UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ – UNIFAP
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA — PROFMAT

JORGE PRAZERES CARDOSO

DECOMPOSIÇÃO DE MATRIZES
UMA PROPOSTA PARA CALCULAR O PRODUTO MATRICIAL NO ENSINO MÉDIO.

MACAPÁ- AP
2014

JORGE PRAZERES CARDOSO

DECOMPOSIÇÃO DE MATRIZES

UMA PROPOSTA PARA CALCULAR O PRODUTO MATRICIAL NO ENSINO MÉDIO.

Dissertação apresentada como quesito para obtenção do Título de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Amapá.

Orientador: Dr. José Walter Cárdenas Sotil

MACAPÁ-AP
2014

JORGE PRAZERES CARDOSO

DECOMPOSIÇÃO DE MATRIZES
UMA PROPOSTA PARA CALCULAR O PRODUTO MATRICIAL NO ENSINO MÉDIO.

Dissertação apresentada como quesito para obtenção do Título de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Amapá.

Orientador: Dr. José Walter Cárdenas Sotil

Data da aprovação:04 / 04 / 2014

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil
Universiadade Federal do Amapá — UNIFAP
Presidente

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos
Universidade Federal do Pará — UFPA
Membro Externo

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
Universiadade Federal do Amapá — Unifap
Membro Interno

Prof. Dr. Erasmo Senger
Universiadade Federal do Amapá — Unifap
Membro Interno

MACAPÁ-AP
2014

Aos meus pais Ana e João que pelo seu exemplo de vida me ensinaram a lutar pelos meus ideais.
À minha esposa Maria e meus filhos, Guilherme, Pedro e Arthur, pelo companheirismo e amor fortalecedor.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por iluminar sempre o meu caminho, me abençoando com tantas graças;
Aos meus pais pela educação, princípios e valores transmitidos no decorrer de minha vida, que me fizeram ser a pessoa que sou;
Ao professor, orientador e amigo José Walter Cárdenas pelo incentivo, lições e compreensão, valores sem os quais provavelmente hoje eu não estaria concluindo esta importante etapa da minha vida.
Aos meus familiares pela confiança e carinho;
Aos meus amigos pela compreensão e apoio nessa importante caminhada;
Aos colegas de turma pela oportunidade de troca de conhecimentos.

“Não se escreve para comprovar o domínio de uma técnica ou para expressar o entendimento de determinadas regras. Escreve-se ao se ter o que dizer. Do mesmo modo, não se lê para praticar a aprendizagem do alfabeto. Lê-se para tomar posse do já desnudado pelo homem, para ampliar os limites, para apropriar-se da fragilidade, para recuar fronteiras. Lê-se para somar-se e escreve-se para dividir-se. Talvez seja essa a operação mais definitiva para um projeto de ensino.”

Bartolomeu Campos de Queirós

RESUMO

A estrutura educacional brasileira vive um momento delicado, onde são criados instrumentos legais para impedir a retenção de alunos, favorecendo as estatísticas sem, entretanto, preocupar-se com o efetivo aprendizado. Ferramentas mais elaboradas são deixadas de lado, sob a justificativa de serem supérfluas, pois aos alunos seria necessário somente um mínimo de conhecimento (que na verdade beira o nada), desprovido de construção e demonstrações formais, resumidas a fórmulas que se propõem a resolver casos específicos e limitados. O estudo das matrizes é tido pelos alunos como conteúdo desprovido de significado prático, reduzindo-se à pura abstração, oriundas do intelecto humano. Um caso bastante claro é a multiplicação matricial, que apesar de ultimamente ter ganhado atenção dos autores com relação à sua aplicação, esbarra na dificuldade de sua operacionalização. Por diversos fatores, a maioria dos professores de matemática tende a reproduzir na integra o conteúdo dos livros didáticos, deixando muitas vezes de ser realmente protagonista no processo ensino-aprendizagem para ocupar uma posição de mero espectador. Um dos fatores para tal comportamento é a falta de segurança dos professores de Matemática relativo ao conteúdo em discussão, impondo a manutenção dessa prática. Felizmente, iniciativas como o Profmat e o Papmem oportunizam novos olhares, novas metodologias, novas possibilidades; dando uma clara demonstração, através dos materiais usados nos cursos e das publicações da SBM, em especial a coleção “Matemática para o Ensino Médio”, cujo volume três dá uma boa dimensão dos benefícios das diversas aplicações das matrizes de forma simples e acessível. Inspirado nessas iniciativas, buscamos contribuir, tendo em vista que o presente trabalho visa demonstrar que pequenas mudanças de perspectiva como a multiplicação coluna por linha, o Filtro de JPC e a multiplicação de matrizes por bloco, podem ser elementos facilitadores do processo de ensino-aprendizagem no que se refere ao produto de matrizes.

Palavras-chave: Ensino. Educação. Matemática. Matrizes. Produto.

ABSTRACT

The Brazilian educational structure is a delicate moment where legal instruments are created to prevent the retention of students, favoring the statistics without, however, worrying about effective learning. More elaborated tools are set aside, with the justification of being superfluous, since students would need only a minimum of knowledge (which is actually almost nothing), devoid of construction and formal statements, summarized to formulas that aim to solve specific and limited cases. The study of matrices is taken by students as content devoid of practical meaning, reducing it to pure abstraction, derived from the human intellect. A very clear case is the matrices multiplication, which despite having recently won attention of authors in relation to its application, bumps into the difficulty of its operation. By several factors, most math teachers tend to reproduce in full the content of textbooks, often failing to really be a protagonist in the teaching-learning process to occupy a position of spectator. One reason for such behavior is the lack of security of the mathematics teachers on the content at issue, requiring the maintenance of this practice. Fortunately , initiatives like the Federal Government Programs Profmat and Papmem provide new points of view , new methodologies , new possibilities , giving a clear demonstration by the materials used in courses and publications of SBM , particularly the " Mathematics for Secondary Education " collection, which the volume three book gives a good dimension of the benefits of the various applications of arrays of simple and affordable way . Inspired by these initiatives, we seek to contribute, considering that this study aims to demonstrating that small changes in perspective as a multiply column by row, the Filter JPC and matrices multiplication by block, can be enhancer elements of teaching and learning process about matrices product.

Keywords: Teaching. Education. Mathematical. Matrices. Product.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Art. — artigo

CF — Constituição Federal

CAPES — Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior

IMPA — Instituto de Matemática Pura e Aplicada

JPC — Jorge Prazeres Cardoso

LDBEN — Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

MEC — Ministério da Educação e Cultura

PAPMEM — Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio

PCN's — Parâmetros Curriculares Nacionais

PNLD — Programa Nacional do Livro Didático

PROFMAT — Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SBM — Sociedade Brasileira de Matemática

UNIFAP — Universidade Federal do Amapá

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Apesar de termos sido incentivados a escolher e trabalhar com brevidade os temas dos trabalhos de conclusão de curso referente ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional — PROFMAT, foi somente no 4º. semestre que despontou a ideia de abordar **matrizes** como tema do referido trabalho, motivado pela disciplina Geometria Analítica, em alguns de seus módulos, e pelo orientador e amigo e Dr. Walter Cárdenas.

Há alguns anos acompanhamos o Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio — PAPMEM, que é uma oportunidade dada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada — IMPA, oferecendo gratuitamente treinamento para professores do Ensino Médio presencialmente no Rio de Janeiro e em instituições parceiras de todo nosso país. O mencionado programa é composto de módulos independentes, abordando tópicos selecionados das três séries do Ensino Médio sem se esquecer de alguns tópicos do Ensino Fundamental. As atividades de cada módulo ocorrem durante os recessos escolares.

Foi num desses treinamentos, especificamente aquele ocorrido em janeiro de 2013, no qual percebemos que até mesmo os professores tinham dificuldades em realizar o produto matricial. Esta situação reforçou nossa ideia de abordar definitivamente matrizes como trabalho de conclusão de curso.

Já a respeito do estudo das matrizes no ensino médio, observações em sala de aula apontam o produto matricial e a inversão de matrizes como conteúdo matemático relativo ao qual os alunos apresentam maior dificuldade em perceber sua utilidade prática e têm maior dificuldade ainda em operacionalizar os procedimentos ou algoritmos devidos.

Felizmente (ou infelizmente, como veremos adiante), como auxílio para enfrentar dificuldades da ordem da organização dos conteúdos lembremo-nos da inclusão do Programa Nacional do Livro Didático — PNLD nas escolas de quase todo país, havendo um ganho tanto para professores quanto para alunos, mas sendo bastante claro o objetivo do programa no portal do Ministério da Educação e Cultura — MEC, na internet:

> O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica. Após a avaliação das obras, o Ministério da Educação (MEC) publica o Guia de Livros Didáticos com resenhas das coleções consideradas aprovadas. O guia é encaminhado às escolas, que escolhem, entre os títulos disponíveis, aqueles que melhor atendem ao seu

> projeto político pedagógico.

Como percebemos, o PNLD se coloca como auxiliador do processo ensino-aprendizagem, mas o que verificamos é a sega utilização de tal instrumento, como texto a ser seguido na íntegra, sem qualquer processo de filtragem pelos professores, pois mesmo que os livros sejam sujeitados à prévia avaliação antes de serem aceitos por uma determinada escola, a nosso ver, apenas aspectos de caráter geral são considerados. Desta forma, se faz necessária a interferência do professor de forma a equalizar o material didático e a realidade de seus alunos, pois vivemos num país continental permeado de diferenças regionais, diferenças econômicas, políticas e culturais.

Mesmo assim, uma prática recorrente tem dominado as escolas por todo país. Uma vez escolhido o livro didático, os mesmos se tornam cartilhas obrigatórias, seguidas como escrituras sagradas, dotadas de uma verdade absoluta e perfeita, revelando alunos e professores como espectadores do processo ensino-aprendizagem.

Não estamos de forma alguma culpado a existência do livro didático, mas sim questionando o posicionamento de alguns (na verdade muitos) professores e escolas perante o papel do livro didático no contexto escolar. Ele é somente mais um elemento que vem a somar no projeto educacional brasileiro.

Mas o que deseja o projeto educacional brasileiro?

Uma boa perspectiva do que se deseja, ou melhor, o que se visa à formação do aluno do ensino médio, está presente no art. 35 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional — LDBEN:

> Art. 35. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:
>
> I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
>
> II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
>
> III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
>
> IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

O artigo acima muito diz, sem a necessidade de nos aprofundarmos. Uma leitura superficial revela muitas diretrizes como podemos salientar entre outros, e relacionados com a nossa proposta de trabalho:

A consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos nos remetem à ideia de que buscamos, ou devemos buscar a continuidade dos conhecimentos já adquiridos, justificando-os ou procurando justificá-los de forma mais consistente, além de alargá-los por meio de novas perspectivas e possibilidades. Neste sentindo, apesar de operações com matrizes não se fizerem presentes no Ensino Fundamental, uma noção de grupamento e análise de dados em tabelas, já são trabalhados no Ensino fundamental. Seriam, portanto, as matrizes um aprofundamento do conhecimento já introduzido previamente.

Tanto a capacidade de adaptação e flexibilidade, quanto a autonomia intelectual e do pensamento crítico são desejáveis não apenas aos alunos, por mais que o dispositivo legal refira-se a este, são características desejáveis também aos professores. Aos alunos porque à medida que cresce, deste é exigido recursos de convivência em sociedade que impõe um sem número de desafios; aos professores porque além destes desafios, no processo ensino-aprendizagem devem ser sujeitos atuantes, protagonista do processo, contornado dificuldades, propondo alternativas, inovando, estimulando e enriquecendo o saber.

O relacionamento entre teoria e prática tem-se revelado um elemento desafiador, é o afirma o PCN do Ensino Médio — Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (1998, p.112):

> [...] o aluno precisa analisar e compreender a situação por inteiro, decidir sobre a melhor estratégia para resolvê-la, tomar decisões, argumentar, se expressar e fazer registros [...] percebemos que, mesmo quando possuem informações e conceitos, os alunos não os mobilizam, não os combinam eficientemente, desanimam, esperam a explicação do professor, não se permitem tentar, errar, não confiam em suas próprias formas de pensar.

Com relação ao nosso tema e este sobre este aspecto, Lima[1] afirma que num estudo elementar, em nível de Ensino Médio, o produto de matrizes deve ser motivado mediante exemplos simples.

Devemos também lembrar, que à medida que surgem novas tecnologias, as formas de viver, de comunicar e de se relacionar do ser humano, também tendem a se modificar. Novos valores vão caracterizando uma nova sociedade, um novo homem e uma nova escola, tudo isso sendo um reflexo dessas recorrentes mudanças. A esse respeito Antunes[2] afirma:

> Os tempos de agora são outros. Não necessariamente melhores ou piores, mas indiscutivelmente diferentes. Não basta acumular conhecimentos para depois deles se usufruir. É antes, essencial estar a altura de aproveitar e explorar, pela vida inteira, todas as possibilidades do aprendizado, da atualização, do enriquecimento para as

---

[1] LIMA, Elon L.; et all. **A Matemática do Ensino Médio**, vol.3, 6 ed, p.131. Coleção Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
[2] ANTUNES, Celso. Como desenvolver competências em sala de aula. 7. ed., p.7. Petrópolis, RJ: Vozes, 2007.

> mudanças que em todos os momentos nos assaltam.

Antunes expressa bem nosso proposta de mudança, baseado no desejo de explorar as possibilidades de aprendizado.

Além disso, devemos compreender que diante de uma sociedade cada vez mais tecnológica, existe a necessidade de incluir no contexto escolar, ações voltadas para desenvolver no educando, competências e habilidades que lhe possibilitem lidar com as novas tecnologias. Evidenciando-se que dominar o uso de equipamentos e das novas tecnologias é necessário, mas não o suficiente. Nessa direção afirma Lévy[3]:

> Não se trata aqui apenas de usar a qualquer preço as tecnologias, mas acompanhar conscientemente e deliberadamente uma mudança de civilização que recoloca profundamente em causa as formas institucionais, as mentalidades e a cultura dos sistemas educativos tradicionais e notadamente os papéis de professor e aluno.

Neste sentido, é importante ressaltar os vários estudos que contribuem para fortalecer as iniciativas propostas no intuito de promover mudanças significativas com as novas tecnologias, novas formas de aprender e por isso, novas competências são exigidas, novos paradigmas são discutidos e aplicados, respeitando valores, contextos e a cultura dos sujeitos.

É claro que não conseguiríamos alcançar este intento sem um apoio especializado, e para tanto, o levantamento bibliográfico acerca da temática apoiou-se em diversos referenciais teóricos dentre os quais podemos destacar: Boldrini (1980), Anton (2006), Poole (2004), Lima (2006) entre outros. Esta revisão da literatura forneceu um quadro teórico bastante consistente do ponto de vista do formalismo necessário em matemática, além de em muitos casos superar o formalismo puro em face das outras necessidades educacionais mais importantes.

Nesta caminhada que nos propusemos fazer, e buscando as mudanças que consideramos desejáveis, organizamos nosso trabalho da seguinte forma:

Introduzimos nosso trabalho fazendo algumas observações das dificuldades de alunos e professores no que tange operações com matrizes em especial o produto matricial, considerações acerca do uso do livro didático, da LDBEM e dos PCN's.

No segundo capítulo, comentamos o que são e para que servem as matrizes, além de apresentamos sua definição formal, suas propriedades e ocorrências mais comuns, exibindo resultados decorrentes de sua forma ou definição. Apesar de simples, são a base para o desenvolvimento do restante do trabalho, além de ratificar a importância das matrizes em contraposição ao infeliz posicionamento de alguns professores em considerar como "mais

---

[3] LÉVY, Pierre. As Tecnologias da inteligência. p.172. Rio de janeiro: Nova Fronteira, 1994.

conteúdo a ser dado por fazer parte da grade curricular do Ensino Médio”.

Ainda no segundo capítulo, introduzimos as operações básicas com matrizes, além de algumas definições e nomenclaturas adicionais, permitindo a apresentação da soma, subtração e produto de uma matriz por um número real, operações que derivam ou impõe propriedades bastante expressivas e dignas de serem observadas. Incluímos também, neste capítulo, a definição de matriz transposta, definição de grande utilidade. Para tornar o trabalho mais dinâmico, omitimos algumas das demonstrações das propriedades matriciais tendo em vista que são presentes em inúmeras bibliografias, inclusive muitas são indicadas em nossas referências.

O terceiro capítulo guarda o centro do nosso trabalho. Apesar de iniciarmos uma abordagem matemática tradicional, já apontamos a necessidade do abundante uso de exemplos práticos pra dar sentido ao conteúdo pretenso. Indicamos muitas dificuldades que professores e alunos têm em trabalhar o produto matricial, dentre elas seu significado e principalmente sua operacionalização. O seu significado pode ser suprido como já dissemos, pelo uso de exemplos práticos, mas a operacionalização, constantemente se resume a exaustiva repetição do algoritmo até seu domínio. Isto é algo que não desejamos, e para tanto, ao final do capítulo em questão, apresentamos nossa proposta de produto matricial, comparando vantagens e desvantagens entre os métodos.

No quarto capítulo, ampliamos o alcance da abordagem matricial, apresentando além de argumentos justificadores, possibilidades operacionais de matrizes em bloco que, por ventura, poder-se-ia trabalhar no Ensino Médio. Neste capítulo, com o auxílio de matriz em bloco, demostramos a equivalência da definição tradicional e a nossa alternativa de produto matricial. Consideramos ainda matrizes grandes e algumas técnicas para multiplicação matricial.

Além disso, filtros para detecção de erro no produto matricial ganha destaque no quinto capítulo, e para tanto definimos matriz-parcela, cardinal de uma matriz, matriz de linha nula e matriz de coluna nula. Muitas das consequências destas definições, como propriedades, são demonstradas na medida em necessitamos avançar na investigação.

Já o sexto capítulo aparece como consequência natural de toda a estruturação do nosso trabalho, quando somos impelidos a apresentar processos de otimização da multiplicação matricial, onde por mais que se julgue inviável sua aplicação para os propósitos do Ensino Médio, dá uma boa ideia de como é possível melhorar ainda mais processos já tidos como eficientes.

Por fim, nossas considerações finais traçam um panorama geral de todo nosso esforço em produzir este material que, pelo menos em parte, desejamos que possa ser aproveitado como prática em sala de aula.

2. OPERAÇÕES COM MATRIZES

Mais do que um método eficiente para guardar informações através de uma tabela de valores, facilitarem a notação ou manipulação de equações lineares ou mesmo vetorial, matrizes têm propriedades algébricas próprias, portanto, não são objetos estáticos. Elas representam certos tipos de funções que agem sobre certos valores, transformando-os em outros.

A respeito da história das matrizes, Anton[4] afirma:

> O termo matriz foi utilizado pela primeira vez pelo matemático e advogado inglês James Sylvester, que o definiu em 1850 como um "arranjo oblongo de termos". Sylvester comunicou seu trabalho sobre matrizes para o seu colega advogado e matemático inglês Arthur Cayley, que então introduziu algumas das operações básicas de matrizes num livro intitulado "Memoir on the Theorya of Matrices" que publicado em 1858.

2.1. DEFINIÇÃO DE MATRIZES:

Simplificadamente podemos dizer que:

Definição 2.1.1: Uma matriz é um arranjo retangular de números, denominados elementos ou entradas. Uma matriz que tenha m linhas e n colunas é dita de tamanho $m \times n$ *(lê-se "eme por ene"), não esquecendo-se que o número de linhas é sempre escrito em primeiro lugar.*

Abaixo escrevemos os seguintes exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{3} \\ 0{,}6 \end{bmatrix}, [2]$$

Genericamente, utilizamos letras maiúsculas para denotar matrizes e letras minúsculas

[4] ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra Linear Contemporânea**. p.99. Tradução: Claus Ivo Doering. Porto Alegre – RS: Bookman, 2006.

para denotar os seus elementos, além de índices que localizam a linha e a coluna onde um elemento se encontra, servindo também para distinguir os elementos entre si. Assim, uma matriz $m \times n$ qualquer pode ser denotada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Quando desejamos utilizar uma notação mais compacta, podemos escrever a matriz da seguinte forma:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n} \textit{ ou ainda } A = \left[a_{ij}\right], \textit{para todo } 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n \textit{ e } i, j \in \mathbb{N}.$$

Também utilizamos o símbolo $[A]_{ij}$ para o elemento na linha i e na coluna j da matriz A.

Observe que os índices de cada termo indicam a linha e a coluna, nesta ordem, que cada elemento se encontra. Portanto, a leitura de cada elemento é feita seguinte forma:

— Se nos referimos ao elemento que se encontra na primeira linha e primeira coluna: Indicamos como a_{11}, e lemos “a um um”.

— Se nos referimos ao elemento que se encontra na primeira linha e segunda coluna: Indicamos como a_{12}, e lemos “a um dois”.

— Se nos referimos ao elemento que se encontra na segunda linha e primeira coluna: Indicamos como a_{21}, e lemos “a dois um”.

E assim sucessivamente.

2.2. TIPOS DE MATRIZES

Algumas matrizes ganham destaque em relação às outras, seja pela sua forma ou mesmo sua constante operacionalidade, podendo gozar de importantes propriedades.

Enumeraremos algumas matrizes específicas que julgamos necessárias para o desenvolvimento deste trabalho:

Matriz Quadrada:

Definição 2.2.1: Consideremos uma matriz de ordem $m \times n$. Quando $m = n$, o número de linhas é igual ao número de colunas.

No caso de matrizes quadradas $\mathrm{A}_{\mathrm{n\times n}}$, costumamos dizer que A é uma quadrada de ordem n, e os elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{m\times n}$ formam a diagonal principal da matriz.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular

Consideremos a matriz quadrada de ordem **n**.

*Definição 2.2.2: Quando os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos, dizemos que a matriz é **triangular**.*

Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Portanto, em uma matriz triangular, $a_{ij} = 0$ para $i > j$ ou , $a_{ij} = 0$ para $i < j$. Observemos ainda que a matriz triangular pode ser *superior* ou *inferior*.

Matriz Diagonal

*Definição 2.2.3: A matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos fora da diagonal principal são nulos é chamada de **matriz diagonal**.*

Por exemplo:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

Portanto, em uma matriz diagonal, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Matriz Identidade

Definição 2.2.4: Chama-se matriz identidade a matriz quadrada onde os termos

$$\begin{cases} a_{ij} = 1, & se\ i = j \\ a_{ij} = 0, & se\ i \neq j \end{cases}$$

Observamos que nesta matriz quadrada todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos são iguais a zero. A matriz identidade normalmente simbolizada por $\mathbf{I_n}$.

Por exemplo:

$$I_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\ \ I_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \ I_4 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Matriz Nula

Definição 2.2.5:A matriz com todos seus elementos iguais a zero denomina-se Matriz Nula.

Podemos simbolizar uma matriz nula de ordem $n \times m$ pelo símbolo $0_{m \times n}$ e uma matriz de ordem $\boldsymbol{n}$ por 0_n.

Por exemplo:

$$0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz-coluna e Matriz-linha[5]

Definição 2.2.6: ***Matriz-coluna*** *é aquela que possui uma única coluna.*

Por exemplo:

$$A = [a_{i1}]_{m\times 1}, \qquad \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{3} \\ 0{,}6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Definição 2.2.7: ***Matriz-linha*** *é aquela que possui uma única linha.*

Por exemplo:

$$A = \left[a_{1j}\right]_{1\times n}, \qquad [\pi \quad \sqrt{3} \quad 0{,}6], \quad [x \quad y]$$

Algumas vezes, precisamos nos referir a uma linha ou coluna específica[6] de uma matriz $m \times n$, e para tanto, utilizaremos as notações A_i para a linha i da matriz A, e A^j para a coluna j da matriz A.

Matriz Simétrica

Definição 2.2.8: ***Matriz simétrica*** *é aquela matriz quadrada na qual* $a_{ij} = a_{ji}$.

Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & \sqrt{3} & 0 \\ 2 & 1 & \pi & 1 \\ \sqrt{3} & \pi & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Observamos que na matriz simétrica, a parte superior é uma reflexão da parte inferior

[5] Algumas vezes nos referimos à estas matrizes como 'veto-coluna' e 'vetor-linha'.
[6] Deixaremos claro no corpo do texto se A^j representa matriz coluna ou potência da matriz A.

em relação à diagonal principal.

2.3. IGUALDADES DE MATRIZES

Em duas matrizes, de mesma ordem, quando as entradas que ocupam a mesma posição são iguais, as quais chamamos de *elementos correspondentes*, podemos estabelecer então, uma igualdade entre essas matrizes.

Por exemplo, temos as igualdades:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \div 3 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ 2 + 1 & 2^2 \end{bmatrix} \rightarrow$ são matrizes quadradas de ordem 2 e os elementos correspondente são iguais.

b) $\begin{bmatrix} 2 \times 4 & 1 + 2 \\ 2 - 1 & 7 \div 1 \\ 5 \div 2 & \sin 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 7 \\ 2{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \rightarrow$ são matrizes de ordem 3x2 e os elementos correspondentes são iguais.

c) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, então $A \neq B$, pois A e B não têm a mesma ordem.

Agora iremos formalizar a igualdade entre matrizes:

Definição 2.3.1: Duas matrizes $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ *e* $B_{r \times s} = [b_{ij}]_{r \times s}$ *são iguais se elas têm o mesmo número de linhas (m=r) e colunas (n=s), e todos os elementos correspondentes são iguais* ($a_{ij} = b_{ij}$).

Portanto, dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ temos simbolicamente:

$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, *para todo* $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ *e* $i, j \in \mathbb{N}$.

2.4. OPERAÇÕES MATRICIAIS BÁSICAS:

A igualde de matrizes nos permite estabelecer a soma de matrizes por meio da soma dos elementos correspondentes.

2.4.1. Soma de Matrizes

Dadas duas matrizes A e B, de mesmo tamanho, então a matriz C, soma $A + B$ das matrizes A e B é a matriz obtida pela soma dos elementos de A com os elementos correspondentes de B.

Da mesma forma, temos:

Definição 2.4.1.1: Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ *são matrizes, a soma* $A + B$ *é a matriz* $C = [c_{ij}]_{m\times n}$*, tal que:*
$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *, para todo* $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ *e* $i, j \in \mathbb{N}$.

Por exemplo, podemos somar as matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \\ 0 & -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2b \\ 0 & d \\ e & 0 \end{bmatrix}$

2.4.2. Matriz Oposta e Subtração de Matrizes

Denomina-se matriz oposta de uma matriz A, e representa-se por $-A$, a matriz que somada com A dá uma matriz nula.

Ou seja:

Definição 2.4.2.1: Sejam $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *e* $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ *matrizes, se a soma* $A + B = 0$, *então* B *é a matriz oposta de* A.

Em outras palavras:

Sejam $\mathrm{A} = \left[\mathrm{a_{ij}}\right]_{\mathrm{m\times n}}$ e $\mathrm{B} = \left[\mathrm{b_{ij}}\right]_{\mathrm{m\times n}}$ matrizes, a soma $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$ se, e somente se $\mathrm{B} = -\mathrm{A}$.

Assim, por exemplo:

a) $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 7 \\ 2{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 1 & -7 \\ -2{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$, são opostas pois:

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 7 \\ 2{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 1 & -7 \\ -2{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com o auxílio da matriz oposta, podemos estabelecer a subtração entre matrizes.

Sendo A e B, duas matrizes do tipo $m \times n$, denomina-se diferença entre A e B, representada por $A - B$, a soma da matriz A com a oposta de B.

$$A - B = A + (-B)$$

Podemos definir ainda a subtração entre matrizes da seguinte forma:

Definição 2.4.2.2: Dadas as matrizes $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *e* $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$, *a subtração de matrizes* $A - B = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ *é tal que* $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, *para todo* $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ *e* $i, j \in \mathbb{N}$.

Propriedades:

Dadas as matrizes $A, B\ e\ C$ da mesma ordem $m \times n$, temos:

i) $A + B = B + A$ (comutatividade)

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade)

iii) $A + 0 = A$, onde 0 denota a matriz nula $m \times n$.

2.4.3. Multiplicação de Matrizes por um Número Real.

O produto de uma matriz por um escalar é obtido, efetuando-se o produto de cada elemento da matriz por este escalar. Ou seja:

Definição 2.4.3.1: Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e k um número real, então definimos uma nova matriz, múltiplo escalar de A dado por:

$$k.A = [ka_{ij}]_{m\times n}$$

Por exemplo, temos:

a) $2.\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}$

b) $(-2).\begin{bmatrix}8 & -3\\ -1 & 7\\ 2{,}5 & -0{,}5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-16 & 6\\ 2 & -14\\ -5 & 1\end{bmatrix}$

Propriedades:

Dadas as matrizes $A\ e\ B$ e mesma ordem $m \times n$, e os números $k, k_1\ e\ k_2$, temos:

i) $k(A + B) = kA + kB$

ii) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

iii) $0.A = \mathbf{0}$, isto é, se multiplicarmos o número zero por qualquer matriz A, teremos a matriz nula.

iv) $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

2.4.4. Transposição de Matrizes

Algumas vezes é conveniente considerar as linhas de uma matriz dada como colunas de uma nova matriz.

Desta forma definimos:

Definição 2.4.4.1: Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$*, podemos obter uma nova matriz* $A' = [b_{ij}]_{n\times m}$*, cujas linhas são as colunas de* A*, isto é,* $b_{ij} = a_{ji}$*.* A' *é denominada matriz transposta de* A*.*

Por exemplo, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Propriedades

Dadas as matrizes $A\ e\ B$ e mesma ordem $m \times n$, e os números $k, k_1\ e\ k_2$, temos:

i) Uma matriz é simétrica se, e somente se ela é igual á sua transposta, isto é, se, e somente se, $A = A'$.

ii) $A'' = A$. Isto é, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.

iii) $(A + B)' = A' + B'$, isto é, a transposta da soma é a soma das transpostas.

iv) $(kA)' = kA'$, onde k é um escalar qualquer.

3. PRODUTO DE MATRIZES

A respeito do estudo das matrizes e do produto matricial, Lima[7] comenta:

> Matrizes é um assunto que aparece no Ensino Médio meio que caído do céu, ou do inferno, não sei; sem nenhuma justificativa, assim plum! Com definições, uma delas até normal, somar matrizes, você soma elemento a elemento, mas multiplicação de matrizes é um negócio que caiu do céu. De onde veio isso? Pra que é que serve?

Segundo Dante[8], "A multiplicação de matrizes não é uma operação tão simples como as outras já estudadas até aqui; não basta multiplicar os elementos correspondentes [...]".

Dificuldades adicionais são encontradas para a definição dada, a qual visa atender uma grande diversidade de problemas práticos, mas inviabiliza um bom desempenho do aluno, principalmente devido ao algoritmo adotado.

Ainda referente à multiplicação de matrizes, Lima [9] se posiciona da seguinte forma:

> Em Álgebra Linear, as matrizes surgem principalmente associadas às transformações lineares e o produto de duas matrizes é naturalmente definido como a matriz associada à composta de duas transformações lineares. Num estudo elementar, em nível do Ensino Médio, convém motivar a multiplicação mediante exemplos simples.

De fato, desde os livros de ensino médio até os de Álgebra Linear do ensino superior, como o de Boldrine[10], apelam para o uso de exemplos práticos que induzem à definição de produto entre matrizes da forma como conhecemos.

Não estamos nos posicionando contra esta prática, até procederemos da mesma forma na próxima secção, o que aqui queremos reforçar é a dificuldade que autores e professores têm para introduzir o produto de matrizes. E ainda mais, observa-se uma dificuldade dos alunos em operar os diversos produtos e somas oriundas de matrizes de pequena ordem, aumentado tais dificuldades quando as matrizes são de ordens ligeiramente maiores.

A tarefa a que nos propomos, e que é um dos pontos centrais deste trabalho, consiste em proporcionar uma perspectiva alternativa que auxilie alunos e professores neste intento que é operar o produto entre matrizes.

Inicialmente, introduziremos algumas definições, como produto **linha por coluna**, apresentando o produto da forma clássica, e posteriormente o produto **coluna por linha** e

---

[7] LIMA, Elon Lages. (Informação verbal)**. Matrizes: Aula do Programa de Aperfeiçoamento para o Professor do Ensino Médio** — PAPMEN. Proferida em 26 de janeiro de 2011.
[8] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações,** vol.2, 2ª.ed., p.177. São Paulo: Ática, 2002.
[9] LIMA, op. cit., p. 131.
[10] BOLDRINE, José Luiz et. al. **Álgebra Linear**, 3ª. ed. São Paulo: Haper & Row do Brasil, 1980.

consequentemente abordaremos a nossa proposta de multiplicação.

3.1 DEFINIÇÃO CLÁSSICA DE PRODUTO DE MATRIZES

Seria fácil multiplicar matrizes se tivéssemos que apenas multiplicar elementos correspondentes das matrizes envolvidas. Entretanto, isto teria pouco significado prático, no sentido de sua aplicação no cotidiano.

Para estabelecer esta multiplicação utilizaremos um exemplo de aplicação, que nos induz intuitivamente a estabelecer a definição de produto matricial, além de impor as condições exigidas para que este seja efetuado.

3.1.1. Produto de Linha por Coluna

Tomemos o seguinte problema, que nos auxiliará na definição do produto:

Dada os seguintes quadros:

Figura 1: Quantidades de vitamina

Vitaminas	A	B	C
Quantidades	20	10	3

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 2: Preços das vitaminas

Vitaminas	Preço
A	1,5
B	2
C	4

Fonte: Elaborado pelo Autor

O primeiro refere-se às vitaminas e suas respectivas quantidades. Já o segundo, refere-se às vitaminas e os respectivos preços por unidade de vitamina. Se desejássemos saber o pagamento total pela quantidade de vitaminas descrita no primeiro quadro em função dos preços do segundo, então seria natural procedermos da seguinte forma:

$$20.1{,}5 + 10.2 + 3.4 = 62$$

Em termos de matrizes, somos impelidos a considerar duas matrizes que representem os dois quadros, e uma das formas é:

$$A = [20 \quad 10 \quad 3] \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Na verdade, pra início de conversa, as matrizes não teriam que ser necessariamente $A =$ matriz-linha e $B =$ matriz-coluna, mas o seu produto, para atender às condições aos cálculos acima, teria de ser definido da seguinte maneira:

Definição 3.1.1.1: Seja a matriz-linha $A = [a_{1j}]_{1\times n} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$ *e a matriz-coluna* $B = [b_{i1}]_{n\times 1} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$. *Definimos o produto* ***linha por coluna***[11] *entre estas matrizes da seguinte forma:*

$$C = [c_{ij}]_{1\times 1} = [a_{1j}]_{1\times n}.[b_{i1}]_{n\times 1} = [a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + \cdots + a_{1n}.b_{n1}] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{1k}.b_{k1}\right]$$

Como veremos mais adiante, esta é a base do produto matricial clássico.

3.1.2. Produto entre Matrizes de Ordens Superiores

Para a generalização utilizaremos antes, como no tópico anterior, um exemplo de aplicação:

Dadas seguintes quadros:

Figura 3: Alimentos e suas vitaminas

	Vitamina A	Vitamina B	Vitamina C
Alimento I	3	2	1
Alimento II	1	2	3

Fonte: Elaborada pelo Autor

[11] Às vezes é também denominado ‘regra linha-coluna’, ‘regra produto escalar’ ou ‘produto interno’.

Figura 4: Consumo dos alimentos	
Alimento	Consumo
I	2
II	3
Fonte: Elaborado pelo Autor	

O primeiro refere-se à presença de cada vitamina nos dois tipos de alimentos considerados. Já o segundo, refere-se ao consumo de cada alimento. Se desejássemos saber a quantidade consumida de cada vitamina no consumo dos dois alimentos, então seria natural procedermos da seguinte forma:

Para a vitamina A: $2.3 + 3.1 = 9$

Para a vitamina B: $2.2 + 3.2 = 10$

Para a vitamina C: $2.1 + 3.3 = 11$

Então, temos um novo quadro, resultado de nossas operações:

Figura 5: Vitamina e sua ingestão	
Vitamina	Q. Ingerida
A	9
B	10
C	11
Fonte: Elaborado pelo Autor	

Pra tentar estabelecer uma operação, podemos pensar em "multiplicar" as matrizes formadas pelos elementos dos quadros. Uma das formas seria tomar as seguintes matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ que representa em suas colunas os dois tipos de alimentos e suas linhas, os tipos de vitaminas.

$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ que representa em cada linha o consumo de cada alimento.

Assim, temos como resultado:

$$C = \begin{bmatrix} 3.2 + 1.3 \\ 2.2 + 2.3 \\ 1.2 + 3.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Genericamente, temos:

Definição 3.1.2.1: Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{rs}]_{n\times p}$*, definimos o produto* $AB = C = [c_{is}]_{m\times p}$ *entre as matrizes, onde:*

$$c_{is} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{ks} = a_{i1}.b_{1s} + \ldots + a_{in}.b_{ns}$$

Desta forma, temos que cada elementoc_{is} é obtido multiplicando-se a i-ésima linha de A pela s-ésima coluna de B. Observemos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ \boxed{a_{i1} \quad \cdots \quad a_{ij} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & \boxed{b_{1s}} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \boxed{\vdots} & & \\ b_{r1} & \cdots & \boxed{b_{rs}} & \cdots & b_{rp} \\ \vdots & & \boxed{\vdots} & & \\ b_{n1} & \ldots & \boxed{b_{ns}} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Observamos que cada um dos elementos, após definir os valores dos índices i e s da nova matriz são produtos **linha por coluna** de matrizes menores, formadas somente por linhas ou colunas das matrizes originais.

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}.b_{k1} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}.b_{ks} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}.b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{k1} & \cdots & \boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{ks}} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}.b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}.b_{ks} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}.b_{kp} \end{bmatrix}$$

Com o termo a seguir podemos calcular um elemento específico do produto matricial:

$$c_{is} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{ks}$$

Como podemos ver, o produto entre uma linha e uma coluna geram um elemento da matriz produto. Esta possibilidade é uma vantagem do produto matricial na definição clássica.

Observações:

a) Só podemos efetuar o produto de duas matrizes se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda.
b) O elemento c_{is} é obtido multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da s-ésima coluna da segunda matriz, e somando estes produtos.

Propriedades:

Desde que sejam possíveis as operações, as seguinte propriedades são válidas:

i. $AI = IA = A$
ii. $A(B + C) = AB + AC$, isto é, distributividade à esquerda da multiplicação, em relação à soma.
iii. $(A + B)C = AC + BC$, isto é, distributividade à direita da multiplicação, em relação à soma.
iv. $(AB)C = A(BC)$ (associetividade)
v. $(\mathrm{AB})' = \mathrm{B}'\mathrm{A}'$, (Atenção, muda a ordem da matriz!)
vi. $A.0 = 0.A = 0$

Observações:

Em geral $AB \neq BA$, podendo até estar definido num caso e no outro não.

Pode ocorrer $A.B = 0$, sem que necessariamente $A = 0$ ou $B = 0$.

3.2 PROPOSTA PARA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Observemos que apesar do cuidado no estabelecimento da multiplicação de matrizes, principalmente para matrizes de ordens ligeiramente superiores, as dificuldades são grandes. Na verdade, o que observamos nos livros atualmente é a limitação na ordem das matrizes talvez pela própria dificuldade em operar a multiplicação matricial.

Seria uma atitude louvável, se de alguma forma, conseguíssemos interferir no modo como multiplicamos matrizes, tornando-o mais simples operacionalmente (simples em operar, simples em detectar erros). Isto é o que buscamos agora!

Antes, entretanto, precisamos da seguinte definição:

3.2.1. Produto de Coluna por Linha

Inicialmente, verifiquemos a seguinte definição:

Definição 3.2.1.1: Seja a matriz-coluna $A = [a_{i1}]_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ *e a matriz-linha* $B = \left[b_{1j}\right]_{1\times p} = [b_{11} \quad b_{12} \quad \cdots \quad b_{1p}]$. *Definimos o produto* ***coluna por linha***[12] *entre as matrizes da seguinte forma:*

$$C = AB = [a_{i1}.b_{1s}]_{m\times p} = [c_{is}]_{m\times p} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1p} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \cdots & a_{21}b_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1p} \end{bmatrix}$$

Observemos atentamente a definição de produto coluna por linha, e verificamos que as linhas da matriz C são múltiplos da única linha da matriz $B = [b_{11} \quad b_{12} \quad \cdots \quad b_{1p}]$, e que os elementos fatores multiplicadores de cada linha da nova matriz são os elementos da matriz-coluna $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$. Como veremos mais adiante, trata-se de uma correspondência direta com a nossa proposta de produto matricial.

[12] Às vezes também denominado 'regra do produto exterior', 'regra coluna-linha' ou 'produto externo'.

3.2.2. Aplicação do Método Alternativo

Neste tópico, lançamos uma proposta, que a nosso ver, permite uma fluência maior na operacionalização do produto entre matrizes, baseada na ideia de múltiplo e de soma matricial, conceitos que são bem acessíveis.

Introduziremos o método a partir de exemplos:

a) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, determinemos o produto entre estas matrizes.

Solução:

Tendo em vista a ordem das matrizes (2×2 e 2×2), verificamos que é possível o produto matricial, e que resulta numa matriz de ordem 2×2.

Agora, dispomos as matrizes lado-a-lado e fixamos a primeira linha da matriz B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boxed{3 \quad -2} \\ 4 \quad\ \ 1 \end{bmatrix}$$

Agora, faremos uma nova matriz, formando suas linhas com os múltiplos da linha que destacamos, e onde os fatores multiplicadores são os elementos da primeira coluna de A.

Figura 6a: Esquema de multiplicação 2x2

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 \\ \boxed{-1} & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boxed{3 \quad -2} \\ 4 \quad\ \ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Fonte: Elaborado pelo Autor

Agora, formaremos a nova matriz, formando suas linhas com os múltiplos da segunda linha de B destacamos, e onde os fatores multiplicadores são os elementos da segunda coluna de A.

Figura 6b: Esquema de multiplicação 2x2

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} \\ -1 & \boxed{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \boxed{4 \quad 1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

Fonte: Elaborado pelo Autor

Agora somamos as duas matrizes-parcela[13] obtidas:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Algumas perguntas que surgiriam naturalmente seriam:

A matriz encontrada corresponde àquela que encontraríamos se multiplicássemos pelo método clássico?

O produto que fizemos, não corresponde de alguma forma ao método clássico, apesar de diferente a perspectiva?

A resposta para ambas as perguntas é SIM.

Para essa comprovação iremos explorar a matrizes quadradas de ordem 2, formadas por elementos genéricos:

b) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, determinemos o produto entre estas matrizes.

Pelo método clássico, temos:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.e + b.g & a.f + b.h \\ c.e + d.g & c.f + d.h \end{bmatrix}$$

[13] Definiremos formalmente o que é uma matriz-parcela mais adiante (seção 5.1).

Separando este resultado numa soma de matrizes, convenientemente, temos:

$$\overset{\text{Linhas múltiplo de [e f]}}{\begin{bmatrix} ae & af \\ ce & cf \end{bmatrix}} + \overset{\text{Linhas múltiplo de [g h]}}{\begin{bmatrix} bg & bh \\ dg & dh \end{bmatrix}}$$

Observamos que as linhas da primeira matriz são múltiplos da linha $[e \quad f]$ e que as linhas da segunda matriz são múltiplos da linha $[g \quad h]$ e ainda, que os fatores multiplicadores da primeira matriz são os elementos da coluna $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ e os da segunda matriz são os elementos da coluna $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$.

Ganhamos em agilidade, tanto na operação, pois nossa tarefam resume-se a tomar os múltiplos das linhas, quanto na revisão à procura de erros[14]. A perspectiva aqui apresentada demonstra maior eficácia à medida que a ordem da matriz vai aumentando até um certo limite (mas que compreende, sem dúvida, as intenções de um curso de nível secundário), passando posteriormente a ser inviável devido ao aumento contínuo de matrizes a serem somadas.

Vejamos o próximo exemplo:

c) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, determinemos o produto entre estas matrizes.

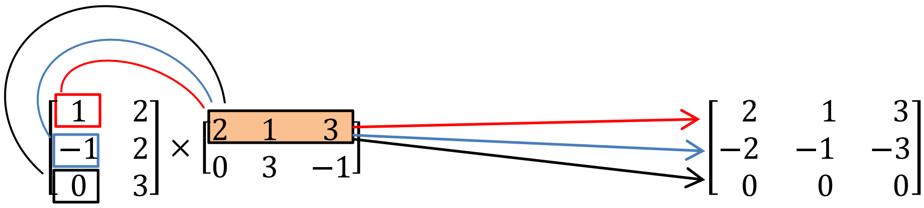
Solução:

Tendo em vista a ordem das matrizes (3×2 e 2×3), verificamos que é possível o produto matricial, e que resulta numa matriz de ordem 3×3.

Agora, dispomos as matrizes lado-a-lado e fixamos a primeira linha da matriz B, tomando seus múltiplos pelos fatores multiplicadores da primeira coluna de A.

[14] Apresentaremos filtros de erros mais adiante para as matrizes resultantes do produto matricial (Filtros de JPC).

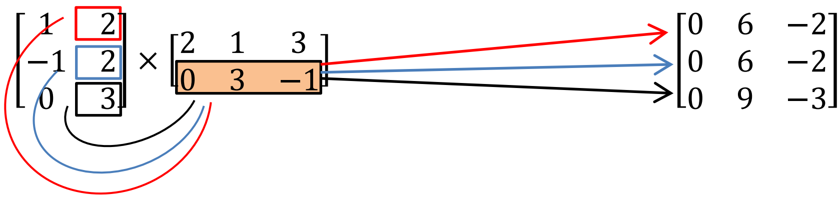
Figura 7a: Esquema de multiplicação 3x2



Fonte: Elaborado pelo Autor

Terminada esta primeira etapa, fixemos a segunda linha da matriz B, e tomando a segunda coluna de A procedemos da mesma forma, obtendo uma nova matriz. Vejamos:

Figura 7b: Esquema de multiplicação 3x2



Fonte: Elaborado pelo Autor

Finalmente, somamos as duas matrizes obtidas, que corresponde ao resultado final:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -2 & 5 & -5 \\ 0 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

As mesmas indagações feitas no item **a**, poderiam ser novamente feitas no item **c**, para os devidos esclarecimentos, tomemos as seguintes matrizes genéricas:

d) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$, determinemos o produto entre estas matrizes.

Solução:

Após a verificação da ordem das matrizes, e a confirmação da possibilidade de produto entre as matrizes em questão, apliquemos a definição tradicional de produto de matrizes, e assim temos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{bmatrix}$$

Separando em soma de matriz convenientemente, temos:

Linhas múltiplo de $[b_{11} \quad b_{12} \quad b_{13}]$

Linhas múltiplo de $[b_{21} \quad b_{22} \quad b_{23}]$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} \\ a_{31}b_{11} & a_{31}b_{12} & a_{31}b_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{23} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \\ a_{32}b_{21} & a_{32}b_{22} & a_{32}b_{23} \end{bmatrix}$$

Observamos que as linhas da primeira matriz são compostas pelos múltiplos da linha $B_1 = [\mathrm{b}_{11} \quad \mathrm{b}_{12} \quad \mathrm{b}_{13}]$ e que as linhas da segunda matriz são múltiplos da linha $B_2 = [\mathrm{b}_{21} \quad \mathrm{b}_{22} \quad \mathrm{b}_{23}]$ e ainda, que os fatores multiplicadores da primeira matriz são os elementos da coluna $A^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ e os da segunda matriz são os elementos da coluna $A^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$.

Genericamente, definimos o produto matricial da seguinte forma:

Definição 3.2.2.1: Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{rs}]_{n\times p}$. Definimos o produto matricial

$$C_{m\times p} = AB = \sum_{k=1}^{n} (A^k . B_k),$$

*onde $(A^k . B_k)$ é o produto **coluna por linha**, onde A^k denota a matriz-coluna formado pela k-ésima coluna de A e B_k denota a matriz-linha formada pela k-ésima linha de B.*

Dispondo as matrizes lado-a-lado, temos:

$$A.B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \boxed{\begin{matrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{ik} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{matrix}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i1} & \cdots & & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & \dots & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \\ \boxed{b_{k1}} & \boxed{\cdots} & \boxed{b_{ks}} & \boxed{\cdots} & \boxed{b_{kp}} \\ \vdots & & \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{ns} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Podemos então aplicar o procedimento apreendido nos exemplos para a k-ésima coluna de A e a k-ésima linha de B.

Figura 8: Esquema de multiplicação mxp

$$A.B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \\ b_{k1} & \cdots & b_{ks} & \cdots & b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{ns} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$A.B = \cdots + \begin{bmatrix} a_{1k}.b_{k1} & \dots & a_{1k}.b_{ks} & \cdots & a_{1k}.b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{ik}.b_{k1} & \cdots & a_{ik}.b_{ks} & \cdots & a_{ik}.b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{mk}.b_{k1} & \dots & a_{mk}.b_{ks} & \cdots & a_{mk}.b_{kp} \end{bmatrix} + \cdots$$

Fonte: Elaborado pelo Autor

Alternativamente, podemos substituir as linhas coloridas da figura acima, pela escrita em forma de produto coluna por linha:

$$A.B = \cdots + \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{ik} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{k1} & \cdots & b_{ks} & \cdots & b_{kp} \end{bmatrix} + \cdots$$

Assim, nos nossos exemplos anteriores, teríamos:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & h \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{11} \\ a_{11} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{11} & b_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{11} \\ a_{11} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{11} & b_{11} \end{bmatrix}$

(Estas estruturas que vemos acima, onde configuram as matrizes subdivididas em diversas partes é que sugeriram o título do nosso trabalho, relembrando: “Decomposição de Matrizes”).

O produto resultante de uma coluna de A e uma coluna de B gera uma matriz cujas linhas e colunas são todas linearmente dependentes duas-a-duas, tendo a matriz em questão **posto** igual a 1. Esta característica constitui um fator auxiliador na identificação da ocorrência de erro na multiplicação. É claro que se por ventura uma das matrizes parcelas tiver posto maior que 1, existirá algum equívoco (erro) na operação, mas não necessariamente que o posto de valor 1 garanta o resultado desta matriz como correto. É claro que a maioria das vezes será inviável o cálculo do posto, pois serão muitas matrizes num só produto matricial. Uma alternativa para detecção de erro é abordada no quinto capítulo.

Definição 3.2.2.2:Posto de uma matriz é a quantidade de linha não nulas, após sua redução por linha[15].

Além das duas formas de se apresentar o produto, acima mostrado, seja utilizando o esquema de linhas ou a separação em colunas e linhas, formando diversos produtos coluna-linha a serem somados, podemos exprimir um terceiro formato. Entretanto, não devemos esquecer que as três são facetas do mesmo procedimento.

A esta terceira faceta, denominaremos de processo em camadas, que serão preenchidas ordeiramente, obedecendo ao processo anteriormente descrito de tomar os múltiplos de uma linha.

Para melhor compreensão exporemos o exemplo **d**, visto anteriormente:

[15] Os métodos de redução que por linha nos referimos são os de Gauus e de Gauus-Jordan.

Exemplo: Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$, determinemos o produto entre estas matrizes.

Solução:

Formemos a primeira camada tomando os múltiplos da linha sublinhada na matriz B, multiplicada pelo fator destacado em A.

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Agora a segunda camada tomando os múltiplos da linha sublinhada na matriz B, multiplicada pelo fator destacado em A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} \\ & & \end{bmatrix}$$

Continuamos num processo semelhante e obtemos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} \\ a_{31}b_{11} & a_{31}b_{12} & a_{31}b_{13} \end{bmatrix}$$

Passamos para segunda linha de B, e para os elementos da segunda coluna de A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} \\ a_{31}b_{11} & a_{31}b_{12} & a_{31}b_{13} \end{bmatrix}$$

Damos prosseguimento ao processo.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} & a_{31}b_{12} & a_{31}b_{13} \end{bmatrix}$$

E, finalizamos o processo.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{b_{11} \quad b_{12} \quad b_{13}} \\ b_{21} \quad b_{22} \quad b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{bmatrix}$$

Esta faceta revelou, de forma contundente, algo que já vinhamos percebendo durante a exposição do trabalho: a equivalência entre o produto na abordagem clássica e a nossa proposta de multiplicação matricial.

Assim, já temos elementos o suficiente para a demonstração da generalização do procedimento de multiplicação matricial proposto, entretanto, o faremos mais a frente, após os conceitos de *matriz em bloco* e *submatrizes*, definições que facilitarão nosso trabalho.

3.2.3. Comparação entre o Método Alternativo e o Clássico

Como já dissemos acima, os críticos poderiam dizer que as matrizes a serem somadas comportam as parcelas dos elementos da matriz obtidas da metodologia clássica. De fato, foi o que constatamos nos itens **b** e **d**, e que comprovaremos para o caso geral para o produto AB entre as matrizes de ordem $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$ mais adiante.

Desta forma, o que defendemos é a forma como, com alguns ajustes, podemos transformar uma operação tida como difícil, que impõe sua repetição integral ao menor desvio de atenção, num exercício que se reduz a encontrar os múltiplos das linhas de uma matriz, aliado à soma de matrizes que são conceitos de mais fácil entendimento.

Assim, uma mudança na metodologia de abordagem do produto entre as matrizes pode fazer a **diferença na prática em sala de aula**.

Podemos ressaltar virtudes e defeitos em ambas as abordagens de produto matricial. Como vimos anteriormente, o produto matricial na abordagem clássica tem um resultado de aparência mais compacta, guardando numa única matriz elementos que são somatórios de produtos de elementos “dois a dois”, permitindo encontrar elementos específicos da matriz produto; mas que operacionalmente, a nosso ver, exige muita atenção, habilidade, destreza, concentração, pois ao mínimo desvio, a operação poderá ter de ser repetida quase que na íntegra.

Entretanto, para abordagem do produto matricial a partir de sistemas lineares e transformações lineares, o produto linha por coluna continua sendo a melhor opção. Aproveitando o ensejo, vale lembrar que Cayley[16] introduziu definição de produto matricial para simplificar a notação de transformação linear da seguinte forma:

Em vez de: $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$, escrevia: $(x', y') = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (x, y)$

E, segundo Iezzi[17], só três anos depois introduziu o conceito de adição de matrizes e multiplicação por um escalar.

Por outro lado, a proposta que defendemos exige a disposição de um maior número de matrizes que ao final serão somadas, entretanto, operacionalmente é vantajosa por concentrar na mesma matriz, linhas proporcionais obtidas das linhas da segunda matriz que está sendo multiplicada, permitindo maior agilidade e favorecendo a detecção de erros através do posto das matrizes-parcelas e através do filtro que apresentaremos mais adiante.

Mas em contrapartida, aumenta consideravelmente a escrita, talvez por isso Anton[18] considere que o produto **coluna por linha** tenha "maior importância para a análise teórica do que para computação numérica".

A terceira faceta do produto matricial alternativo, aquele realizado em camadas, retira o incomodo do grande número de matrizes a serem somadas, mas em contrapartida, reduz a eficiência na detecção de erros.

Além disso, podemos ainda tirar outro proveito da abordagem adotada nesta secção, e com um pouco de cuidado, introduzir operações com matrizes em bloco, ilustrando a ideia de que podemos dividir problemas grandes em problemas menores, tornando mais fácil a sua

[16] Arthur Cayley (1821-1895), natural de Richmond, Inglaterra, publicou mais de 200 artigos de matemática, ocupando a cadeira de matemática pura em Cambridge.

[17] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, vol.4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas**. 7ed., p.77. São Paulo: Atual, 2004.

[18] ANTON, op. cit., p.181.

solução, além de permitir a divisão de tarefas para múltiplos operadores, semeando a mutua cooperação. Por exemplo, podemos particionar o produto de matrizes entre grupos de alunos numa mesma sala, atividade na qual será exigido o empenho de cada grupo, pois o objetivo só será alcançado se todos os grupos lograrem êxito.

4. DECOMPOSIÇÃO DE MATRIZES

O mundo busca alternativas para aperfeiçoar os sistemas, que pode ser a racionalização de alimentos, logística de transporte visando reduzir custos, cooperação científica internacional, técnicas produtivas otimizadas (baixo custo e alta produtividade), entre outras.

Desta forma, para grandes conquistas científicas, muitas vezes, pelo grande volume de trabalho há a necessidade de se dividir o trabalho, de forma a viabilizar sua execução. Um grande exemplo disso é o mapeamento do genoma humano, que contou com o apoio de um consórcio multinacional, com cientistas de várias nacionalidades, trabalhando por um objetivo comum.

Podemos ainda lembrar os inúmeros softwares *open source*[19], que propõem aos internautas que ajudem na sua construção ou seu melhoramento, contribuindo neste sistema de código aberto. Também podemos destacar a codificação e decodificação de dados, que muitas vezes, por questão de segurança, impõe acesso somente com a presença de mais de uma pessoa/entidade à qual é conferida parte do algoritmo de codificação/decodificação.

Neste contexto, defendemos a introdução da noção de matriz em bloco, sugerindo a divisão de um sistema grande, portanto um problema a princípio grande, que pode ser dividido em partes menores, permitindo a ideia de "dividir para somar". Além disso, se mesmo após esta divisão, o sistema se manter relativamente grande, ele pode ser dividido novamente até seu tratamento tornar-se viável.

Levando-se tudo isso em consideração, somos obrigados a apresentar algumas definições necessárias para o prosseguimento do nosso raciocínio:

4.1 MATRIZ EM BLOCO

Algumas vezes precisamos dividir uma matriz para isolar partes desta matriz que nos interessam, ou que podem ser importantes em problemas particulares, ou mesmo para "quebrar" uma matriz grande em pedaços menores, permitindo melhor tratamento, principalmente em cálculos de grande escala.

---

[19] *Open Source:* Programas computacionais de código aberto, também conhecido como software livre.

Abaixo definimos submatriz e matriz em bloco, conceitos interligados, vejamos:

Definição 4.1.1: Seja $A \in M_{m\times n}$. Designa-se submatriz de A a uma matriz formada pelos elementos de A que pertencem a algumas linhas e algumas colunas previamente fixadas de A.

Definição 4.1.2: Seja $A \in M_{m\times n}$. Diz-se que A está particionada em blocos se cada bloco ocupar as mesmas linhas de A que os blocos situados à sua esquerda ou direita e ocupar as mesmas colunas de A que os blocos situados acima ou abaixo.

Por outras palavras, dizemos que uma matriz A está particionada em blocos se as submatrizes que constituem cada bloco forem resultantes da divisão dessa matriz em linhas e colunas consecutivas.

Fazemos essa divisão através de linhas horizontais e verticais, inseridas entre as submatrizes

Por exemplo:

a) $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$

b) $B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

c) $C = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$

d) $A_{m\times n} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$

e) $B_{n\times p} = \left[\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \hline b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{array}\right]$

Nos itens **d** e **e** , observamos uma divisão bem interessante. São submatrizes que constituem vetores-coluna de A e vetores-linha de B, e que utilizaremos para demonstração seguinte:

4.2 DEMONSTRAÇÃO DA EQUIVALÊNCIA DO MÉTODO ALTERNATIVO

Retomando nossa definição (3.2.2.1) de produto matricial, temos:

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{rs}]_{n\times p}$*. Definimos o produto matricial*

$$C_{m\times p} = AB = \sum_{k=1}^{n} (A^k . B_k),$$

onde $(A^k . B_k)$ *é o produto* ***coluna por linha****, onde* A^k *denota a matriz-coluna formado pela k-ésima coluna de* A *e* B_k *denota a matriz-linha formada pela k-ésima linha de* B.

Relativo a esta definição já vista na secção 3.2.2, provaremos o seguinte teorema:

Teorema 4.2.1: As definições de produto clássico e alternativo são equivalentes.

Demonstração:

Seja a matriz $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{ik} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{matrix}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, particionada em blocos de matrizes-coluna $A^k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{ik} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$ e seja $B_{n\times p} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{b_{k1}} & \boxed{\cdots} & \boxed{b_{ks}} & \boxed{\cdots} & \boxed{b_{kp}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{ns} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$ particionado em matrizes-linha $B_k = [b_{k1} \quad \cdots \quad b_{ks} \quad \cdots \quad b_{kp}]$, com $1 \leq k \leq n$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

Reescrevendo as matrizes, temos:

$$A.B = [A^1 \quad \cdots \quad A^k \quad \cdots \quad A^n]. \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_k \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}$$

Tomando o produto **linha por coluna** entre a matriz-linha A e a matriz-coluna B, temos:

$$A.B = \sum_{k=1}^{n}(A^k.B_k) = A^1B_1 + \cdots + A^kB_k + \cdots + A^nB_n =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{i}1} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{m}1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} & \cdots & b_{1p} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1\mathrm{k}} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{ik}} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{mk}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{k1} & \cdots & b_{ks} & \cdots & b_{kp} \end{bmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{bmatrix} a_{1\mathrm{n}} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{in}} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{n1} & \cdots & b_{ns} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Agora, aplicando o produto **coluna por linha** entre as matrizes-coluna e matrizes-linha, temos:

$$A.B = \begin{bmatrix} a_{11}\mathrm{b}_{11} & \ldots & a_{11}\mathrm{b}_{1\mathrm{s}} & \cdots & a_{11}\mathrm{b}_{1\mathrm{p}} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{\mathrm{i}1}\mathrm{b}_{11} & \cdots & a_{\mathrm{i}1}\mathrm{b}_{1\mathrm{s}} & \cdots & a_{\mathrm{i}1}\mathrm{b}_{1\mathrm{p}} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{\mathrm{m}1}\mathrm{b}_{11} & \ldots & a_{\mathrm{m}1}\mathrm{b}_{1\mathrm{s}} & \cdots & a_{\mathrm{m}1}\mathrm{b}_{1\mathrm{p}} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1\mathrm{k}}\mathrm{b}_{\mathrm{k}1} & \ldots & a_{1\mathrm{k}}\mathrm{b}_{\mathrm{ks}} & \cdots & a_{1\mathrm{k}}\mathrm{b}_{\mathrm{kp}} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{\mathrm{ik}}\mathrm{b}_{\mathrm{k}1} & \cdots & a_{\mathrm{ik}}\mathrm{b}_{\mathrm{ks}} & \cdots & a_{\mathrm{ik}}\mathrm{b}_{\mathrm{kp}} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{\mathrm{mk}}\mathrm{b}_{\mathrm{k}1} & \ldots & a_{\mathrm{mk}}\mathrm{b}_{\mathrm{ks}} & \cdots & a_{\mathrm{mk}}\mathrm{b}_{\mathrm{kp}} \end{bmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{bmatrix} a_{1\mathrm{n}}\mathrm{b}_{\mathrm{n}1} & \ldots & a_{1\mathrm{n}}\mathrm{b}_{\mathrm{ns}} & \cdots & a_{1\mathrm{n}}\mathrm{b}_{\mathrm{np}} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{\mathrm{in}}\mathrm{b}_{\mathrm{n}1} & \cdots & a_{\mathrm{in}}\mathrm{b}_{\mathrm{ns}} & \cdots & a_{\mathrm{in}}\mathrm{b}_{\mathrm{np}} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{\mathrm{mn}}\mathrm{b}_{\mathrm{n}1} & \ldots & a_{\mathrm{mn}}\mathrm{b}_{\mathrm{ns}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}}\mathrm{b}_{\mathrm{np}} \end{bmatrix}$$

Fazendo as somas das matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} a_{11}\mathrm{b}_{11} + \cdots + a_{1\mathrm{n}}\mathrm{b}_{\mathrm{n}1} & \ldots & a_{11}\mathrm{b}_{1\mathrm{s}} + \cdots + a_{1\mathrm{n}}\mathrm{b}_{\mathrm{ns}} & \cdots & a_{11}\mathrm{b}_{1\mathrm{p}} + \cdots + a_{1\mathrm{n}}\mathrm{b}_{\mathrm{np}} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{\mathrm{i}1}\mathrm{b}_{11} + \cdots + a_{\mathrm{in}}\mathrm{b}_{\mathrm{n}1} & \cdots & a_{\mathrm{i}1}\mathrm{b}_{1\mathrm{s}} + \cdots + a_{\mathrm{in}}\mathrm{b}_{\mathrm{ns}} & \cdots & a_{\mathrm{i}1}\mathrm{b}_{1\mathrm{p}} + \cdots + a_{\mathrm{in}}\mathrm{b}_{\mathrm{np}} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{\mathrm{m}1}\mathrm{b}_{11} + \cdots + a_{\mathrm{mn}}\mathrm{b}_{\mathrm{n}1} & \ldots & a_{\mathrm{m}1}\mathrm{b}_{1\mathrm{s}} + \cdots + a_{\mathrm{mn}}\mathrm{b}_{\mathrm{ns}} & \cdots & a_{\mathrm{m}1}\mathrm{b}_{1\mathrm{p}} + \cdots + a_{\mathrm{mn}}\mathrm{b}_{\mathrm{np}} \end{bmatrix}$$

Em termos de somatório, temos:

$$A.B = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\mathrm{b}_{\mathrm{k}1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\mathrm{b}_{\mathrm{ks}} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\mathrm{b}_{\mathrm{kp}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathrm{b}_{\mathrm{k}1} & \cdots & \boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathrm{b}_{\mathrm{ks}}} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathrm{b}_{\mathrm{kp}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}\mathrm{b}_{\mathrm{k}1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}\mathrm{b}_{\mathrm{ks}} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}\mathrm{b}_{\mathrm{kp}} \end{bmatrix}$$

Portanto, equivalente à definição (3.*1.2.1*), temos:

$$c_{is} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{ik}}.\mathrm{b}_{\mathrm{ks}}$$

c.q.d.

Podemos prosseguir e verificar que cada somatório se trata do produto **linha por coluna** entre a linha A_ie a coluna B^s.

$$A_i.B^s = \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1s} \\ \vdots \\ b_{rs} \\ \vdots \\ b_{ns} \end{bmatrix}$$

Desta forma, temos a matriz seguinte:

$$\begin{bmatrix} A_1.B^1 & A_1.B^2 & \cdots & A_1.B^p \\ A_2.B^1 & A_2.B^2 & \cdots & A_2.B^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_m.B^1 & A_m.B^2 & \cdots & A_m.B^p \end{bmatrix}$$

Mas a matriz acima equivale ao produto **coluna por linha** entre a matriz-coluna $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$ e a matriz-linha $B = \begin{bmatrix} B^1 & B^2 & \cdots & B^p \end{bmatrix}$:

Concluímos, então, a igualdade:

$$A.B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} B^1 & B^2 & \cdots & B^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1 & \cdots & A^k & \cdots & A^n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_k \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} \text{(o que é obvio)}$$

4.3 MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES GRANDES

Utilizando raciocínio similar ao que utilizamos para o desenvolvimento do método alternativo para multiplicação de matrizes, podemos particionar uma ‘matriz grande’, de forma a tornar mais acessível o produto matricial. Além disso, a multiplicação em blocos é particularmente útil quando se tem blocos que têm determinadas características ou padrões.

A respeito das características e padrões que muitas vezes são observadas em diversas matrizes, faremos a multiplicação das seguintes matrizes, nos favorecendo justamente deste fato. Vejamos o exemplo abaixo:

Exemplo: Sejam as matrizes $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, determinar o produto AB.

Solução:

Inicialmente verificamos que as ordens $(4 \times 4 \text{ e } 4 \times 4)$das matrizes permitem o produto matricial.

Agora, devemos particionar as matrizes de forma que a ordem das submatrizes ainda permita o produto matricial, além de procurar evidenciar características ou padrões que por ventura possam existir.

Assim, parece-nos coerente fazer as seguintes partições:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c} I & M \\ \hline 0 & M \end{array}\right]$$

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline I & M \end{array}\right]$$

Efetuando o produto matricial (aqui optaremos pelo processo alternativo que desenvolvemos em secção anterior), temos:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{M} \\ 0 & \mathrm{M} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & \mathrm{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{MI} & \mathrm{M}^2 \\ \mathrm{MI} & \mathrm{M}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{MI} & \mathrm{I} + \mathrm{M}^2 \\ \mathrm{MI} & \mathrm{M}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{M} & \mathrm{I} + \mathrm{M}^2 \\ \mathrm{M} & \mathrm{M}^2 \end{bmatrix}$$

A matriz M é de pequena ordem, procedemos ao produto, semelhante ao que fizemos anteriormente:

$$\mathrm{M}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$$

Desta forma, temos:

$$\mathrm{I} + \mathrm{M}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$$

E, portanto:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M} & \mathrm{I} + \mathrm{M}^2 \\ \mathrm{M} & \mathrm{M}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 17 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

Observamos que o produto da matriz que outrora parecia no mínimo trabalhoso, basicamente, resumiu-se a encontrar o valor de M^2.

O exemplo desenvolvido acima demonstra que a partição conveniente de matrizes pode de fato reduzir nosso trabalho quando tratamos de multiplicação de matrizes não havendo a necessidade de particionar obrigatoriamente em matriz-linha e matriz-coluna, mas de forma que atenda aos requisitos necessários para que esteja definido o produto matricial. Em particular, partições de duas matrizes em submatrizes quadradas de mesma ordem simplificam esta análise.

Um caso no qual não utilizamos nem matriz-coluna/matriz-coluna, e nem matriz quadrada está ilustrado no exemplo abaixo:

Exemplo: Sendo a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 5/2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4/3 & 5/3 & 2 \end{bmatrix}$, determine o produto matricial $A.A'$.

Solução:

Examinado as ordens ($A_{4\times6}\ e\ A'_{6\times4}$) das matrizes, vemos que é possível o produto entre a matriz A e sua transposta, tendo como resultado uma matriz $C_{4\times4}$.

Podemos partir para uma possível partição da matriz A, da seguinte forma:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 5/2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4/3 & 5/3 & 2 \end{array}\right]$$

Observemos que:

$$A_{11} = A_{21};\ A_{12} = \frac{1}{2}A_{11};\ A_{22} = \frac{1}{3}A_{11}$$

Deste modo, nossa multiplicação é; portanto:

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \frac{1}{2}A_{11} \\ A_{11} & \frac{1}{3}A_{11} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{11} \\ \frac{1}{2}A'_{11} & \frac{1}{3}A'_{11} \end{bmatrix}$$

Assim, temos:

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{11} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}A_{11} \\ \frac{1}{3}A_{11} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{2}A'_{11} & \frac{1}{3}A'_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}A'_{11} & A_1A'_1 \\ A_1A'_{11} & A_{11}A'_{1q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4}A_{11}A'_{11} & \frac{1}{6}A_{11}A'_{11} \\ \frac{1}{6}A_{11}A'_{11} & \frac{1}{9}A_{11}A'_{11} \end{bmatrix}$$

Daí, temos:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}A_{11}A'_{11} & \frac{7}{6}A_{11}A'_{11} \\ \frac{7}{6}A_{11}A'_{11} & \frac{10}{9}A_{11}A'_{11} \end{bmatrix}$$

Agora, basta apenas o cálculo do produto $A_{11}A'_{11}$:

$$A_{11}A'_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix}$$

Multiplicando esta última matriz pelos fatores $\frac{5}{4}$,$\frac{7}{6}$ e $\frac{10}{9}$,temos:

- $\frac{5}{4}\begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{2} & 40 \\ 40 & \frac{385}{4} \end{bmatrix}$
- $\frac{7}{6}\begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{49}{3} & \frac{112}{3} \\ \frac{112}{3} & \frac{539}{6} \end{bmatrix}$
- $\frac{10}{9}\begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{140}{9} & \frac{320}{9} \\ \frac{320}{9} & \frac{770}{9} \end{bmatrix}$

Agora, é só reagrupar ordeiramente, e finalmente obtemos a matriz produto resultante:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{35}{2} & 40 & \frac{49}{3} & \frac{112}{3} \\ 40 & \frac{385}{4} & \frac{112}{3} & \frac{539}{6} \\ \frac{49}{3} & \frac{112}{3} & \frac{140}{9} & \frac{320}{9} \\ \frac{112}{3} & \frac{539}{6} & \frac{320}{9} & \frac{770}{9} \end{bmatrix}$$

5. FILTROS DE JPC[20]

Agora que já temos bem mais claras as ideias de decomposição de matrizes, submatrizes, matriz em bloco, multiplicação de matriz em bloco, apresentaremos uma forma bem acessível para detecção de erros na multiplicação de matrizes obtidas por qualquer dos dois métodos, mas que foi concebido a partir dos princípios que regem o método alternativo.

5.1 DEFINIÇÕES E TEOREMAS

Antes denunciar os teoremas, precisamos estabelecer algumas definições:

Definição 5.1.1: Uma matriz-parcela é a matriz resultante do produto entre a k-ésima coluna de A e a k-ésima linha de B, estando para tanto definido o produto matricial AB.

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{ik} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{k1} & \cdots & b_{ks} & \cdots & b_{kp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1k}b_{k1} & \dots & a_{1k}b_{ks} & \cdots & a_{1k}b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{ik}b_{k1} & \cdots & a_{ik}b_{ks} & \cdots & a_{ik}b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{mk}b_{k1} & \dots & a_{mk}b_{ks} & \cdots & a_{mk}b_{kp} \end{bmatrix}$$

Teremos para o produto entre as matrizes $A_{m\times n} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ e $B_{n\times p} = [b_{rs}]_{n\times p}$, n matrizes-parcela:

Definição 5.1.2: Chama-se cardinal de uma matriz M, e denota-se por car(M), o número real que é a soma de todos os elementos desta matriz.

Ou seja, matematicamente:

Dada uma matriz $M_{n\times p} = \left[m_{ij}\right]_{n\times p}$, seu cardinal é assim definido:

[20] JPC: Em homenagem ao seu criador Jorge Prazeres Cardoso.

$$car(M) = \sum_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 < j < p}} m_{ij}$$

Propriedades:

Para as matrizes A, B e M, e os reais k, k_1 e k_2, desde que sejam possíveis as operações, as seguintes propriedades são válidas:

i) $car(k.(A+B)) = k.car(A) + k.car(B)$

ii) $car\big((k_1+k_2).A\big) = k_1 car(A) + k_2 car(A)$

iii) $car(M) = car\Big(\big[car(M^1) \quad \cdots \quad car\big(M^j\big) \quad \cdots \quad car(M^n)\big]\Big) = car\left(\begin{bmatrix} car(M_1) \\ \\ car(M_i) \\ \\ car(M_m) \end{bmatrix}\right)$

iv) $car(M) = \sum car(M_{rs})$, onde M_{rs} são as submatrizes da matriz M particionada em blocos.

v) $car(A^k B_k) = car(A^k).car(B_k)$

vi) $car(AB) = \sum_{k=1}^{n}\Big(car(A^k).car(B_k)\Big)$

Muitas das propriedades acima decorrem diretamente da definição, outras nem tão evidentes assim serão demonstradas ao longo do texto quando necessário seu uso. É válido lembrar que definição de cardinal de uma matriz suscita outras propriedades, mas que neste momento não são essenciais para os nossos propósitos, por isso, dispensáveis de apresentação.

Teorema 5.1.1:(Filtro Parcial de JPC) Se $car(A^k B_k) \neq car(A^k).car(B_k)$*, então o produto* $A^k B_k$ *contém erro.*

Como podemos observar, o teorema acima filtra uma matriz-parcela específica, resultante do produto **coluna por linha** de duas matrizes A e B, para as quais o produto matricial está definido.

Nota 1: Tendo em vista que um *equivalente lógico*[21] da expressão $p \to q$ é a expressão $\sim q \to \sim p$, referente ao Teorema 5.1.1, podemos enunciar o mesmo da seguinte forma:

Teorema 5.1.1-A: Se o produto $A^k B_k$ *está correto então,* $car(A^k B_k) = car(A^k).car(B_k)$.

Corolário 5.1.1: (Filtro Total de JPC) Se $car(AB) \neq \sum_{k=1}^{n}\left(car(A^k).car(B_k)\right)$, *então o produto matricial* AB *contém erro.*

Nota 2: Com o mesmo argumento da nota anterior, referente ao Corolário 5.1.1, podemos enunciá-lo da seguinte forma:

Corolário 5.1.1-A: Se o produto matricial AB *está correto, então* $car(AB) = \sum_{k=1}^{n}\left(car(A^k).car(B_k)\right)$.

A demonstração do Teorema 5.1.1 será feita através de seu equivalente lógico, ou seja, provaremos o teorema 5.1.1-A:

Demonstração:

Admitindo possível o produto matricial AB, e sendo A^k a k-ésima coluna de A e B_k a k-ésima linha de B, basta provarmos que sempre $car(A^k B_k) = car(A^k).car(B_k)$.

Seja a matriz-parcela dada pelo produto:

$$A^k B_k = \begin{bmatrix} a_{1k}b_{k1} & \dots & a_{1k}b_{ks} & \cdots & a_{1k}b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{ik}b_{k1} & \cdots & a_{ik}b_{ks} & \cdots & a_{ik}b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{mk}b_{k1} & \dots & a_{mk}b_{ks} & \cdots & a_{mk}b_{kp} \end{bmatrix}$$

[21] ALENCAR FILHO, Edgard de. **Iniciação à Lógica Matemática**, p. 60. São Paulo: Nobel, 2002.

Tomando o cardinal de $A^k B_k$, ou seja, somando todos os elementos, ordenadamente por linha, temos:

$$\begin{aligned} car(A^k B_k) = {} & (a_{1\mathrm{k}}\mathrm{b}_{\mathrm{k}1} \quad + \cdots + \quad a_{1\mathrm{k}}\mathrm{b}_{\mathrm{ks}} \quad + \cdots + \quad a_{1\mathrm{k}}\mathrm{b}_{\mathrm{kp}}) + \cdots \\ & + (a_{\mathrm{ik}}\mathrm{b}_{\mathrm{k}1} \quad + \cdots + \quad a_{\mathrm{ik}}\mathrm{b}_{\mathrm{ks}} \quad + \cdots + \quad a_{\mathrm{ik}}\mathrm{b}_{\mathrm{kp}}) + \cdots \\ & + (a_{\mathrm{mk}}\mathrm{b}_{\mathrm{k}1} \quad + \cdots + \quad a_{\mathrm{mk}}\mathrm{b}_{\mathrm{ks}} \quad + \cdots + \quad a_{\mathrm{mk}}\mathrm{b}_{\mathrm{kp}}) \end{aligned}$$

Agora, colocando em evidência os fatores em comum em cada grupo, temos:

$$\begin{aligned} car(A^k B_k) = {} & a_{1\mathrm{k}}(\mathrm{b}_{\mathrm{k}1} \quad + \cdots + \quad \mathrm{b}_{\mathrm{ks}} \quad + \cdots + \quad \mathrm{b}_{\mathrm{kp}}) + \cdots \\ & + a_{\mathrm{ik}}(\mathrm{b}_{\mathrm{k}1} \quad + \cdots + \quad \mathrm{b}_{\mathrm{ks}} \quad + \cdots + \quad \mathrm{b}_{\mathrm{kp}}) + \cdots \\ & + a_{\mathrm{mk}}(\mathrm{b}_{\mathrm{k}1} \quad + \cdots + \quad \mathrm{b}_{\mathrm{ks}} \quad + \cdots + \quad \mathrm{b}_{\mathrm{kp}}) \end{aligned}$$

Verificando que os grupamentos entre parênteses são comuns, podemos escrever:

$$car(A^k B_k) = (a_{1\mathrm{k}} \quad + \cdots + \quad a_{\mathrm{ik}} \quad + \cdots + \quad a_{\mathrm{mk}}).(\mathrm{b}_{\mathrm{k}1} \quad + \cdots + \quad \mathrm{b}_{\mathrm{ks}} \quad + \cdots + \quad \mathrm{b}_{\mathrm{kp}})$$

E, portanto:

$$car(A^k B_k) = car(A^k).car(B_k)$$

cqd

Por uma questão de economia na escrita, utilizaremos matrizes em bloco para a demonstração do Corolário 5.1.1, que também será provada através de seu equivalente lógico, ou seja, Corolário 5.1.1-A:

Demonstração:

Admitindo possível o produto matricial AB, e sendo A^k a k-ésima coluna de A e B_k a k-ésima linha de B, basta provarmos que sempre

$$car(AB) = \sum_{k=1}^{n} \left(car(A^k).car(B_k) \right)$$

De fato.

Sejam as matrizes $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ e $B = [b_{rs}]_{n\times p}$, e lançando da definição 3.2.1.1 e do teorema 4.2.1, podemos escrever:

$$AB = A^1B_1 + \cdots + A^kB_k + \cdots + A^nB_n$$

Mas, somar todos os elementos da matriz produto AB, significa somar todos os elementos de cada uma das suas matrizes-parcelas A^kB_k, o que por definição é $car(A^kB_k)$. Portanto:

$$car(AB) = car(A^1B_1) + \cdots + car(A^kB_k) + \cdots car(A^nB_n)$$

Como vimos anteriormente, $car(A^kB_k) = car(A^k).car(B_k)$, logo:

$$car(AB) = car(A^1).car(B_1) + \cdots + car(A^k).car(B_k) + \cdots + car(A^n).car(B_n)$$

Compactando este resultado, obtemos:

$$car(AB) = \sum_{k=1}^{n}\Big(car(A^k).car(B_k)\Big)$$

cqd

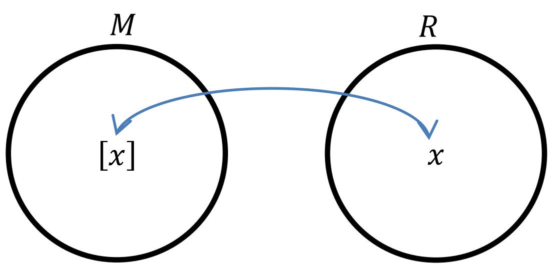
Apesar de o somatório acima suscitar um aparente inconveniente para a manipulação, se olharmos com atenção, o mesmo pode ser considerado como o produto **linha por coluna** das seguintes matrizes em bloco:

$$car(AB) = \sum_{k=1}^{n}\Big(car(A^k).car(B_k)\Big) = [car(A^1) \quad \cdots \quad car(A^n)].\begin{bmatrix} car(B_1) \\ \vdots \\ car(B_n) \end{bmatrix}$$

Como poderemos constatar no exemplo mais a frente, esta consideração facilita a operacionalização do filtro.

Apesar de a igualdade anterior constituir-se num **abuso de notação**, tendo em vista que o cardinal de uma matriz é um número real e o produto matricial a rigor ter uma matriz como resultado, salientamos que neste caso, a matriz resultante é de ordem 1×1, o que permite estabelecermos uma correspondência bijetiva entre a referida matriz e um número real, ou seja, $f: M_{1\times 1} \mapsto R$, tal que $[x] = x$.

Figura 9: Diagrama MxR



Fonte: Elaborado pelo Autor

É claro poderíamos evitar esta ação, tendo em vista que o uso da própria definição de cardinal poderia suprir este inconveniente da seguinte forma:

$$car(AB) = \sum_{k=1}^{n}\left(car(A^k).car(B_k)\right) = car\left([car(A^1) \quad \cdots \quad car(A^n)].\begin{bmatrix} car(B_1) \\ \vdots \\ car(B_n) \end{bmatrix}\right)$$

Entretanto, preferimos **suavizar** a notação, omitindo esta escrita e admitindo a bijeção proposta.

Façamos uma aplicação do filtro no exemplo seguinte:

Exemplo 5.1.1: O Prof. Jorge incumbiu seus alunos Arthur e Guilherme de efetuarem o produto entre duas matrizes A $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e B $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Minutos depois, cada um apresentou sua matriz produto:

$$(AB)_{Arthur} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 17 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad (AB)_{Guilherme} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 17 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

Pergunta-se: qual dos dois apresentou a solução correta?

Solução:

Inicialmente calculemos os cardinais de cada coluna de A e cada linha de B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} [1 & 1 & 14 & 4] \\ \swarrow & \downarrow & \downarrow & \searrow \\ \text{car}(A^1) & \text{car}(A^2) & \text{car}(A^3) & \text{car}(A^4) \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \text{car}(B_1) \\ \to \text{car}(B_2) \\ \to \text{car}(B_3) \\ \to \text{car}(B_4) \end{array}$$

Assim, temos:

$$car(AB) = \sum_{k=1}^{n} \left(car(A^k).car(B_k) \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 14 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = [1.1 + 1.1 + 14.6 + 5.4]$$

$$= 106$$

Mas, para as matrizes de Arthur e Guilherme, temos:

$$(AB)_{Arthur} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 17 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (AB)_{Guilherme} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 17 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

$\text{car}(AB)_{Art} = 14 + 4 + 59 + 28 = 105$ $\qquad$ $\text{car}(AB)_{Gui} = 14 + 4 + 59 + 30 = 107$

Como $car(AB) \neq car(AB)_{Art} \neq car(AB)_{Gui}$, concluímos que ambos erraram o produto matricial. Este produto matricial foi resolvido na secção 4.3.

5.2 AVALIANDO OS FILTROS:

Uma questão que não pode deixar de ser observada é que a proposição garante que sempre que ocorrer $car(A^k B_k) \neq car(A^k).car(B_k)$ ocorre erro, mas não garante que quando $car(A^k B_k) = car(A^k).car(B_k)$ não tenha ocorrido algum erro. Da mesma forma quando ocorre $car(AB) \neq \sum_1^n \left(car(A^k).car(B_k) \right)$, temos a certeza de ter ocorrido erro, mas quando $car(AB) = \sum_1^n \left(car(A^k).car(B_k) \right)$ não garante estar correta a multiplicação matricial.

Neste contexto, naturalmente uma pergunta vem à tona:

Por que usar o filtro de JPC se ele não atesta se está correto o produto?

Responderemos à pergunta da seguinte forma:

Muitas vezes estamos interessados em apenas comprovar o erro numa multiplicação de matrizes, sem efetivamente refazê-la, o que muitas vezes é dispendioso.

Outras vezes estamos mediante a um grande número de produtos matriciais e precisamos de alguma forma fazer uma primeira triagem de forma mais célere, identificando os casos mais flagrantes de erro.

Esta forma mais rápida a que estamos nos referindo se baseia no desenvolvimento da secção 6.3, mais adiante, na qual traçamos linhas gerais sobre contagem de operações, a qual considera para fins de contagem apenas operações de divisão e multiplicação e onde admite que somas e subtrações, computacionalmente, ocorram muito mais rapidamente a ponto de serem desconsideradas.

Além do mais, nas secções seguintes desenvolveremos filtros por linha e por colunas que serão capazes de suprir esta carência deixada pelo filtro total.

Outra questão que deve ser levada em consideração é que o filtro em questão tem maior eficiência quando $car(AB)$ se aproxima de zero. Uma situação favorável é quando o produto AB possui uma distribuição mais uniforme dos valores numéricos e de sinais. Observemos a matriz abaixo:

$$\text{AB} = \begin{bmatrix} \cancel{1} & -\cancel{1} & -3 & 2 \\ 0 & -\cancel{4} & \cancel{4} & -1 \\ \cancel{2} & 0 & \cancel{3} & -\cancel{2} \\ -\cancel{3} & \cancel{5} & 4 & -\cancel{5} \end{bmatrix} \longrightarrow car(AB) = -3 + 4 + 2 - 1 = 2$$

Sem dúvidas existem outras situações que facilitam nosso cálculo, como uma matriz com muitos elementos nulos, ou muitos elementos de valores repetidos, colunas ou linhas iguais, etc.

5.3 OTIMIZANDO OS FILTROS

Retomando o fato de que ocorrendo a igualdade entre os cardinais não constitui certeza de que está correta a multiplicação, buscaremos nesta seção identificar situações onde ocorra a referida igualdade, mas que subexista erros na multiplicação e alguma forma de identificar estes.

5.3.1. Permutação de um Par numa Mesma Coluna

Analisaremos a permutação de um par de elementos numa mesma coluna da matriz produto, através do seguinte exemplo:

Exemplo 5.3.1.1: Retornando ao exemplo anterior, onde temos A $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e B $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, agora atribuindo aos operadores Athur e Guilherme as matrizes produto seguintes:

$$AB_{Arthur2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 4 & 54 & 29 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AB_{Guilherme2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 12 & 6 \\ 4 & 0 & 17 & 8 \end{bmatrix}$$

Verificaremos que:

$$car(AB)_{Art2} = car(AB)_{Gui2} = \sum_{k=1}^{n} \left(car(A^k).\,car(B_k) \right) = 106$$

Mas, apesar da igualdade acima, o teorema **não garante** que o produto esteja correto, na verdade, nenhum dos dois produtos está. Como vimos anteriormente, o produto correto é $C = AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 17 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 8 \end{bmatrix}$.

Assim, para comprovarmos que a matriz produto esteja errado, bastaria encontrar pelo menos um elemento errado nesta matriz, ou seja, encontrar pela definição de produto clássico um erro em dos elementos

$$c_{is} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} . b_{ks}$$

Esta tarefa de escolha pode ser fácil se analisarmos a nova matriz produto de Arthur (pois é óbvio que um produto de uma linha por coluna, onde todos os produtos não nulos são positivos, jamais terá resultado nulo, uma vez que estamos trabalhando com matrizes reais), mas já não podemos afirmar o mesmo para a nova matriz de Guilherme.

Como verificamos abaixo, na nova matriz de Guilherme houve apenas uma permutação entre os elementos destacados:

$$C = AB_{correto} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 17 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 8 \end{bmatrix} \qquad AB_{Guilherme2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 12 & 6 \\ 4 & 0 & 17 & 8 \end{bmatrix}$$

Nossa tarefa agora é possibilitar que **sutilezas** como esta sejam detectadas.

Para isto, tomaremos um bloco da matriz no qual possamos atestar um erro.

Uma forma eficiente de fazer isto é substituir uma linha da matriz A por uma linha nula. Esta ação de substituir uma linha por outra nula se justifica pelo fato de que no caso em análise houve permutação entre elementos da mesma coluna, mas por outro lado também de linhas distintas. Assim, iremos substituir por uma linha nula uma das linhas que contenham um elemento 'estranho', mas manteremos o outro elemento estranho que continuará no que resta da matriz, e continuará mantido o erro, mas dessa vez detectável pelo filtro de JPC.

Para nos auxiliar nesta tarefa faremos a seguinte definição:

Definição 5.3.1.1: Uma matriz M de linha nula i, denotado por $M_{(-i)}$, é a matriz na qual a i-ésima linha de M é substituída por uma linha com valores todos iguais a zero.

Admitamos também, por força de notação, que $M = M_{(-0)}$, ou seja, M sem a substituição de nenhuma linha.

Uma decorrência da notação adotada é a implicação no produto e no cardinal do produto de duas matrizes, da seguinte forma:

$$A_{(-i)}.B = (A.B)_{(-i)}$$

E por consequência:

$$car\left(A_{(-i)}.B\right) = car\left((A.B)_{(-i)}\right)$$

Estes resultados são bastante fáceis de serem verificados através do produto **linha por coluna**, constatando que uma linha nula na primeira matriz gerará um produto com a mesma linha também nula.

A definição acima, em termos de matriz particionada em blocos de linhas de $M_{(-i)}$ equivale a:

$M_{(-i)} = \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, onde 0 representa uma matriz-linha nula, na verdade uma submatriz, de mesma ordem que M_i.

Isto tem como consequência, em termos de cardinal, que:

$$car\left(M_{(-i)}\right) = car(M) - car(M_i)$$

Além disso, podemos escrever uma matriz $A_{(-i)}$, de ordem $m \times n$, em termo de seus elementos da seguinte forma:

$$A_{(-i)} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} - a_{i1} & \cdots & a_{ik} - a_{ik} & \cdots & a_{in} - a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz-linha dos cardinais das colunas de $A_{(-i)}$é:

$$[car(A^1) - a_{i1} \quad \cdots \quad car(A^k) - a_{ik} \quad \cdots \quad car(A^n) - a_{in}]$$

Ou ainda, expressa como diferença de matrizes:

$$[car(A^1) \quad \cdots \quad car(A^k) \quad \cdots \quad car(A^n)] - [a_{i1} \quad \cdots \quad a_{ik} \quad \cdots \quad a_{in}]$$

Estes dois últimos resultados ajudarão bastante quando formos calcular cada um dos cardinais $car\left((AB)_{(-i)}\right)$, pois, admitindo que uma matriz de um elemento só, equivalha a um número real, escrevemos assim:

$$car\left((AB)_{(-i)}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(car\left(\left(A_{(-i)}\right)^k\right).car(B_k)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((car(A^k) - a_{ik}).car(B_k)\right)$$

$$= [car(A^1) \quad \cdots \quad car(A^n)].\begin{bmatrix} car(B_1) \\ \vdots \\ car(B_n) \end{bmatrix} - [a_{i1} \quad \cdots \quad a_{in}].\begin{bmatrix} car(B_1) \\ \vdots \\ car(B_n) \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(car(A^k).car(B_k)\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}.car(B_k)\right)$$

Assim, sistematicamente, no exemplo em análise, procederemos da seguinte forma:

Inicialmente calculemos a matriz-linha dos cardinais de cada coluna de $A = A_{-0}$ e a matriz-coluna dos cardinais de cada linha de B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

Assim, temos:

$$car(AB) = \sum_{k=1}^{n} \left(car(A^k).car(B_k) \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 14 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 1.1 + 1.1 + 14.6 + 5.4 = 106$$

Agora, calculemos o cardinal de cada matriz produto:

$$AB_{Art2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 4 & 59 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 106 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AB_{Gui2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 12 & 6 \\ 4 & 0 & 17 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29 \\ 25 \\ 23 \\ 29 \end{bmatrix}$$

$\text{car(AB)}_{\text{Art2}}$=0 + 0 + 0 + 106 = 106

$\text{car(AB)}_{\text{Gui2}}$=29 + 25 + 23 + 29=106

Verificamos que:

$car(AB) = car(AB)_{Art2} = car(AB)_{Gui2}$, e assim não podemos afirmar se estão corretos ou não seus produtos matriciais, mas podemos afirmar que pelo menos um não está, pois são distintas as matrizes em análise.

Este resultado **inconclusivo** nos leva a investigar blocos das matrizes originais, de forma que nos possibilite a detecção do erro.

Retomando as matrizes de Arthur e Guilherme, calculemos os cardinais de linhas nulas:

$$AB_{Art2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 4 & 59 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 106 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AB_{Gui2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 12 & 6 \\ 4 & 0 & 17 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29 \\ 25 \\ 23 \\ 29 \end{bmatrix}$$

car(AB)=0 + 0 + 0 + 106 = 106

car($(AB)_{(-1)}$)=106 – 0 = 106

car(AB)=29 + 25 + 23 + 29=106

car($(AB)_{(-1)}$)=106 – 29 = 77

car($(AB)_{(-2)}$)=106 – 25 = 81

car($(AB)_{(-3)}$)=106 – 23 = 83

Calculamos assim na sequência os valores das matrizes de linhas nulas para $i = 1$ o qual mostra que erro para matriz de Arthur2, mas é inconclusivo para matriz de Guilherme2; calculamos $i = 2$ e $i = 3$, o qual mostra erro na matriz de Guilherme2. Vejamos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

Assim, temos:

$$car\big((AB)_{(-1)}\big) = [106] - [1 \quad 0 \quad 3 \quad 2].\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 106 - 29 = 77$$

$$car\big((AB)_{(-2)}\big) = [106] - [0 \quad 1 \quad 4 \quad 0].\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 106 - 25 = 81$$

$$car\big((AB)_{(-3)}\big) = [106] - [0 \quad 0 \quad 3 \quad 2].\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 106 - 28 = 78$$

Verificamos assim que:

$car\big((AB)_{(-1)}\big) \neq car\big((AB)_{(-1)}\big)_{Art2}$, e ainda $car\big((AB)_{(-3)}\big) \neq car\big((AB)_{(-3)}\big)_{Gui2}$, ou seja, concluímos que ambos erraram o produto matricial.

Quando operarmos às cegas, a escolha da linha a ser excluída pode ser arbitrária, mas esta escolha deve ser sistematizada numa sequencia lógica, que permita o controle do processo ao operador, por exemplo, ordem crescente ou decrescente de índices, etc. Desta forma, pode ser que não encontremos erro numa primeira filtragem, e devemos prosseguir nossos cálculos sem perder o rumo e evitando repetir cálculos já feitos.

Outro comentário que achamos pertinente é a estratégia de construir as matrizes-coluna dos cardinais das linhas de AB_{Art2} e AB_{Gui2} e só depois somar esses valores obtendo o cardinal das mesmas que a principio é um processo dispensável, mas que se mostra muito útil quando vamos determinar o cardinal de $AB_{(-i)}$ qualquer, bastando apenas consumar a subtração:

$$car\left((AB)_{(-i)}\right) = (car(AB) - car((AB)_i)$$

Sem calcular $car\left((AB)_{(-4)}\right)_{Gui2}$ podemos afirmar categoricamente que há um erro na 4ª linha da matriz de Guilherme2, pois como veremos mais a frente trata-se de um *erro de 2ª espécie*, portanto, presentes pelo menos um par de elementos errados.

5.3.2. Permutação de um Par numa Mesma Linha

Agora, permutaremos um par de elementos numa mesma linha da matriz produto e, como observaremos a estratégia anterior não surte efeito nesta situação, mas uma ação similar, mas engendrada por colunas, é eficaz.

Exemplo 5.3.2.1: Retornando ao exemplo anterior, onde temos A $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e B $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, agora atribuindo aos operadores Arthur e Guilherme as matrizes produto seguintes:

$$AB_{Arthur3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 29 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AB_{Guilherme3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 6 & 17 \\ 4 & 0 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

Verificaremos que:

$$car(AB)_{Art3} = car(AB)_{Gui3} = \sum_{k=1}^{n}\left(car(A^k).\,car(B_k)\right) = 106$$

Novamente, apesar da igualdade acima, o teorema não garante que o produto esteja correto, como sabemos o produto correto é $C = AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 17 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 8 \end{bmatrix}$.

Semelhante ao que dissemos na seção anterior para comprovarmos que a matriz produto esteja errado, bastando encontrar pelo menos um elemento errado nesta matriz, ou seja, constatar erro num elemento qualquer:

$$c_{is} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{ik}}.\,\mathrm{b}_{\mathrm{ks}}$$

Mas para a nova matriz de Guilherme a escolha não é fácil, pois correríamos o risco de realizar quase na integra as operações da multiplicação matricial. Como verificaremos, na nova matriz de Guilherme houve apenas uma permutação entre os elementos destacados:

$$C = AB_{correto} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 17 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 8 \end{bmatrix} \qquad AB_{Guilherme3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 6 & 17 \\ 4 & 0 & 17 & 8 \end{bmatrix}$$

Nossa tarefa agora é possibilitar que este detalhe seja detectado.

Para isto, tomaremos um bloco da matriz no qual possamos atestar um erro.

Uma forma eficiente de fazer isto é substituir uma coluna de B por uma coluna nula. Para nos auxiliar nesta tarefa faremos a seguinte definição:

Definição 5.3.2.1: Uma matriz M de coluna nula j, denotado por $M^{(-j)}$, é a matriz na qual a j-ésima coluna de M é substituída por uma coluna com valores todos iguais a zero.

Admitamos também, por força de notação, que $M = M^{(-0)}$, ou seja, M sem a substituição de nenhuma coluna.

Uma decorrência da notação adotada é a implicação no produto e no cardinal do produto de duas matrizes, da seguinte forma:

$$A.B^{(-j)} = (A.B)^{(-j)}$$

E por consequência:

$$car\left(A.B^{(-j)}\right) = car\left((A.B)^{(-j)}\right)$$

Estes resultados são bastante fáceis de serem verificados através do produto **linha por coluna**, constatando que uma coluna nula na segunda matriz gerará um produto com a mesma coluna também nula.

A definição acima, em termos de matriz particionada em blocos de colunas de $M^{(-j)}$ equivale a:

$M^{(-j)} = [M^1 \quad \cdots \quad M^j \quad \cdots \quad M^n] - [0 \quad \cdots \quad M^j \quad \cdots \quad 0]$, onde 0 representa uma matriz-coluna nula, na verdade uma submatriz, de mesma ordem que M^j.

Isto tem como consequência, em termos de cardinal, que:

$$car\left(M^{(-j)}\right) = car(M) - car\left(M^j\right)$$

Além disso, podemos escrever uma matriz $B^{(-j)}$, de ordem $n \times p$, em termo de seus elementos da seguinte forma:

$$B^{(-j)} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} - b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{kj} - b_{kj} & \cdots & b_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} - b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz-coluna dos cardinais das linhas de $B^{(-j)}$é:

$$\begin{bmatrix} car(B_1) - b_{1j} \\ \vdots \\ car(B_k) - b_{kj} \\ \vdots \\ car(B_n) - b_{nj} \end{bmatrix}$$

Ou ainda, expressa como diferença de matrizes:

$$\begin{bmatrix} car(B_1) \\ \vdots \\ car(B_k) \\ \vdots \\ car(B_n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

Estes dois últimos resultados ajudarão bastante quando formos calcular cada um dos cardinais $car\big((A.B)^{(-j)}\big)$, pois, admitindo que uma matriz de um elemento só, equivalha a um número real, escrevemos assim:

$$car\big((A.B)^{(-j)}\big) = \sum_{k=1}^{n} \left(car(A^k).car\left(\left(B^{(-j)}\right)_k\right)\right) =$$

$$= [car(A^1) \quad \cdots \quad car(A^n)].\begin{bmatrix} car(B_1) - b_{1j} \\ \vdots \\ car(B_n) - b_{nj} \end{bmatrix}$$

$$= [car(A^1) \quad \cdots \quad car(A^n)].\begin{bmatrix} car(B_1) \\ \vdots \\ car(B_n) \end{bmatrix} - [car(A^1) \quad \cdots \quad car(A^n)].\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(car(A^k).car(B_k) \right) - \sum_{k=1}^{n} \left(car(A^k).b_{kj} \right)$$

A ação de substituir uma coluna por outra nula se justifica similarmente como foi feito na subseção anterior

Assim, sistematicamente, no exemplo em análise, procederemos da seguinte forma:

Inicialmente calculemos a matriz-linha dos cardinais de cada coluna de A e matriz-coluna dos cardinais de cada linha de $B = B^{(-0)}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$[1 \quad 1 \quad 14 \quad 4]$$

Assim, temos:

$$car(AB) = \sum_{k=1}^{n} \left(car(A^k).car(B_k) \right) = [1 \quad 1 \quad 14 \quad 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 1.1 + 1.1 + 14.6 + 5.4 = 106$$

Agora, calculemos o cardinal de cada matriz produto:

$$AB_{Art3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 29 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AB_{Gui3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 6 & 17 \\ 4 & 0 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 106] \qquad [14 \quad 4 \quad 48 \quad 40]$$

car(AB)$_{Art3}$=0 + 0 + 0 + 106=106

car(AB)$_{Gui3}$=14 + 4 + 48 + 40=106

Verificamos que:

$car(AB) = car(AB)_{Art3} = car(AB)_{Gui3}$, e assim não podemos afirmar se estão corretos ou não seus produtos matriciais.

Este resultado inconclusivo nos leva a investigar blocos das matrizes originais, de forma que nos possibilite a detecção do erro, se houver. Vejamos:

Retomando as matrizes de Arthur e Guilherme, calculemos os cardinais de colunas nulas:

$$AB_{Art3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 29 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AB_{Gui3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 9 \\ 3 & 2 & 6 & 17 \\ 4 & 0 & 17 & 8 \end{bmatrix}$$

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 106] \qquad\qquad [14 \quad 4 \quad 48 \quad 40]$$

car(AB)=0 + 0 + 0 + 106=106

car((AB)$^{(-1)}$)=106 – 0 = 106

car(AB)=14 + 4 + 48 + 40=106

car((AB)$^{(-1)}$)=106 – 14 = 92

car((AB)$^{(-2)}$)=106 – 4 = 102

car((AB)$^{(-3)}$)=106 – 48 = 58

Calculamos assim na sequência os valores das matrizes de linhas nulas para $i = 1$ o qual mostra que erro para matriz de Arthur3, mas é inconclusivo para matriz de Guilherme3; calculamos $i = 2$ e $i = 3$, o qual mostra erro na matriz de Guilherme3. Vejamos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$[1 \quad 1 \quad 14 \quad 4]$$

Assim, como já temos:

$$car(AB) = 106$$

Então,

$$car\left(AB^{(-1)}\right) = [106] - [1 \quad 1 \quad 14 \quad 4].\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 106 - 14 = 92$$

$$car\left(AB^{(-2)}\right) = [106] - [1 \quad 1 \quad 14 \quad 4].\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = 106 - 4 = 102$$

$$car\left(AB^{(-3)}\right) = [106] - [1 \quad 1 \quad 14 \quad 4].\begin{bmatrix}1\\0\\3\\4\end{bmatrix} = 106 - 59 = 47$$

Verificamos assim que:

$car\left((AB)^{(-1)}\right) \neq car\left((AB)^{(-1)}\right)_{Art3}$, e $car\left((AB)^{(-3)}\right) \neq car\left((AB)^{(-3)}\right)_{Gui3}$, ou seja, concluímos que ambos erraram o produto matricial.

Sem calcular $car\left((AB)^{(-4)}\right)_{Gui3}$ podemos afirmar categoricamente que há um erro na 4ª coluna da matriz de Guilherme3, pois como veremos mais a frente trata-se de um *erro de 2ª espécie*, portanto, presentes pelo menos um par de elementos errados.

5.3.3. Generalizando os Resultados

Discutiremos mais um pouco sobre erros cometidos na multiplicação matricial, e para tanto tomemos uma matriz $C = [c_{is}]_{m\times p}$ como sendo a correta multiplicação de duas matrizes $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ e $B = [b_{rs}]_{n\times p}$, assim como a matriz $K = C + D = [c_{is}]_{m\times p} + [d_{is}]_{m\times p}$ candidata à multiplicação correta entre A e B, onde $D = [d_{is}]_{m\times p}$ é a matriz das diferenças entre os elementos de K e C.

Nossas observações nos levam a distinguir duas espécies de erros de multiplicação matricial:

Erros de 1ª espécie: Ocorre quando o cardinal da matriz correta difere do cardinal da matriz candidata. São aqueles erros detectados pelo ***Filtro Total de JPC***.

Em termos de cardinais, temos:

$$car(C) \neq car(K) \Leftrightarrow car(D) \neq 0$$

Foi o que ocorreu no exemplo 5.1.1, quando foi necessária apenas uma filtragem.

Erros de 2ª espécie: Ocorre quando o cardinal da matriz candidata é igual ao cardinal da matriz correta, por isso o cardinal da matriz diferença é nula, entretanto, existe pelo menos uma par de elementos da matriz diferença não nulos. O ***Filtro Total de JPC*** não consegue detectar este erro.

Em termos de cardinal, temos:

$$car(C) = car(K), \qquad \exists \; d_{is} \neq 0, \text{tal que} \sum d_{is} = 0$$

É notório que quando se trata de um erro de 2ª espécie teremos um mínimo de um par de elementos $d_{is} \neq 0$, pois se fosse um único elemento o somatório nunca seria $\sum d_{is} = 0$, e assim teríamos um erro de 1ª espécie.

Também é notório que se $car(C) = car(k)$ e todos os $d_{is} = 0$ (portanto, $car(D) = 0$) a matriz candidata constituir-se-á numa multiplicação correta, ou seja, $K = C$.

Além disso, a tarefa fica mais complicada quando existir apenas um par de elementos $d_{is} \neq 0$, que necessariamente serão simétricos, numa quantidade enorme de elementos dependendo da ordem da matriz produto.

$$\begin{cases} k_{xy} - c_{xy} = d_{xy} \\ \text{e} \\ k_{zt} - c_{zt} = d_{zt} \end{cases}, \text{ tais que } d_{xy} = -d_{zt}$$

Já iniciamos esta tarefa nas seções anteriores, quando falamos sobre permutações entre pares na mesma linha ou na mesma coluna. Na verdade, os resultados são válidos não apenas para permutações de pares, mas poderíamos falar em **elementos compensadores**, cujas soma das diferenças em relação à matriz correta anulam-se entre si.

Outra observação é que permutações ou compensadores existentes simultaneamente em linhas e colunas distintas poderiam ser detectados tanto pela estratégia por linha quanto pela estratégia por coluna.

Assim, o mais difícil já foi feito!

Agora vamos generalizar os resultados obtidos, reescrevendo o Corolário 5.1.2 do seguinte modo:

Corolário 5.3.3.1: (Filtro Linha de JPC) Se $car\left((AB)_{(-i)}\right) \neq \sum_{t=1}^{n}\left(car\left(\left(A_{(-i)}\right)^{t}\right).car(B_t)\right)$*, então o produto matricial* AB *contém erro.*

Corolário 5.3.3.2: (Filtro Coluna de JPC) Se $car\left((AB)^{(-j)}\right) \neq \sum_{t=1}^{n}\left(car(A^t).car\left((B)^{(-j)}\right)_t\right)$*, então o produto matricial* AB *contém erro.*

Nota 3: Como vemos, a menos da notação, o Corolário 5.1.2 e seu equivalente lógico 5.1.2-A são mantidos, sendo somente explicitado algumas propriedades das matrizes envolvidas na multiplicação, ou seja, a notação **somente evidencia** que a matriz A tenha uma linha específica nula ou que a matriz B tenha uma coluna específica nula, o que é um caso particular dentro da abordagem genérica dada na demonstração do Corolário 5.1.2, mas especificamente demonstrado pelo seu equivalente lógico no Corolário 5.1.2-A. Desta forma, as demonstrações dos Corolários 5.3.1 e 5.3.2 seriam apenas repetição de demonstração já feita, portanto, desnecessária.

Desta forma, o teorema em si é mantido e o que trazemos de novidade nesta seção é a possibilidade que esta notação nos proporciona, qual seja avaliar blocos do produto original, permitindo detecção de erros em locais obscuros.

Algo importante e que não devemos deixar de mencionar é que quando procuramos por um erro de multiplicação matricial e este se encontra em linhas distintas, somos levados a calcular os cardinais das matrizes de linha nula $A_{(-i)}$ e o fazemos para m elementos dos $i = 0,1,\dots,m$, ou seja, um deles não é necessário calcular, pois no mínimo, erros de 2ª ordem se distribuem num par (duas linhas neste caso).

Da mesma forma quando procuramos por um erro de multiplicação matricial e este se encontra em colunas distintas, somos levados a calcular os cardinais das matrizes de coluna nula $B^{(-j)}$ e o fazemos para p elementos dos $j = 0,1,\dots,p$, ou seja, um deles não é necessário calcular, pois no mínimo, erros de 2ª ordem se distribuem num par (duas colunas neste caso)

Assim, devemos ter em mente que para detectar um erro na multiplicação das matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$ somos obrigados a realizar $m \times p$ produtos **linha por coluna** (ou seja, $m \times p \times n$ produtos de reais) repetindo a multiplicação matricial na íntegra. Usando o filtro proposto, podemos detectar com apenas uma multiplicação **linha por coluna** (ou seja, n multiplicações de reais) se for um *erro de 1ª espécie;* e no máximo $2n - 1$ multiplicações **linha por coluna** (ou seja, $(2n-1) \times n$ multiplicações de reais) num *erro de 2ª espécie*.

Vejamos o exemplo:

Exemplo 5.3.3.1: Retornando às matrizes do exemplo anterior, onde temos $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, agora determinemos os erros cometidos na multiplicação matricial entre AB, dado por $K = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 7 \\ 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 1 & 12 & 8 \end{bmatrix}$

Solução:

Para fins de detecção de erro, veremos que a análise de $K_{(-2)}$ e $A_{(-2)}$, ou de $K^{(-2)}$ e $B^{(-2)}$, são o suficiente. Entretanto, nos estenderemos para fins de uma visão mais global do funcionamento do filtro.

Além disso, para as matrizes $A_{4\times 4}$ e $B_{4\times 4}$efetuaremos, no máximo:

$2n - 1 = 2.4 - 1 = 7$ multiplicações linha por coluna

$(2n-1).n = 7.4 = 28$ multiplicações de reais

O que já é bem mais vantajoso se tivéssemos que calcular novamente o produto matricial em busca de erros:

$m \times p = 4.4 = 16$ multiplicações linha por coluna (método clássico)

$m \times p \times n = 16.4 = 64$ multiplicações de reais

Mas na verdade, pararíamos quando encontrássemos o primeiro erro, ou seja, pararíamos neste caso específico, em $car\big((AB)_{(-2)}\big)$, totalizando:

$m - (i-1) = 4 - 1 = 3$ multiplicações linha por coluna

$(m+1-i).n = 3.4 = 12$ multiplicações de números reais

Entretanto, como mencionamos acima, efetuaremos os demais cálculos só para proporcionar um panorama geral do processo. Assim, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 0 & 12 & 7 \\ 3 & 2 & 18 & 6 \\ 4 & 1 & 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29 \\ 23 \\ 29 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 5 & 60 & 27 \end{bmatrix} \quad 106$$

$car(K) = 106$
$car(K_{(-1)}) = 106 - 29 = 77$
$car(K_{(-2)}) = 106 - 23 = 83$
$car(K_{(-3)}) = 106 - 29 = 77$

$car(k) = 106$
$car(K^{(-1)}) = 106 - 14 = 92$
$car(K^{(-2)}) = 106 - 5 = 101$
$car(K^{(-3)}) = 106 - 60 = 46$

Observamos que até então não efetuamos nenhuma multiplicação.

Determinemos o cardinal do produto das matrizes A e B:

$$car(AB) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 14 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 + 1 + 84 + 20 = 106$$

Como $car(K) = car(AB)$ concluímos que ou a multiplicação está correta ou contém um erro de 2ª espécie.

Continuaremos a investigação:

$$car\left((AB)_{(-1)}\right) = 106 - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 106 - 29 = 77 = car\left(K_{(-1)}\right)$$

$$car\left((AB)_{(-2)}\right) = 106 - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 106 - 25 = 81 \neq car\left(K_{(-2)}\right) \text{ (erro)}$$

$$car\left((AB)_{(-3)}\right) = 106 - \begin{bmatrix}0 & 0 & 3 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\1\\6\\5\end{bmatrix} = 106 - 28 = 78 \neq car\left(K_{(-3)}\right) \text{ (erro)}$$

Agora verificamos erros sob a vertente das colunas nulas:

$$car\left((AB)^{(-1)}\right) = 106 - \begin{bmatrix}1 & 1 & 14 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = 106 - 14 = 92 = car\left(K^{(-1)}\right)$$

$$car\left((AB)^{(-2)}\right) = 106 - \begin{bmatrix}1 & 1 & 14 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = 106 - 4 = 102 \neq car\left(K^{(-2)}\right) \text{ (erro)}$$

$$car\left((AB)^{(-3)}\right) = 106 - \begin{bmatrix}1 & 1 & 14 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\0\\3\\4\end{bmatrix} = 106 - 59 = 47 \neq car\left(K^{(-3)}\right) \text{ (erro)}$$

Se calculássemos $car\left((AB)_{(-4)}\right)$ ou $car\left((AB)^{(-4)}\right)$, também encontraríamos erro, mas como vimos, erros já foram detectados.

Para finalizar, podemos observar que a análise de erros de 2ª espécie pode ser simplificada um pouco mais, conforme já vínhamos percebendo resolução do exemplo anterior, o valor do $car(AB)$ e do $car(K)$ não interferem determinantemente nos resultados.

E, a partir da definição de matriz de linha nula, podemos retomar a seguinte igualdade, mas em termos da matriz candidata K:

$K_{(-i)} = \begin{bmatrix}K_1\\ \vdots\\ K_i\\ \vdots\\ K_m\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ K_i\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$, onde 0 representa uma matriz-linha nula, na verdade uma submatriz, de mesma ordem que K_i.

Isto tem como consequência, em termos de cardinal, que:

$$car\left(K_{(-i)}\right) = car(K) - car(K_i)$$

Assim como podemos proceder da mesma forma para a matriz correta C, mais especificamente para $C = A.B$, expresso na igualdade obtida anteriormente:

$$car\big((AB)_{(-i)}\big) = car(AB) - \sum_{t=1}^{n}\big(a_{it}.car(B_t)\big)$$

Estabelecendo a correspondência entre a matriz candidata K e o produto das matrizes A e B, temos:

$$car\big(K_{(-i)}\big) = car\big((AB)_{(-i)}\big)$$

$$car(K) - car(K_i) = car(AB) - \sum_{t=1}^{n}\big(a_{it}.car(B_t)\big)$$

Mas como estamos tratando de erros de 2ª espécie, ou seja, sempre $car(K) = car(AB)$, temos:

$$\cancel{car(K)} - car(K_i) = \cancel{car(AB)} - \sum_{t=1}^{n}\big(a_{it}.car(B_t)\big)$$

E portanto, basta verificarmos para cada $i = 1, \dots, m$, se a igualde seguinte é verifica:

$$car(K_i) = \sum_{t=1}^{n}\big(a_{it}.car(B_t)\big)$$

Caso algum não seja verificado, atestaremos erro na multiplicação.

Não esquecendo, da bijeção admitida em seções anteriores, na qual admitimos igualdade entre um número real e uma matriz de um único elemento, a igualdade acima é, na prática, melhor operacionalizado como:

$$car(K_i) = [a_{i1} \quad \cdots \quad a_{in}].\begin{bmatrix} car(B_1) \\ \vdots \\ car(B_n) \end{bmatrix}$$

Da mesma forma para a análise por colunas, teríamos:

$$car\left(K^j\right) = [car(A^1) \quad \cdots \quad car(A^n)].\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

É claro que estes resultados podiam ter sido obtidos de outra forma, sem o uso da matriz de linha nula, sem até a necessidade de sua definição. Entretanto, estamos apresentando nosso trabalho da forma como conduzimos nossas investigações, e tendo a certeza do valor matemático do trabalho desenvolvido.

Como estamos tratando de um erro de 2ª espécie, pois $car(K) = car(AB)$, damos prosseguimento à investigação, verificando se para algum i não se verifica a igualdade $car((AB)_i) = car(K_i)$. Não se verificando a igualdade, constatamos o *erro* e o processo é encerrado. Caso contrário, investigamos se a igualdade $car\left((AB)^j\right) = car\left(K^j\right)$ não se verifica para algum j. Mas se em todos os casos as igualdades forem verificadas, concluímos que a multiplicação está correta!

Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 5.3.3.2: Tomando as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & -3 & 2 & -4 & 5 & -6 \\ 1 & 6 & 2 & -2 & 0 & -6 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, verifique se está correta a multiplicação entre A e B dado por $K = \begin{bmatrix} -13 & 30 & 0 & -12 \\ 3 & 1 & 13 & -7 \\ -25 & 24 & -3 & 33 \\ 4 & -3 & 5 & -13 \\ 16 & -14 & 0 & -25 \end{bmatrix}$.

Solução:

Para termos de análise, verificaremos quantas operações realizaríamos na seguintes situações:

Repetindo na íntegra a multiplicação:

$m \times p = 5.4 = 20$ multiplicações linha por coluna (método clássico)

$m \times p \times n = 20.7 = 140$ multiplicações de números reais

Utilizando o filtro, averiguaremos linhas e colunas. Desta forma, calcularemos os $A_{(-i)}$e os $B^{(-j)}$ necessários, e assim teremos no máximo:

$2n - 1 = 2.7 - 1 = 13$ multiplicações linha por coluna

$(2n - 1).n = 13.7 = 91$ multiplicações de números reais

Como veremos, só serão necessárias operações até encontrarmos o primeiro erro, ou seja, neste caso é suficiente realizar:

$m = 5$ multiplicações linha por coluna (de $i = 0, \dots ,4$)

$m \times n = 5.7 = 35$ multiplicações de números reais

Determinemos os $car(K_i)$ e os $car\left(K^j\right)$:

$$K = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -13 & 30 & 0 & -12 \\ 3 & 1 & 13 & -7 \\ -25 & 24 & -3 & 33 \\ 4 & -3 & 5 & -13 \\ 16 & -14 & 0 & -25 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 29 \\ -7 \\ -23 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -15 & 38 & 15 & -24 \end{bmatrix} & 14 \end{array} \quad car(K_i)$$

$car(K^j)$ $\quad$ $car(K)$

Determinemos o cardinal do produto das matrizes A e B:

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & -3 & 2 & -4 & 5 & -6 \\ 1 & 6 & 2 & -2 & 0 & -6 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 12 & 10 & 1 & 9 & 7 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$car(AB) = [2 \quad 12 \quad 10 \quad 1 \quad 9 \quad 7 \quad 0].\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 4 + 72 - 50 + 0 - 54 + 42 + 0 = 14$$

Se vier a conter erro, tratar-se-á de um erro de 2ª espécie, pois $car(K) = car(AB)$.

Assim damos prosseguimento à investigação, verificando se para algum i não se verifica a igualdade $car((AB)_i) = car(K_i)$.

$$car((AB)_1) = [1 \quad 2 \quad 3 \quad -4 \quad 5 \quad 6 \quad 0].\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = (2 + 12 - 15 - 30 + 36) = 5$$

$$= car(K_1)$$

$$car((AB)_2) = [0 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1].\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = (36 - 25 - 18 + 12 + 5) = 10$$

$$= car(K_2)$$

$$car((AB)_3) = [-5 \quad 0 \quad -3 \quad 2 \quad -4 \quad 5 \quad -6].\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = (-10 + 15 + 24 + 30 - 30) = 29$$

$$car((AB)_4) = [1 \quad 6 \quad 2 \quad -2 \quad 0 \quad -6 \quad 1].\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = (2 + 36 - 10 - 36 + 5) = -3 \neq$$

$car(K_4)$ (erro)

Encontramos um erro na quarta linha da matriz K, e como existe um erro de 2ª espécie na referida matriz, podemos afirmar que pelo menos um elemento errado habita a quinta linha. Poderíamos encerrar o processo, mas para termos de aprendizagem continuaremos a investigação.

Investigaremos agora as colunas da matriz:

$$car((AB)^1) = \begin{bmatrix} 2 & 12 & 10 & 1 & 9 & 7 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = (2 + 1 - 18) = -15 = car(K^1)$$

$$car((AB)^2) = \begin{bmatrix} 2 & 12 & 10 & 1 & 9 & 7 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = (4 + 36 - 30 - 2 + 9 + 21) = 38$$

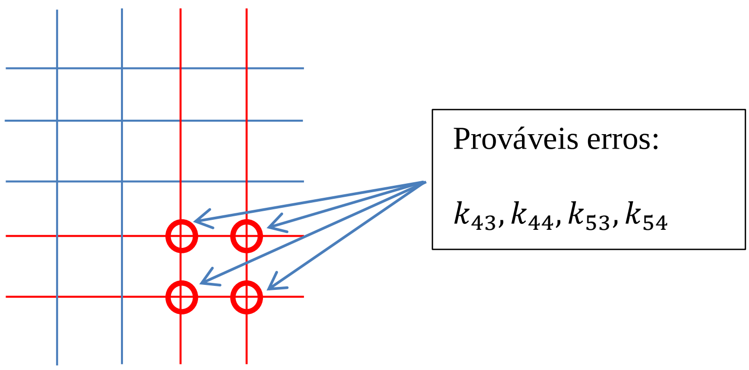
$$= car(K^2)$$

$$car((AB)^3) = \begin{bmatrix} 2 & 12 & 10 & 1 & 9 & 7 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = (6 + 24 + 20 - 45 + 14) = 19 \neq$$

$car(K^3)$ (erro)

Encontramos um erro na terceira coluna da matriz K, e como existe um erro de 2ª espécie na referida matriz, podemos afirmar que pelo menos um elemento errado habita a quarta coluna. Assim, poderíamos finalizar o processo, apontando as localizações prováveis dos erros.

Figura 10: Prováveis erros no produto



Fonte: Criado pelo Autor

Terminado o exemplo, podemos retomar as discussões acerca de alternativas para detecção de erros.

Uma delas consiste em tentar unir as duas estratégias para acelerar o processo de verificação, mas uma consequência negativa disso é a geração de locais onde poderiam ‘se esconder’ um par compensador, exigindo artifícios extras para cobrir estas falhas.

Outra coisa que nos ocorreu, mas que ainda necessita de uma investigação mais detalhada, é a possibilidade de utilizar o filtro aqui proposto para avaliar a instabilidade numérica do Algoritmo de Strassen. Instabilidade elencada, mais adiante, como um problema no uso de tal algoritmo.

Esta possibilidade reside no fato de que mesmo realizando os cálculos computacionalmente, estes estão sujeitos a erros de arredondamento e truncamento, que por ventura possam vir a ser materializadas na diferença entre o cardinal da matriz resultante da multiplicação devido ao Algoritmo e o cardinal do produto das matrizes, ou seja:

$$\left| car(AB_{Strassen}) - \sum_{k=1}^{n} \left(car(A^k).car(B_k) \right) \right| = \Delta_{car(AB)},$$

onde $\Delta_{car(AB)}$ é o erro cometido ao se utilizar o algoritmo de Strassen.

Mas isso é outra história, a qual foge dos objetivos do presente trabalho.

6. OTIMIZANDO A MULTIPLICAÇÃO MATRICIAL

Observamos que até certo ponto propiciamos uma boa ideia de como a divisão de problemas grandes em menores pode viabilizar o tratamento matemático, tornando mais digerível as operações, seja transformando o produto matricial em soma de matrizes de posto1, como também particionando matrizes de grandes ordens em matrizes menores.

Apesar de nossos esforços na tentativa de viabilizar uma alternativa para o produto matricial, não amenizamos a quantidade de operações necessárias para sua realização.

Talvez, para números reais, seja indiferente realizar somas ou multiplicações, no que se refere ao grau de dificuldade, coisa que não podemos afirmar quando se trata de matrizes, visto a definição de produto matricial exige muito mais empenho do que a soma. Então, se pudéssemos escolher em operar mais somas matriciais do que produtos, provavelmente faríamos esta opção.

Para compreender melhor esta possibilidade, vejamos os tópicos abaixo, que iniciamos com números reais e números complexos:

6.1 MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS REAIS E COMPLEXOS

Para termos uma ideia de como reduzir a quantidade de multiplicação de uma operação tomemos o caso dos números reais.

Observemos o seguinte exemplo:

$$x^2 - y^2 \qquad (6.1.1)$$

Inicialmente, temos dois produtos:

$$x.x - y.y \qquad (6.1.2)$$

Tomando sua forma fatorada, teremos apenas um produto:

$$(x - y)(x + y) \qquad (6.1.3)$$

Por definição, no caso de números complexos, temos:

$$(x + yi).(z + ti) = (x.z - y.t) + (x.t + y.z).i \qquad (6.1.4)$$

Observamos que a princípio, temos quatro produtos.

Utilizando um artifício algébrico, tomaremos: $\begin{cases} a = x.(z + t) \\ b = x.(y + t) \\ \mathrm{c} = \mathrm{y}.(t - z) \end{cases}$

E, portanto, equivalente a (5.1.4), temos:

$$(a - b) + (b - c)i \qquad (6.1.5)$$

Observemos que (5.1.5) tem apenas três multiplicações, em a, b e c.

Poderíamos considerar que fizemos um bom esforço pra reduzir o número de multiplicações, sendo até mesmo questionável se tal esforço valeria apena, mesmo após já dominado o algoritmo de redução.

Já no caso de matrizes, somos catedráticos em afirmar que a redução do número de multiplicações provavelmente valeria apena, ainda mais se tratando de matrizes de grandes ordens, ou quando os elementos são submatrizes.

A seção a seguir não tem a pretensão de afirmar que no Ensino Médio seja ou não possível aplicar o algoritmo que se segue, mas não poderíamos nos furtar em apresentá-lo, tendo em vista a sequência lógica do trabalho, deixando bem claro a ideia otimização de processos.

6.2 ALGORITMO DE STRASSEN PARA O PRODUTO MATRICIAL

Para o produto matricial, seria extraordinário se conseguíssemos reduzir o número de multiplicações, tendo em vista a quantidade de operações resultante da definição.

Vejamos o produto entre as matrizes $A_{2\times2}$ e $B_{2\times2}$, que pela definição clássica (ou mesmo pela alternativa) gera:

$$A.B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.e + b.g & a.f + b.h \\ c.e + d.g & c.f + d.h \end{bmatrix}$$

Temos então, oito produtos.

O Algoritmo de Strassen se propõe a reduzir o número de multiplicações presentes no produto de matrizes quadradas 2x2. Para tanto, adota os seguintes artifícios:

$P_1 = (a + d)(e + h)$

$P_2 = (c + d)e$

$P_3 = a(f - h)$

$P_4 = d(-e + g)$

$P_5 = (a + b)h$

$P_6 = (-a + c)(e + f)$

$P_7 = (b - d)(g + h)$

$M_1 = P_1 + P_2 - P_5 + P_7$

$M_2 = P_3 + P_5$

$M_3 = P_2 + P_4$

$M_4 = P_1 + P_2 + P_3 + P_6$

Desta forma, como vemos acima, temos sete produtos.

Assim, podemos escrever o produto da seguinte forma:

$$A.B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.e + b.g & a.f + b.h \\ c.e + d.g & c.f + d.h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}$$

Entretanto, substituir 8 multiplicações e 4 adições do método clássico por 7 multiplicações e 20 adições/subtrações, não parece ser tão viável assim. Na verdade, este procedimento se demostra mais eficaz quando a matriz quadrada tem ordem bastante expressiva. Com tal procedimento, temos um ganho computacional extraordinário. Mais adiante discutiremos com mais detalhes como podemos avaliar melhor essa questão. Por hora, nos limitaremos a analisar algumas situações particulares.

Por exemplo, sejam as matrizes $A = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right]$ e $B = \left[\begin{array}{cc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right]$ particionada em blocos de submatrizes quadradas de ordem 2.

Portanto:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

A retirada de um produto $A_{IJ}.B_{RS}$, significa uma retirada de oito produtos $a_{ij}.b_{rs}$ no processo clássico, o que já é bastante considerável.

Agora, imaginemos se cada matrizes tivessem ordem $n = 8$, poderíamos particioná-las em quatro blocos de submatrizes com quatro submatrizes de ordem $m = 4$ e subdividir estes últimos em submatrizes de ordem $p = 2$.

Vejamos uma ilustração do que dissemos:

Figura 11: Matriz em blocos e sub-blocos

Bloco 4x4 Bloco 2x2

$$M = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} & m_{17} & m_{18} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} & m_{27} & m_{28} \\ \hline m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} & m_{37} & m_{38} \\ m_{44} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} & m_{47} & m_{48} \\ \hline m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} & m_{57} & m_{58} \\ m_{61} & m_{64} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} & m_{67} & m_{68} \\ \hline m_{71} & m_{72} & m_{73} & m_{74} & m_{75} & m_{76} & m_{77} & m_{78} \\ m_{81} & m_{82} & m_{83} & m_{84} & m_{85} & m_{86} & m_{87} & m_{88} \end{array}\right]$$

Fonte: Criado pelo Autor

A esse respeito, observamos claramente o que em “Algoritmos” é conhecido como “Divisão e Conquista”.

Os algoritmos de divisão e conquista têm, então, três fases: dividir, conquistar e combinar.

Na primeira fase, a divisão, o problema é decomposto em dois (ou mais) subproblemas. Em alguns casos, esta divisão é bastante simples, enquanto em outros exige mais do operador.

A conquista, que corresponde à segunda fase, os subproblemas resolvidos. A vantagem da técnica é que podemos resolver recursivamente os problemas menores, se os subproblemas ainda se mostrarem dificultosos podemos usar o mesmo procedimento de divisão e conquista.

Na terceira fase, é chegada a hora de combinarmos as soluções, unificando os resultados oriundos dos problemas menores.

Entretanto, Cormen[22] afirma que não está muito claro o modo como Strassen descobriu os produtos, mas apresenta um método de descoberta bastante elegante, mas por não constituir-se num elemento fundamental deste trabalho, não o apresentaremos.

Retornando à analise das matrizes, observamos que é bastante conveniente o uso de matrizes quadradas de mesma ordem, e ainda mais, sua partição em submatrizes quadradas de mesma ordem, pois não teremos muita dificuldade em averiguar se é possível a realização do produto matricial entre suas submatrizes.

Entretanto, pra melhor fluência do Algoritmo de Strassen vimos que seria ideal se as matrizes envolvidas no produto fossem quadradas e de ordem $n = 2^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, como às que escrevemos acima, de ordem 4 e de ordem 8.

E certas ocasiões, temos matrizes quadradas, mas de ordem diversa da mencionada, outras vezes matrizes com diversidade de ordem, mas que guardam as condições suficientes para realização do produto matricial usual. Ou seja, matrizes A e B que satisfazem a relação abaixo.

$$A_{m\times n}.B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Assim, uma pergunta é inevitável:

E se por ventura, pelo menos uma das matrizes não for quadrada de ordem $n = 2^k$*, não poderemos utilizar o Algoritmo de Strassen?*

Para responder tal pergunta utilizaremos um recurso bastante conhecido pelos matemáticos e que durante nosso curso de graduação ganhou status de princípio matemático aqui na Universidade Federal do Amapá — UNIFAP, e de cujo "complexo" enunciado participei da elaboração.

Enunciemo-lo:

PFB (Princípio da Força Bruta): Se não vai por bem, vai por mal.

---

[22] CORMEN, Thomas H.; LEISERSON, Charles E.;RIVEST, Ronald L.; STEIN, Clifford. **Algoritmos — Teoria e Prática** , Tradução da 2ª ed., p.580. São Paulo: Elsevier editor Ltda., 2001.

Brincadeiras a parte, o que estamos querendo dizer, é que o velho e bom espírito matemático, a inventividade, estratégia, a visão além do alcance, enfim, por meio de artifícios matemáticos podemos superar esta dificuldade. Aproveitando o momento, devemos salientar que são competências desta natureza que são desejáveis em nossos alunos, não apenas a capacidade de memorização.

No caso específico do produto matricial, no qual se proponha efetuar a multiplicação matricial utilizando o Algoritmo de Strassen, podemos utilizar, entre outros recursos, os seguintes:

- **Completar as matrizes com filas nulas:**

Ao completar a matriz com filas (linha ou coluna) de elementos nulos, operamos agora com matrizes quadradas convenientes, dotadas das características necessárias para a multiplicação utilizando o Algoritmo. É claro que devemos tomar certos cuidados para não alterar a "natureza" da matriz, como por exemplo, possibilitar um produto que a princípio não estaria definido, e por isso devemos inserir linhas nulas na primeira matriz e colunas nulas na segunda.

$$A_{(m+r)\times n}.B_{n\times(p+s)} = C_{(m+r)\times(p+s)} = C_{m\times p}$$

Justificamos a igualdade acima tendo em vista o produto **linha por coluna** e o produto coluna por linha de matrizes blocos particionadas convenientemente.

Para entender melhor, vejamos um exemplo.

Sendo as matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$. Para determinemos o produto AB:

Inicialmente verificamos a questão das ordens das matrizes, concluído ser possível tal produto.

Após completarmos a matriz A com uma linha de elementos nulos, particionaremos as matrizes em blocos convenientes:

$$A=\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\text{B}=\left[\begin{array}{c|c|c|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} B^1 & B^2 & B^3 & B^4 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista sempre está definido o produto $A_m.B^p$, e lembrando que $A_4=0_{1\times 4}$ (por vezes escreveremos apenas 0, para fins de simplificação), efetuamos o produto **coluna por linha**:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} B^1 & B^2 & B^3 & B^4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1.B^1 & A_1.B^2 & A_1.B^3 & A_1.B^4 \\ A_2.B^1 & A_2.B^2 & A_2.B^3 & A_2.B^4 \\ A_3.B^1 & A_3.B^2 & A_3.B^3 & A_3.B^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Depois de realizado o produto, podemos voltar a suprimir a linha nula, sempre juizo para a multiplicação. Como cada produto **linha por coluna** $c_{is}=A_k.B^k=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{ks}$, temos a definição clássica de produto matricial. Ou seja, a inserção da linha nula em nada alterou o mesmo, mas agora com a possibilidade de usarmos o Algoritmo de Strassen!

Para utilizar o Algoritmo de Strassen, completemos a matriz A com um vetor-linha nulo, tornando-a uma matriz quadrada. Vejamos:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ e } \left[\begin{array}{cc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right]$$

Tendo as matrizes $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$, que são quadradas de ordem 2 e suas submatrizes que são quadradas de mesma ordem. Determinemos o produto AB através do Algoritmo de Strassen, reiteradamente. Ou seja, primeiramente para $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$,em seguida os produtos $A_{ij}.B_{rs}$ e posteriormente recompomos os resultados ordeiramente.

- **Particionar matriz grandes em blocos convenientes:**

Somente para ilustrar tomemos duas matrizes simbólicas $A_{9\times 2}$ e $A_{2\times 4}$ para as quais pretendemos utilizar o Algoritmo de Strassen em sua multiplicação. Desta forma, podemos particioná-las da seguinte forma:

$$A = \left[\begin{array}{cc} * & * \\ \hline * & * \\ * & * \\ \hline * & * \\ * & * \\ \hline * & * \\ * & * \\ \hline * & * \\ * & * \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \left[\begin{array}{cc|cc} \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$$

Daí, teremos a possibilidade de aplicar o Algoritmo de Strassen na maioria dos produtos, ocorrendo a exceção no produto onde configurar a submatriz A_1.

6.3 CONTAGEM DE OPERAÇÕES

Um fator importante, e que já comentamos, é a eficiência de um algoritmo, e cuja avaliação se traduz na contagem de operações para a execução do mesmo.

É comum encontramos em livros de álgebra linear avaliações acerca de algoritmos, como por exemplo, os algoritmos de Gauss e de Gauss-Jordan para sistemas lineares, fornecendo detalhes do número total de operações efetuadas $T(n)$ em função do número de incógnitas do sistema. É também corriqueiro considerar apenas as operações de multiplicação e divisão, admitindo que as demais operações sejam efetuadas muito mais rapidamente de tal forma que possam ser ignoradas.

Para a o algoritmo de Gauss e Gauss-Jordan, nessas condições, e para um valor grande de incógnitas n temos, respectivamente, $T(n) \approx \frac{1}{3}n^3$ e $T(n) \approx \frac{1}{2}n^3$, o que nos aponta o algoritmo de Gauss como o mais eficiente, implicando num menor tempo de execução.

Mas estas considerações foram feitas só a título de exemplo, mais detalhes podem ser vistas em Poole[23], e também em Aton[24].

O que de fato nos importa nesta secção é avaliar processos relativos à multiplicação matricial, mais precisamente multiplicação de matrizes partidas em blocos e multiplicação de

[23] POOLE, David. **Algebra Linear,** p.83 e ss. Tradutoras: Martha Salermo Monteiro (Coord.), et al. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

[24] ANTON, Op. cit., p. 174 e ss..

matrizes utilizando o Algoritmo de Strassen.

Tal como o procedimento anteriormente descrito, para analisarmos a complexidade de tempo em multiplicação de matrizes, vamos apenas contar o número de multiplicações elementares realizadas, pois o custo computacional de efetuar uma adição ou subtração é muito menor que de uma multiplicação (ou divisão).

Levando-se em consideração que as matrizes envolvidas no processo sejam quadradas de ordem $n = 2^k$, O número de multiplicações, pelas "vias normais", realizadas são contadas pela recorrência abaixo:

$$T(n) = \begin{cases} 8.T\left(\frac{n}{2}\right), se\ n > 2 \\ 8, se\ n = 2 \end{cases}$$

Mas, uma recorrência da forma $T(n) = k.T\left(\frac{n}{2}\right)$ admite solução $T(n) = n^{\log_2 k}$.

De fato,

$$T(n) = k.T\left(\frac{n}{2}\right) = k.\left(\frac{n}{2}\right)^{\log_2 k} = k.\frac{n^{\log_2 k}}{2^{\log_2 k}} = k.\frac{n^{\log_2 k}}{k} = n^{\log_2 k}$$

c.q.d

Portanto, notamos que para $k = 8$, temos $T(n) = n^3$, assim, não ganhamos nada com este algoritmo de divisão e conquista. Porém, nosso algoritmo agora é baseado numa operação de multiplicação de matrizes 2×2, o que é bastante simples. Se conseguirmos descobrir uma maneira mais eficiente de multiplicarmos estas matrizes, podemos melhorar nosso algoritmo.

Esta é a proposta do Algoritmo de Strassen, pois a recorrência, em vez de 8, passa a ter apenas 7 multiplicações. Portanto:

$$T(n) = \begin{cases} 7.T\left(\frac{n}{2}\right), se\ n > 2 \\ 7, se\ n = 2 \end{cases}$$

Dessa forma $T(n) = n^{\log_2 7} \approx n^{2,81}$, ou seja, menor que n^3.

Mas CORMEN[25] faz algumas observações necessárias com relação ao uso do Algoritmo de Strassen:

[25] CORMEN, op. cit., p.584 e ss.

— Os efeitos benéficos são sentidos de fato, para valores grandes de n;

— O Algoritmo de Strassen não é tão estável numericamente quanto o método simples, mas está dentro de limites aceitáveis;

— As submatrizes formadas nos níveis de recursão consomem espaço, mas existem técnicas para reduzir os requisitos de memória;

— Para matrizes esparsas métodos específicos são mais rápidos;

— Existe um determinado ‘ponto de passagem’, onde se muda para o método simples;

— Atualmente, o melhor limite superior é aproximadamente $\Theta(n^{2,376})$.

.

CONCLUSÃO

A educação é um elemento primordial para o desenvolvimento de qualquer país ou nação. Mas para melhorar a qualidade da educação no Brasil, sabemos que há muito a se fazer. Sabe-se que a deficiência na formação dos professores e a precariedade dos recursos materiais são questões que se repetem há décadas. As dificuldades são muitas no ensino de uma maneira global, e observamos que as dificuldades acirram quando falamos do ensino da matemática.

Vários são os argumentos para tentar compreender ou justificar este estado de coisas, mas o que nos impulsionou para elaboração deste trabalho não foi exatamente compreender as razões históricas ou filosóficas que sustentam tais argumentos, e sim responder à seguinte questão: dado uma determinada dificuldade no ensino da matemática, o que eu posso fazer para superá-la ou pelo menos amenizá-la? Procuramos responder a tal pergunta, mesmo que de forma humilde, com uma pequena contribuição que de alguma forma auxilie no tratamento matricial, mesmo que especificamente no produto matricial.

Concordamos que algumas definições, notações ou técnicas podem soar desconhecidas para alguns professores, principalmente para aqueles que já se encontram a bastante tempo afastados das atividades acadêmicas. Entretanto, o que temos a dizer é que para fundamentar bem nosso trabalho somos impelidos a tal prática, quanto à aplicação de nossa proposta o almejamos não é a repetição do que produzimos, pois isto contrariaria nossas críticas distribuídas ao longo do texto, mas sim a apreciação de uma alternativa para o produto matricial, cabendo ao professor decidir se a proposta é viável, quando e como apresentá-la aos alunos. Com relação às matrizes-blocos e ao Algoritmo de Strassen, o incentivo aos princípios da divisão de grandes problemas em problemas menores mais acessíveis, é sem dúvida uma atividade norteadora do processo de otimização dos sistemas, algo fundamental na sociedade globalizada que anseia por maior produtividade, eficácia, aproveitamento, velocidade, a sociedade do “tempo é dinheiro”.

Além disso, o que esperamos do professor quando da abordagem com os alunos do ensino médio, o formalismo pode ser dosado na medida em que o professor julgue condizente com o nível da turma, dando ênfase aos princípios que regem os procedimentos. Ainda, consideramos possível apresentação de pelo menos os filtros parcial e total de JPC.

Atividades diferenciadas em sala de aula podem nascer naturalmente, fruto da ideia de compartilhamento/divisão dos processos, impondo sem maiores esforços a proposição de algoritmos de divisão e conquista entre grupos de alunos, devendo isto ser incentivado e aproveitado pelo professor das diversas formas possíveis.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Iniciação à Lógica Matemática**, p. 60. São Paulo: Nobel, 2002.

ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra Linear Contemporânea**. Tradução: Claus Ivo Doering. Porto Alegre — RS: Bookman, 2006.

ANTUNES, Celso. **Como desenvolver competências em sala de aula**. 7. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Informação e documentação**: referências – elaboração: 6023: 2002. Rio de Janeiro, 2002.

______. **Informação e documentação**: Trabalhos acadêmicos - Apresentação: **NBR 14724**. Rio de Janeiro, 2005.

BRASIL. Portaria Normativa Nº17, de 28 de Dezembro de 2009. Dispõe sobre o mestrado profissional no âmbito da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES. Diário oficial da República Federativa do Brasil, Brasília, v.126, n. 248, p.20, 29 de dezembro de 2009abril. Seção 1. Disponível em: < www.in.g o v. b r / a u t e n t i c i d a d e . h t m l ,pelo código 00012009122900020Documento assinado>. Acessado em janeiro de 2013.

BOLDRINI, José Luiz et. al. **Álgebra Linear**, 3ª. ed. São Paulo: Haper & Row do Brasil, 1980.

BOTELHO, Olavo. **Trabalhos Acadêmicos — Apoio na elaboração e revisão de trabalhos acadêmicos, conforme ABNT**. Disponível em: <http://apoioerevisao.blogspot.com.br/2012/09/normas-abnt-para-trabal>. Acessado em Dezembro de 2014.

CONDURÚ, Marise Teles; José Almir Rodrigues. **Elaboração de trabalhos Acadêmicos** — Normas, critérios e procedimentos, 3ª Ed. Belém- PA: GPHS, 2011.

CORMEN, Thomas H.; LEISERSON, Charles E.;RIVEST, Ronald L.; STEIN, Clifford. **Algoritmos — Teoria e Prática** , Tradução da 2ª ed. São Paulo: Elsevier editor Ltda., 2001.

DIAS, Eduardo. **A Característica da Multiplicação de Matrizes — Novos talentos em matemática**.<http://www.math.ist.utl.pt/~ggranja/Talentos/Apresentacoes/06_eduardo_dias.pdf>. Acessado em 15 de Agosto de 2013.

FIGUEREIDO, Jorge. **Análise técnica de algoritmos** . Disponível em: < http://www.dsc.ufcg.edu.br/~abrantes/CursosAnteriores/ATAL051/DivConq.pdf >. Acessado em Agosto 2013.

FONSECA, Guilherme D. da; FIGUEIREDO Celina M. H. de. **Apostila Introdutória de Algorítmos**. Disponível em < http://www.uniriotec.br/~fonseca/aa092/divconq.pdf>. Acessado em 01 de Agosto de 2013.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, vol.4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas**. 7ed., p.77. São Paulo: Atual, 2004.

KRAIESKI, Protasio. **Abordagem de Matrizes no Ensino Médio — Uma avaliação crítica através dos livros didáticos, com sugestões de aplicações**. Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/94914/Protasio_Kraieski.PDF?sequence=1 >. Acessado em Julho de 2013.

LIMA, Elon L.; et all. **A Matemática do Ensino Médio**, vol.3, 6 ed. Coleção Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LÉVY, Pierre. **As Tecnologias da inteligência**. Rio de janeiro: Nova Fronteira, 1994.

LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1971.

MACHADO, Gaspar José Brandão Queiroz Azevedo. **Álgebra Linear B — Sebenta da Unidade Curricular**. Disponível em: < http://pt.scribd.com/doc/1961805/sebenta-algebra >. Acessado em julho de 2013.

POOLE, David. **Álgebra Linear**. Tradutoras: Martha Salermo Monteiro (Coord.), et al. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

PORTAL DO MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais — Ensino Médio**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acessado em julho de 2013.

SOUZA, Pâmella de Alvarenga; ALMEIDA, Arilise Moraes de; AZEVEDO, Lopes Carmem Lúcia Vieira Rodrigues. **O Estudo de Produto de Matrizes por Meio de um Objeto de**

Aprendizagem. Disponível em : < http://sbem.bruc.com.br/XIENEM/pdf/1250_1364_ID.pdf >. Acessado em Julho de 2013.

WIKI ENGENHARIA — Matriz Particionada. Disponível em: < http://wiki.ued.ipleiria.pt/wikiEngenharia/index.php/Matriz_particionada >. Acessado em julho de 2013.

WIKIPÉDIA — Algoritmo de Strassen. Disponível em:< http://pt.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_de_Strassen >. Acessado em Julho de 2013.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2000.