices $(1, 1)$; $(2, 4)$; $(7, 2)$ que compõem a figura acima podem ser associados a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe o triângulo abaixo (fig 7.3) no plano cartesiano e responda:

a) Escreva os pares ordenados que descrevem seus vértices. Procure enfatizar o trabalho com outros polígonos, explorando não somente os triângulos e quadriláteros;

b) Escreva esses pares ordenados formando uma matriz 2×3 ; As matrizes construídas serão da forma $A = (a_{ij})_{2 \times m}$ em que m é o número de vértices da matriz.

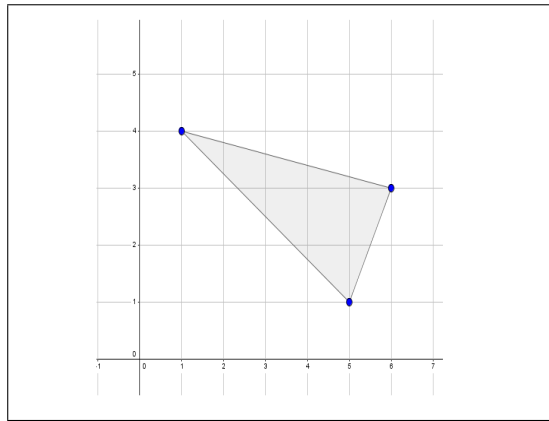


Figura 7.3: Atividade 1

7.3 Atividade 2

Atividade 2

Conhecendo os tipos de transformações e as matrizes associadas a elas:

Objetivo: Mostrar os diferentes tipos de transformações lineares e suas matrizes canônicas.

REFLEXÃO

A reflexão em relação ao eixo Y leva a matriz A em A^1

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

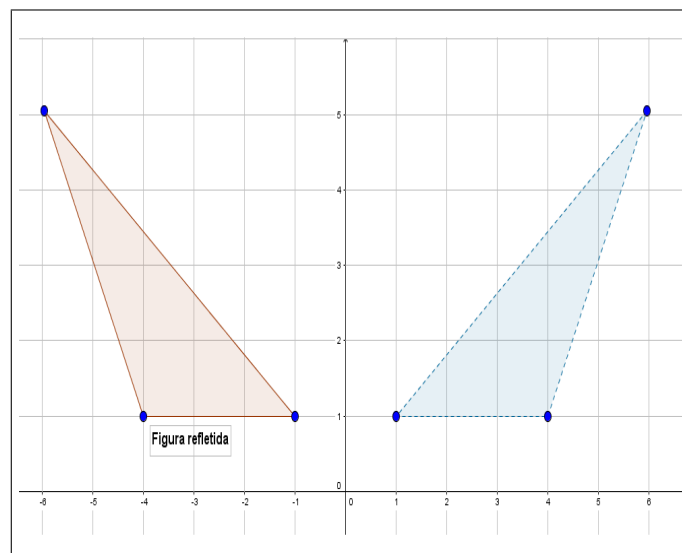


Figura 7.4: Reflexão

Atividade

Faça o que se pede para cada matriz a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Marque os pares ordenados em um plano cartesiano e ligue os pontos, em ordem, para formar uma figura. Explore o caso em que não se obedece a ligação dos pontos na ordem que são colocados na matriz.

b) Efetue uma reflexão das figuras em relação ao eixo x e escreva a matriz de cada figura refletida. Procure ajudar o aluno a associar a reflexão como se houvesse um espelho em frente a figura no eixo X .

c) Constata-se que a matriz da figura refletida pode ser obtida multiplicando-se a matriz associada à figura pela matriz:

Dependendo da assimilação do conteúdo pelos alunos já pode-se demonstrar como obter a matriz canônica da transformação acima.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.4 Atividade 3

Atividade 3

Enteder o processo de rotação nos sentidos horários e anti-horários.

O objetivo é diferenciar a rotação em relação a origem da realizada em relação a um ponto da figura. Importante fazer uma revisão sobre o conceito de ângulos e trigonometria em especial como calcular os valores das principais funções trigonométricas.

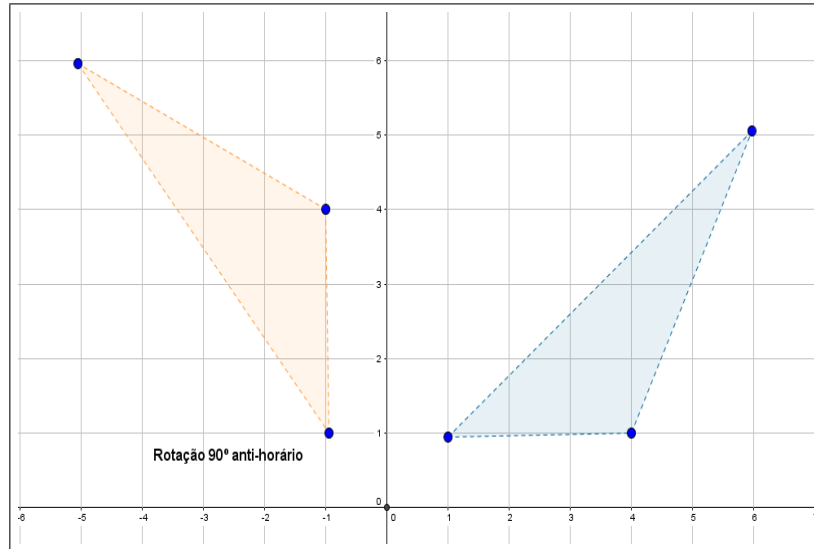


Figura 7.5: Rotação 90° anti-horário

A rotação em relação a origem leva a matriz A em A^1 .

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos 90 & -\sin 90 \\ \sin 90 & \cos 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

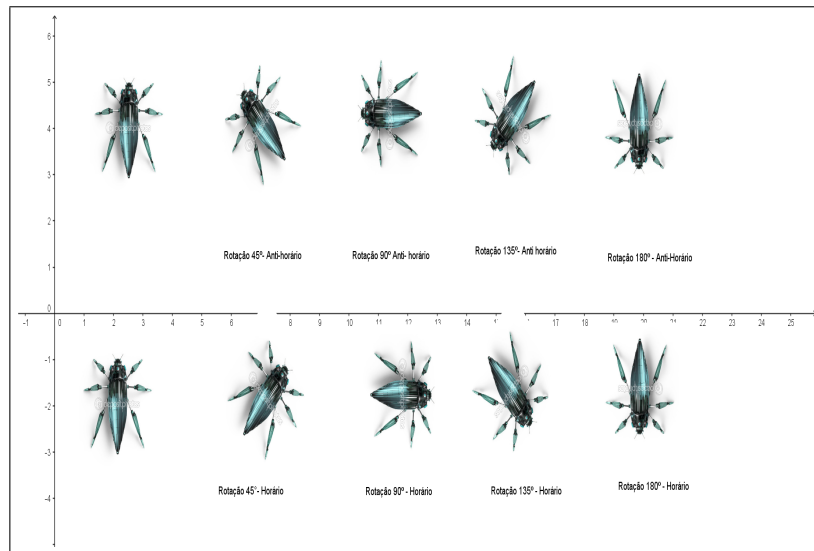


Figura 7.6: Rotações sentido horário e anti-horário

Faça o que se pede para cada matriz a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) coloque os pares ordenados de cada matriz no plano cartesiano e ligue os pontos em ordem para formar uma figura.

(Atentar para a necessidade de seguir a ordem de ligação dos pontos)

b) Na matriz A aplique uma rotação de 45° , em B uma rotação de 90° e em C uma rotação de 135° , no sentido anti-horário, em torno da origem $(0, 0)$

c) em todos os casos escreva a matriz associada a figura final e desenhe-as em um mesmo plano cartesiano.

d) Verifique que a matriz associada pode ser obtida multiplicando-se a matriz associada á figura inicial por

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & -\text{sen}\beta \\ \text{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Para a matriz canônica de rotação o valor de β positivo ou negativo corresponde a rotação nos sentido anti-horário ou horário respectivamente.

A matriz rotação toma como referência a origem do plano cartesiano. Existem situações que é preciso girar a figura ao redor de si. Neste caso será necessário fazer uma translação de eixos. Dependendo do nível da turma em que esta sendo trabalhado o assunto pode se enfatizar de maneira mais superficial ou explicar o processo de translação de eixos. Na rotação em relação a origem a nova figura é rotacionada por um ângulo β .

Para a demonstração da rotação de figuras procure inserir imagens de objetos ou veículos, já que algumas rotação podem confundir os alunos.

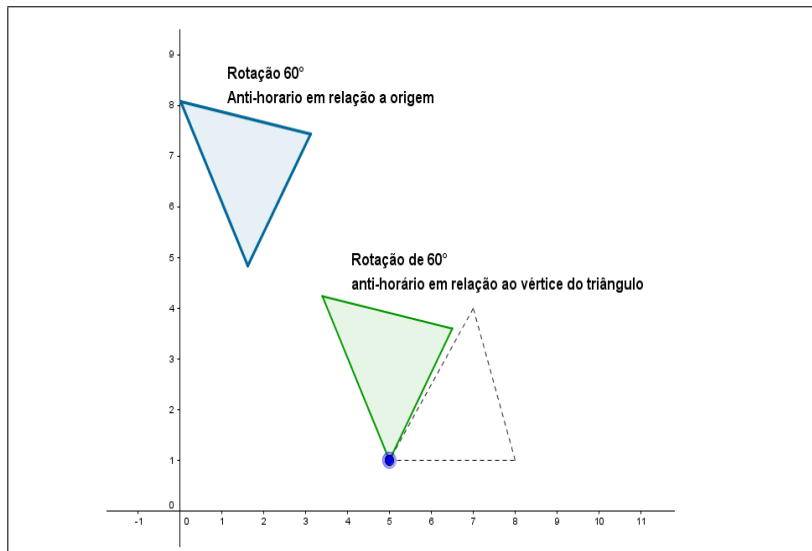


Figura 7.7: Rotação em relação a origem x rotação em relação ao vértice da figura

7.5 Atividade 4

Dilatação

Observe a figura abaixo:

Verificando geometricamente, temos:

Matrizes associadas às figuras A e A'

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 10 \\ 4 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

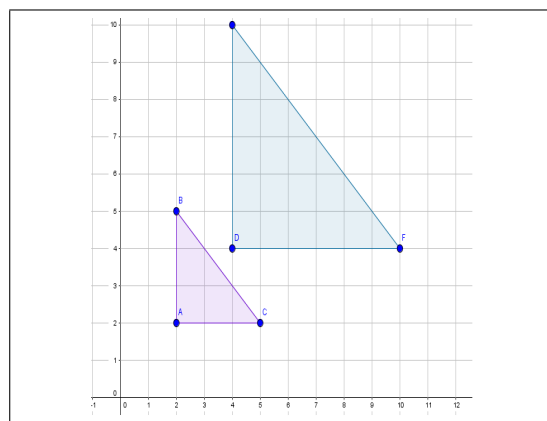


Figura 7.8: Dilatação

Observe a figura abaixo, nela foi aplicada uma transformação de dilatação do tipo

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

em seguida variamos os valores de k , onde $k \in \mathbb{N}$

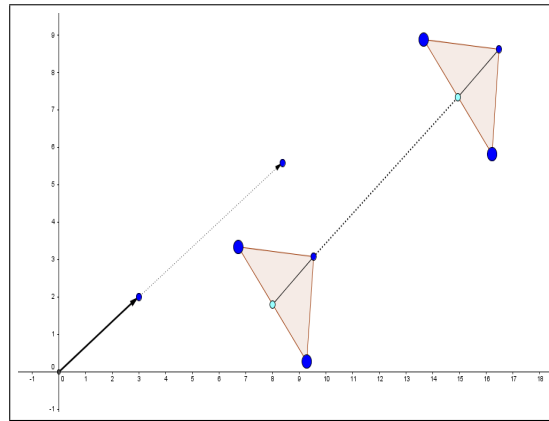


Figura 7.9: Translação de um ponto P pode ser interpretado como deslocamento de P .

Procure trabalhar com diferentes valores K e de maneira natural identificar o que ocorre para valores de $K > 0$, $0 < K < 1$, $K > 0$ e $K = 0$

- a) o que acontece com a figura?
- b) o que ocorre se trocarmos a figura por um ponto P de coordenadas (x, y) qualquer?

Nesse ponto é interessante mostrar que a matriz dilatação pode ser utilizada para gerar figuras semelhantes, deslocar um objeto ou um ponto no plano.

7.6 Atividade 5

Atividade 5

Acionamento do motor

Para controlardo o acionamento e velocidade dos motores e utilizamos um microcontrolador arduino.

O microcontrlodor Arduino é um pequeno computador que você pode programar para processar entradas e saídas entre o dispositivo e os componentes externos conectados a ele, interagindo com o ambiente por meio de hardware e software.

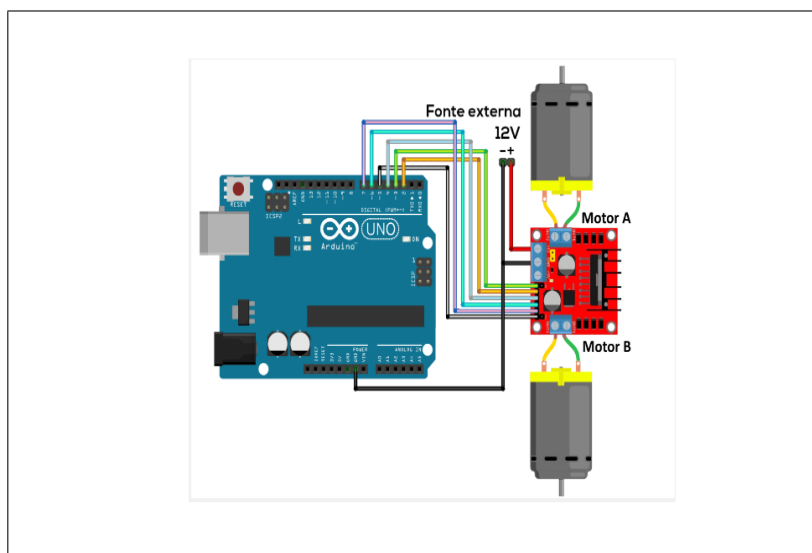


Figura 7.10: Trajeto simulando deslocamento do robô

O veículo é controlado por dois motores, através de uma placa conectada ao arduino conhecida como ponte H.

A placa possui duas saídas independentes onde serão conectados os dois motores.

Os motores utilizados são do tipo DC, para variarmos a velocidade do motor, rotações por minuto, devemos variar a tensão de entrada, ou seja alimentação dos dois pinos do motor.

Dependo da forma como o motor é alimntado obteremos os seguintes movimentos:

Motor A - (giro no sentido horário)

Pino 1- 0V

Pino 2- 5v

Motor B - (giro no sentido horário)

Pino 1- 0V

Pino 2- 5v

Se os dois motores forem alimentados conforme a configuração acima, o veiculo se desloca para frente.

Motor A - (giro no sentido anti-horário)

Pino 1- 5V

Pino 2- 0v

Motor B - (giro no sentido anti-horário)

Pino 1- 5V

Pino 2- 0v

Se os dois motores forem alimentados conforme a configuração acima, o veículo se desloca para trás.

Se combinarmos o movimento do motor A no sentido horário com o motor B no sentido anti-horário obtemos o giro para direita ou esquerda.

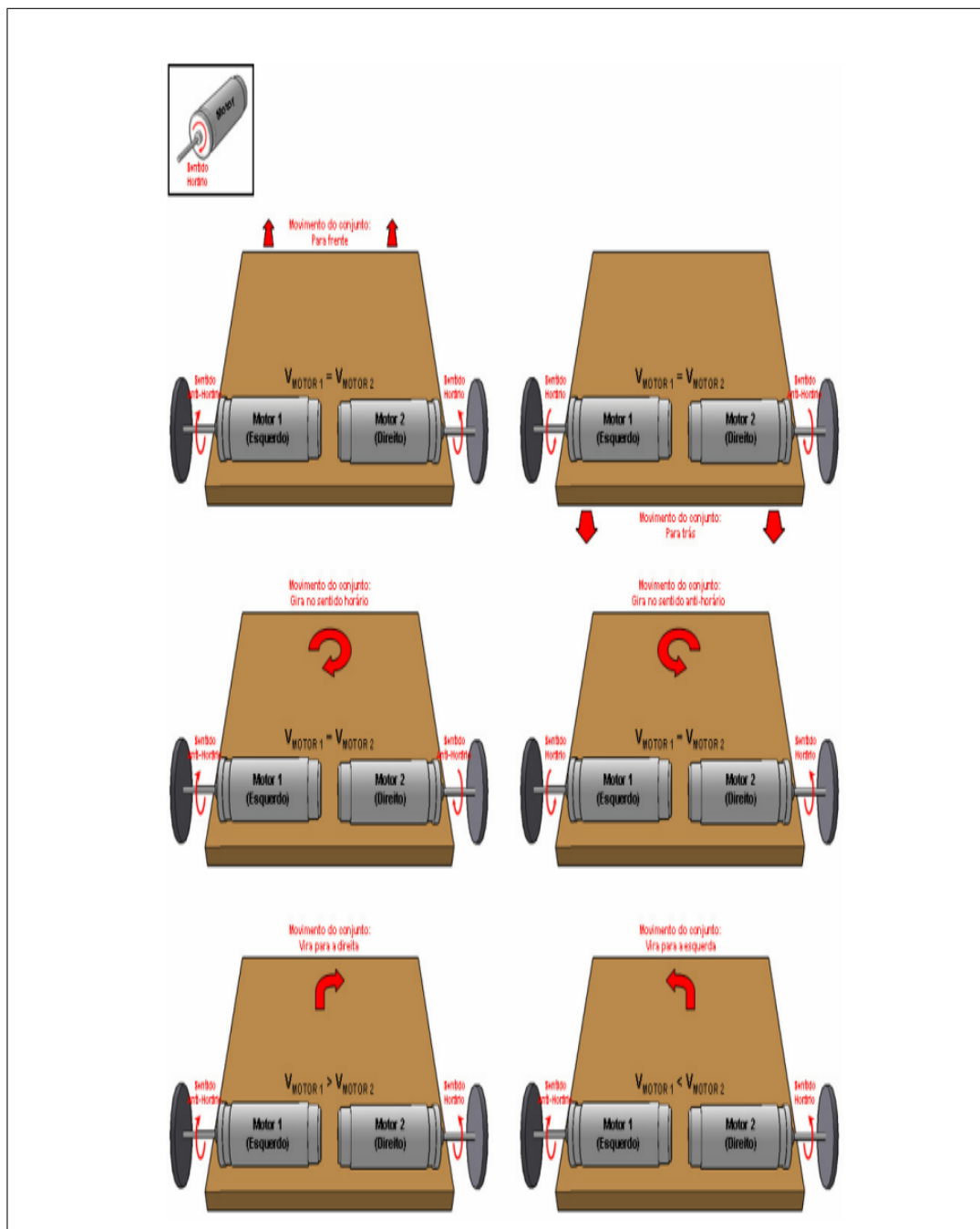


Figura 7.11: movimentos possíveis Trajeto simulando deslocamento do robô

Observe a tabela com as configurações e estados possíveis para os motores A e B. Este trabalho explora os movimentos para frente, parado, e atrás.

Dependendo do nível da turma, tempo disponível para atividade e desenvolvimento do assunto pode ser explorado os outros movimentos. Ficando a critério do professor esta decisão.

MOTOR A		MOTOR B		
ENTRADA 1	ENTRADA 2	ENTRADA 3	ENTRADA 4	MOVIMENTO DO ROBÔ
0V	5V	0V	5V	FRENTE
5V	0V	5V	0V	RÉ
0V	5V	5V	0V	GIRO DIREITA
5V	0V	0V	5V	GIRO ESQUERDA
0V	0V	0V	0V	PARADO

Figura 7.12: Programação dos motores

As atividades foram propostas tendo como referência os alunos do 2º ano do ensino médio, de uma escola da rede pública.

Nesta atividade o professor pode explorar o deslocamento ou rotação da figura com a sequência de movimentos necessários para programar o motor. Por exemplo, qual seria a programação adequada para o robô realizar o deslocamento abaixo:

Apartir de agora será trabalhado o deslocamento de um ponto simulando o movimento de um robô em um plano.

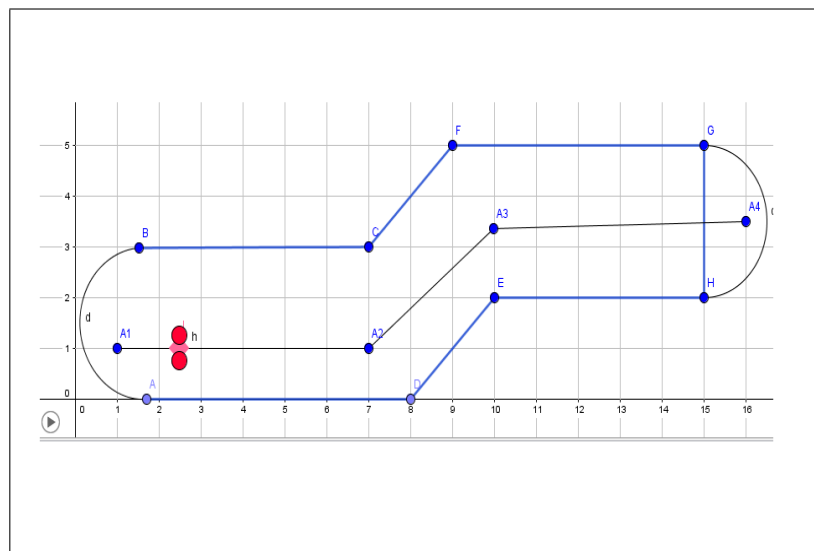


Figura 7.13: Trajeto simulando deslocamento do robô

O objetivo é descrever o caminho que o objeto deve fazer do ponto de início até o fim do trajeto. O aluno deve escolher quatro A_1 , A_2 , A_3 , A_4 pontos no plano que serão utilizados para criar caminho poligonal.

Através da software geogebra será feito um caminho poligonal, simulando o trajeto escolhido.

7.7 Atividade 6

Atividade 6

1- Com base no desenho abaixo responda

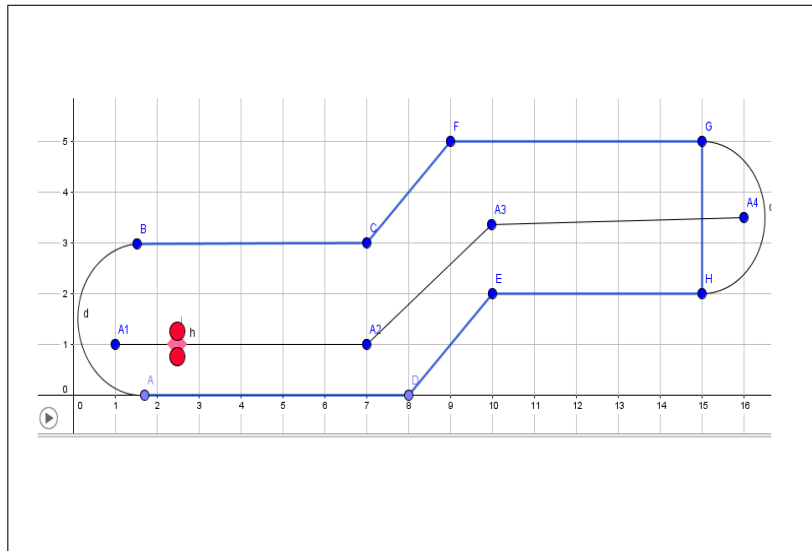


Figura 7.14: Trajeto simulando deslocamento do robô

- Descreva a sequência de movimentos necessários para deslocar o robô até o local indicado
- Descreva a sequência de comandos (parar, frente, trás, girar,) que o robô deveria executar do ponto inicial até o local indicado

Bibliografia

1. ANTON, Howard. Algebra linear com aplicações/ Anton Howard e Cris Rorres; tradução Claus Ivo Doering - 8.ed.- Porto Alegre: Bookman, 2001.
2. DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto Aplicações vol 2; Luiz Roberto Dante- 2ed. São Paulo: Ática , 2013.
3. *D'* Ambrosio, Ubiratan. Educação matemática: Da teoria à prática. 23 ed. Campinas,SP: Papyrus, 2012.
4. *D'* Ambrósio, U.; roberto, C.; Weil, P. Rumo à Nova Transdisciplinaridade: Sistemas Abertos de Conhecimento. São Paulo: Summus Editorial, 1993.
5. FOGAÇA, Jennifer. Contextualização. Disponível em: <http://educador.brasilecola.com/trabalho-docente/contextualizacao.htm> Acesso em: 19 set. 2012.
6. GUIMARÃES, F. A. Desenvolvimento de Robô Móvel Utilizando para a Exploração de Ambientes Hostis – Dissertação de Mestrado em Engenharia de Processos Químicos e Bioquímicos, Escola de Engenharia Mauá do Centro Universitário do Instituto Mauá de Tecnologia, São Caetano do Sul, SP, Brasil, 2007.
7. LIMA, elos Lages, A Matemática do Ensino Médio- vol2/ Elon Lages Lima, Paulo Cesar Pinto de Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto Cesar Morgado- 6.ed, rio de Janeiro, editora SBM 2006.
8. MENDES, Iran Abreu. Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
9. MEYER J F C A; Caldeira, A. D; Malheiros, A. P. S; Modelagem em Educação Matemática, Coleção Tendências em Educação Matemática , Belo Horizonte , Ed: Autêntica, 2011.
10. MORAES Filho, daniel Cordeiro de . Manual de Redação Matemática, 1 edição. Coleção do professor de Matemática, Rio de Janeiro, Editora SBM, 2014.
11. MORIN. A cabeça bem feita. Repensar a reforma repensar o pensamento. 6 ed.,Rio de janeiro: Bertrand Brasil ltda, 2002.
12. Parâmetros curriculares Nacionais - PCN , Acessado através do site <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12598:publicacoes> , em 20/10/2016.
13. PERRENOUD, P. Dez novas competências para ensinar. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

14. SCHONS, C., Primaz, E. e Wirth, G.A.P. Introdução a Robótica Educativa na Instituição Escolar para alunos do Ensino Fundamental da disciplina de Língua Espanhola através das Novas Tecnologias de Aprendizagem. Anais do I Workshop de Computação da Região Sul, 2004.
15. VALENTE, José Armando. Repensando as situações de aprendizagem: o fazer e o compreender. Boletim do Salto para o Futuro, série Tecnologia na Escola. Programa 4, 2002.
Disponível em: <http://www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2002/te/tetxt4.htm>.

Lista de Figuras

3.1	Prova OBR- nível 4- 2016	6
6.1	Reflexão em relação ao eixo Y	14
6.2	Reflexão em relação ao eixo X	15
6.3	Rotação do ponto A em relação a origem por um angulo θ relação ao exixo Y . .	16
6.4	Rotação no plano	17
6.5	Dilatação corresponde ao deslocamento de uma figura ou um ponto no plano . .	18
6.6	Dilatação corresponde ao deslocamento de uma figura ou um ponto no plano . .	19
7.1	Prova OBR- nível 4- 2016	20
7.2	Relacionando figuras, vertices e matrizes	22
7.3	Atividade 1	23
7.4	Reflexão	23
7.5	Rotação 90° anti-horário	25
7.6	Rotações sentido horário e anti-horário	26
7.7	Rotação em relação a origem x rotação em relação ao vértice da figura	27
7.8	Dilatação	27
7.9	Translação de um ponto P pode ser interpretado como deslocamente de P. . . .	28
7.10	Trajeto simulando deslocamento do robô	29
7.11	movimentos possiveis Trajeto simulando deslocamento do robô	30
7.12	Programação dos motores	31
7.13	Trajeto simulando deslocamento do robô	31
7.14	Trajeto simulando deslocamento do robô	32