UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ –UNIFAP

MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL – PROFMAT

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

AMBRÓSIO DA SILVA MARQUES

DISPOSIÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS EM ARRANJO PLANO E POLINÔMIOS QUE GERAM NÚMEROS PRIMOS

MACAPÁ-AP

2016

AMBRÓSIO DA SILVA MARQUES

DISPOSIÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS EM ARRANJO PLANO E POLINÔMIOS QUE GERAM NÚMEROS PRIMOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em rede nacional, PROFMAT-UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof.Dr. Erasmo Senger

MACAPÁ-AP

2016

Marques, Ambrósio da Silva

Disposição dos números naturais em arranjo plano e polinômios que geram númerosprimos / Ambrósio da Silva Marques – 2016

1.Números Primos 2.Fórmulas. I. Título.

AMBRÓSIO DA SILVA MARQUES

DISPOSIÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS EM ARRANJO PLANO E POLINÔMIOS QUE GERAM NÚMEROS PRIMOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em rede nacional, PROFMAT-UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Erasmo Senger (UNIFAP)

____

Profª Dra Simone de Almeida Delphim (UNIFAP)

____

Prof. Me Hilton Bruno Pereira Viana (IFAP)

____

Dedico essa dissertação aos meus queridos filhos, aos meus pais, aos meus companheiros de curso e a todo corpo docente que participou dessa etapa da minha formação.

RESUMO

O cerne deste trabalho é apresentação de uma ideia que nos ocorreu a algum tempo, após o término da graduação, e que agora temos a oportunidade de expô-la. Ela é exposta no capítulo 3, e mostra como, a partir da disposição figurativa dos naturais em triângulos e quadrados, chega-se a um polinômio *p(n)* que tem valores primos para n =1,2,3,...,k; para um determinado k. No capítulo 1 é feita uma concisa exposição da história da matemática dos antigos povos egípcios e mesopotâmicos, e dos números primos na Grécia e na Europa; no capítulo 2 são mostrados alguns teoremas de grande relevância no desenvolvimento da teoria dos números e também algumas questões que permanecem em aberto quanto a sua veracidade, e por fim, no capítulo 4 são mostradas duas fórmulas que geram todos os números primos.

Palavras – Chaves:Números Primos, Polinômios, Fórmulas.

ABSTRACT

The core of this work is presenting an idea that occurred to us for some time, after the graduation, and we now have the opportunity to expose it. It is set out in chapter 3, and shows how, from the figurative arrangement of natural triangles and squares, we arrive at a polynomial p (n) is prime values for n = 1,2,3, ..., k; for a given k. Chapter 1 is made a concise exposition of the history of mathematics of the ancient Egyptian and Mesopotamian peoples, and primes in Greece and in Europe; Chapter 2 gives some very important theorems in the development of number theory and also some issues that remain open as to its veracity, and finally, in Chapter 4 are shown two formulas that generate all prime numbers.

Key - Words: Prime Numbers, polynomials, formulas.

Agradecimentos

Ao Deus Criador por ser o autor de toda existência.

Aos meus pais e familiares pelo apoio dado durante toda minha vida.

Ao coordenador e orientador Erasmo Senger pelo espírito solícito.

Aos meus companheiros de curso.

Aos professores do curso.

“Quem se volta para a Matemática descobre que ela contém não somente a verdade mas também a suprema beleza”.

Bertrand Russel

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

Uma das primeiras atividades matemáticas que uma criança começa a aprender por volta dos 3 a 5 anos de idade é a contagem, junto com a comparação, ou relação de ordem, dos números naturais e isso tem uma certa analogia com o que sucedeu ao ser humano nos primórdios da civilização [DOMINGUES, 1991]. O conceito de número primo surge tão logo se começa a lidar com a multiplicação e a divisão, e um primo é definido como todo natural maior que 1 que é divisível somente por 1 e por si mesmo.

Um número não primo é chamado composto e sempre pode ser obtido a partir de alguns destes pela multiplicação (podendo haver repetições), de modo único, o que confere aos primos o caráter de “átomos” na composição dos naturais pela multiplicação.

No 8º ano do Ensino Fundamental é feita uma introdução ao estudo de expressões algébricas e polinômios, e no 1º ano do Ensino Médio se estuda a função polinomial do 2º grau, ou função quadrática, na qual ocorre um polinômio do 2º grau, como os que aparecem no Capítulo 3, obtidos ao final do processo de cada caso de disposição figurativa vistos ali. Neste trabalho foi dispensado um Capítulo inicial a um sucinto relato histórico da matemática Babilônica e Egípcia e a alguns fatos sobre números primos na Grécia e na Europa, um capítulo que mostra alguns teoremas e algumas conjecturas sobre números primos, e um Capítulo final no qual são dadas fórmulas que geram os números primos com algum comentário sobre elas.

CAPÍTULO 1 – UM BREVE RELATO HISTÓRICO

1.1 O Egito e a matemática

Embora hajam registros escritos sobre números de até 4000 a.C, das civilizações que viviam na Mesopotâmia e no Egito, a noção basilar de número surgiu, por um processo longo e gradual, muito antes disso, nos agrupamentos humanos primordiais, como se observa por um osso de lobo, com 55 entalhes dispostos em grupos de 5, encontrado na antiga Tchecoslováquia e datando de cerca de 30000 anos a.C [BOYER, 1996]. O processo mencionado acima dependeu em parte do desenvolvimento da linguagem falada desses povos que antecederam a escrita.

Com o advento da civilização, a expansão do comércio e da agricultura, surgiu a necessidade prática de alguma sistematização e ampliação dos conhecimentos sobre os números e as operações aritméticas. Nas proximidades do Rio Nilo surgiu a civilização Egípcia, devido às condições favoráveis à agricultura oferecidas pelas inundações anuais que fertilizavam suas margens. A grande importância do Faraó e da religião, e a divisão social, faziam que a matemática e outras ciências, como a astronomia e a medicina, fossem restritas aos escribas e sacerdotes, que desenvolveram, com relação a esta última, um eficiente processo de mumificação.

Com seus conhecimentos de astronomia, produziram um calendário com 365 dias e mostraram alto grau de precisão arquitetônica na construção das grandes pirâmides. Seu sistema de numeração, com notação hieroglífica, era essencialmente decimal, porém não posicional, e com ele, para a unidade usavam um traço vertical; um osso de calcanhar invertido indicava 10, um laço indicava 100, uma flor de lótus 1000, um dedo dobrado 10000, um peixe indicava 100000 e uma figura ajoelhada 1000000.

Em 1858 o antiquário escocês *Henry Rhind* comprou, no Egito, um rolo de papiro com 5 metros de comprimento (o *papiro Rhind*), escrito por um escriba chamado *Ahmes* sendo seu conteúdo todo de natureza matemática. Nele são expostas 85 questões com soluções, todas de caráter prático e particular, sem preocupação com a generalização, observada por exemplo, mais adiante nos textos gregos. O *papiro de Moscou* (ou papiro de *Golonishev*) é outro extenso papiro egípcio que sobreviveu aos milênios até chegar à nossa era; foi escrito, aproximadamente, em 1890 a.C, por um escriba desconhecido da décima segunda dinastia e contém 25 questões, similares as questões do papiro Rhind, das quais, a décima quarta impressiona pelo calculo do volume de um tronco de pirâmide, por meio de passos que descrevem exatamente a fórmula usada atualmente.

Outros documentos, como o *papiro Cairo*, de 300 a.C. aproximadamente, contém questões que mostram que já se conhecia, em essência, o teorema de Pitágoras, pois os egípcios sabiam que alguns triângulos, como o de lados 3, 4 e 5, são retângulos.

1.2 A Mesopotâmia e a matemática

A escrita cuneiforme desenvolvida pelos sumérios na mesopotâmia, é considerada, possivelmente, como a mais antiga forma de comunicação escrita, anterior a hieroglífica egípcia [BOYER, 1996]. Com um estilete se faziam marcas, em forma de cunha, em tabletas de barro, que em seguida eram levadas ao forno, com conteúdos diversos tais como leis, registros de impostos, lições de escola, mensagens pessoais, etc.

Como esse material é bem menos perecível que os papiros egípcios, tem-se hoje, em vários lugares, mais documentação sobre a matemática da mesopotâmia que sobre a do Egito.

O sistema de numeração era de base sessenta (sistema sexagesimal), o que permitia prontamente a subdivisão em frações como metade, terça parte, quarta parte, quinta parte, sexta parte, décimo, doze avos, quinze avos, vigésimos e trigésimos; e acrescentado a essas vantagens havia o fato de ser posicional, o que dá ao sistema uma grande facilidade operacional.

Os escribas babilônicos, em uma tableta da biblioteca da Universidade de Yale,registraram o valor de$\sqrt{2}$ com três casas sexagesimais, que em notação decimal dá 1,414222; uma aproximação do valor exato com erro inferior a 0,000008.

O sistema sexagesimal de numeração, apesar da sua versatilidade, tinha o inconveniente de não ter uma denotação para uma “posição vazia”, ou seja, não tinha um símbolo para o zero, e por isso foi suplantado, como o sistema romano, pelo sistema decimal indo-árabe, restando dele, ainda hoje, vestígios nas unidades de medida de tempo e de ângulo. Na matemática babilônica, também já se fazia uso do teorema de Pitágoras, como se vê em um texto antigo no qual uma escada está apoiada em uma parede, e a questão é: se o topo escorrega 3 unidades, quando a extremidade inferior se afasta da parede 9 unidades, qual o comprimento da escada? A resposta é dada corretamente como sendo 15 unidades.

A equação quadrática derivada do problema de achar dois números, conhecendo-se sua soma *S* e seu produto *P*, era resolvida seguindo-se os seguintes passos receitados pelo escriba.

1º passo: eleve ao quadrado a metade da soma: $\left(\frac{S}{2}\right)^2$

2º passo: subtraia o produto do 1º passo: $\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P$

3º passo: extraia a raiz quadrada do 2º passo: $\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$

4º passo: some ao 3º passo a metade da soma, obtendo um dos números:

$$x = \frac{S}{2} + \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$$

5º passo: o outro número é $S-x$

1.3 A Grécia e os números primos

A matemática na Mesopotâmia e no Egito, acredita-se, tratava sempre de casos específicos, sem formulação geral e de caráter utilitário, embora com alguma profundidade; sendo atribuído aos gregos, pelo menos no mundo ocidental, as origens do interesse na matemática por si mesma, ou seja, o surgimento do "ideal cientifico".

Como *Pitágoras de Samos* (aprox. 580-500 a.C.) e sua escola, os números receberam várias classificações como triangulares, quadrados, pentagonais, perfeitos, amigáveis, etc, e na época do pitagórico *Filolau* se estabeleceu a distinção entre números primos e compostos [BOYER, 1996] sendo os números primos chamados de *lineares*, pelo motivo de que os números não primos podiam ser representados por pontos formando um retângulo, e os primos por pontos em uma única linha.

Na cidade de Alexandria viveu o matemático grego *Euclides,* no século III a.C., que escreveu uma das mais famosas obras sobre matemática de todos os tempos, *Os elementos*, composta por treze livros, na qual Euclides faz a conhecida demonstração da infinitude dos números primos, além de estabelecer definições precisas de divisibilidade, mmc, mdc (com algoritmo para obtê-lo), número primo (*protós arithmós*) e demonstrar o teorema fundamental da aritmética [HEFEZ, 2011].

Também em Alexandria viveu *Eratóstenes* (aprox. 284-192 a.C.) que desenvolveu um método para elaborar tabelas com todos os números primos até um valor *n* dado, chamado *Crivo de Eratóstenes*. Como a maioria dos matemáticos antigos, Eratóstenes era também astrônomo e calculou com boa precisão o tamanho da circunferência da terra [ÁVILA, 2010]. Por exemplo, para construir uma tabela com todos os primos até n=120, escrevemos os naturais de 2 até 120 e em seguida riscamos, ordenadamente, todos os múltiplos dos primos p, tais que $p^2 <120$, ou seja, todos os múltiplos de 2, 3, 5 e 7 (com exceção destes); os números não riscados são os números primos. Estudos aritméticos também foram feitos por *Diofanto* (200 d.C.-298 d.C.) ao tratar de certas equações com coeficientes inteiros, atualmente chamadas *equações diofantinas.*

1.4 A Europa e os números primos

Por volta do século VI d.C. o romano *Boécio* escreveu um dos primeiros livros em latim sobre aritmética, que era mais propriamente um resumo elementar de clássicos mais antigos, e neste livro aparece pela primeira vez a expressão "numerus primus" como tradução da denominação grega "protós arithmós". Depois de um longo período de estagnação, o estudo da aritmética na Europa ganhou um novo impulso com o francês *Pierre de Fermat* (1601-1665), que não era matemático por profissão, porém muito contribuiu para ampliar a base teórica dessa ciência (que agora se chama teoria dos números). Fermat provou alguns de seus teoremas, porém o que mais marcou seu nome foi uma afirmação não provada, deixada por ele na margem de uma cópia de um livro de Diofanto, que ficou conhecida como *Ultimo Teorema de Fermat*, sendo sua prova um enorme e duradouro desafio aos mais brilhantes matemáticos, só alcançada após 350 anos, pelo inglês *Andrew Willes* em 1995.

Leonard Euler (1707-1783) deu continuidade a alguns trabalhos de Fermat sobre os números primos, como o chamado "Pequeno Teorema de Fermat", que afirma: "para todo natural a, se p é primo e mdc(a,p)=1 então a^{p-1} -1 é divisível por p". Euler demonstrou esse teorema e descobriu outro mais geral, que diz: "se m>1 e mdc(a,m)=1 então $a^{\varphi(m)}$-1 é divisível por m", (onde φ(m) é a quantidade de naturais entre 0 e m-1 que são primos com m).

Fermat acreditava que os números dados pela fórmula

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

fossem primos, para todo natural n, com base na observação de que F_0=3, F_1=5, F_2=17, F_3=257, F_4=65537, mas um século mais tarde Euler mostrou que F_5=4294967297 pode ser fatorado em 641.6700417 e, portanto não é primo. Fórmulas geradoras de números primos foram objeto de pesquisa de muitos matemáticos e no capitulo 4 apresentamos duas; uma devida ao matemático *Willans* e outra que utiliza o *teorema de Wilson*, que caracteriza os números primos.

CAPÍTULO 2 - NÚMEROS PRIMOS: TEOREMAS E CONJECTURAS

Como resultado do trabalho de investigação de muitos matemáticos ao longo dos séculos sobre os números primos, existem vários teoremas a esse respeito, que tiveram, e ainda têm, fundamental importância no desenvolvimento da teoria dos números. Neste capítulo mostraremos alguns desses resultados, acompanhados, em poucos casos, de um esboço da demonstração. Nos outros casos, a demonstração foge totalmente ao escopo deste trabalho e por isso será omitida, uma vez que a finalidade deste capítulo é somente mostrar ao leitor a existência desses resultados.

2.1 Teoremas sobre os números primos

Um dos primeiros desses teoremas, provado por Euclides, é sobre a decomposição prima de um número natural.

TEOREMA 1:(Teorema Fundamental da aritmética). *Todo número natural maior que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.*

Esse é um teorema de existência e unicidade. Para provar a existência usa-se o Princípio de Indução Transfinita.

O teorema é obviamente válido para n=2. Agora, dado n, suponhamos o resultado válido para todo natural menor que n; e então vamos provar que vale para n. Se o natural n é primo nada temos a demonstrar. Suponhamos então que n é composto; logo existem *a* e *b*tais que n=*a.b* com 1<a<n e 1<b<n. Pela hipótese indutiva, ou *a* é primo ou é um produto de primos, e o mesmo vale para *b.* Em qualquer dos casos, n é um produto de números primos.

Para provar a unicidade, suponhamos $n=p_1....p_r=q_1....q_s$, onde os p_i e os q_j são todos primos. Como p_1 divide $q_1....q_s$ então $p_1=q_j$ para algum j, que após reordenamento de $q_1....q_s$ podemos supor que seja q_1. Portanto

$$p_2....p_r=q_2....q_s$$

como $p_2....p_r<n$, então pela hipótese indutiva r=s e os p_i e os q_j são iguais dois a dois.

O próximo teorema, sobre a infinitude dos números primos, também foi provado por Euclides.

TEOREMA 2: *Existem infinitos números primos*

Para a prova, suponhamos que existe apenas uma quantidade finita de primos $p_1,....,p_r$. Consideremos o natural

$$n = p_1p_2....p_r+1$$

Pelo teorema anterior, o número n possui um fator primo p, que deve ser, necessariamente, um dos primos $p_1,....,p_r$; e assim, p divide o produto $p_1....p_r$ e p divide n, o que implica que p divide 1, o que é absurdo.

Há um teorema, devido a Euler, sobre a soma dos inversos dos números primos, que prova indiretamente a infinitude dos números primos. É o teorema seguinte, e será dado sem demonstração.

TEOREMA 3: (Euler). *Se p_n denota o n-ésimo número primo, então a série*

$$\sum_n \frac{1}{p_n}$$

é divergente.

O teorema 2 nos diz que existem infinitos primos na sequência dos números naturais, que pode ser vista como uma PA na qual $mdc(a_1,r)=1$ visto que $a_1=1$ e $r=1$.

O teorema seguinte generaliza esse resultado, e é de autoria de Peter G. Lejeune Dirichlet, e será apresentado sem demonstração.

TEOREMA 4: (Dirichlet) *Em toda PA, com primeiro termo e razão primos entre si, existem infinitos números primos*

Outra prova da infinitude dos números primos foi dada por Christian Goldbach (1690-1764) em uma carta escrita a Euler. Sendo

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

o n-ésimo número de Fermat, e p_n o menor divisor primo de F_n, têm-se o seguinte teorema

TEOREMA 5: (Goldbach) *A sequência $p_0,p_1,....,p_n,....$ é uma sequência infinita de primos distintos.*

Para a prova usa-se o fato de que

$$F_m - 2 = F_0F_1....F_{m-1}$$

para mostrar que os números de Fermat são dois a dois primos entre si.

Outra questão importante é sobre a distribuição dos números primos entre os números naturais e um dos primeiros resultados a esse respeito foi a conjectura conhecida como Postulado de Bertrand formulada por Joseph Bertrand (1822-1900) e provada por Pafnut Chebychev (1821-1894). Também será omitida essa prova.

TEOREMA 6: (Chebychev) *Para todo natural n>1 existe pelo menos um primo entre n e 2n*

O próximo e último teorema é considerado um resultado importante e profundo da teoria dos números. Denotemos por $\pi(x)$ a quantidade dos primos p, tais que p≤x. Portanto a probabilidade de que um elemento do conjunto {1,2,....,n} seja primo é

$$\frac{\pi(n)}{n}$$

Por meio da análise de tabelas, Carl F. Gauss (1777-1855) percebeu que esse quociente têm valor próximo de $\frac{1}{\ln(n)}$, mas não chegou a algo conclusivo. Em 1996 dois matemáticos, J. Hadamard (1865-1963) e C.J de La Vallée-Poussi (1866-1962), em trabalhos independentes, provaram esse fato.

TEOREMA 7: (Teorema do número primo)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi(x)}{x}}{\frac{1}{\ln(x)}}. = 1$$

Vale mencionar que Chebychev já havia provado que se

$$\frac{\frac{\pi(x)}{x}}{\frac{1}{\ln(x)}}$$

tem um limite quando$x \to \infty$, então esse limite tem que ser 1, mas não conseguiu provar a existência desse limite.

2.2 Conjecturas sobre os números primos

Uma conjectura matemática é uma proposição que muitos matemáticos acreditam ser verdadeira, porém ainda não conseguiram prová-la. As conjecturas são muito importantes para o desenvolvimento da matemática, pois estimulam a pesquisa e proporcionam o surgimento de novas técnicas para lidar com as questões a elas relacionadas.

Conjectura de Goldbach: *Todo natural par maior que 2 é a soma de dois números primos.*

Verificações por computador já confirmaram a validade da conjectura de Goldbach até $n = 4.10^{17}$, mas a prova formal ainda não foi obtida. O melhor resultado nesse sentido foi dado pelo matemático francês Olivier Ramaré em 1995: *todo natural par é a soma de no máximo 6 primos.* Outra contribuição importante foi dada em 1966 pelo matemático chinês Chen Jingrum: *todo número par suficientemente grande é a soma de um primo com um produto de dois primos*.

Conjectura de Legendre: *Para todo natural $n>0$, existe pelo menos um primo entre n^2 e $(n+1)^2$.*

Na busca da prova dessa conjectura, o matemático chinês Chen Jingrum demonstrou em 1965 que: *para todo $n>0$, sempre existe entre n^2 e $(n+1)^2$ um natural que é primo ou é o produto de dois primos*.

Conjectura dos primos gêmeos: *Existem infinitos números primos p tais que p+2 também é primo.*

Recentemente o matemático Yitang Zhang, da universidade de New Hampshire, publicou um trabalho no qual prova que: *existem infinitos números primos p tais que p+k também é primo, para algum natural k menor que 70 milhões.*

O francês Alphonse de Polignac (1826-1863) generalizou a conjectura dos primos gêmeos.

Cojectura de Polignac: *Para cada natural $k\geq 1$ existem infinitos números primos p tais que p+2k também é primo.*

O caso k=1 é a conjectura dos primos gêmeos.

A matemática francesa Marie-Sophie Germain (1776-1831) também tem seu nome ligado a uma conjectura.

Conjectura dos primos de Sophie Germain: *Existem infinitos primos p tais que 2p+1 também é primo.*

Os números primos p mencionados acima são chamados primos de Sophie Germain e se tornaram notórios porque Sophie Germain provou que o Último Teorema de Fermat é válido para estes números.

CAPÍTULO 3 –DISPOSIÇÃO FIGURATIVA E POLINÔMIOS QUE GERAM NÚMEROS PRIMOS

A idéia deste trabalho surgiu da observação de que se dispusermos os números naturais, de 1 até um determinado natural n, como pontos em uma reta, com espaçamento uniforme entre eles e destacarmos os pontos que representam os números primos, não se percebe nenhuma regularidade na posição desses pontos, mas apenas que eles vão ficando mais "rarefeitos" à medida que se avança na reta. Mas, e se dispusermos os números naturais em um arranjo plano, que pode ser triangular, retangular, ou de outra forma qualquer, seguindo um roteiro repetitivo, talvez se veja alguma regularidade para os números primos, mesmo que por um período não longo.

Veremos adiante que em alguns casos isso realmente acontece, e que essa regularidade é um alinhamento da posição de alguns números primos, que estão em uma seqüência na qual a diferença entre dois termos consecutivos aumenta sempre de um valor constante, e com isso em mãos, chegamos a um polinômio *p(n)* que gera números primos para *n* igual a 1,2,3,...,k; tendo k um valor determinado em cada caso. O roteiro mencionado acima é prontamente entendido, pois é definido por um padrão repetitivo.

3.1 Um polinômio que gera 11 primos

Como primeiro caso, vamos dispor os naturais em um arranjo triangular, que é obtido seguindo-se as setas mostradas adiante, que avançam em ziguezague (fig. 1).

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & \rightarrow & 2 & & 6 & \rightarrow & 7 \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
3 & & 5 & & 8 & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
4 & & 9 & & & &
\end{array}
$$

↙
10

Figura 1. Arranjo triangular

Prosseguindo um pouco mais e destacando os números primos, percebemos que os primos

29,43,61,83,109,139,173 e 211

ficaram alinhados (fig. 2).

1	2	6	7	15	16	28	29	45	46	66	67	91	92	120	121	153	154	190	191	231
3	5	8	14	17	27	30	44	47	65	68	90	93	119	122	152	155	189	192	230	
4	9	13	18	26	31	43	48	64	69	89	94	118	123	151	156	188	193	229		
10	12	19	25	32	42	49	63	70	88	95	117	124	150	157	187	194	228			
11	20	24	33	41	50	62	71	87	96	116	125	149	158	186	195	227				
21	23	34	40	51	61	72	86	97	115	126	148	159	185	196	226					
22	35	39	52	60	73	85	98	114	127	147	160	184	197	225						
36	38	53	59	74	84	99	113	128	146	161	183	198	224							
37	54	58	75	83	100	112	129	145	162	182	199	223								
55	57	76	82	101	111	130	144	163	181	200	222									
56	77	81	102	110	131	143	164	180	201	221										
78	80	103	109	132	142	165	179	202	220											
79	104	108	133	141	166	178	203	219												
105	107	134	140	167	177	204	218													
106	135	139	168	176	205	217														
136	138	169	175	206	216															
137	170	174	207	215																
171	173	208	214																	
172	209	213																		
210	212																			
211																				

Figura 2. Alinhamento de 8 primos

Percebe-se também que a diferença entre dois números consecutivos, de 211 até 29, diminui de 4, como é visto adiante

211-173=38

173-139=34

139-109=30

109 - 83=26

83 - 61=22

$$61-43=18$$
$$43-29=14.$$

Como a última diferença ainda pode ser diminuída de 4, é natural que prossigamos com as subtrações, a partir do número 29, mantendo a seqüência das diferenças, que nos leva a

$$29-19=10$$
$$19-13=6$$
$$13-11=2$$

e com isso obtemos mais 3 números primos,

$$11,13 \text{ e } 19$$

que também estão destacados na figura 2, perfazendo o total de onze primos. Também é natural que pensemos em aumentar de 4 a primeira diferença, que ficaria 42, e prosseguir com as subtrações, a partir do número 211 como subtraendo , o que nos daria

$$253-211=42$$

mas, nesse caso, não obteríamos um novo número primo, visto que 253=11.23 não é primo.

Portanto, temos uma seqüência de números naturais

$$x_1=11,\ x_2=13,\ x_3=19,...,x_{11}=211,...,x_n,...$$

na qual a diferença entre dois termos consecutivos aumenta de 4 em 4, à medida que se avança na seqüência, ou seja

$$x_2-x_1=2 \quad \Rightarrow \quad x_2=x_1+2$$
$$x_3-x_2=6 \quad \Rightarrow \quad x_3=x_2+6$$
$$x_4-x_3= 10 \ \Rightarrow x_4=x_3+10$$

$$\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad \cdot^{\cdot} \qquad \vdots$$

e como na PA (2,6,10,...) tem-se

$$a_{n-1}=2+(n-2)4$$

segue as igualdades

$$\begin{aligned} x_1&=11 \\ x_2&=x_1+2 \\ x_3&=x_2+6 \\ x_4&=x_3+10 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n&=x_{n-1}+2+(n-2)4 \end{aligned}$$

e então, somando membro a membro e aplicando a lei do cancelamento, resulta que

$$x_n=11+2+4+6+...+[2+4(n-2)]$$

o que equivale, pela fórmula da soma dos termos de uma PA, a

$$\begin{aligned} x_n&=11+\frac{(n-1)[2+2+4(n-2)]}{2} \\ &=11+2(n-1)^2 \end{aligned}$$

e isso implica que

$$x_n=2n^2-4n+13.$$

Assim, a lei de formação que obtivemos para o termo geral da sequência nos exibe o polinômio

$$2n^2-4n+13$$

que gera números primos distintos para n=1,2,3,...,11.

3.2 Um polinômio que gera 16 primos

O segundo arranjo será montado dispondo o número 1 e abaixo deste, os números 2, 3 e 4, e abaixo destes, os números 5, 6, 7, 8 e 9 e continuando assim, sempre com uma quantidade impar de números a cada vez (Fig. 3)

1
2 3 4
5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15 16
...

Figura 3. Disposição por linhas

Prosseguindo mais algumas etapas e destacando os números primos, percebemos que os primos

47,59,73,89,107,127,149,173,199,227 e 257

ficaram alinhados (fig. 4)

e olhando para esses números, vemos que a diferença entre dois números consecutivos, do maior para o menor, vai diminuindo de 2 em 2 como se vê a seguir

257-227=30
227-199=28
199-173=26
173-149=24
149-127=22
127-107=20
107-89=18
89-73=16
73-59=14

59-47=12

1																																
2	3	4																														
5	6	7	8	9																												
10	11	12	13	14	15	16																										
17	18	**19**	20	21	22	**23**	24	25																								
26	27	28	**29**	30	31	32	33	34	35	36																						
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	**47**	48	49																				
50	51	52	53	54	55	56	57	58	**59**	60	61	62	63	64																		
65	66	67	68	69	70	71	72	**73**	74	75	76	77	78	79	80	81																
82	83	84	85	86	87	88	**89**	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100														
101	102	103	104	105	106	**107**	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121												
122	123	124	125	126	**127**	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144										
145	146	147	148	**149**	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169								
170	171	172	**173**	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196						
197	198	**199**	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225				
226	**227**	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256		
257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289

Figura 4. Alinhamento de 11 primos

Como no caso anterior, podemos continuar com as subtrações, mantendo a sequência das diferenças e, observar os novos termos que vão surgir:

47-37=10

37-29=8

29-23=6

23-19=4

19-17=2

e os novos termos são

37,29,23,19 e 17

e são todos primos, formando assim, com os outros, uma seqüência de dezesseis números primos.

Também, como antes podemos pensar em aumentar de 2 a primeira diferença, que ficaria 32, e a subtração nesse caso, seria

$$289-257=32$$

porém, não chegaríamos a um outro numero primo, visto que 289=17.17 não é primo.

Considerando que, na seqüência

$$x_1=17, x_2=19, x_3=23, \ldots, x_{16}=257, \ldots, x_n, \ldots$$

a diferença entre dois termos consecutivos aumenta de 2 em 2, à medida que se avança na seqüência, então podemos obter a lei deformação para o termo geral x_n em função de n, como segue:

sendo $x_1=17$

$$x_2=x_1+2$$
$$x_3=x_2+4$$
$$x_4=x_3+6$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n=x_{n-1}+2(n-1)$$

então, somando membro a membro e aplicando a lei do cancelamento, tem-se

$$x_n=17+2+4+6+\ldots+2(n-1)$$

e pela fórmula da soma dos termos de uma PA

$$x_n=17+n(n-1)$$

ou seja

$$x_n=n^2-n+17$$

Dessa forma, chegamos a um polinômio do 2º grau, n^2-n+17 que gera números primos distintos para n=1,2,3,...,16.

3.3 Um polinômio que gera 18 números primos

O arranjo seguinte será uma variante do anterior, dispondo-se os números por colunas, sendo que na primeira coluna colocamos o numero 1, na segunda os números 2, 3, 4, 5 e 6, na terceira os números 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15, e continuamos assim, tendo cada coluna quatro números a mais que a anterior. Quando a disposição alcança o valor 631, nota-se que os números primos

43,59,79,103,131,163,199,239,283,331,383,439,499,563 e 631

ficaram alinhados (fig. 5)
e que a diferença entre dois números consecutivos, do maior até o menor, diminui de 4 em 4, como se vê a seguir

631-563=68
563-499=64
499-439=60
439-383=56
383-331=52
331-283=48
283-239=44
239-199=40
199-163=36
163-131=32
131-103=28
103-79=24
79-59=20
59-43=16

Vamos prosseguir com as subtrações, a partir do numero 43, mantendo a seqüência das diferenças e observar os novos termos que vão surgir:

43-31=12

31-23=8

23-19=4

1	2	7	16	29	46	67	92	121	154	191	232	277	326	379	436	497	562	631
	3	8	17	30	47	68	93	122	155	192	233	278	327	380	437	498	563	
	4	9	18	31	48	69	94	123	156	193	234	279	328	381	438	499	564	
	5	10	19	32	49	70	95	124	157	194	235	280	329	382	439	500	565	
	6	11	20	33	50	71	96	125	158	195	236	281	330	383	440	501	566	
		12	21	34	51	72	97	126	159	196	237	282	331	384	441	502	567	
		13	22	35	52	73	98	127	160	197	238	283	332	385	442	503	568	
		14	23	36	53	74	99	128	161	198	239	284	333	386	443	504	569	
		15	24	37	54	75	100	129	162	199	240	285	334	387	444	505	570	
			25	38	55	76	101	130	163	200	241	286	335	388	445	506	571	
			26	39	56	77	102	131	164	201	242	287	336	389	446	507	572	
			27	40	57	78	103	132	165	202	243	288	337	390	447	508	573	
			28	41	58	79	104	133	166	203	244	289	338	391	448	509	574	
				42	59	80	105	134	167	204	245	290	339	392	449	510	575	
				43	60	81	106	135	168	205	246	291	340	393	450	511	576	
				44	61	82	107	136	169	206	247	292	341	394	451	512	577	
				45	62	83	108	137	170	207	248	293	342	395	452	513	578	
					63	84	109	138	171	208	249	294	343	396	453	514	579	
					64	85	110	139	172	209	250	295	344	397	454	515	580	
					65	86	111	140	173	210	251	296	345	398	455	516	581	
					66	87	112	141	174	211	252	297	346	399	456	517	582	
						88	113	142	175	212	253	298	347	400	457	518	583	
						89	114	143	176	213	254	299	348	401	458	519	584	
						90	115	144	177	214	255	300	349	402	459	520	585	
						91	116	145	178	215	256	301	350	403	460	521	586	
							117	146	179	216	257	302	351	404	461	522	587	
							118	147	180	217	258	303	352	405	462	523	588	
							119	148	181	218	259	304	353	406	463	524	589	
							120	149	182	219	260	305	354	407	464	525	590	
								150	183	220	261	306	355	408	465	526	591	
								151	184	221	262	307	356	409	466	527	592	
								152	185	222	263	308	357	410	467	528	593	
								153	186	223	264	309	358	411	468	529	594	
									187	224	265	310	359	412	469	530	595	
									188	225	266	311	360	413	470	531	596	
									189	226	267	312	361	414	471	532	597	
									190	227	268	313	362	415	472	533	598	
										228	269	314	363	416	473	534	599	
										229	270	315	364	417	474	535	600	
										230	271	316	365	418	475	536	601	
										231	272	317	366	419	476	537	602	
											273	318	367	420	477	538	603	
											274	319	368	421	478	539	604	
											275	320	369	422	479	540	605	
											276	321	370	423	480	541	606	
												322	371	424	481	542	607	
												323	372	425	482	543	608	
												324	373	426	483	544	609	
												325	374	427	484	545	610	
													375	428	485	546	611	
													376	429	486	547	612	
													377	430	487	548	613	
													378	431	488	549	614	
														432	489	550	615	
														433	490	551	616	
														434	491	552	617	
														435	492	553	618	
															493	554	619	
															494	555	620	
															495	556	621	
															496	557	622	
																558	623	
																559	624	
																560	625	
																561	626	
																	627	
																	628	
																	629	
																	630	

Figura 5. Alinhamento de 15 primos

e esses termos, todos primos, são19, 23 e 31.

Por outro lado, acrescentando 4 à maior das diferenças, o que dá 72, temos a seguinte subtração

$$703-631=72$$

que nos dá o novo termo 703=19.37, que não é primo.

Temos assim a seqüência

$$x_1=19, x_2=23, x_3=31, ..., x_{18}=631, ..., x_n, ...$$

na qual a diferença, entre dois termos consecutivos aumenta de 4 em 4 à medida que se avança na seqüência, e por isso temos

$$\begin{aligned} x_1&=19 \\ x_2&=x_1+4 \\ x_3&=x_2+8 \\ x_4&=x_3+12 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n&=x_{n-1}+4(n-1) \end{aligned}$$

assim, somando membro a membro, e depois aplicando a lei do cancelamento, conclui-se que

$$x_n=19+4+8+12+...+4(n-1)$$

o que, pela fórmula da soma dos termos de uma PA, nos dá

$$x_n=19+\frac{(n-1)[4+4(n-1)]}{2}$$

e isso equivale a

$$x_n=2n^2-2n+19.$$

Assim, chegamos ao polinômio $2n^2-2n+19$, que gera números primos distintos para n=1,2,3,...,18.

3.4 Um polinômio que gera 22 primos

Vamos agora a mais uma disposição por colunas, com número 1 na primeira coluna, os números 2,3,4,5,6,7 e 8, na segunda, os números 9, 10, 11,12,13,14,15,16,17,18,19,20 e 21 na terceira, e assim sucessivamente, tendo cada coluna seis números a mais que a coluna anterior. Prosseguindo a disposição até um pouco mais de 1400, notamos que os primos

59,83,113,149,191,239,293,353,419,491,569, 653, 743, 839, 941, 1049, 1163, 1283 e 1409

ficaram alinhados (fig. 6).(a figura 6 foi truncada para que se pudesse coloca-la em uma única página).
e que a diferença entre dois números consecutivos, em ordem decrescente, diminui de 6 em 6, como se pode vê adiante

1409-1283=126 491-419=72
1283-1163=120 419-353=66
1163-1049=114 353-293=60
1049-941=108 293-239=54
941-839=102 239-191=48
839-743=96 191-149=42
743-653=90 149-113=36
653-569=84 113-83=30
569-491=78 83-59=24

Prosseguindo com as subtrações a partir do número 59, mantendo a seqüência das diferenças, temos

59-41=18

41-29=12

29-23=6

1	2	9	22	41	66	97	134	177	226	281	342	409	482	561	646	737	834	937	1046	1161	1282	1409
	3	10	23	42	67	98	135	178	227	282	343	410	483	562	647	738	835	938	1047	1162	1283	1410
	4	11	24	43	68	99	136	179	228	283	344	411	484	563	648	739	836	939	1048	1163	1284	1411
	5	12	25	44	69	100	137	180	229	284	345	412	485	564	649	740	837	940	1049	1164	1285	1412
	6	13	26	45	70	101	138	181	230	285	346	413	486	565	650	741	838	941	1050	1165	1286	1413
	7	14	27	46	71	102	139	182	231	286	347	414	487	566	651	742	839	942	1051	1166	1287	1414
	8	15	28	47	72	103	140	183	232	287	348	415	488	567	652	743	840	943	1052	1167	1288	1415
		16	29	48	73	104	141	184	233	288	349	416	489	568	653	744	841	944	1053	1168	1289	1416
		17	30	49	74	105	142	185	234	289	350	417	490	569	654	745	842	945	1054	1169	1290	1417
		18	31	50	75	106	143	186	235	290	351	418	491	570	655	746	843	946	1055	1170	1291	1418
		19	32	51	76	107	144	187	236	291	352	419	492	571	656	747	844	947	1056	1171	1292	1419
		20	33	52	77	108	145	188	237	292	353	420	493	572	657	748	845	948	1057	1172	1293	1420
		21	34	53	78	109	146	189	238	293	354	421	494	573	658	749	846	949	1058	1173	1294	1421
			35	54	79	110	147	190	239	294	355	422	495	574	659	750	847	950	1059	1174	1295	1422
			36	55	80	111	148	191	240	295	356	423	496	575	660	751	848	951	1060	1175	1296	1423
			37	56	81	112	149	192	241	296	357	424	497	576	661	752	849	952	1061	1176	1297	1424
			38	57	82	113	150	193	242	297	358	425	498	577	662	753	850	953	1062	1177	1298	1425
			39	58	83	114	151	194	243	298	359	426	499	578	663	754	851	954	1063	1178	1299	1426
			40	59	84	115	152	195	244	299	360	427	500	579	664	755	852	955	1064	1179	1300	1427
				60	85	116	153	196	245	300	361	428	501	580	665	756	853	956	1065	1180	1301	1428
				61	86	117	154	197	246	301	362	429	502	581	666	757	854	957	1066	1181	1302	1429
				62	87	118	155	198	247	302	363	430	503	582	667	758	855	958	1067	1182	1303	1430
				63	88	119	156	199	248	303	364	431	504	583	668	759	856	959	1068	1183	1304	1431
				64	89	120	157	200	249	304	365	432	505	584	669	760	857	960	1069	1184	1305	1432
				65	90	121	158	201	250	305	366	433	506	585	670	761	858	961	1070	1185	1306	1433
					91	122	159	202	251	306	367	434	507	586	671	762	859	962	1071	1186	1307	1434
					92	123	160	203	252	307	368	435	508	587	672	763	860	963	1072	1187	1308	1435
					93	124	161	204	253	308	369	436	509	588	673	764	861	964	1073	1188	1309	1436
					94	125	162	205	254	309	370	437	510	589	674	765	862	965	1074	1189	1310	1437
					95	126	163	206	255	310	371	438	511	590	675	766	863	966	1075	1190	1311	1438
					96	127	164	207	256	311	372	439	512	591	676	767	864	967	1076	1191	1312	1439
						128	165	208	257	312	373	440	513	592	677	768	865	968	1077	1192	1313	1440
						129	166	209	258	313	374	441	514	593	678	769	866	969	1078	1193	1314	1441
						130	167	210	259	314	375	442	515	594	679	770	867	970	1079	1194	1315	1442
						131	168	211	260	315	376	443	516	595	680	771	868	971	1080	1195	1316	1443
						132	169	212	261	316	377	444	517	596	681	772	869	972	1081	1196	1317	1444
						133	170	213	262	317	378	445	518	597	682	773	870	973	1082	1197	1318	1445
							171	214	263	318	379	446	519	598	683	774	871	974	1083	1198	1319	1446
							172	215	264	319	380	447	520	599	684	775	872	975	1084	1199	1320	1447
							173	216	265	320	381	448	521	600	685	776	873	976	1085	1200	1321	1448
							174	217	266	321	382	449	522	601	686	777	874	977	1086	1201	1322	1449
							175	218	267	322	383	450	523	602	687	778	875	978	1087	1202	1323	1450
							176	219	268	323	384	451	524	603	688	779	876	979	1088	1203	1324	1451
								220	269	324	385	452	525	604	689	780	877	980	1089	1204	1325	1452
								221	270	325	386	453	526	605	690	781	878	981	1090	1205	1326	1453
								222	271	326	387	454	527	606	691	782	879	982	1091	1206	1327	1454
								223	272	327	388	455	528	607	692	783	880	983	1092	1207	1328	1455
								224	273	328	389	456	529	608	693	784	881	984	1093	1208	1329	1456
								225	274	329	390	457	530	609	694	785	882	985	1094	1209	1330	1457
									275	330	391	458	531	610	695	786	883	986	1095	1210	1331	1458
									276	331	392	459	532	611	696	787	884	987	1096	1211	1332	1459
									277	332	393	460	533	612	697	788	885	988	1097	1212	1333	1460
									278	333	394	461	534	613	698	789	886	989	1098	1213	1334	1461
									279	334	395	462	535	614	699	790	887	990	1099	1214	1335	1462
									280	335	396	463	536	615	700	791	888	991	1100	1215	1336	1463

Figura 6. Alinhamento de 19 primos

e observamos que os novos termos que surgiram

$$23, 29 \text{ e } 41$$

são todos primos, e também estão destacados na figura 6.

Por outro lado, se continuarmos as subtrações a partir do número 1409, acrescentando 6 a primeira diferença, que assim fica sendo 132, obtemos

$$1541-1409=132$$

mas o termo que surge nesse caso não é primo, visto que 1541=23.67 não é primo.

Portanto temos uma seqüência

$$x_1=23, x_2=29, x_3=41, ..., x_{22}=1409, ..., x_n, ...$$

na qual, a diferença entre dois termos consecutivos aumenta de 6 em 6 à medida que se avança na seqüência, ou seja

$$\begin{aligned} x_1&=23 \\ x_2&=x_1+6 \\ x_3&=x_2+12 \\ x_4&=x_3+18 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n&=x_{n-1}+6(n-1) \end{aligned}$$

então, somando membro a membro e aplicando a lei do cancelamento, se obtém

$$x_n=23+6+12+18+...+6(n-1)$$

e pela fórmula da soma dos termos de uma PA, segue que

$$x_n=23+3n(n-1)$$

e daí se conclui que

$$x_n=3n^2-3n+23$$

Portanto, no final chegamos ao polinômio $3n^2-3n+23$ que gera números primos distintos para n=1,2,3,...,22.

3.5 Um polinômio que gera 29 números primos

Novamente vamos considerar a disposição em ziguezague do primeiro exemplo, porém com maior quantidade de números dispostos, aproximadamente mil e seiscentos. Vemos que ficaram alinhados os primos

229,271,317,367,421,479,541,607,677,751,829,911,997,1087,1181,1279,1381,1487 e 1597 (fig. 7) (a figura 7 também foi truncada)

e que a diferença entre dois números consecutivos, do maior até o menor, diminui de 4 em 4 como se vê a seguir

1597-1487=110	751-677=74
1487-1381=106	677-607=70
1381-1279=102	607-541=66
1279-1181=98	541-479=62
1181-1087=94	479-421=58
1087-997=90	421-367=54
997-911=86	367-317=50
911-829=82	317-271=46
829-751=78	271-229=42

Vamos prosseguir com as subtrações, a partir do número 299, mantendo a sequência das diferenças e observando os novos termos que vão surgir:

1	2	6	7	15	16	28	29	45	46	66	67	91	92	120	121	153	154	190	191	231	232	276	277	325	326	378	379	435	436	496	497	561	562	630	631
3	5	8	14	17	27	30	44	47	65	68	90	93	119	122	152	155	189	192	230	233	275	278	324	327	377	380	434	437	495	498	560	563	629	632	702
4	9	13	18	26	31	43	48	64	69	89	94	118	123	151	156	188	193	229	234	274	279	323	328	376	381	433	438	494	499	559	564	628	633	701	706
10	12	19	25	32	42	49	63	70	88	95	117	124	150	157	187	194	228	235	273	280	322	329	375	382	432	439	493	500	558	565	627	634	700	707	777
11	20	24	33	41	50	62	71	87	96	116	125	149	158	186	195	227	236	272	281	321	330	374	383	431	440	492	501	557	566	626	635	699	708	776	785
21	23	34	40	51	61	72	86	97	115	126	148	159	185	196	226	237	271	282	320	331	373	384	430	441	491	502	556	567	625	636	698	709	775	786	856
22	35	39	52	60	73	85	98	114	127	147	160	184	197	225	238	270	283	319	332	372	385	429	442	490	503	555	568	624	637	697	710	774	787	855	868
36	38	53	59	74	84	99	113	128	146	161	183	198	224	239	269	284	318	333	371	386	428	443	489	504	554	569	623	638	696	711	773	788	854	869	939
37	54	58	75	83	100	112	129	145	162	182	199	223	240	268	285	317	334	370	387	427	444	488	505	553	570	622	639	695	712	772	789	853	870	938	955
55	57	76	82	101	111	130	144	163	181	200	222	241	267	286	316	335	369	388	426	445	487	506	552	571	621	640	694	713	771	790	852	871	937	956	1026
56	77	81	102	110	131	143	164	180	201	221	242	266	287	315	336	368	389	425	446	486	507	551	572	620	641	693	714	770	791	851	872	936	957	1025	1045
78	80	103	109	132	142	165	179	202	220	243	265	288	314	337	367	390	424	447	485	508	550	573	619	642	692	715	769	792	850	873	935	958	1024	1046	1117
79	104	108	133	141	166	178	203	219	244	264	289	313	338	366	391	423	448	484	509	549	574	618	643	691	716	768	793	849	874	934	959	1023	1047	1116	1141
105	107	134	140	167	177	204	218	245	263	290	312	339	365	392	422	449	483	510	548	575	617	644	690	717	767	794	848	875	933	960	1022	1048	1115	1142	1212
106	135	139	168	176	205	217	246	262	291	311	340	364	393	421	450	482	511	547	576	616	645	689	718	766	795	847	876	932	961	1021	1049	1114	1143	1211	1240
136	138	169	175	206	216	247	261	292	310	341	363	394	420	451	481	512	546	577	615	646	688	719	765	796	846	877	931	962	1020	1050	1113	1144	1210	1241	1311
137	170	174	207	215	248	260	293	309	342	362	395	419	452	480	513	545	578	614	647	687	720	764	797	845	878	930	963	1019	1051	1112	1145	1209	1242	1310	1343
171	173	208	214	249	259	294	308	343	361	396	418	453	479	514	544	579	613	648	686	721	763	798	844	879	929	964	1018	1052	1111	1146	1208	1243	1309	1344	1414
172	209	213	250	258	295	307	344	360	397	417	454	478	515	543	580	612	649	685	722	762	799	843	880	928	965	1017	1053	1110	1147	1207	1244	1308	1345	1413	1450
210	212	251	257	296	306	345	359	398	416	455	477	516	542	581	611	650	684	723	761	800	842	881	927	966	1016	1054	1109	1148	1206	1245	1307	1346	1412	1451	1521
211	252	256	297	305	346	358	399	415	456	476	517	541	582	610	651	683	724	760	801	841	882	926	967	1015	1056	1108	1149	1205	1246	1306	1347	1411	1452	1520	1562
253	255	298	304	347	357	400	414	457	475	518	540	583	609	652	682	725	759	802	840	883	925	968	1014	1057	1107	1150	1204	1247	1305	1348	1410	1453	1519	1562	1632
254	299	303	348	356	401	413	458	474	519	539	584	608	653	681	726	758	803	839	884	924	969	1013	1058	1106	1151	1203	1248	1304	1349	1409	1454	1518	1563	1631	
300	302	349	355	402	412	459	473	520	538	585	607	654	680	727	757	804	838	885	923	970	1012	1059	1105	1152	1202	1249	1303	1350	1408	1455	1517	1564	1630		
301	350	354	403	411	460	472	521	537	586	606	655	679	728	756	805	837	886	922	971	1011	1060	1104	1153	1201	1250	1302	1351	1407	1456	1516	1565	1629			
351	353	404	410	461	471	522	536	587	605	656	678	729	755	806	836	887	921	972	1010	1061	1103	1154	1200	1251	1301	1352	1406	1457	1515	1566	1628				
352	405	409	462	470	523	535	588	604	657	677	730	754	807	835	888	920	973	1009	1062	1102	1155	1199	1252	1300	1353	1405	1458	1514	1567	1627					
406	408	463	469	524	534	589	603	658	676	731	753	808	834	889	919	974	1008	1063	1101	1156	1198	1253	1299	1354	1404	1459	1513	1568	1626						
407	464	468	525	533	590	602	659	675	732	752	809	833	890	918	975	1007	1064	1100	1157	1197	1254	1298	1355	1403	1460	1512	1569	1625							
465	467	526	532	591	601	660	674	733	751	810	832	891	917	976	1006	1065	1099	1158	1196	1255	1297	1356	1402	1461	1511	1570	1624								
466	527	531	592	600	661	673	734	750	811	831	892	916	977	1005	1066	1098	1159	1195	1256	1296	1357	1401	1462	1510	1571	1623									
528	530	593	599	662	672	735	749	812	830	893	915	978	1004	1067	1097	1160	1194	1257	1295	1358	1400	1463	1509	1572	1622										
529	594	598	663	671	736	748	813	829	894	914	979	1003	1068	1096	1161	1193	1258	1294	1359	1399	1464	1508	1573	1621											
595	597	664	670	737	747	814	828	895	913	980	1002	1069	1095	1162	1192	1259	1293	1360	1398	1465	1507	1574	1620												
596	665	669	738	746	815	827	896	912	981	1001	1070	1094	1163	1191	1260	1292	1361	1397	1466	1506	1575	1619													
666	668	739	745	816	826	897	911	982	1000	1071	1093	1164	1190	1261	1291	1362	1396	1467	1505	1576	1618														
667	740	744	817	825	898	910	983	999	1072	1092	1165	1189	1262	1290	1363	1395	1468	1504	1577	1617															
741	743	818	824	899	909	984	998	1073	1091	1166	1188	1263	1289	1364	1394	1469	1503	1578	1616																
742	819	823	900	908	985	997	1074	1090	1167	1187	1264	1288	1365	1393	1470	1502	1579	1615																	
820	822	901	907	986	996	1075	1089	1168	1186	1265	1287	1366	1392	1471	1501	1580	1614																		
821	902	906	987	995	1076	1088	1169	1185	1266	1286	1367	1391	1472	1500	1581	1613																			
903	905	988	994	1077	1087	1170	1184	1267	1285	1368	1390	1473	1499	1582	1612																				
904	989	993	1078	1086	1171	1183	1268	1284	1369	1389	1474	1498	1583	1611																					
990	992	1079	1085	1172	1182	1269	1283	1370	1388	1475	1497	1584	1610																						
991	1080	1084	1173	1181	1270	1282	1371	1387	1476	1496	1585	1609																							
1081	1083	1174	1180	1271	1281	1372	1386	1477	1495	1586	1608																								
1082	1175	1179	1272	1280	1373	1385	1478	1494	1587	1607																									
1176	1178	1273	1279	1374	1384	1479	1493	1588	1606																										
1177	1274	1278	1375	1383	1480	1492	1589	1605																											
1275	1277	1376	1382	1481	1491	1590	1604																												
1276	1377	1381	1482	1490	1591	1603																													
1378	1380	1483	1489	1592	1602																														
1379	1484	1488	1593	1601																															
1485	1487	1594	1600																																
1486	1595	1599																																	
1596	1598																																		
1597																																			

Figura 7. Alinhamento de 19 primos

$$229-191=38$$

$$191-157=34$$
$$157-127=30$$
$$127-101=26$$
$$101-79=22$$
$$79-61=18$$
$$61-47=14$$
$$47-37=10$$
$$37-31=6$$
$$31-29=2$$

e esses termos

$$29,31,37,47,61,79,101,127,157 \text{ e } 191$$

são todos primos, e também estão destacados na figura 7.

O termo seguinte a 1597 é 1597+114=1711, que não é primo, visto que 1711=29.59; e assim, temos uma sequência

$$x_1=29, x_2=31, x_3=37, \ldots, x_{29}=1597, \ldots, x_n, \ldots$$

na qual a diferença entre dois temos consecutivos aumenta de 4 em 4, à medida que se avança na seqüência, ou seja

$$x_1=29$$
$$x_2=x_1+2$$
$$x_3=x_2+6$$
$$x_4=x_3+10$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n=x_{n-1}+2+(n-2)4$$

e então, somando membro a membro e aplicando a lei do cancelamento, obtém-se

$$x_n=29+2+6+8+\ldots+[2+4(n-2)]$$

e pela fórmula da soma dos termos de uma PA

$$x_n=29+2(n-1)^2$$

logo

$$x_n=2n^2-4n+31$$

Assim, chegamos ao polinômio $2n^2-4n+31$, que gera números primos distintos para n=1,2,3,...,29.

3.6 Um polinômio que gera 40 números primos

Vamos agora montar um arranjo em forma de quadrado, no qual, na diagonal se muda a direção da disposição, de horizontal para vertical (fig. 8). Esse arranjo nos mostra o famoso polinômio n^2-n+41, conhecido como polinômio de Euler.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 4 & & 9 \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ 2 & \rightarrow & 3 & & 8 \\ & & \uparrow & & \\ 5 & \rightarrow & 6 & \rightarrow & 7 \end{array}$$

Figura 8. Arranjo quadrado

Continuando a disposição até aproximadamente 1600, e destacando os números primos, notamos que os primos

421,461,503,547,593,641,691,743,797,853,911,971,1033,1097,1163,1231,1301, 1373,1447,1523 e 1601

ficaram alinhados (fig. 9).

Notamos também que a diferença entre dois números consecutivos, do maior até o menor, diminui sempre de 2 em 2, como vemos adiante

1601-1523=78	911-853=58
1523-1447=76	853-797=56
1447-1373=74	797-743=54
1373-1301=72	743-691=52
1301-1231=70	691-641=50
1231-1163=68	641-593=48
1163-1097=66	593-547=46
1097-1033=64	547-503=44
1033-971=62	503-461=42
971-911=60	461-421=40

Continuando a subtrair, a partir do numero 421 mantendo-se a seqüência das diferenças, têm-se

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600
2	3	8	15	24	35	48	63	80	99	120	143	168	195	224	255	288	323	360	399	440	483	528	575	624	675	728	783	840	899	960	1023	1088	1155	1224	1295	1368	1443	1520	1599
5	6	7	14	23	34	47	62	79	98	119	142	167	194	223	254	287	322	359	398	439	482	527	574	623	674	727	782	839	898	959	1022	1087	1154	1223	1294	1367	1442	1519	1598
10	11	12	13	22	33	45	61	78	97	118	141	166	193	222	253	286	321	358	397	438	481	526	573	622	673	726	781	838	897	958	1021	1086	1153	1222	1293	1366	1441	1518	1597
17	18	19	20	21	32	45	60	77	96	117	140	165	192	221	252	285	320	357	396	437	480	525	572	621	672	725	780	837	896	957	1020	1085	1152	1221	1292	1365	1440	1517	1596
26	27	28	29	30	31	44	59	76	95	116	139	164	191	220	251	284	319	356	395	436	479	524	571	620	671	724	779	836	895	956	1019	1084	1151	1220	1291	1364	1439	1516	1595
37	38	39	40	41	42	43	58	75	94	115	138	163	190	219	250	283	318	355	394	435	478	523	570	619	670	723	778	835	894	955	1018	1083	1150	1219	1290	1363	1438	1515	1594
50	51	52	53	54	55	56	57	74	93	114	137	162	189	218	249	282	317	354	393	434	477	522	569	618	669	722	777	834	893	954	1017	1082	1149	1218	1289	1362	1437	1514	1593
65	66	67	68	69	70	71	72	73	92	113	136	161	188	217	248	281	316	353	392	433	476	521	568	617	668	721	776	833	892	953	1016	1081	1148	1217	1288	1361	1436	1513	1592
82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	112	135	160	187	216	247	280	315	352	391	432	475	520	567	616	667	720	775	832	891	952	1015	1080	1147	1216	1287	1360	1435	1512	1591
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	134	159	186	215	246	279	314	351	390	431	474	519	566	615	666	719	774	831	890	951	1014	1079	1146	1215	1286	1359	1434	1511	1590
122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	158	185	214	245	278	313	350	389	430	473	518	565	614	665	718	773	830	889	950	1013	1078	1145	1214	1285	1358	1433	1510	1589
145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	184	213	244	277	312	349	388	429	472	517	564	613	664	717	772	829	888	949	1012	1077	1144	1213	1284	1357	1432	1509	1588
170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	212	243	276	311	348	387	428	471	516	563	612	663	716	771	828	887	948	1011	1076	1143	1212	1283	1356	1431	1508	1587
197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	242	275	310	347	386	427	470	515	562	611	662	715	770	827	886	947	1010	1075	1142	1211	1282	1355	1430	1507	1586
226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	274	309	346	385	426	469	514	561	610	661	714	769	826	885	946	1009	1074	1141	1210	1281	1354	1429	1506	1585
257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	308	345	384	425	468	513	560	609	660	713	768	825	884	945	1008	1073	1140	1209	1280	1353	1428	1505	1584
290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	344	383	424	467	512	559	608	659	712	767	824	883	944	1007	1072	1139	1208	1279	1352	1427	1504	1583
325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	382	423	466	511	558	607	658	711	766	823	882	943	1006	1071	1138	1207	1278	1351	1426	1503	1582
362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	422	465	510	557	606	657	710	765	822	881	942	1005	1070	1137	1206	1277	1350	1425	1502	1581
401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	464	509	556	605	656	709	764	821	880	941	1004	1069	1136	1205	1276	1349	1424	1501	1580
442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	508	555	604	655	708	763	820	879	940	1003	1068	1135	1204	1275	1348	1423	1500	1579
485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	554	603	654	707	762	819	878	939	1002	1067	1134	1203	1274	1347	1422	1499	1578
530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	602	653	706	761	818	877	938	1001	1066	1133	1202	1273	1346	1421	1498	1577
577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	652	705	760	817	876	937	1000	1065	1132	1201	1272	1345	1420	1497	1576
626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	704	759	816	875	936	999	1064	1131	1200	1271	1344	1419	1496	1575
677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	758	815	874	935	998	1063	1130	1199	1270	1343	1418	1495	1574
730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	814	873	934	997	1062	1129	1198	1269	1342	1417	1494	1573
785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	872	933	996	1061	1128	1197	1268	1341	1416	1493	1572
842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	932	995	1060	1127	1196	1267	1340	1415	1492	1571
901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	918	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	994	1059	1126	1195	1266	1339	1414	1491	1570
962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	1058	1125	1194	1265	1338	1413	1490	1569
1025	1026	1027	1028	1029	1030	1031	1032	1033	1034	1035	1036	1037	1038	1039	1040	1041	1042	1043	1044	1045	1046	1047	1048	1049	1050	1051	1052	1053	1054	1055	1056	1057	1124	1193	1264	1337	1412	1489	1568
1090	1091	1092	1093	1094	1095	1096	1097	1098	1099	1100	1101	1102	1103	1104	1105	1106	1107	1108	1109	1110	1111	1112	1113	1114	1115	1116	1117	1118	1119	1120	1121	1122	1123	1192	1263	1336	1411	1488	1567
1157	1158	1159	1160	1161	1162	1163	1164	1165	1166	1167	1168	1169	1170	1171	1172	1173	1174	1175	1176	1177	1178	1179	1180	1181	1182	1183	1184	1185	1186	1187	1188	1189	1190	1191	1262	1335	1410	1487	1566
1226	1227	1228	1229	1230	1231	1232	1233	1234	1235	1236	1237	1238	1239	1240	1241	1242	1243	1244	1245	1246	1247	1248	1249	1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257	1258	1259	1260	1261	1334	1409	1486	1565
1297	1298	1299	1300	1301	1302	1303	1304	1305	1306	1307	1308	1309	1310	1311	1312	1313	1314	1315	1316	1317	1318	1319	1320	1321	1322	1323	1324	1325	1326	1327	1328	1329	1330	1331	1332	1333	1408	1485	1564
1370	1371	1372	1373	1374	1375	1376	1377	1378	1379	1380	1381	1382	1383	1384	1385	1386	1387	1388	1389	1390	1391	1392	1393	1394	1395	1396	1397	1398	1399	1400	1401	1402	1403	1404	1405	1406	1407	1484	1563
1445	1446	1447	1448	1449	1450	1451	1452	1453	1454	1455	1456	1457	1458	1459	1460	1461	1462	1463	1464	1465	1466	1467	1468	1469	1470	1471	1472	1473	1474	1475	1476	1477	1478	1479	1480	1481	1482	1483	1562
1522	1523	1524	1525	1526	1527	1528	1529	1530	1531	1532	1533	1534	1535	1536	1537	1538	1539	1540	1541	1542	1543	1544	1545	1546	1547	1548	1549	1550	1551	1552	1553	1554	1555	1556	1557	1558	1559	1560	1561
1601																																							

Figura 9. Alinhamento de 21 primos

421-383=38	131-113=18
383-347=36	113-97=16
347-313=34	97-83=14
313-281=32	83-71=12
281-251=30	71-61=10
251-223=28	61-53=8
223-197=26	53-47=6
197-173=24	47-43=4
173-151=22	43-41=2
151-131=20	

e observando os novos termos que surgiram

41,43,47,53,61,71,83,97,113,131,151,173,197,223,251,281,313,347 e 383

verificamos que são todos primos (também estão destacados na figura 9)

Por outro lado, se continuarmos o esquema aumentando em 2 a primeira diferença, que seria então 80, a subtração nesse caso ficaria 1681-1601=80, mas isso nos leva ao novo termo 1681=41.41, que não é primo. Temos assim a sequência

$$x_1=41, x_2=43, x_3=47, \ldots, x_{40}=1601, \ldots, x_n, \ldots$$

na qual a diferença entre dois termos consecutivos aumenta de 2 em 2 à medida em que se avança, e considerando isso podemos encontrar a lei de formação do termo geral, como foi feito antes:

como $x_1=41$

$x_2=x_1+2$

$x_3=x_2+4$

$x_4=x_3+6$

....

$$x_n=x_{n-1}+2(n-1)$$

então somando membro a membro e aplicando a lei do cancelamento, obtém-se

$$x_n=41+2+4+6+...+2(n-1)$$

e pela fórmula da soma dos termos de uma PA

$$x_n=41+n(n-1)$$

o que nos dá

$$x_n=n^2-n+41$$

O polinômio n^2-n+41 tem valores primos distintos para $n=1,2,3,...,40$.

CAPÍTULO 4– DUAS FÓRMULAS QUE GERAM TODOS OS NÚMEROS PRIMOS

Apesar de haver um grande numero de estudantes de matemática, e até professores, que desconhecem a existência de fórmulas que geram todos os números primos, tais fórmulas existem e são de variadas formas, com a maioria delas apresentando dificuldades computacionais (veja [GUEDES, 2008] ou [RIBEMBOIN, 1993]), que as inviabilizam, e talvez por isso sejam pouco difundidas. Vamos apresentar aqui duas dessas fórmulas, as quais envolvem conceitos relativamente simples.

4.1 A fórmula de Willans

Para a primeira fórmula precisamos, antes, de algumas definições. A *parte inteira*do numero real *x*, denotada por [*x*], é o maior inteiro menor ou igual a *x*. Por exemplo, [$\sqrt{3}$]=1 e [5]=5.

Indica-se por $\pi(m)$ a quantidade de números primos menores ou iguais a *m.* Por exemplo,$\pi(6)$=3 e $\pi(29)$=10.

Denota-se por p_n o *n*-ésimo número primo. Assim temos p_1=2, p_2=3,p_3=5, p_4=7,...etc. A fórmula de Willans é:

$$p_n=1+\sum_{m=1}^{2^n}\left[\sqrt[n]{\frac{n}{1+\pi(m)}}\right]$$

É uma fórmula simples e concisa, acessível à compreensão de um estudante do ensino médio, porém de pouca eficácia. Por exemplo, tomando n=10 temos

$$p_{10} = 1 + \sum_{m=1}^{1024}\left[\sqrt[10]{\frac{10}{1+\pi(m)}}\right]$$

ou seja, se quisermos saber qual é o décimo primo devemos conhecer o valor de $\pi(m)$ para m de 1 até 1024, e isso implica contar quantos primos tem até 1024; certamente muito mais que até 29, o valor de p_{10}.

Por outro lado, é fácil entender como essa fórmula funciona; cada parcela do somatório é igual a 1 para $1 \leq m < p_n$ e é igual a zero para $m \geq p_n$. Assim, há p_n-1 parcelas iguais a 1, sendo as demais nulas, e adicionando 1 ao somatório o valor final é exatamente p_n. Vejamos o caso de p_3 como exemplo

$$p_3 = 1 + \sum_{m=1}^{8} \left[\sqrt[3]{\frac{3}{1+\pi(m)}} \right]$$

$$= 1 + \left[\sqrt[3]{\frac{3}{1+0}}\right] + \left[\sqrt[3]{\frac{3}{1+1}}\right] + \left[\sqrt[3]{\frac{3}{1+2}}\right] + \left[\sqrt[3]{\frac{3}{1+2}}\right] + \left[\sqrt[3]{\frac{3}{1+3}}\right] + \left[\sqrt[3]{\frac{3}{1+3}}\right]$$
$$+ \left[\sqrt[3]{\frac{3}{1+4}}\right] + \left[\sqrt[3]{\frac{3}{1+4}}\right]$$

$$=1+1+1+1+1+0+0+0+0$$
$$= 5$$

4.2 Uma fórmula que faz uso do teorema de Wilson

Para entender como funciona a segunda formula pressupõe-se um conhecimento básico sobre congruências, cuja definição é dada a seguir. Dizemos que *a* é *congruente* a *b* módulo *m* quando as divisões de *a* e *b* por *m* tiverem o mesmo resto, e nesse caso escreve-se $a \equiv b \mod m$. Por exemplo, $17 \equiv 73 \mod 7$ e $21 \equiv 9 \mod 4$.

O *teorema de Wilson* (matemático inglês do século XVIII) caracteriza os números primos, embora de modo pouco prático. O teorema diz:"o natural n>1 é primo se e somente se $(n-1)! \equiv -1 \mod n$".

Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em [HEFEZ,2011].

Vamos convencionar escrever $a \bmod m$ para denotar o resto da divisão de *a* por *m*, assim, por exemplo, 10 mod 3=1 e 23 mod 4=3.

A segunda fórmula é a seguinte

$$f(n)=2+2(n!)\bmod(n+1)$$

Vamos observar o valor de f(n) considerando os dois possíveis casos para a primalidade de n+1.

Se n+1 éprimo, então, pelo teorema de Wilson e por congruência, temos as implicações

$$
\begin{aligned}
& n! \equiv -1 \bmod (n+1) \\
\Rightarrow \quad & 2(n!) \equiv -2 \bmod (n+1) \\
\Rightarrow \quad & 2(n!) \equiv -2+n+1 \bmod (n+1) \\
\Rightarrow \quad & 2(n!) \equiv n-1 \bmod (n+1)
\end{aligned}
$$

e portanto n-1 é o resto da divisão de 2(n!) por n+1,logo

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 2+2(n!) \bmod (n+1) \\
&= 2+n-1 \\
&= n+1
\end{aligned}
$$

ou seja,f(n) é primo.

Se n+1 é composto; é fácil provar que n+1 divide 2(n!),e então

$$2(n!) \bmod (n+1)=0,$$

o que implica em

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 2+2(n!) \bmod (n+1) \\
&= 2+0 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

ou seja,f(n) é primo.

Vamos concluir este capítulo dizendo que escolhemos mostrar essas duas fórmulas porque, como foi dito antes, envolvem conceitos simples que são compreensíveis a um estudante do ensino médio, porém há outras fórmulas geradoras de números primos e que são de maior complexidade quanto aosconceitos matemáticos nelas envolvidos, podendo ser facilmente encontradas em livros que tratam desse tema.

CONCLUSÃO

Ao longo dos anos em que trabalhamos como professor do Ensino Fundamental e Médio, podemos perceber como o ensino de tópicos da aritmética básica pode ser aplicado a questões que provocam especial interesse nos alunos. Algumas dessas questões são colocadas em forma de “truques” que envolvem conceitos como mmc, mdc, critérios de divisibilidade, etc.

Os números primos tem despertado o interesse dos matemáticos no transcorrer do tempo por vários motivos, como sua importância teórica no desenvolvimento da aritmética, sua relação com algumas importantes conjecturas em aberto, seu uso na codificação e criptografia, com a finalidade de proteger informações enviadas por meios eletrônicos por bancos, operadoras de cartão de crédito, setor militar, etc.

O conteúdo deste trabalho, que aborda um pouco da história da matemática, dos números primos e fórmulas relacionadas, acreditamos, pode contribuir como parte de material de apoio e também trazer algum incentivo e motivação para o ensino desses temas na educação básica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ALENCAR FILHO, Edgard de. *Teoria Elementar dos números*. São Paulo: Nobel.

[2] ÁVILA, Geraldo. *Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura em geral*. 2ª edição. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

[3] BOYER, Carl B. *História da matemática*. 2ª edição. São Paulo: Edagard Blucher, 1996.

[4] DOMINGUES, Higino H. *Fundamentos de Aritmética.* São Paulo: Atual, 1991.

[5] GUEDES, Eric Campos Bastos. *Fórmulas para números primos.* Rio de Janeiro: SBM, 2008.

[6] HEFEZ, Abramo. *Elementos de Aritmética.* 2ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[7] LANDAU, EDMUND Georg Hermann. *Teoria Elementar dos números*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2002.

[8] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. Tópicos de Matemática Elementar. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[9] RIBENBOIM, Paulo. *Existem funções que geram os números primos?* Revista Matemática Universitária. Rio de Janeiro, nº 15, dezembro de 1993.

[10] SANTOS, José Plinio de Oliveira. *Introdução à teoria dos números.* 3ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.