Universidade Federal do Amapá
Departamento de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática

Jésu Márcio Azevedo a Costa

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL COMO FERRAMENTA PARA CÁLCULOS DE ÁREAS DAS FIGURAS PLANAS NO ENSINO MÉDIO

Macapá

2016

Jésu Márcio Azevedo a Costa

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL COMO FERRAMENTA PARA CÁLCULOS DE ÁREAS DAS FIGURAS PLANAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao colegiado do Curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Guzmán Eulalio Isla Chamilco

Doutor em Matemática - UNIFAP

Macapá

2016

Costa, Jésu Márcio Azevedo da

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL COMO FERRAMENTA PARA CÁLCULOS DE ÁREAS DAS FIGURAS PLANAS NO ENSINO MÉDIO / Jésu Márcio Azevedo da Costa - 2016

69.p

1. Matemática. 2. Cálculo diferencial. 3. Cálculo integral 4. Geometria 5. Áreas. . I.Título.

CDU 536.21

Jésu Márcio Azevedo a Costa

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL COMO FERRAMENTA PARA CÁLCULOS DE ÁREAS DAS FIGURAS PLANAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao colegiado do Curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em

BANCA EXAMINADORA

Guzmán Eulalio Isla Chamilco

Doutor em Matemática - UNIFAP

João Xavier da Cruz Neto

Doutor em Matemática - UFPI

José Walter Cárdenas Sotil

Doutor em Matemática - UNIFAP

Erasmo Senger

Doutor em Matemática - UNIFAP

A minha família e em especial minha mãe Ocirema Silva e minha esposa Cristiane Moreira.

Resumo

O Cálculo Diferencial é uma das ferramentas matemáticas que possui inúmeras aplicações. Porém, o seu ensino tem se restringido a cursos de Educação Superior. Em diversos estudos tem se discutido as dificuldades de aprendizagem do cálculo no ensino superior. Neste trabalho, apresenta-se uma maneira de introduzir os conceitos e as definições do cálculo de limite, da derivada, e especialmente da integral das funções polinomiais de uma variável, no ensino médio. Inicialmente através de uma abordagem histórica do cálculo, buscando conhecer como este foi surgindo ao longo da história da humanidade, e os matemáticos que mais contribuíram para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Em seguida, mostra-se a ideia de como usar o cálculo integral em situações problema do cotidiano.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino Médio, História do Cálculo, Introdução ao Cálculo, Áreas de Figuras Planas.

Abstract

Differential Calculus is one of the mathematical tools that has many applications. However, his teaching has been restricted to courses of Higher Education. In several studies the learning difficulties of calculus in higher education have been discussed. In this work, we present a way of introducing the concepts and definitions of limit, derivative, and especially integral polynomial functions of a variable in high school. Initially through a historical approach to calculus, seeking to know how this has emerged throughout the history of humanity, and the mathematicians who contributed most to the development of differential and integral calculus. Next, we show the idea of ??how to use integral calculus in everyday problem situations.

KEYWORDS: High School, History of Calculus, Introduction to Calculus, Areas of Flat Figures.

Agradecimentos

Aos amigos do PROFMAT-UNIFAP pelos inúmeros auxílios diante das dificuldades enfrentadas, em especial Paulo Smith.

Ao Professor Doutor Guzmán Eulálio pela paciência e confiança.

"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real".

(Lobachevsky)

Lista de Figuras

2.1 Relação entre as áreas dos círculos e quadrados. 15

2.2 Cálculo da área sob a parábola. Fonte: Do autor. 16

3.1 Divisão de classes na reta. 24

3.2 Representação geométrica da reta. 25

3.3 Representação geométrica da reta. 25

4.1 Ideia intuitiva de limite 28

4.2 Gráfico *x(t)*. 29

4.3 Gráfico *V(t)*. 30

4.4 Limite de $y = x + 2$ quando x tende a 2 31

4.5 Limite da função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ quando x tende a 2 31

4.6 Limites laterais 32

4.7 Função $y = \dfrac{1}{x^2}$ 33

4.8 Função montante 34

4.9 Função $y = \dfrac{1}{x}$ 34

4.10 Definição de limite 35

4.11 Gráfico da função $R(q)$ 38

5.1 Variação de y em função da variação de x. 40

5.2 (SILVA, Sebastião Medeiros da: 1999, p. 160). 41

5.3 (SILVA, Sebastião Medeiros da: 1999, p. 160). 42

5.4 Reta t_1 tangente ao círculo 48

5.5 Interpretação geométrica da derivada. 49

6.1 Soma de Riemann. 52

6.2 $A = \int_a^b f(x)\,dx$ 53

6.3 Área limitada pelo gráfico da função f(x) = x, pelo eixo OX e pelas retas x = 2 e x = 4. 54

6.4 Área limitada pelo gráfico da função f(x) = 8, pelo eixo OX e pelas retas x = 2 e x = 7 54

6.5 Área limitada pelo gráfico da função f(x) = 2x - 6, pelo eixo OX e pelas retas x = 3 e x = 7 55

7.1 Barco à vela no plano cartesiano. 57

7.2 A unidade no plano cartesiano. 58

7.3 Vidro no plano cartesiano. 60

7.4 Rampa no município de Mazagão, interior do Amapá. (Fonte: Do autor) . 61

7.5 Rampa (Half-pipe) no plano cartesiano. 61

Sumário

Lista de Figuras **5**

1 INTRODUÇÃO **10**

2 O DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO **11**

2.1 DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO NA ANTIGUIDADE E IDADE MÉDIA 11

2.2 A TEORIA DAS PROPORÇÕES E O MÉTODO DE EXAUSTÃO 14

2.3 A IMPORTÂNCIA DE EUCLIDES 18

2.4 OUTRAS CONTRIBUIÇÕES IMPORTANTES 18

2.5 AS CONTRIBUIÇÕES DE NEWTON E LEIBNIZ PARA DESCOBERTA DO CÁLCULO 20

3 PRÉ-REQUISITOS PARA O CÁLCULO **23**

3.1 A RETA REAL 23

3.2 A DENSIDADE DA RETA REAL 23

3.3 CONTINUIDADE DA RETA REAL 23

3.4 NOÇÃO DE VARIÁVEL 24

3.5 VALOR ABSOLUTO DE UMA VARIÁVEL 25

4 LIMITE **26**

4.1 INTRODUÇÃO 26

4.2 IDEIA INTUITIVA DE LIMITE 26

4.3 DEFINIÇÃO DE LIMITE 35

4.4 LIMITES INFINITOS 36

4.5 CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO 37

5 DERIVADAS **39**

5.1 TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO 39

5.2 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO 42

5.3 DEFINIÇÃO 43

5.4 DERIVADAS FUNDAMENTAIS 45

5.4.1 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO CONSTANTE 45

5.4.2 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO POTÊNCIA 45

5.5 DERIVADA DO PRODUTO DE UMA CONSTANTE POR UMA FUNÇÃO 46

5.6 PROPRIEDADES OPERACIONAIS 46

5.6.1 DERIVADA DE UMA SOMA (OU DIFERENÇA) DE FUNÇÕES 46

5.7 DERIVADA DO PRODUTO ENTRE DUAS FUNÇÕES 47

5.8 DERIVADA DO QUOCIENTE ENTRE DUAS FUNÇÕES 47

5.9 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA 48

6 CÁLCULO INTEGRAL **50**

6.1 INTEGRAL INDEFINIDA 50

6.1.1 DEFINIÇÃO 50

6.2 PROPRIEDADES 51

6.2.1 PROPOSIÇÃO I 51

6.2.2 PROPOSIÇÃO II 51

6.3 INTEGRAL DEFINIDA 52

6.3.1 DEFINIÇÃO 52

6.3.2 CÁLCULO DA INTEGRAL DEFINIDA 53

7 APLICANDO O ESTUDO INTRODUTÓRIO DE INTEGRAL NO CÁLCULO DE ÁREA **56**

8 CONCLUSÃO 63

REFERÊNCIAS 64

1 INTRODUÇÃO

Não se pode negar a dificuldade do aluno que sai do ensino médio e entra no ensino superior e que se depara com assuntos onde nunca tenha sido apresentado antes, no caso, o cálculo diferencial e integral. É notório que se faz necessário esse aprendizado, mas precisa-se definir antes, um modo de se introduzir e organizar tal conhecimento nessa etapa de estudo. Este trabalho dá uma ideia para o professor executar em sala de aula tal conteúdo.

Com definições simples e exemplos que facilitam sua aplicabilidade, tem-se como único propósito, o de apresentar para o aluno, que se pode usar seus conhecimentos adquiridos em sala e usá-los no seu dia a dia.

Como o uso da integral nos cálculos de áreas de figuras planas utilizando apenas funções polinomiais, objetivo desse trabalho, perpassa por todo um conhecimento teórico de limite e derivada, não há dúvida que agrega-se ainda mais a uma introdução eficaz e necessária desses assuntos para o aluno, antes de se ingressar no ensino superior.

Tem-se então, as divisões dos capítulos[1]:

O capítulo 2, é para conhecer um pouco da história e de como esses conhecimentos foram se aprimorando.

O capítulo 3, possui alguns pré-requisitos para facilitar o entendimento do cálculo diferencial e integral como estudos sobre a reta real, sua densidade e continuidade, noção de variável e valor absoluto de uma variável.

Já nos capítulos 4,5 e 6, com uma linguagem simples, mostra-se o conhecimento teórico e exemplos do assunto.

E por fim, o capítulo 7, onde utiliza-se o estudo introdutório de integral em algumas aplicações no cálculo de áreas de figuras planas, figuras essas facilmente encontradas no cotidiano do aluno.

[1]Este trabalho é parte de um projeto desenvolvido pelos discentes: Jésu Márcio Azevedo da Costa e Paulo de Tarso Smith Neves, sendo os capítulos 2, 3, 4 e 5 comuns.

2 O DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO

O foco de nosso trabalho é o processo de ensino e aprendizagem de uma breve introdução do conceito de Cálculo no ensino médio. Assim faremos um histórico sobre o desenvolvimento do conceito de Cálculo, acompanhado com uma revisão da literatura relacionada ao ensino desse conceito.

A intenção é situar o ensino e aprendizagem de Cálculo como objeto de estudo dentro do ensino da matemática e levantar elementos que contribuam para uma melhor compreensão do nosso estudo em questão.

2.1 DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO NA ANTIGUIDADE E IDADE MÉDIA

O limite é um conceito fundamental do Cálculo, visto que seus principais conceitos, derivada e integral, são definidos em termos do limite. Para que o conceito de limite fosse estabelecido como é hoje, foram necessários muitos séculos. Tais definições são agora tão claramente tratadas que é fácil esquecer como estes conceitos foram desenvolvidos ao longo da história, Boyer (1974)

A Matemática grega mostra como as ideias originais relacionadas ao Cálculo têm início em considerações que envolvem tanto noções de grandezas discretas quanto de grandezas contínuas. Boyer (1974) observa que o inicio pode ser situado na escola pitagórica com o refutamento da incomensurabilidade.

Com Pitágoras, a generalização da geometria fez surgir um obstáculo, a noção de número irracional. A descoberta dos irracionais destruiu a correspondência entre números e distância.

Para os pitagóricos todo o universo era constituído por números inteiros e suas razões. Ou seja, as grandezas comensuráveis. Eles acreditavam que todos os problemas da vida poderiam ser solucionados com tais saberes. Naturalmente, a vida em seu curso natural foi mostrando que nem tudo era como se pensava a princípio. Segundo Boyer

(1974), os números inteiros e suas razões se mostraram insuficientes para demonstrar propriedades básicas como a relação entre o lado e a diagonal de um quadrado, bem como, lado e diagonal de um pentágono, pois tais segmentos são incomensuráveis. Por menor que seja a unidade adotada, ainda assim, nunca haverá uma medida comum entre estes segmentos anteriormente citados.

Por muitos séculos, a noção de limite foi confundida com ideias vagas, às vezes filosóficas relativas ao infinito - números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos e com intuições geométricas subjetivas, nem sempre rigorosas. O termo limite no sentido moderno é produto dos séculos XVIII e XIX, originário da Europa. A definição moderna tem menos de 150 anos.

De acordo com Brolezzi (1996), a teoria dos infinitesimais de Demócrito, e seus seguidores, foi combatida por outra escola filosófica pela influência das ideias de Parmênides de Eléia (c. 530 a.C). Esta doutrina chamava a atenção para os paradoxos e contradições existentes na concepção do mundo físico como composto por partículas infinitamente pequenas e indivisíveis (MORAES: 2013).

O surgimento do infinito pelas grandezas incomensuráveis proporcionou uma crise que se traduziu por um debate entre duas concepções: a concepção continuista tomava o número, o espaço e a matéria, como divisível ao infinito; e a concepção atomista admitia a existência de elementos primeiros indivisíveis. A ilustração dessa crise está relacionada aos paradoxos de Zeno.

O problema da incomensurabilidade entre magnitudes gerou algumas concepções polêmicas a cerca da natureza do mundo físico, como a doutrina atomística, defendida por Demócrito (*c.* 400 a.C.), que propunha a existência do infinitamente pequeno compondo o ser das coisas (MORAES: 2013).

Boyer, apud Amaral (2004), Demócrito no cálculo do volume de cones e cilindros:

> "Ao usar suas técnicas infinitesimais, ele concluiu, por exemplo, que 'o volume de um cone é um terço do volume do cilindro circunscrito'. Para tanto, comparou a base de um cone com a base de uma pirâmide de infinitos lados, e considerou uma infinidade de áreas de secções infinitamente finas e paralelas à base".

Zeno de Eléia, famoso por dons de dialética, buscava desacreditar os argumentos de seus antagonistas, considerando como verdadeiras as hipóteses das teses de seus adversários ele chegava a contradições inaceitáveis. Zeno buscava demonstrar a inexistência do movimento e, para isso criou alguns paradoxos.

> "Zeno dizia que a ideia de infinitésimos é totalmente absurda, pois se possuem algum comprimento, então uma quantidade infinita deles irá compor uma reta de comprimento infinito; e se não têm nenhum comprimento, então uma quantidade infinita deles tampouco terá comprimento algum. Além disso, dirá também: aquilo que acrescentado a outro não o faz maior, e subtraído de outro não o faz menor, é simplesmente nada" (Brolezzi: 1996, 22).

Dos paradoxos de Zeno, quatro causaram maior perturbação: o da Dicotomia, o de Aquiles, o da Flecha e o do Estádio. Apenas para ilustrar suas ideias, embora o mais conhecido seja o de Aquiles, iremos apresentar o paradoxo da Dicotomia, assim descrito por Brolezzi (1996, p. 22):

> "Zeno nos coloca frente à aparente impossibilidade de percorrermos um número infinito de distâncias num tempo finito. Imaginemos uma pessoa que deve atravessar uma sala de um lado a outro. Antes de chegar à parede oposta, deve evidentemente chegar à metade da sala. Antes disso, porém, deve percorrer a metade da metade, ou um quarto da distância. E assim por diante, sempre dividindo a distância pela metade, indefinidamente. Desse modo, a pessoa nunca chegará ao outro lado, pois terá que percorrer um número infinito de espaços, ainda que pequenos, num tempo evidentemente finito".

A dicotomia demonstra a impossibilidade do movimento porque quando alguma coisa se move ele deve chegar primeiro ao estágio intermediário antes de chegar à sua meta.

Não há dúvida, que a pessoa chegará à parede oposta, pois o espaço e o tempo não são infinitamente indivisíveis, isto é, todas as infinitas e infinitamente pequenas distancias indivisíveis foram percorridas (Amaral, 2004).

Os paradoxos de Zeno ilustram a perplexidade da mente ante os fenômenos do movimento e da velocidade, trazendo à tona controvérsias intrínsecas que, em geral, tendem a passar despercebidas. Como consequência da perplexidade ante esses fenômenos, os gregos desenvolveram o que se chamou de Horror ao Infinito, que na Matemática teve consequências muito importantes. Segundo Boyer, a Matemática adquiriu outra configuração após Zeno: As grandezas não são associadas a números ou pedras, mas a segmentos de reta.

O pensamento de Zeno chamou a atenção de posteriores estudiosos, quanto: A possibilidade da razão entre incomensuráveis; A necessidade de compreender melhor o infinito; a descoberta da continuidade, pois as grandezas incomensuráveis eram representadas por segmentos de retas (Amaral, 2004).

2.2 A TEORIA DAS PROPORÇÕES E O MÉTODO DE EXAUSTÃO

Eudoxo de Cnido (408 - 255 a.C.), um dos maiores discípulos de Platão, era autor de obras que causaram uma revolução na orientação que Platão conduzia sobre a matemática da época. Foi o primeiro a resolver completamente o problema das grandezas incomensuráveis construindo uma "teoria das Proporções" que se aplicava tanto a grandezas comensuráveis quanto a grandezas incomensuráveis. Essa teoria encontra-se exposta no livro V de Euclides. (Boyer: 67)

Para Amaral (2004), as considerações sobre a essência do 'conceito de razão' e a 'definição de igualdade de razões' de Eudoxo podem ser resumidas por seu 'lema', nos seguintes termos:

> "se duas grandezas estão numa razão (isto é, nenhuma delas é zero) é possível achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra" (Boyer: 19744, 66).

Credita-se também a Eudoxo o chamado "método de exaustão", que eliminava o infinito da matemática grega, haja vista a possibilidade de explorar valores cada vez menores (ou maiores) que a unidade. (Amaral: 2004, 12). Esse método permite comparar áreas e volumes.

Segundo Brolezzi (1996: 26), além de excluir o infinitésimo das demonstrações geométricas dos gregos, tal método permite chegar a uma grandeza tão pequena quanto se queira, sem que seja necessário ir até o infinito para atingir o limite. A ideia de proporção usada pelos pitagóricos, associando a razão entre dois segmentos de reta à razão entre números inteiros, não podia ser aplicada para as grandezas incomensuráveis. Desse modo Eudoxo propõe um instrumento útil que podia ser usado sem ferir o pensamento grego. "podia-se já falar de 'a razão entre as áreas de dois círculos' como sendo equivalente a 'a razão entre quadrados construídos sobre os diâmetros dos círculos', conforme a Figura 2.1 " (Brolezzi: 1996, 26).

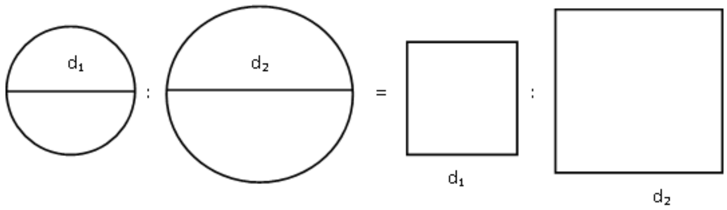


Figura 2.1: Relação entre as áreas dos círculos e quadrados.

Amaral (2004:13) entende que, Eudoxo definiu a razão, esclareceu a exclusão do zero, explicou o que vinha ser grandeza de uma mesma espécie e validou um postulado ao tornar possível provar por "redução ao absurdo", que:

> "se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte se não menor que sua metade e do resto novamente subtrair-se não menos que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza da mesma espécie" (Boyer: 1974, 67).

Baron & Bos (1985) apud Moraes (1989: 26) assinalam que, Arquimedes foi o primeiro a demonstrar isso rigorosamente usando processo de redução ao absurdo. Embora fosse evidente a ideia da demonstração de Arquimedes, o tipo de demonstração usada não era suficiente na Matemática grega sendo, então, necessário usar a demonstração por absurdo duplo, posteriormente, tratada como exaustão por Grégoire de Saint-Vicent (1584–1667). O procedimento tornou-se comum e tais provas continuaram sendo essenciais até o final do século XVII, quando os matemáticos passaram da repetição constante para a prática de passagem direta ao limite.

O "Postulado de Arquimedes" atribuído pelo próprio Arquimedes (287 - ? a.C.) a Eudoxo, ao afirmar que, dada uma grandeza, por menor que seja, ainda é possível encontrar outra grandeza ainda menor (Amaral: 2004).

Considerando a formulação de Eudoxo e para efeito de ilustração, é válido supor a seguinte situação:

> "Seja a sequencia infinita decrescente cujos valores são representados por $(e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots,\ e_{n1},\ \ldots,\ e_n,\ \ldots)$.
> Considerando-se o elemento e_{n1}como o menor, a partir dele todos os demais elementos são ainda menores. Desse modo, diz-se que para todo inteiro $n <\ n_1$, existe um elemento $e_n <\ e_{n1}$, qualquer que seja n_1. Ora, nestas condições, os valores dos elementos e_n *e* e_{n1} são tão pequenos, de um para o outro, que passa a ser importante saber o 'quanto próximo' e_{n1} 'está de' e_n.
> Em sua prática, Eudoxo, aparentemente, vislumbrou poder 'controlar' o 'grau de aproximação' entre valores de uma mesma grandeza e, em

> seu 'Método da Exaustão', trata de um parâmetro para 'medi-la'. A diferença $e_{n1} - e_n$, pode ser tão pequena quanto se queira, é este o padrão" (Amaral: 2004, 13).

Lira (2008) em seus estudos, conclui que a definição apresentada por Eudoxo, "se aproxima do conceito de limite, pois a diferença entre o método de exaustão e o limite do Cálculo Diferencial e Integral reside apenas no fato de que os gregos não realizaram a **passagem ao infinito**", uma vez que os mesmos não tinham noção de contínuo aritmético. No entanto, para Brolezzi (1996), o tipo de argumentação é o mesmo, tanto no caso do atual limite quanto no método de exaustão geométrico.

(BARON & BOS, 1985) apud Moraes (2013: 26), "Dentre os matemáticos gregos, Arquimedes foi o que mais se destacou na aplicação da Matemática a problemas físicos e em suas demonstrações", além dele, outros matemáticos também contribuíram com esforços na construção de demonstrações mais rigorosas.

Conforme Brolezzi (1996), o surgimento do Cálculo no século dezessete está em plena conexão com a busca de meios de simplificar os métodos gregos, como o método da exaustão. Para avaliar até que ponto chegaram os gregos, basta verificar que Arquimedes realizou o Cálculo da área sob a parábola, antecipando-se, assim, em mais de dezessete séculos aos resultados do Cálculo Integral.

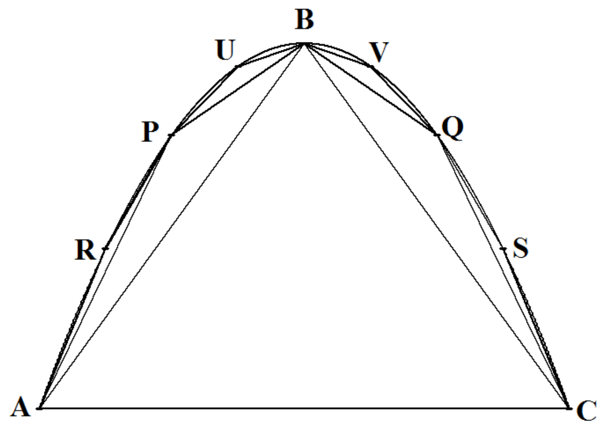


Figura 2.2: Cálculo da área sob a parábola. Fonte: Do autor.

Ainda Brolezzi (1996), em sua obra O Método, Arquimedes concluiu que um segmento parabólico é 4/3 do triângulo de mesma base e vértice (o vértice é o ponto a partir do qual a perpendicular à base é maior). Arquimedes considerava que as superfícies são constituídas por retas, dessa forma ele inscreveu sucessivos triângulos no segmento de parábola, calculou a área desses triângulos e obteve valores cada vez mais próximos do pretendido, somando as áreas dos sucessivos triângulos (Ver Figura 2.2).

Assim calculou a área do segmento parabólico. No entanto Arquimedes não prolongou as somas até ao infinito. Usando o método da Exaustão, ele deduziu o seu valor demonstrando que não pode ser nem maior, nem menor que a proporção de 4/3, (SERRA, 2002) apud (Zuchi: 2005).

O método da exaustão é o fundamento de um dos processos essenciais do cálculo infinitesimal. Arquimedes nunca considerou que as somas tivessem uma infinidade de termos. A noção de limite pressupõe a consideração do infinito que esteve sempre excluído da matemática grega, mesmo em Arquimedes. No entanto, o seu trabalho foi, provavelmente, o mais forte incentivo para o desenvolvimento posterior das idéias de limite e de infinito. (Moraes: 2013)

> "Arquimedes inventou o Cálculo Integral, e, em um de seus problemas, antecipou a criação do Cálculo Diferencial. Estes dois cálculos juntos estabelecem o que se denomina de 'cálculo infinitesimal', considerado como o instrumento mais poderoso que já foi inventado para a exploração Matemática do universo físico" (Bell: 1984) apud Moraes (2013, p. 27).

2.3 A IMPORTÂNCIA DE EUCLIDES

Euclides de Alexandria (Século III a. C.) foi um autor prolífico. Nascido entre a comunidade grega do Egito, Euclides revolucionou a matemática com apenas uma obra, que também garantiu seu nome para a posteridade como **pai da geometria**: este livro é conhecido como Os Elementos.

Para Amaral (2004), Euclides foi considerado o "autor do texto de matemática mais bem sucedido de todos os tempos". Em seu trabalho, no Livro XII, Euclides apresenta dezoito proposições, todas referentes a medidas de figuras usando o método da exaustão de Eudoxo e o método de redução ao absurdo, por exemplo para provar que:

"as áreas de círculo estão entre si como os quadrados dos diâmetros" (Boyer: 1974, p. 86).

2.4 OUTRAS CONTRIBUIÇÕES IMPORTANTES

Segundo Boyer (1974), o período do Renascimento para o desenvolvimento da Matemática, se constitui numa interação de ideias mais novas e mais antigas. Nesta época, a retomada de interesse pelas obras de Arquimedes levou a simplificação do cálculo integral, sendo para geometria, o conceito de indivisíveis de fundamental importância.

Boyer (1992) apud Moraes (2013, p. 29), ressalta outro aspecto da integral tendo o método de exaustão pouca aceitação no período medieval. Para Boyer, eram poucos os que se destacavam no Renascimento quanto à precisão lógica da Antiguidade em Matemática.

Moraes (2013) entende, que "no século XVII houve uma retomada de interesse ampla pelas obras de Arquimedes, tendo o conceito de indivisível em geometria um papel salutar".

Em 1635, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) escreveu sobre os indivisíveis ou infinitesimais fixos aplicados com êxito em problemas de mensuração de áreas e volumes (Boyer, 1974), esse tratado hoje é conhecido como "teorema de Cavalieri"

Cavalieri aplicou a ideia dos indivisíveis a vários problemas suscitados por outros matemáticos como Pierre de Fermat (1601–1665), Roberval e Evangelista Torricelli (1608-1647), podendo afirmar assim que o método dos indivisíveis não era propriamente de Cavalieri, pois estava sendo amplamente usado por pensadores matemáticos da época. (Boyer, 1974).

Boyer (1992) apud (Moraes: 2013, p. 30), entende que a consequência lógica dessas ideias foi a geometria analítica de Fermat e René Descartes. La géometrie de Descartes, publicada em 1637, dois anos depois da Geometria indivisibilbus de Cavalieri, mudaram inevitavelmente o curso da análise infinitesimal, ofuscando a geometria pura. Para o autor, pouco se desenvolveu no século seguinte, fazendo com que a análise infinitesimal entrasse num processo de arimetização que quase resultou numa revolução.

Boyer (1974, p.281) ressalta que podemos observar essa mudança de visão na publicação de John Wallis (1616-1703), em 1655, Arithmetica infinitorum. Nesse tratado o autor mostra claramente uma aritmetização do Cálculo.

Ainda Boyer (1974) A prática de Wallis consistia em, sempre que possível, substituir conceitos geométricos por conceitos numéricos, vale ressaltar que nesta época da história, os números reais não tinham sido definidos.

> "Wallis considera uma sucessão infinita de números a_1, a_2 , a_3 , . . . , a_{n1}, . . . , a_n, . . . e um número $\boldsymbol{a}$ tal que a diferença $a_{n1} - a_n$ se torne inferior, em valor absoluto, a qualquer numero dado, arbitralmente pequeno, a partir de um certo valor de índice $\boldsymbol{n}$" (Costa:1981, 257) apud (Amaral:2004, p.21).

Neste caso, a partir do termo com índice n_1, a diferença $a_{n1} - a_n$ alcança e permanece menor que qualquer valor, por mais pequeno que seja.

No entanto, de modo semelhante a Arquimedes e Eudoxo, Wallis encontrava-se preso à intuição de limite como resultado da quantidade de lados de um polígono necessários para definir uma curva, ideia que persiste ao longo dos séculos XVI e XVII.

Ressaltando o esforço de muitos estudiosos, a história do Cálculo foi marcada de incertezas, onde muitas das contribuições para trajetória do desenvolvimento do Cálculo foram estabelecidas após a Idade Média. Fica evidente que este período é considerado de suma importância, pois preparou terreno para os estudos posteriores que anteciparam e em muito influenciaram as descobertas de Newton e Leibniz no século XVII.

Baron & Bos (1985) citado por Moraes (2013), entendem que

> "a tradição atribuiu a Isaac (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) um papel central na 'invenção' do Cálculo, ainda que o Cálculo não tenha começado nem terminado com estes dois homens".

2.5 AS CONTRIBUIÇÕES DE NEWTON E LEIBNIZ PARA DESCOBERTA DO CÁLCULO

Newton e Leibniz merecem um destaque especial na história do Cálculo, pois foram os pioneiros em estabelecer a estreita ligação entre dois problemas. Unificando os novos métodos que se tornaram instrumentos poderosos da ciência. Brolezzi (1996) em seus estudos observa que, "tanto Newton como Leibniz podem ser considerados como os primeiros a ideia de reciprocidade entre a diferencial e a integral, que constitui o Teorema Fundamental do Cálculo".

Por volta de 1666, Newton sintetizou um estudo coerente baseado no que ele chamava de "método de fluxões", no qual as noções de movimento desempenharam um papel central e significativo.

Baron & Bos (1985, p. 39, v. 3) citados por Moraes (2013, p.31) resume as contribuições de Newton da seguinte maneira:

> "1. Newton formulou regras e procedimentos sistemáticos para cobrir as soluções gerais da maioria dos problemas relativos ao cálculo infinitesimal que eram conhecidos no seu tempo.
> 2. Embora muitas dessas regras tivessem sido estabelecidas ou introduzidas de uma ou de outra maneira pelos seus predecessores, ele estabeleceu

> uma estrutura unificada e um quadro dentro do qual todos os problemas podiam ser formulados.
> 3. O uso das séries infinitas foi uma ferramenta importante ao estender-se à classe das curvas "quadráveis", isto é, curvas cuja quadratura podia ser determinada [...].
> 4. Com Newton a ideia de que a diferenciação e a integração eramoperações inversas foi firmemente estabelecida considerando a ordenada móvel proporcional ao momento ou a fluxão de uma área [...].
> 5. A síntese que Newton atingiu foi possibilitada pelo uso do simbolismo algébrico e das técnicas analíticas. Ele estabeleceu muito tarde a notação"padrão" com ponto para representar a diferenciação e, aparentemente, não sentiu grande necessidade de introduzir qualquer notação específica para a integração.
> 6. Os fundamentos do cálculo foram apresentados por Newton de várias maneiras em épocas diferentes, ele constantemente procurava estabelecer os seus métodos analíticos sobre uma base mais segura".

Moraes (2013, p.31) citando Boyer (1974), observa que a contribuição de Newton está no reconhecimento de que tudo isso constitui parte de uma nova análise: a aplicação de processos infinitos ao estudo geral de funções de qualquer tipo.

Para Amaral (2004), Newton aproximou-se muito da ideia de limite, quando relaciona os conceitos de derivada e infinitamente pequeno. Para o autor "a operação de limite ainda é metafísica".

Messias (2013) entende, que apesar das considerações de Newton sobre a nova análise, Leibniz desenvolveu método próprio para determinar somas e diferenças de infinitesimais, caracterizando-o por uma notação própria: $\int xdx$ para as "somas" (a qual denominou de integral de x) e para as "diferenças", dx.

Segundo Boyer (1974). Leibniz apresentou as fórmulas $dxy = xdy + ydx$, $\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ *e* $\mathrm{d}\mathrm{x}^n = nx^{n-1}dx$, correspondente ao produto, quociente e potências (ou raízes). Para Messias (2013, p. 54), Leibniz percebeu que "a 'diferença' de x^n seria nx^{n-1} e, sabendo que as 'somas' eram o inverso das 'diferenças', determinou que $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ".

Brolezzi (1996) afirma que as concepções de Leibniz, quanto ao discreto, e a de Newton, quanto ao contínuo, recaíram na teoria do Cálculo, que posteriormente define melhor o que eram os números reais e a ideia de limite. Para Ávila (2006) citado por Amorim (2011, p.34):

> "o cálculo de Leibniz, na sua origem, é mais complicado que o de Newton. No entanto, a sua vantagem é a notação, os símbolos 'd' para derivada e '$\int$' para integral, utilizados até hoje, e ainda as notações *dx, dy, ds*

> para elementos infinitesimais tem a grande conveniência de 'sugerir' os próprios resultados".

Com Leibniz, o cálculo diferencial começou a ter outra aparência. Leibniz conseguiu escrever "cada termo" (termo geral) de uma soma de infinitas parcelas como a soma de duas frações. (Amaral: 2004).

Baron & Bos (1985) citados por Moraes (2013), três ideias fundamentaram a invenção do Cálculo por Leibniz:

> "1. Seu interesse pelo simbolismo e pela notação vinculada à sua ideia de uma linguagem simbólica geral;
> 2. O reconhecimento de que somar sequências e tomar as suas diferenças são operações inversas e que a determinação de áreas e a de tangentes são operações inversas;
> 3. O uso de um triângulo característico para deduzir transformações gerais de áreas".

Brolezzi (1996, p. 30) também compara os estilos de cada um, da seguinte forma:

As maneiras de Newton e Leibniz em abordar o problema mostraram-se igualmente úteis, pois, enquanto não estava estabelecida a noção de limites, as ideias de movimento contínuo e de infinitésimos discretos surgiram como tentativas de esquematizar as impressões sensíveis a respeito da variação.

Segundo Messias (2013), Newton e Leibniz foram os primeiros a desenvolver algoritmos universalmente aplicáveis, cuja essência assemelha-se aos métodos utilizados atualmente e que as manifestações tanto de Newton quanto de Leibniz acerca do *Cálculo* não apresentavam rigor e clareza em suas definições e, portanto, havia a necessidade de buscar esse rigor matemático para esclarecer as concepções envolvidas na *nova análise*. Essa busca pelo rigor matemático esteve presente durante o século XVIII e predominou em todo o século XIX, período no qual as principais definições da *nova análise*, inclusive a de limite de função com os épsilons e deltas, foram estabelecidas conforme o rigor que conhecemos hoje.

3 PRÉ-REQUISITOS PARA O CÁLCULO

3.1 A RETA REAL

A representação geométrica dos números reais é feita: entre os pontos de uma reta e os números reais existe uma correspondência biunívoca, isto é, a cada ponto de reta corresponde um único número real e vice-versa.

> “por meio de pontos de uma reta, estabelece-se, então uma correspondência natural entre os pontos da reta e os números reais, isto é, cada ponto da reta representa um único numero real, e a cada numero real é representado por um único ponto da reta. Por esta razão, referimo-nos à reta como reta real. Além disso, usaremos indistintamente as palavras ponto e número” (Lipshutz: 70) citado por (Amaral: 2004, p.38).

3.2 A DENSIDADE DA RETA REAL

A relação biunívoca entre ponto e número, é

> “a suposição de que o ponto geométrico não tem dimensões leva imediatamente admitir que, entre dois pontos quaisquer A e B da reta, existe sempre uma infinidade de pontos, e isto por mais próximos que A e B estejam um do outro.
> Todo o conjunto em que isto se dê, isto é, tal que entre dois dos seus elementos quaisquer exista uma infinidade de elementos do mesmo conjunto, diz-se um conjunto denso” (Caraça:1951, p.56).

3.3 CONTINUIDADE DA RETA REAL

Para Caraça (1951) a linha reta representa a imagem ideal de continuidade.

> “sempre que, numa reta se tem uma repartição de seus pontos em duas classes (A) e (B) satisfazendo às duas condições:
> 1ª Nenhum ponto escapa à repartição;
> 2ª Todo ponto da classe (A) está a direita de todo ponto da classe (B) – diz-se que se tem um corte, do qual (A) e (B) são as classes

> constitutivas; o corte constituído pelas duas classes (A) e (B) representa-se abreviadamente por (A , B)".

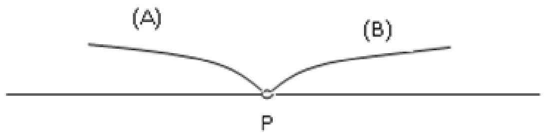


Figura 3.1: Divisão de classes na reta.

De acordo com a figura 3.1 afirmativo que,

> "todo ponto da reta produz nela um corte".

Segundo Caraça (1951), Dedekind caracteriza a continuidade da reta real, pela seguinte afirmação, "todo o corte da reta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte (A , B) existe sempre um ponto da reta que separa as duas classes (A) e (B)". Tal afirmação é chamada de "postulado de dedekind"[2]

3.4 NOÇÃO DE VARIÁVEL

Segundo Caraça (1951: 127), uma variável é um instrumento matemático e que sobre esse instrumento, incide uma correspondência de dois conjuntos numéricos.

Se A é um conjunto numérico qualquer, finito ou infinito, por convenção qualquer de seus elementos será representado por um símbolo x, a este símbolo chamamos de variável. O símbolo x sem representar individualmente, nenhum dos elementos do conjunto A, está apto de representar a todos, isto é, é e não é cada um dos elementos do conjunto A. O que determina uma variável é o conjunto numérico que ela representa, isto é, o seu domínio. Se x representa o conjunto dos números reais, diz-se "que é uma variável real contínua, ou simplesmente variável real". Se x tem domínio igual a dos números naturais, então dizemos que x é variável inteira. (Caraça: 1951, p. 128)

[2]Quase pela mesma altura, o matemático Alemão G. Cantor formulou a caracterização da continuidade por uma maneira semelhante; por isso a este enunciado se chama, com maior propriedade, axioma da continuidade de Dedekind-Cantor

3.5 VALOR ABSOLUTO DE UMA VARIÁVEL

Lipshutz (1980: 290) citado por Amaral (2004, p. 42), afirma que:

> "o significado geométrico do valor absoluto de x é a distância entre o ponto x da reta real e o ponto O da abscissa zero; além disso, a distância entre dois pontos quaisquer, dados a e b reais, é $|a - b| = |b - a|$".

Sendo assim tem-se $|0 - x| = |x - 0| = |x|$, onde zero é a origem das distâncias do ponto x em relação ao ponto O, como mostra a Figura 3.2.

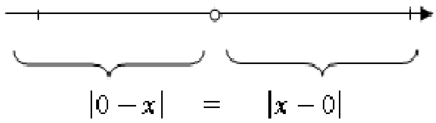


Figura 3.2: Representação geométrica da reta.

Por definição, $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

De acordo com a notação a ser utilizada aqui, de modo geral, a distância entre dois pontos quaisquer é representada por $|a - x| = |x - a|$, como mostra a figura 3.3.

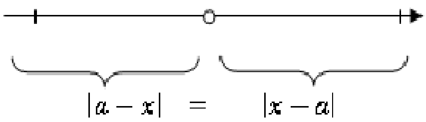


Figura 3.3: Representação geométrica da reta.

Por definição, $|x - a| = \begin{cases} x - a, \ se \ x \geq a \\ -(x - a), \ se \ x < a \end{cases}$

Consequentemente, o número a, abscissa de O, passa a ser a origem das distâncias entre o ponto de abscissa x e o ponto a. Portanto, justifica-se dizer que.

> "o ponto O, por simplicidade, corresponde à abscissa de zero. Assim quando x se aproxima de zero" (Caraça:289) citado por Amaral (2004, p.43).

4 LIMITE

4.1 INTRODUÇÃO

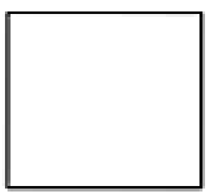
A ideia de limite é utilizada no intuito de expor o comportamento de uma função nos momentos de aproximação de determinados valores. Aparentemente, a ideia de se aproximar o máximo possível de um ponto ou valor e, mesmo assim, nunca alcançá-lo, não é intuitivamente atraente. Para Weber (1986, p. 135), " conceitos do tipo limite são utilizados frequentemente no pensamento não matemático e na conversação".

Weber (1986) cita alguns exemplos como: A produtividade máxima teórica de uma máquina ou de uma fábrica é um limite, seu desempenho ideal (ou limitante) que nunca é atingido na prática, mas que pode ser aproximado arbitrariamente; O desempenho de qualquer dispositivo mecânico ou eletrônico, para o qual os engenheiros podem calcular um desempenho (ou limitante); esta mesma ideia se aplica aos lucros sob condições ideais; à quilometragem da gasolina sob condições ideais; como também existem limites inferiores de custo, desperdício e desgaste.

4.2 IDEIA INTUITIVA DE LIMITE

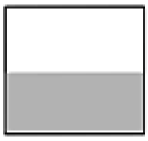
Para que ocorra a ideia intuitiva de limite é suficiente a análise de alguns exemplos.

Exemplo 4.1. Consideremos uma figura de forma quadrada e de área igual a 1.



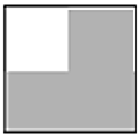
Vamos desenvolver as seguintes etapas:

a) Preencher metade dessa figura.



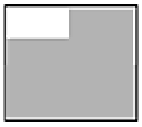
Área preenchida: $\frac{1}{2}$

b) Preencher metade do que restou em branco.



Área preenchida: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

c) Preencher, novamente, metade do que restou em branco.



Área preenchida: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Continuando esse processo sucessiva e indefinidamente, a área hachurada vai preenchendo quase todo o quadrado inicial, isto é, a medida da área vai se aproximando de 1 ou tendendo a 1.

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8}, \ldots, \boxed{1}$$

Dizemos então que o limite desse processo, quando o número de partes preenchidas tende a um valor maior do que qualquer valor imaginável, é preencher a figura toda, ou seja, obter uma área preenchida igual a 1. Quando dizemos que a área preenchida tende a 1, significa que ela se aproxima de 1, sem no entanto assumir esse valor.

Exemplo 4.2. Considere uma pessoa que observa o ângulo de elevação do topo de um prédio, da qual ela se aproxima, em uma mesma direção, conforme a Figura 4.1.

Observe que quando a distância **d** dessa pessoa ao prédio diminui cada vez mais se aproximando de zero, o ângulo θ se aproxima de 90°. A pessoa poderá aproximar-se o quanto quiser do prédio, porém não pode ultrapassar a parede do prédio. Assim

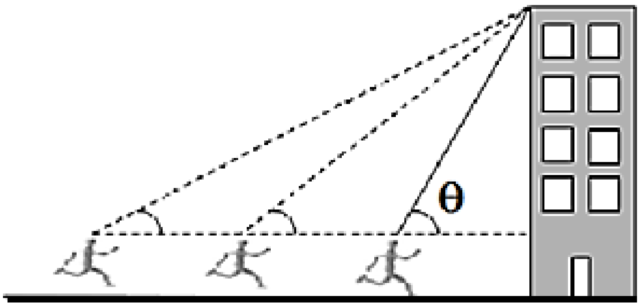


Figura 4.1: Ideia intuitiva de limite

o prédio é o limite. Logo o ângulo de elevação de θ é a função da distância **d** (quanto menor a distância, maior é o ângulo de elevação), assim podemos escrever que $\theta = f(d)$. Podemos então dizer que "o ângulo de elevação θ tendeu ao limite 90º quando a distância **d** se aproximou de zero".

Exemplo 4.3. Um carro em movimento progressivo que passa pela origem da trajetória em t = 0s, com uma velocidade escalar constante de 6m/s. A Tabela 4.1 demonstra as posições do objeto ao longo do tempo.

Tabela 4.1: Posição de (x em m), em funçao do tempo (t em s)

t (s)	**x (m)**
0	0
1	6
2	12
3	18
4	24
5	30

Plotando os dados em um gráfico (Figura 4.2) posição (x) em função do tempo (t), é possível explorar limites de função.

Questões como "O que acontece com os valores de posição, quando o tempo se aproxima de 4 s?" ou "O que acontece com os valores de posição quando o tempo se aproxima de zero?". A partir desses questionamentos surgem as respostas:

i) Os valores de posição para um tempo próximo de 4s são próximos de 24m. Assim, é possível demonstrar que, quanto mais próximo de 4s for o tempo, mais próximo ele estará da posição 24m. Logo, é possível escrever a função de limite (Equação 4.1).

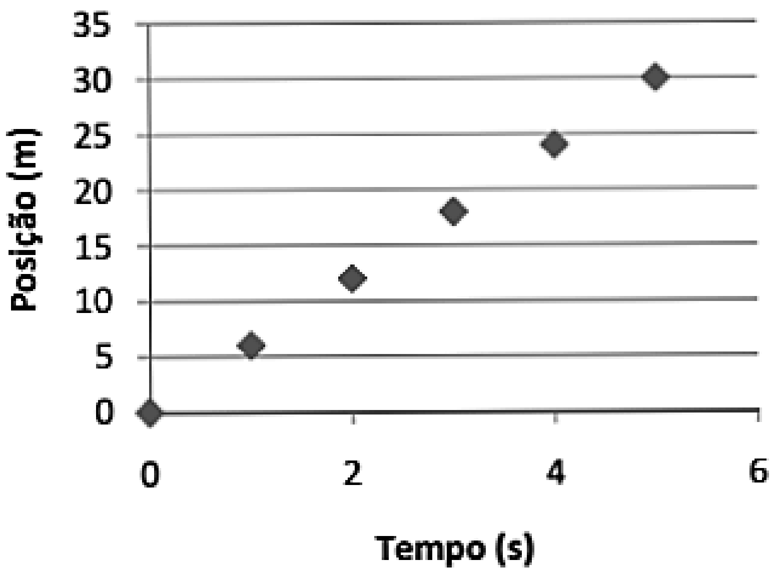


Figura 4.2: Gráfico *x(t)*.

$$\lim_{t \to 4} x\left(t\right) = 24 \tag{4.1}$$

ii) Os valores de tempo próximos a 0s, a posição do objeto tende a também a 0m. Diferente do que ocorreu no primeiro questionamento, neste caso só é possível ter valores de tempo acima de zero. Com isso, explica-se o limite pela esquerda e pela direita. Assim, é possível escrever as funções de limite da função. Para valores de tempo que se aproximam de zero pela direita, a posição tende a zero (Equação 4.2). Mas não existem valores de tempo que se aproximam de zero pela esquerda (Equação 4.3)

$$\lim_{t \to 0^+} x\left(t\right) = 0 \tag{4.2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} x\left(t\right) = \nexists \tag{4.3}$$

Exemplo 4.4. Tendo um tanque cheio de água, ao abrir uma tampa no fundo do reservatório, a água iniciará o escoamento. Supondo que sua taxa inicial de vazão seja de 4,0 L/s , o que acontece com esta vazão ao longo do tempo? Observa-se que a vazão da água diminui, isto porque a vazão depende diretamente da pressão exercida pela altura da coluna de água do tanque e com o escoamento da água, esta coluna diminui sua altura.

Ilustrando essa situação em um gráfico (Figura 4.3), observa-se que a taxa de vazão (V, em L/s) diminui em função do tempo (t, em s) até que todo o líquido contido no tanque se tenha esvaído.

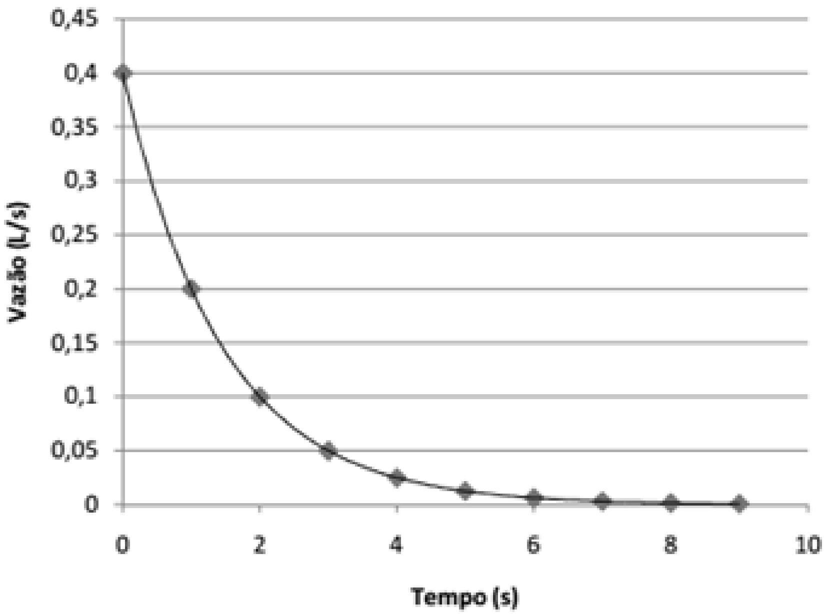


Figura 4.3: Gráfico *V(t)*.

O gráfico acima serviu para se trabalhar limites para o eixo do x tendendo ao infinito. Para a presente função, para valores de tempo muito grandes (infinitos) os valores de vazão se aproximam de zero. Assim, pôde-se escrever a Equação 4.4.

$$\lim_{t \to \infty} V(t) \ = 0 \tag{4.4}$$

Exemplo 4.5. Dada a função $y = x + 2$, pode-se observar no gráfico da Figura 4.4 quais são os valores que y assume quando x está próximo de 2.

Verifica-se que y assume valores próximos de 4. Diz-se, então, que y tende a 4 quando x *tende a 2* ou que o limite da função y é 4 quando x tende a 2, escreve-se simbolicamente com a notação:

$$\lim_{x \to 2} y = 4 \tag{4.5}$$

x	$y = x + 2$
1,7	3,7
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
2	4
2,001	4,001
2,01	4,01
2,1	4,1
2,3	4,3

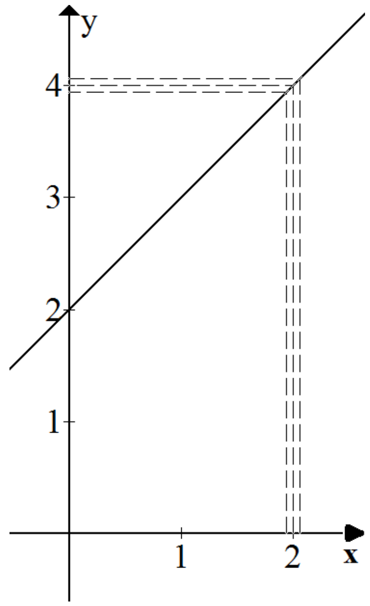


Figura 4.4: Limite de $y = x + 2$ quando x tende a 2

Exemplo 4.6. Dada a função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, já se pode observar um fato mais interessante quando se tenta determinar o limite de y para x tendendo a 2.

No exemplo anterior, x pode assumir o valor 2, pois a função é definida nesse ponto e o valor de y, para $x = 2$, é 4, nada havendo de extraordinário no limite, que coincide com esse valor. A partir dos valores da tabela, traçamos o gráfico da função (Ver Figura 4.5).

x	$y = \frac{x^2-4}{x-2}$
1,997	3,997
1,998	3,998
1,999	3,999
2	-
2,001	4,001
2,002	4,002
2,003	4,003

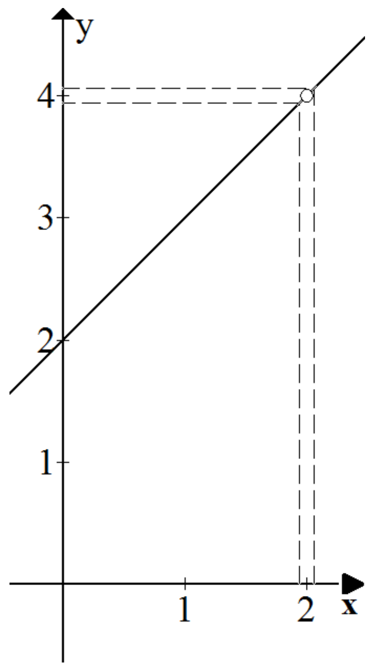


Figura 4.5: Limite da função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ quando x tende a 2

Agora, neste exemplo, a situação é diferente. A função não é definida para

$x = 2$ e não se pode calcular o valor de y nesse ponto. Mas pode-se observar que o valor de y, quando x se aproxima de 2, aproxima-se de 4, como no caso anterior, pois as duas funções assumem os mesmos valores nos mesmos pontos, com exceção do ponto $x = 2$, onde a primeira função e definida e a segunda, não.

De fato, a função $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ pode ser escrita na forma $y = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}$ e, $x \neq 2$, pode ser simplificada, dando origem à função $y = x + 2, \quad x \neq 2$, que é equivalente à função dada. Seu gráfico pode ser visto na Figura 4.5.

Nesse caso, embora y não assuma o valor 4, também se tem:

$$\lim_{x \to 2} y = 4 \tag{4.6}$$

Exemplo 4.7. Consideremos também o gráfico (Figura 4.6) da função f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:$f(x) = \begin{cases} x \ se \ x \leq 3 \\ x + 2 \ se \ x > 3 \end{cases}$

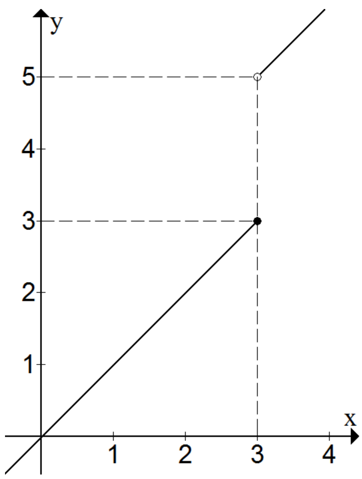


Figura 4.6: Limites laterais

Observe:

- quando x se aproxima de 3 pela esquerda, *f(x)* se aproxima de 3, isto é:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 3 \tag{4.7}$$

- quando x se aproxima de 3 pela direita, *f(x)* se aproxima de 5, isto é:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 5 \tag{4.8}$$

Estes limites são chamados **limites laterais** e, como são diferentes, dizemos que neste caso não existe o limite de *f(x)* quando x tende a 3.

Para que exista o limite, *f(x)* deve se aproximar de um mesmo valor quando x se aproxima de $\boldsymbol{a}$ pela direita ou pela esquerda, isto é:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) \tag{4.9}$$

Exemplo 4.8. A função $y = \dfrac{1}{x^2}$ também tem um ponto, $x = 0$, para o qual não está definida.

Mas observando-se o gráfico da Figura 4.7 o que acontece com a função quando x se aproxima de zero, verifica-se que y assume valores cada vez maiores. Exprime-se essa ideia, dizendo que y tende a infinito quando x tende a zero ou que o limite de y é infinito quando x tende zero, e escreve-se:

$$\lim_{x \to 0} y = \infty \tag{4.10}$$

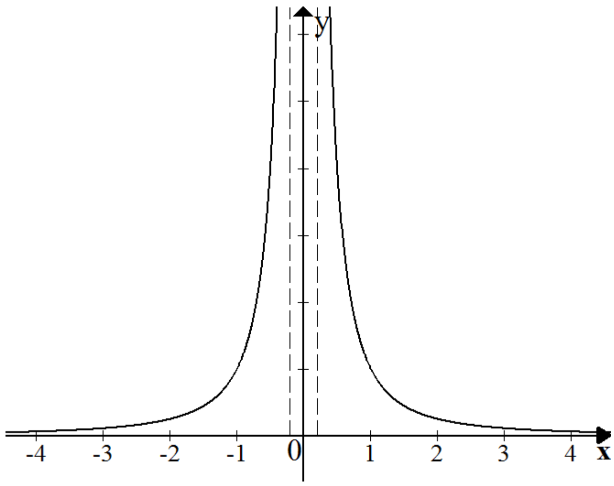


Figura 4.7: Função $y = \dfrac{1}{x^2}$

Exemplo 4.9. Observe agora. A função Montante do capital de R$ 1000 a 5% ao mês de juros simples, supondo que os juros são calculados fração de período. Então, o montante permanece igual por um mês para depois saltar bruscamente para um valor maior e novamente permanecer igual por um mês.

A função $M = 1000 + 50n$, onde n é o tempo em meses, e seu gráfico pode ser visto na Figura 4.8.

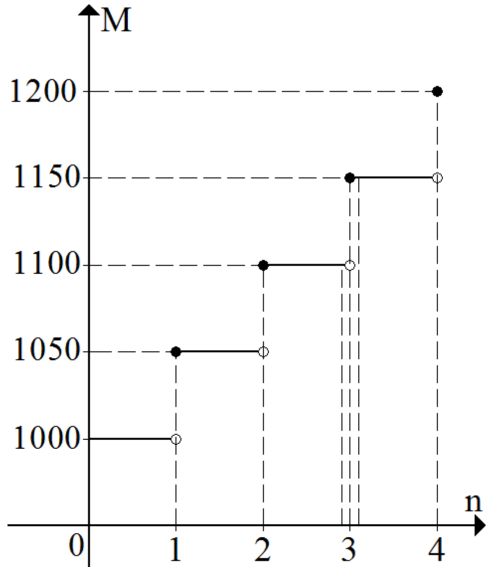


Figura 4.8: Função montante

O que acontece com os valores de M quando n tem valores próximos de 3?

A pergunta não tem resposta única. Se n está próximo de 3, mas é menor que 3, M é 1100. Se n está próximo de 3, mas é maior que 3, M é 1150. Nesse caso, diz-se que não existe o limite de M quando n tende a 3 ou, simbolicamente:

$$\nexists \lim_{n\to 3} M \tag{4.11}$$

Exemplo 4.10. Seja a função $y = \dfrac{1}{x}$ que não é definida para $x = 0$, a partir dos valores da tabela, observe o gráfico da Figura 4.9. Qual é o limite de y quando x tende a zero?

x	$y = \frac{1}{x}$
- 0,002	- 500
- 0,001	- 1000
- 0,0001	- 10000
0	-
0,0001	10000
0,001	100
0,002	500

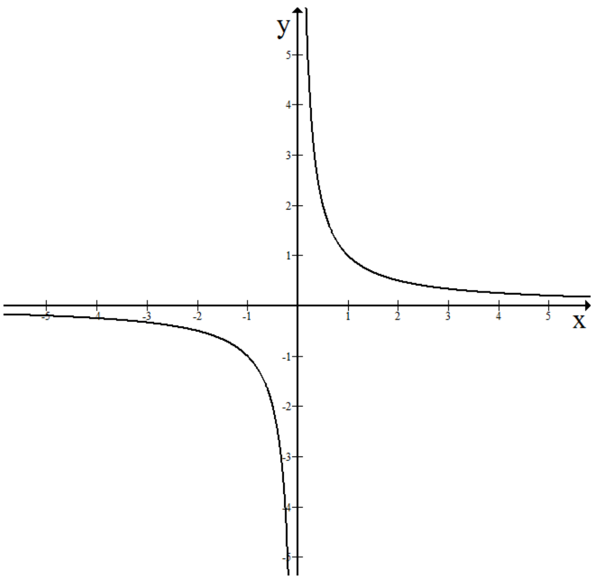


Figura 4.9: Função $y = \dfrac{1}{x}$

Novamente acontece o mesmo que se observou no caso anterior. Se $x < 0$, os valores de y são cada vez menores, quando x tende a zero e diz-se que y tende a $-\infty$. Se $x > 0$, os valores de y ficam cada vez maiores à medida que x se aproxima de zero, isto é y tende a ∞.

Como a resposta não é única, diz-se também nesse caso que não existe o limite de y quando x tende a zero, isto é.

$$\nexists \lim_{x\to 0} y \tag{4.12}$$

4.3 DEFINIÇÃO DE LIMITE

Mostraremos aqui, a definição de limite proposta por (Giovanni, 1992).

Considere o gráfico da função *f(x)*:

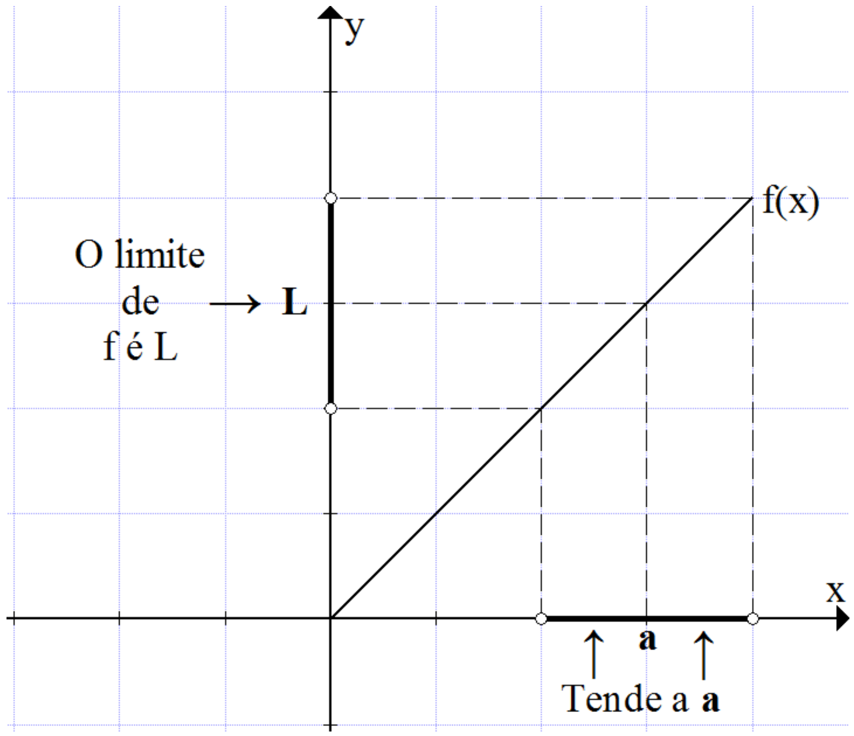


Figura 4.10: Definição de limite

Dizemos que o limite da função *f(x)* quando x tende a ***a*** é igual ao numero real L se, e somente se, os números reais *f(x)* para os infinitos valores de x permanecerem próximos de L, sempre que x estiver muito próximo de ***a***.

Indica-se

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \tag{4.13}$$

De um modo geral para calcularmos o limite de uma função *f(x)* com x tendendo a $\boldsymbol{a}$, basta que façamos a substituição da variável $\boldsymbol{x}$ na função pelo valor de $\boldsymbol{a}$.

Vejamos alguns exemplos básicos.

1) $\lim_{x\to 3}(2x-1)$

2) $\lim_{x\to -2}(x^2+3x-1)$

3) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-1}{x+1}$

Resoluções:

1) $\lim_{\mathrm{x}\to 3}(2\mathrm{x}-1) = 2(3)-1 = 6-1 = 5$

2) $\lim_{\mathrm{x}\to -2}(\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}-1) = (-2)^2+3(-2)-1 = 4-6-1 = -3$

3) $\lim_{\mathrm{x}\to 1}\dfrac{\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+1}$

Quando x se aproxima de 1, o valor numérico de (x^2+3x-1) se aproxima de $(1+3-1)$, ou seja, de 3, e o valor numérico de (x + 1) se aproxima de (1 + 1), ou seja, de 2. Logo, o valor numérico de $\dfrac{\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+1}$ se aproxima de $\dfrac{3}{2}$. Poderíamos aplicar diretamente o valor numérico de x = 1 no limite e calculá-lo de maneira mais rápida. Assim:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-1}{x+1} = \frac{1^2+3(1)-1}{1+1} = \frac{3}{2}. \tag{4.14}$$

4.4 LIMITES INFINITOS

O símbolo de infinito, denotado por ∞, não expressa um número real, mas uma tendência do limite. Intuitivamente, podemos dizer que:

- Quando $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ simboliza que $f(x)$ cresce ilimitadamente além de qualquer número real x dado, à medida que x se aproxima de x_0.
- Quando $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ simboliza que $f(x)$ decresce ilimitadamente além de qualquer número real x dado, à medida que x se aproxima de x_0.

Já quando tomando o limite de f(x) quando x cresce (ou decresce) ilimitadamente utilizamos, respectivamente, os símbolos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad e \lim_{x\to-\infty} f(x) \tag{4.15}$$

4.5 CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO

Seja f uma função e x_0 um ponto de seu domínio. Dizemos que f é contínua em x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{4.16}$$

Caso $\lim_{x\to x_0} f(x)$ não exista ou exista, mas seja diferente $f(x_0)$ diremos que $f(x)$ é descontínua em x_0

Assim devem ser satisfeitas as seguintes condições:

a) Existe $f(x_0)$

b) Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$

c) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemplo 4.11. Verificar se a função $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ é contínua em $x = 3$.

Resolução: Cálculo de $f(3)$:

$$f(3) = \frac{3^2-4}{3-2} = 5$$

Cálculo de $\lim_{x\to 3} f(x)$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 3} x+2 = 5 \tag{4.17}$$

Como $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$, $f(x)$ é contínua em $x = 3$.

a) Sendo $R(q)$ a função receita total de q unidades produzidas e vendidas de um produto, definida por:

$$R(q) = \begin{cases} q & , \ se \ 0 \leq q \leq 20; \\ 1,1 \ .q & se \ q > 20. \end{cases}$$

Utilizando a definição mostraremos que a função R é descontínua em q = *20.*

Solução: De fato, temos $R(20) = 20$ mostrando que *R(q)* existe, mas o $\lim_{x \to 20} R(q)$ não existe, pois:

$$\lim_{x \to 20^+} R(q) = 1,1 \ .20 = 22 \tag{4.18}$$

$$\lim_{x \to 20^-} R(q) = 20 \tag{4.19}$$

Portanto, a função R é descontínua em q.

A seguir esboçamos o comportamento da função R(q) na Figura 4.11.

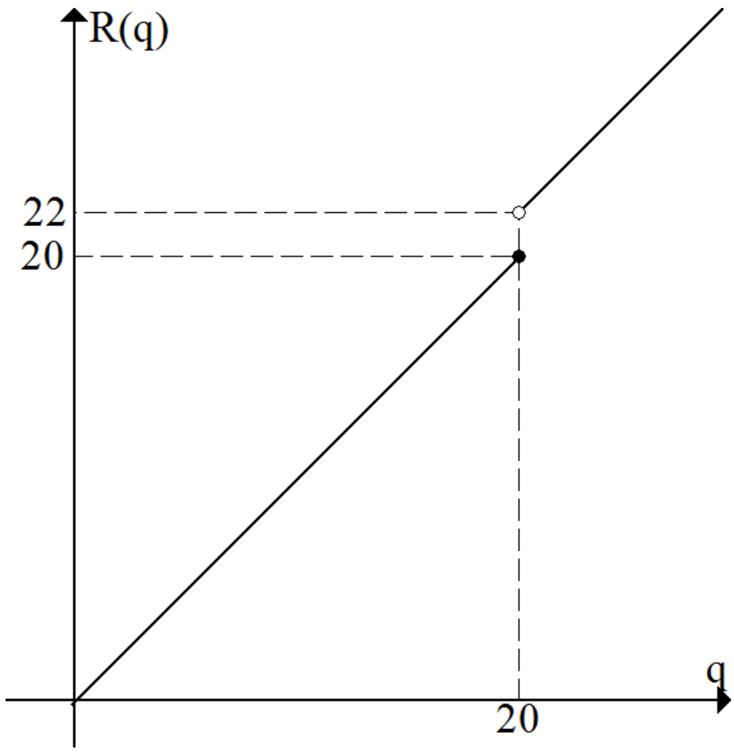


Figura 4.11: Gráfico da função $R(q)$

5 DERIVADAS

A introdução deste conceito pode ser acompanhada de aplicações que pode facilitar o entendimento, de forma clara e objetiva, buscando oferecer um embasamento teórico mínimo para o estudante que procura ingressar aos cursos de exatas do ensino superior.

5.1 TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO

Em nosso dia a dia, pensamos muitas vezes na variação de grandezas, como, por exemplo, o tempo gasto para chegar à escola, o quanto engordamos ou emagrecemos no último mês, a variação da temperatura num dia específico, a velocidade com que nos deslocamos, e assim por diante.

Por exemplo, de nada adianta saber que determinada aplicação de dinheiro rende um certo valor, se não soubermos em quanto tempo ocorrerá tal variação de capital. Pode acontecer que uma grandeza varie na dependência de apenas uma, ou de várias outras, sendo difícil isolar uma única variável independente. Estaremos estudando aquelas funções que dependem de somente uma variável.

De modo geral, quando uma grandeza y está expressa em função de outro x, ou seja, *y=f(x)*, observamos que, para uma dada variação de x, ocorre, em correspondência, uma variação[3] de y, desde que y não seja uma função constante.

Vejamos o seguinte exemplo, mostrado na Figura 5.1: para um dado intervalo de comprimento Δx, no qual x varia, funções que dependem de x sofrem variações diferentes.

Dadas as funções $y = f_1(x) = 2x + 4$, $y = f_2(x) = 2x^2$, $y = f_3(x) = \dfrac{x^2}{4}$ e, considerando $\Delta x = 1,5$, a partir do mesmo ponto, temos:

Assim, para a mesma variação em x, as funções dadas variam de maneiras diferentes.

[3] A variação de uma grandeza $y = f(x)$, quando x varia num determinado intervalo **I**, é obtida através da diferença entre o valor final e o valor inicial.

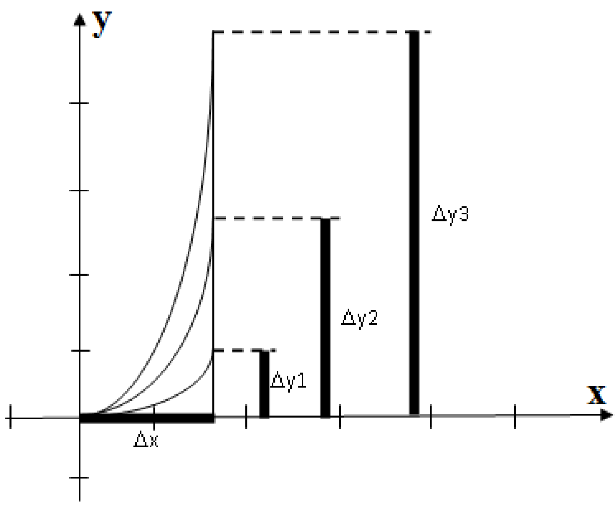


Figura 5.1: Variação de y em função da variação de x.

$y = f_1(x) = 2x + 4$	$y = f_2(x) = 2x^2$	$y = f_3(x) = \dfrac{x^2}{4}$
$\Delta y_1 = 7$	$\Delta y_2 = 4,5$	$\Delta y_3 = 0,5625$

De um modo geral temos: Seja f uma função definida num conjunto D e x_0 e $x_0 + \Delta x$ dois pontos de D, quando a variável x passa do valor x_0 para o valor $x_0 + \Delta x$ sofrendo uma variação Δx, o correspondente valor da função passa de $f(x_0)$ para o valor $f(x_0 + \Delta x)$ sofrendo portanto, uma variação.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Conforme mostra a Figura 5.2:

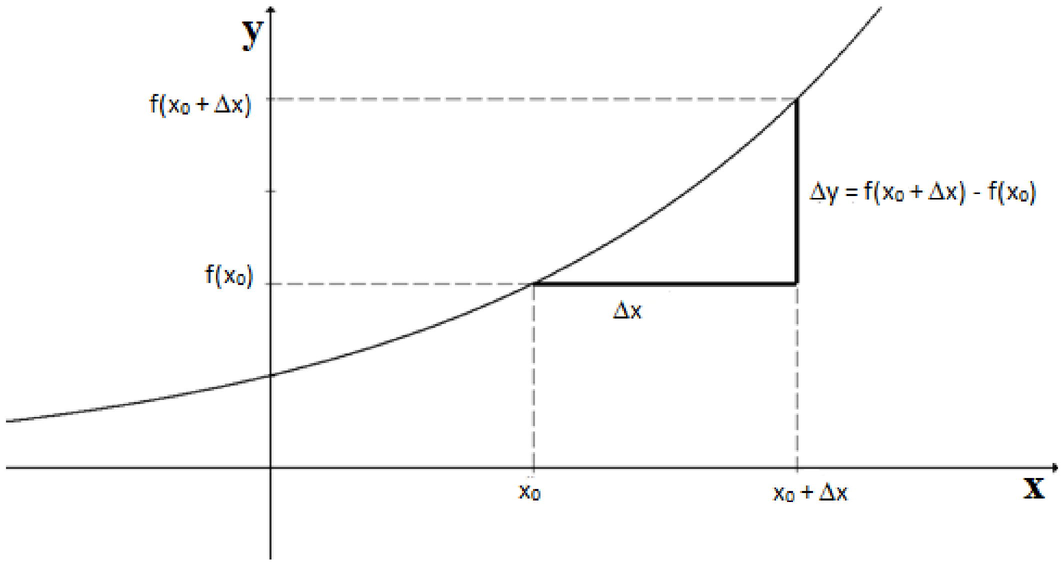


Figura 5.2: (SILVA, Sebastião Medeiros da: 1999, p. 160).

O quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\,(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

recebe o nome de *taxa média de variação* quando passa de x_0 para o valor $x_0 + \Delta x$ e expressa a variação média sofrida pelos valores da função entre estes dois pontos.

Exemplo 5.1. Seja a função f tal que $f\,(x) = 3x + 1$, com $x \in R$.

Sejam $x_0 = 1$ e $x_0 + \Delta x = 4 \;\therefore\; \Delta x = 3$

Então: $f\,(x_0) = 4$ e $f\,(x_0 + \Delta x) = 13$

Logo, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f\,(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{13 - 4}{3} = 3$

Vejamos o gráfico na Figura 5.3.

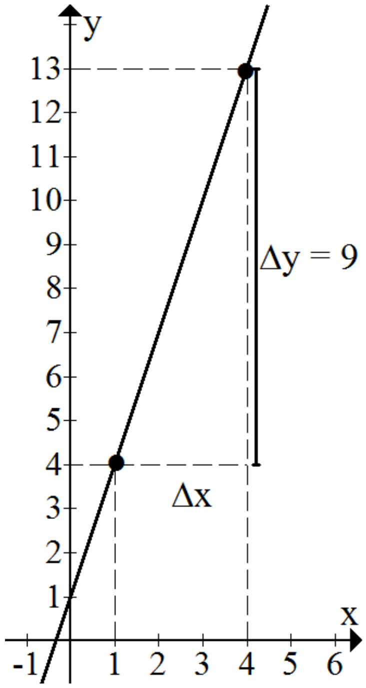


Figura 5.3: (SILVA, Sebastião Medeiros da: 1999, p. 160).

5.2 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO

O conhecimento da taxa média de variação não nos fornece uma quantidade razoável de informações para podermos decidir como a variável dependente se comporta em relação à variável independente em um ponto específico. Para tanto, o conhecimento da taxa de variação em cada ponto do domínio será muito mais eficaz.

Conforme vimos no item anterior, a taxa média de variação da função f é expressa pelo quociente.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Vamos estudar o comportamento dos valores desta taxa média para pequenas variações Δx.

Uma das maneiras de examinarmos este comportamento consiste em avaliarmos o limite do quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ quando Δx tende a zero ($\Delta x \to 0$), pois tal limite caso exista, nos fornece um valor aproximado do quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para pequenos valores de Δx.

Vejamos o seguinte exemplo:

Se $f(x) = x^2$, a taxa média de variação entre x_0 e $x_0 + \Delta x$ é dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} =$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

Mas, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$ que é um valor aproximado de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, para pequenos valores de Δx.

5.3 DEFINIÇÃO

Seja a função $f(x)$ definida no intervalo aberto]a , b[e x_0 um ponto deste intervalo.

O limite,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Quando existe, isto é, quando é um número real, recebe o nome de *derivada da função f no ponto* x_0. Indica-se por:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Sendo, $\Delta x = x - x_0$ então $x = \Delta x + x_0$ e, quando $\Delta x \to 0$ podemos dizer que $x \to x_0$, assim a expressão acima pode ser da forma:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Utilizaremos neste estudo as seguintes notações para as derivadas: $f'(x)$ ou y'.

Nota: A derivada de uma função num ponto é a taxa de variação instantânea.

Exemplo 5.2. a) Usando o exemplo da Sessão 5.1, temos:

A função f tal que $f\,(x) = 3x + 1$, $x_0 = 1$ com $x \,\epsilon\, R$. Sendo, $\Delta x = x - x_0$, então $x = \Delta x + x_0$ e, quando $\Delta x \to 0$.

Vamos determinar a derivada da função no ponto $x_0 = 1$, logo:

$$f\,(x) = 3x + 1$$

$$f\,(x_0) = 3x_0 + 1 \Rightarrow f\,(1) = 3.1 + 1 = 4$$

Assim,

$$f^{'}\,(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f\,(x) - f(1)}{x - 1}$$
$$f^{'}\,(1) = \lim_{x \to 1} \frac{3x + 1 - 4}{x - 1}$$
$$f^{'}\,(1) = \lim_{x \to 1} \frac{3x + 1 - 4}{x - 1}$$
$$f^{'}\,(1) = \lim_{x \to 1} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$$

Portanto, $f^{'}\,(1) = 3$

b) Determinar a derivada da função $f\,(x) = 3x^2$ no ponto de abscissa $x_0 = 2$

Vamos aplicar a definição e resolver o problema de duas maneiras:

1ª maneira:

Se $x_0 = 2 \;\Rightarrow f\,(x_0) = f\,(2) = 3\,.2^2 = 12$

Logo:

$f^{'}\,(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f\,(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, assim, temos que:

$$f^{'}\,(2) = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2}$$
$$f^{'}\,(2) = \lim_{x \to 2} \frac{3\,(x + 2)\,(x - 2)}{x - 2}$$
$$f^{'}\,(2) = \lim_{x \to 2} 3(x + 2)$$
$$f^{'}\,(2) = 12$$

2ª maneira:

$$f\,(x_0 + \Delta x) = f\,(2 + \Delta x) = 3(2 + \Delta x)^2 = 12 + 12\Delta x + 3(\Delta x)^2$$

$$f\,(x_0) = 3\ .2^2 = 12$$

Logo:

$f^{'}\,(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f\,(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, assim, temos que:

$$f^{'}\,(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12 + 12\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 12}{\Delta x}$$
$$f^{'}\,(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$f^{'}\,(2) = \lim_{\Delta x \to 0} (12 + 3\Delta x)$$
$$f^{'}\,(2) = 12$$

5.4 DERIVADAS FUNDAMENTAIS

5.4.1 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO CONSTANTE

Se k é uma constante e $f\,(x) = k$, para todo x real, então $f^{'}\,(x) = 0$, isto é:

$$f\,(x) = k \Rightarrow f^{'}\,(x) = 0$$

Exemplo 5.3. $f\,(x) = 3\ \Rightarrow f^{'}\,(x) = 0$

Exemplo 5.4. $f\,(x) = -\sqrt[3]{2}\ \Rightarrow f^{'}\,(x) = 0$

5.4.2 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO POTÊNCIA

Se $f\,(x) = x^n$, com $n \in R$, então $f^{'}\,(x) = n\ .\ x^{n-1}$, isto é:

$$f\,(x) = x^n\ \Rightarrow f^{'}\,(x) = n\ .\ x^{n-1}$$

Exemplo 5.5. $f\,(x) = x\ \Rightarrow f^{'}\,(x) = 1\ .\ x^{1-1} = 1\ .\ x^0 = 1$

Exemplo 5.6. $f\,(x) = x^5 \Rightarrow f^{'}\,(x) = 5\ .\ x^{5-1} = 5x^4$

5.5 DERIVADA DO PRODUTO DE UMA CONSTANTE POR UMA FUNÇÃO

Se $g(x) = k\ .f(x)$, com k igual a uma constante e $f(x)$ derivável, então $g^{'}(x) = k\ .f^{'}(x)$, isto é:

$$g(x) = k\ .f(x) \Rightarrow\ g^{'}(x) = k\ .f^{'}(x)$$

Exemplo 5.7. $f(x) = 4x^7\ \ \Rightarrow f^{'}(x) = 4\ .7\ .\ x^{7-1} = 28x^6$

Exemplo 5.8. $f(x) = \frac{2}{3}x^6\ \ \Rightarrow f^{'}(x) = \frac{2}{3}\ .6\ .\ x^{6-1} = 4x^5$

5.6 PROPRIEDADES OPERACIONAIS

5.6.1 DERIVADA DE UMA SOMA (OU DIFERENÇA) DE FUNÇÕES

Se as funções $u(x)$ e $v(x)$ são deriváveis, a derivada da soma ou da diferença é igual à soma ou à diferença das derivadas de cada uma das funções. Isto é.

Se $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f^{'}(x) = u^{'}(x) + v^{'}(x)$

Se $f(x) = u(x) - v(x) \Rightarrow f^{'}(x) = u^{'}(x) - v^{'}(x)$

De um modo mais simples, temos:

$$y = u + v \Rightarrow y^{'} = u^{'} + v'$$

$$y = u - v \Rightarrow y^{'} = u^{'} - v'$$

Exemplo 5.9. Dada a função $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$, calcular $f^{'}(x)$.

Resolução:

$$f^{'}(x) = 2.3.x^{3-1} + 5.2.x^{2-1} - 7.x^{1-1} + 0$$

$$f^{'}(x) = 6x^2 + 10x - 7x^0 + 0$$

$$f^{'}(x) = 6x^2 + 10x - 7$$

5.7 DERIVADA DO PRODUTO ENTRE DUAS FUNÇÕES

Se as funções $u(x)$ e $v(x)$ são deriváveis, então:

$$f\left(x\right) = u\left(x\right).\ v\left(x\right) \ \Rightarrow \ f^{'}\left(x\right) = u^{'}\left(x\right).v\left(x\right) + u\left(x\right).v^{'}(x)$$

De um modo mais simples, temos:

$$y = u.v \ \Rightarrow y^{'} = u^{'}.v + u.v'$$

Exemplo 5.10. Calcular a derivada da função $f\left(x\right) = \left(1 + 2x\right)\left(5 - 3x\right)$.

Resolução:

Fazendo $y = \left(1 + 2x\right)\left(5 - 3x\right)$, onde:

$u = 1 + 2x$ e $v = 5 - 3x$

Logo, $u^{'} = 2$ e $v^{'} = -3$, assim:

$$y = u.v \ \Rightarrow y^{'} = u^{'}.v + u.v'$$

$$y^{'} = 2.\left(5 - 3x\right) + \left(-3\right)\left(1 + 2x\right)$$

$$y^{'} = 10 - 6x - 3 - 6x$$

$$y^{'} = 7 - 12x$$

5.8 DERIVADA DO QUOCIENTE ENTRE DUAS FUNÇÕES

Se $f\left(x\right) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, com $v(x) \neq 0$, então:

$$f^{'}\left(x\right) = \frac{u^{'}\left(x\right).v\left(x\right) - u\left(x\right).v^{'}(x)}{\left[v(x)\right]^{2}}$$

De um modo mais simples, temos:

$$y = \frac{u}{v} \ \Rightarrow y^{'} = \frac{u^{'}v - uv'}{v^{2}}$$

Exemplo 5.11. Dada a função $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$, calcular $f^{'}(x)$.

Resolução:

Fazendo $y = \dfrac{x^2+1}{x-3}$, onde:

$$u = x^2 + 1 \ \Rightarrow u^{'} = 2x$$

$$v = x - 3 \ \ \Rightarrow v^{'} = 1$$

Logo:

$$\begin{aligned} y^{'} &= \frac{u^{'}v - uv'}{v^2} \\ y^{'} &= \frac{2x(x-3) - 1(x^2+1)}{(x-3)^2} \\ y^{'} &= \frac{2x^2 - 6x - x^2 - 1}{x^2 - 6x + 9} \\ y^{'} &= \frac{x^2 - 6x - 1}{x^2 - 6x + 9} \end{aligned}$$

5.9 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA

Sabemos que a tangente a uma circunferência num ponto é definida como uma reta que tem um ponto comum com a circunferência e todos os outros exteriores ao círculo determinado pela circunferência, conforme Figura 5.4.

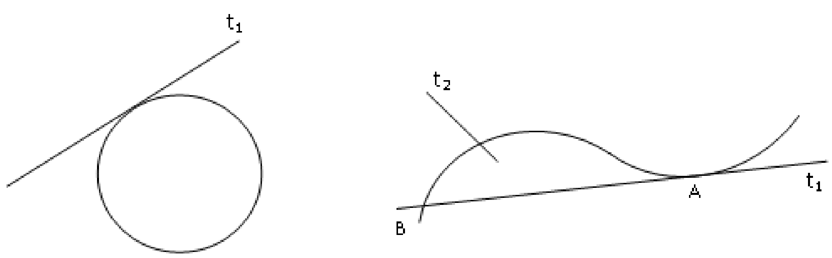


Figura 5.4: Reta t_1 tangente ao círculo

Observe que a reta t_1, tangente à curva no ponto A intercepta também a curva no ponto B, a reta t_2 não é tangente à curva, mas tem com esta um único ponto em comum.

Problemas com esse desafiaram durante muito tempo a inteligência dos matemáticos que, buscando sua solução, contribuíram para o desenvolvimento da Matemática.

Para estudar esse problema, consideremos o gráfico da função $y = f(x)$ indicado na Figura 5.5.

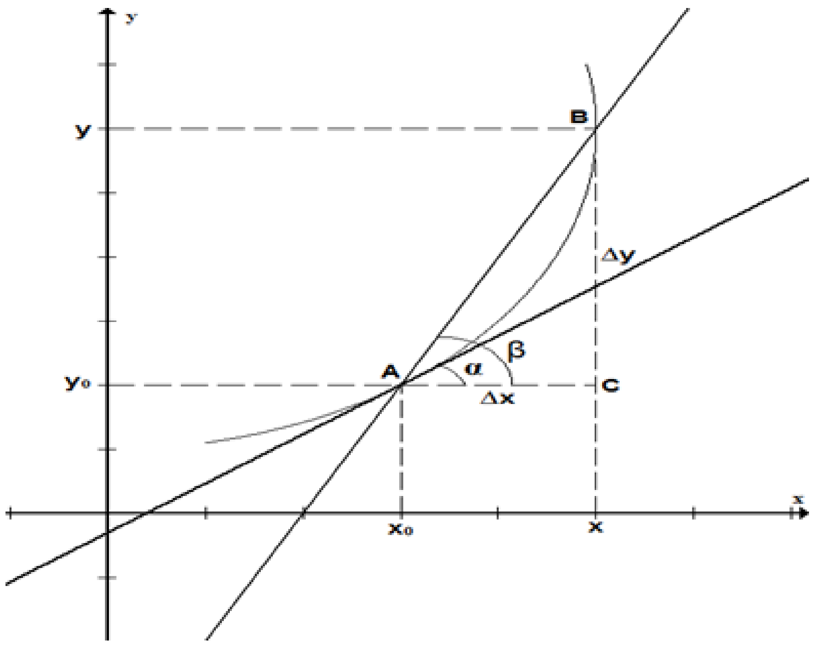


Figura 5.5: Interpretação geométrica da derivada.

Na Figura 5.5, temos:

- s é uma reta secante à curva;
- t é uma reta tangente à curva no ponto A *(x_0, y_0);*
- $\tan\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (considerando o triangulo ABC).

Note que quando $\Delta x \to 0$, o ponto B tenderá ao ponto A e a reta secante s tenderá à reta tangente t; como consequência, o ângulo β tenderá a α, e teremos: $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f\,(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ que é a derivada da função $f(x)$ no ponto de abscissa x_0 e indica-se por $f^{'}(x_0)$.

6 CÁLCULO INTEGRAL

6.1 INTEGRAL INDEFINIDA

6.1.1 DEFINIÇÃO

Seja f uma função definida num intervalo I. Dizemos que uma função P definida em I é uma primitiva de f quando a derivada da função P é igual a função f.

$$\mathbf{P'(x) = f(x) \text{ para todo } x \in I}$$

Por exemplo, se f(x) = x^2, então, P(x) = $\frac{x^3}{3}$ é uma primitiva de f, pois, P'(x) = x^2 = f(x), para todo x ∈ R.

Uma consequência imediata da definição consiste no fato de que, se P é uma primitiva de f, P + C (C é uma constante qualquer) é também uma primitiva de f, pois (P+C)' (x) = P' (x) +C' = P' (x) = f (x), para todo x ∈ I, visto que a derivada de uma constante é zero. Assim: 9x; 9x – 7; 9x + 12; 9x + C são todas primitivas de f (x) =9.

Uma outra consequência da definição é que se P_1 e P_2 são duas primitivas de f, então $P_1 - P_2$=C, onde C é uma constante. De fato, (P_1-P_2) ' (x) = P_1' (x) -P_2' (x) = f (x) - f (x) = 0, para todo x ∈ I. Logo P_1-P_2= C, onde C é uma constante arbitrária. Utilizando duas primitivas acima, onde a função f(x) = 9 e as primitivas P_1 = 9x + 12 e P_2 = 9x - 7, temos que P_1'(x) - P_2'(x) = f(x) - f(x) = 9 – 9 = 0 para todo x ∈ I.

Então, sendo P uma primitiva de f, toda primitiva de f tem a forma P+C. A expressão P+C onde P é uma primitiva de f e C é uma constante qualquer recebe o nome de integral indefinida de f e será indicada pela notação $\int f(x)\,dx$ (integral indefinida de f).

Tabela 6.1: Alguns exemplos

Função	**Primitiva**	**Integral Indefinida**
$f(x)$	$P(x)$	$\int$ f(x)dx
K, k constante real	kx	$kx + c$
x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^2}{2} + c$
x^2	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^3}{3} + c$
x^n, $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$+c

6.2 PROPRIEDADES

6.2.1 PROPOSIÇÃO I

Se P_1 é uma primitiva de f e P_2 é uma primitiva de g, então $P_1 \pm P_2$ é uma primitiva de f $\pm$ g, pois $(P_1 \pm P_2) = P_1' \pm P_2' = f \pm g$.

$$\int [\mathrm{f(x)} \pm \mathrm{g(x)}]\,\mathrm{dx} = \int \mathrm{f\,(x)\,dx} \pm \int \mathrm{g\,(x)\,dx}$$

Exemplo 6.1.

$$\int (\mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^3)\mathrm{dx} = \int \mathrm{x}^2\mathrm{dx} + \int \mathrm{x}^3\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{x}^3}{3} + \frac{\mathrm{x}^4}{4} + \mathrm{c}$$

6.2.2 PROPOSIÇÃO II

Se P é uma primitiva de f e k é uma constante, então, k.P é uma primitiva de k.f, pois (k.P)' = k.P' = k.f.

$$\int \mathrm{kf(x)dx} = \mathrm{k} \int \mathrm{f(x)dx}$$

Exemplo 6.2.

$$\int 4\mathrm{x}^2\mathrm{dx} = 4 \int \mathrm{x}^2\mathrm{dx} = 4\frac{\mathrm{x}^3}{3} + \mathrm{c}$$

6.3 INTEGRAL DEFINIDA

6.3.1 DEFINIÇÃO

Seja f uma função contínua num intervalo [a, b]. Os pontos a = $x_0 < x_1 < x_2 <$ ... $< x_{n=} b$ (figura 1) definem uma subdivisão do intervalo [a, b] em intervalos parciais $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimento $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Em cada um destes intervalos consideremos um ponto p_i tal que $x_{i-1} < p_i < x_i$ (Ver Figura 6.1).

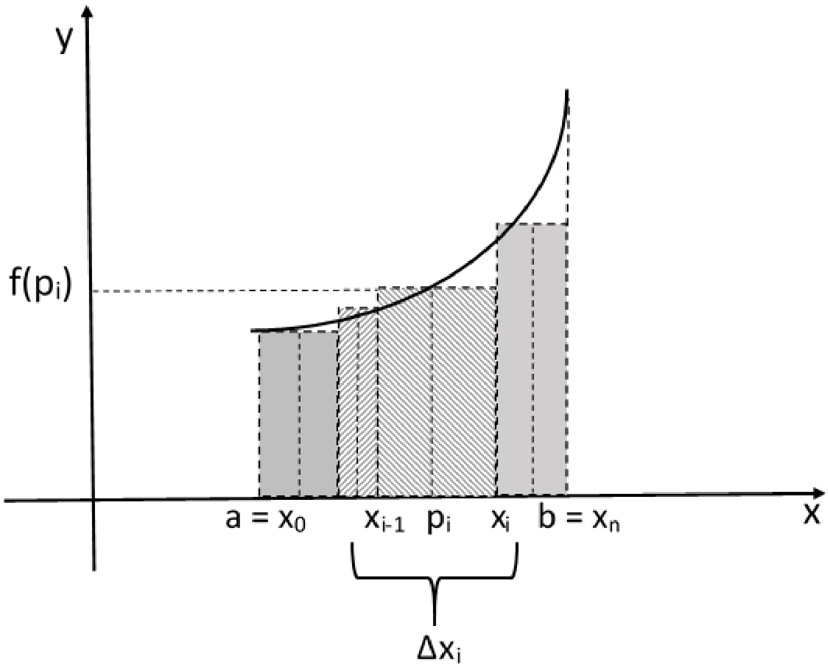


Figura 6.1: Soma de Riemann.

Existe uma soma de subdivisões adotadas chamada de soma de Riemann[4] da função f dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} f(pi)\Delta x_i$$

O limite

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i$$

[4]Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenz, Reino de Hanôver, 17 de Setembro de 1826 Selasca, Verbania, 20 de Julho de 1866) foi um matemático alemão, com contribuições fundamentais para a análise e a geometria diferencial, possuidor de uma das mentes brilhantes mais originais e profundas do século XIX..

recebe o nome de integral da função sobre o intervalo [a, b] e será indicado pela notação $\int_a^b f(x)\,dx$ (integral de f sobre [a, b]).

Assim, temos que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i$$

Seja uma função f não negativa sobre [a, b], a soma de Riemann de f representa um valor aproximado da área da figura limitado pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas retas x = a e x = b. Neste caso a área na Figura 6.2 é dada como sendo o número $\int_a^b f(x)\,dx$.

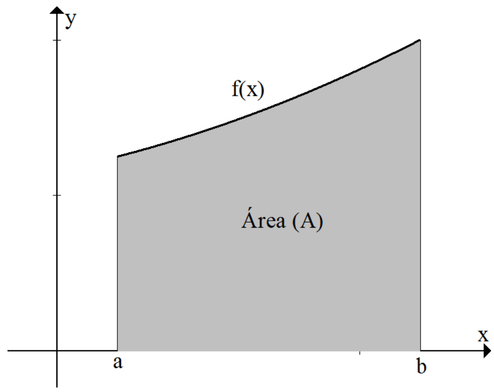


Figura 6.2: $A = \int_a^b f(x)\,dx$

6.3.2 CÁLCULO DA INTEGRAL DEFINIDA

A necessidade de calcular áreas de figuras planas onde seus lados necessariamente não são segmentos de retas e sim curvas, se introduziu o cálculo da integral definida de f sobre [a, b], onde pode ser facilmente realizado quando conhecemos uma primitiva de P de f, pois, neste caso, o valor da integral é dado simplesmente por P(b) - P(a).

Teorema. Se f é uma função contínua em [a, b] e se P é uma primitiva de f, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = P(b) - P(a)$$

A diferença P(b) - P(a) poderá ser indicada pela notação $P(x)\big|_a^b$, assim:

$$\int_a^b f(x)\,dx = P(x)\Big|_a^b = P(b) - P(a)$$

Exemplo 6.3. Encontre a área na Figura 6.3 limitada pelo gráfico da função f(x) = x, pelo eixo OX e pelas retas x = 2 e x = 4.

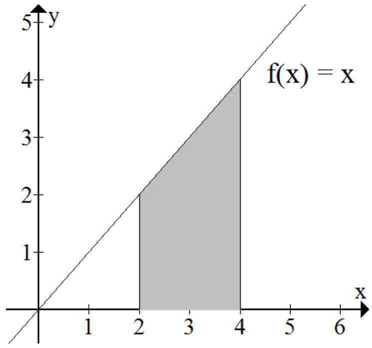


Figura 6.3: Área limitada pelo gráfico da função f(x) = x, pelo eixo OX e pelas retas x = 2 e x = 4.

Resolução. É fácil calcular a área já conhecida usando os conhecimentos de geometria plana, pois, a figura em destaque tem a forma de um trapézio. Logo, $A = \dfrac{(b+B)\,.h}{2} = \dfrac{(2+4)\,.2}{2} = 6$ unidades de área. Usa-se o cálculo da integral definida em destaque onde $\int_a^b f\,(x)\,dx = P(x)\,\Big|_a^b = P\,(b) - P(a)$, e conclui-se que o mesmo ratifica seu valor.

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = P(x)\,\Big|_a^b = P\,(b) - P(a) = \int_2^4 x dx = \frac{x^2}{2}\,\Big|_2^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 8 - 2 = 6.$$

Outros exemplos nos cálculos de áreas das figuras limitadas pelo gráfico das funções, pelo eixo OX e pelas retas x = c e x = d.

Exemplo 6.4. Sendo a função f(x) = 8, as retas x = 2 e x = 7, na Figura 6.4.

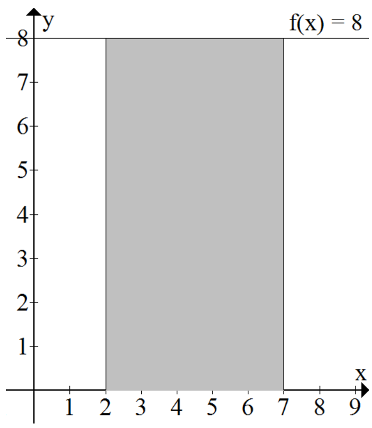


Figura 6.4: Área limitada pelo gráfico da função f(x) = 8, pelo eixo OX e pelas retas x = 2 e x = 7

Pode-se calcular a área na fórmula A = b.h, onde o resultado da área do retângulo tem valor A = (7 - 2).8 = 5.8 = 40 unidades de áreas. No entanto, com o intuito de demonstrar o cálculo de integral na resolução do problema, tem-se:

$$\int_a^b f(x)\,dx = P(x)\Big|_a^b = P(b) - P(a) = \int_2^7 8dx = 8x\Big|_2^7 = 8.7 - 8.2 = 56 - 16 = 40$$

Exemplo 6.5. Sendo a função f(x) = 2x - 6, as retas x = 3 e x = 7, na figura 6.5.

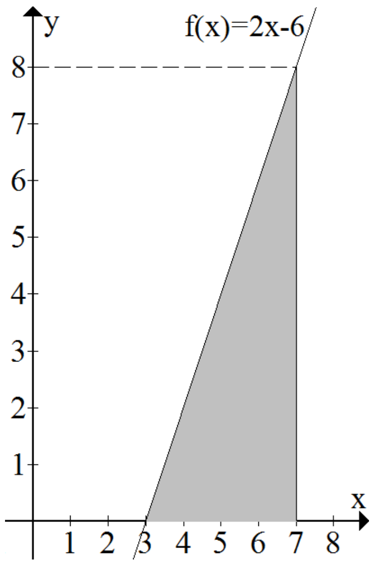


Figura 6.5: Área limitada pelo gráfico da função f(x) = 2x - 6, pelo eixo OX e pelas retas x = 3 e x = 7

Agora trata-se de um simples triângulo retângulo onde sua área é $A = \frac{b.h}{2} = \frac{(7-3).8}{2} = \frac{4.8}{2} = 16$ unidades de área. Usando-se o cálculo de integral para demonstrar sua relação em um mesmo resultado com a geometria plana já conhecida.

$$\int_a^b f(x)\,dx = P(x)\Big|_a^b = P(b) - P(a) =$$

$$= \int_3^7 2x - 6dx = 2\frac{x^2}{2} - 6x\Big|_3^7 = \left(2\frac{7^2}{2} - 6.7\right) - \left(2\frac{3^2}{2} - 6.3\right) =$$

$$= 7 - (-9) = 7 + 9 = 16$$

7 APLICANDO O ESTUDO INTRODUTÓRIO DE INTEGRAL NO CÁLCULO DE ÁREA

Utiliza-se agora, com este estudo introdutório de integral definida, alguns exemplos específicos de figuras não comuns aos alunos do ensino médio, pois estas, não são encontradas nas referências bibliográficas e na grade curricular desta etapa do conhecimento.

Não obstante, elas podem ser sim, de maneira fácil e atrativa, trabalhadas no decorrer deste processo ensino-aprendizagem, oferecendo ao aluno uma visão mais detalhada e ampla em relação a figuras formadas não apenas com segmentos de retas estudadas nas séries anteriores.

Problema 1. *" Na antiguidade, os primeiros navegadores começaram a usar peles de animais ou tecidos para fabricarem as velas. Fixaram na parte superior do barco um mastro, e assim foi possível a fabricação de embarcações maiores. Essa invenção permitiu ao homem ampliar a exploração, reconhecendo, por exemplo, o termo Oceania, cerca de 3000 anos atrás"* (Atlas dos Oceanos, Anita Ganeri).

O movimento de um barco à vela na água se dá pela força que o vento produz entre as duas faces da vela, a Figura 7.1 representa um barco à vela (A unidade de medida é o metro). Quantos m^2 de tecido, um navegador teria que gastar para construir uma réplica perfeita desse tipo barco?

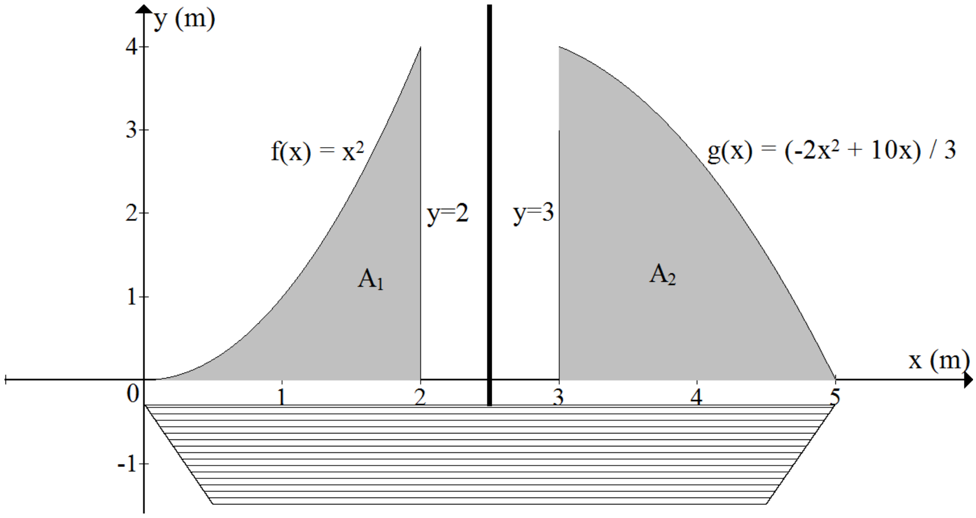


Figura 7.1: Barco à vela no plano cartesiano.

Resolução: Analisando a figura 7.1, a área total (A) é calculada por adição da seguinte maneira:

$A = A_1 + A_2$

Para tal, faz-se o cálculo separadamente das respectivas áreas.

Primeiro, calculando a primitiva de f(x), $P(x) = \frac{x^3}{3}$, e usando o intervalo dos valores de x em $[0,\ 2]$:

$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx = P(x)\Big|_a^b = P(b) - P(a) = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}.$$

Em seguida, A_2, onde usando a proposição 6.2.2, tem-se a primitiva $P(x) = -x^2 + 5x$, com o intervalo agora de x em $[3,\ 5]$:

$$A_2 = \int_a^b g(x)\,dx = P(x)\Big|_a^b = P(b) - P(a) =$$

$$= \int_3^5 \frac{-2x^2+10x}{3} dx = \frac{2}{3}.\int_3^5 -x^2+5x dx = \frac{2}{3}\left[\left(-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}\right)\Big|_3^5\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\left(-\frac{5^3}{3}+5\frac{5^2}{2}\right) - \left(-\frac{3^3}{3}+5\frac{3^2}{2}\right)\right] = \frac{2}{3}\left[\left(-\frac{125}{3}+5\frac{25}{2}\right) - \left(-\frac{27}{3}+5\frac{9}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\left(-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}\right) - \left(-\frac{27}{3}+\frac{45}{2}\right)\right] = \frac{2}{3}\left(-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}+\frac{27}{3}-\frac{45}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\frac{98}{3}+\frac{80}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{-196+240}{6}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{44}{6} = \frac{88 \div 2}{18 \div 2} = \frac{44}{9}.$$

Com os valores de $A_1 = \frac{8}{3}$ e $A_2 = \frac{44}{9}$, a área total $A = \frac{8}{3} + \frac{44}{9} = \frac{68}{9}$ m^2, um valor aproximadamente igual a 7, 56 m^2 de tecido.

Problema 2. Em uma feira de artesanato na cidade de Macapá no Amapá, um trabalhador desse seguimento, pretende vender aos turistas um suvenir (Objeto característico do local em que é vendido) contendo o formato de um peixe, símbolos dos rios e da culinária local. Qual seria então a quantidade total da área, em cm^2, da matéria prima específica que esse trabalhador necessita para confeccionar uma unidade do peixe de tal artesanato?

Veja na Figura 7.2 a representação aproximada do artesanato no plano cartesiano.

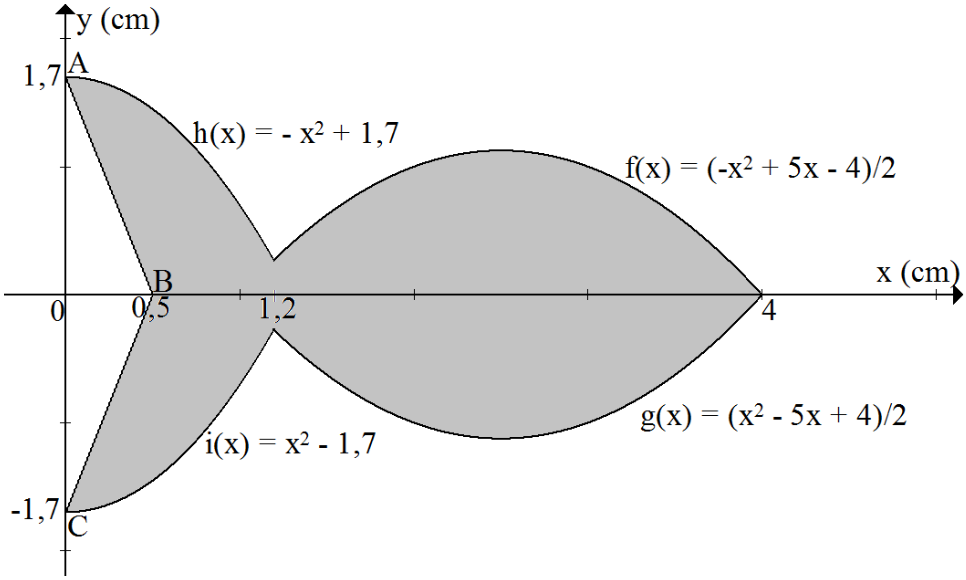


Figura 7.2: A unidade no plano cartesiano.

Resolução: No primeiro momento, usa-se apenas os intervalos [0, 1,2] e [1,2, 4] das abscissas nas respectivas funções $h(x) = -x^2+1{,}7$ e $f(x) = (- x^2 + 5x - 4)/2$, onde se verifica que nesses intervalos, essas funções são positivas e são contempladas pela definição do cálculo de área (Ver 6.3.2):

i) Com a primitiva $P\,(x) = -\dfrac{x^3}{3}+1,7x$, pode-se calcular a área da função h(x) $= -x^2$ +1,7 no intervalo [0, 1,2] nos valores em x:

$$\int_a^b h\,(x)\,dx = P\,(x)\Big|_a^b = P\,(b) - P\,(a) =$$

$$= \int_0^{1,2} -x^2+1,7dx = \left(-\frac{x^3}{3}+1,7x\right)\Big|_0^{1,2} =$$

$$= \left(-\frac{1,2^3}{3}+1,7.1,2\right) - \left(-\frac{0^3}{3}+1,7.0\right) = -\frac{1,728}{3}+2,04-0=$$

$$= -0,576+2,04 = 1,464.$$

ii) Agora, usa-se a primitiva $\mathrm{P}\left(\mathrm{x}\right)=\frac{\mathrm{x}^3}{3}-5\frac{\mathrm{x}^2}{2}+4\mathrm{x}$, junto com a proposição 6.2.2 e o intervalo [1,2, 4] nos valores em x, calcula-se a área da função f(x) = (- x^2 + 5x - 4)/2 nesse intervalo:

$$\int_a^b \mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)\mathrm{dx} = \mathrm{P}\left(\mathrm{x}\right)\Big|_a^b = \mathrm{P}\left(\mathrm{b}\right)-\mathrm{P}\left(\mathrm{a}\right) =$$

$$= \int_{1,2}^{4} \frac{-\mathrm{x}^2+5\mathrm{x}-4}{2}\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\int_{1,2}^{4} \mathrm{x}^2-5\mathrm{x}+4\mathrm{dx} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{x}^3}{3}-5\frac{\mathrm{x}^2}{2}+4\mathrm{x}\right)\Bigg|_{1,2}^{4} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{4^3}{3}-5\frac{4^2}{2}+4.4\right)-\left(\frac{1,2^3}{3}-5\frac{1,2^2}{2}+4.1,2\right)\right]\Bigg|_{1,2}^{4} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{64}{3}-40+16\right)-\left(\frac{1,728}{3}-\frac{7,2}{2}+4,8\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{64-120+48}{3}-\frac{1,728}{3}+\frac{7,2}{2}-4,8\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{3}-\frac{1,728}{3}+\frac{7,2}{2}-4,8\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{-16-3,456+21,6-28,8}{6}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{26,656}{6}\right) = \frac{26,656}{12} \cong 2,221.$$

Uma vez que as funções i(x) e g(x) não são positivas, respectivamente, nos intervalos [0, 1,2] e [1,2, 4], é fácil concluir que as áreas nesses intervalos coincidem com os cálculos acima em i) e ii). Logo, no intervalo [0, 1,2] temos área igual a 2 vezes 1,464 e em [1,2, 4], 2 vezes 2,221, totalizando um valor aproximadamente igual a 7,37 cm^2.

Sendo a área do trângulo ABC na Figura 7.2, $A=\frac{b.h}{2}=\frac{3,4.0,5}{2}=0,85\ \mathrm{cm}^2$, menos o valor 7,37 calculado acima, tem-se a área total do artesanato representado na Figura 7.2 aproximadamente igual a 6,52 cm^2.

, **Problema 3.** (ENEM 2015-Adaptado). Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva da função $f(x) = 0,40 - \dfrac{x^2}{1,60}$, no intervalo [0, 0,80] no eixo x, conforme a Figura 7.3. Calcule a área do vidro, em m^2.

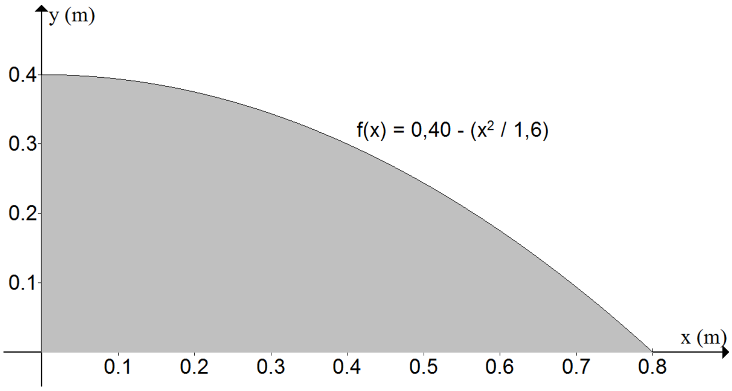


Figura 7.3: Vidro no plano cartesiano.

Resolução: Com a primitiva de f(x), $\mathrm{P}(\mathrm{x}) = 0,40\mathrm{x} - \dfrac{x^3}{4,80}$, e o intervalo citado, facilmente calcula-se a área pedida abaixo:

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \mathrm{P}(\mathrm{x})\Big|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = \mathrm{P}(\mathrm{b}) - \mathrm{P}(\mathrm{a}) =$$

$$= \int_0^{0,80} 0,40 - \frac{\mathrm{x}^2}{1,60}\mathrm{dx} = \left(0,40\mathrm{x} - \frac{\mathrm{x}^3}{1,60.3}\right)\Bigg|\begin{matrix}0,80\\0\end{matrix} =$$

$$= \left(0,40.0,80 - \frac{0,80^3}{1,60.3}\right) - \left(0,40.0 - \frac{0^3}{1,60.3}\right) =$$

$$= \left(0,32 - \frac{0,512}{4,80} - 0\right) = \left(0,32 - \frac{0,512 \div 8}{4,80 \div 8}\right) =$$

$$= \left(0,32 - \frac{0,064}{0,6}\right) \cong 0,32 - 0,1067 \cong 0,2133.$$

Portanto, a área procurada é aproximadamente igual a 0,2133 m^2.

Problema 4. "*Half-pipe, é uma rampa em forma de U, e lembra uma figura geométrica que pode ser feita de madeira ou concreto, com 3 m ou mais de altura. Serve para prática de esporte de skatista, considerado um esporte radical e perigoso" (CONCURSO PÚBLICO 001/2015 PREFEITURA MUNICIPAL DE CURUÇÁ-PA, questão 13).*

Na Figura 7.4, tem-se a estrutura desta rampa localizada na praça central no município de Mazagão/AP. Um empresário pretende fazer a propaganda do seu produto em um evento esportivo e precisa saber quantos m^2 a rampa tem em suas laterais para comprar um papel especial, de modo, que as cubra por inteiro. Como seria esse cálculo?

Figura 7.4: Rampa no município de Mazagão, interior do Amapá. (Fonte: Do autor)

Representação da rampa (Figura 7.4) no plano cartesiano:

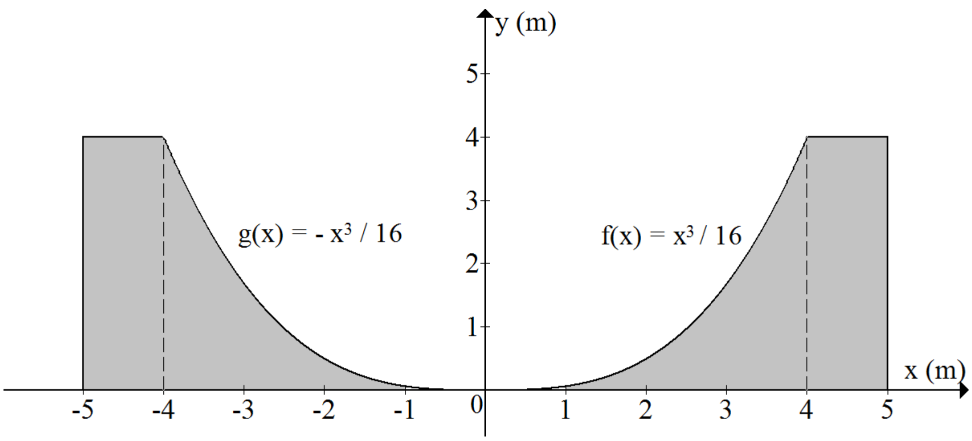


Figura 7.5: Rampa (Half-pipe) no plano cartesiano.

Resolução: Para calcular a área total pertencente a lateral da rampa (Figura 7.5), basta trabalhar a função f(x) no intervalo [0,4] no eixo x mais o retângulo nos intervalos [4,5] em x e [0,4] em y, para depois multiplicar esses valores por 2, já que a rampa é por igual na descida e na subida.

Por conseguinte, tem-se:

Utilizando a proposição 6.2.2 e a primitiva $P(x) = \frac{x^4}{4}$, pode-se calcular a área da função $f(x) = \frac{x^3}{16}$ no intervalo [0,4] nos valores em x:

$$\int_a^b g(x)\,dx = P(x)\Big|_a^b = P(b) - P(a) =$$

$$= \int_0^4 \frac{x^3}{16}dx = \frac{1}{16}\int_0^4 x^3 dx = \frac{1}{16}\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(\frac{4^4}{4}\right) - \left(\frac{0^4}{4}\right)\right] = \frac{1}{16}(64-0) = \frac{1}{16}\cdot 64 = \frac{64}{16} = 4.$$

Sendo a área do retângulo $4.1 = 4$ m^2 e a área calculada acima também igual a 4 m^2, tem-se a área da Figura 7.5 o valor de $2.4 + 2.4 = 16$ m^2.

O empresário precisa cobrir as duas laterais vazadas da rampa (ver Figura 7.4). Portanto, o valor procurado é duas vezes a área igual a 16 m^2. Logo, serão necessários um total de 32 m^2 do papel especial para a sua propaganda.

8 CONCLUSÃO

Não é difícil perceber a dificuldade dos alunos nos seus primeiros momentos com as disciplinas de cálculo diferencial e integral em alguns cursos no ensino superior: licenciaturas em matemática e física, na área de engenharia e outros. Tal dificuldade se dá pela falta da introdução desses assuntos no ensino médio, que por uma questão de reorganização curricular foi retirada das séries finais do antigo segundo grau, onde tinha-se uma divisão de áreas na segunda série do respectivo período, dando ao aluno a liberdade de intensificar seus conhecimentos em determinadas áreas de atuação, no referido caso: as ciências exatas.

Com uma nova organização curricular norteando-se à inclusão do cálculo diferencial e integral e ao aumento da carga horária da disciplina no currículo escolar, facilitaria, não somente para o professor, mas também para o aluno, um estudo aprofundado de maneira mais clara e detalhada do conteúdo.

Neste trabalho, mostra-se a importância para ministrar tal assunto, enfatizando que os pré-requisitos matemático para se trabalhar cálculo diferencial e integral em sala de aula, são tão somente, o conhecimento de noções de funções polinomiais, cálculo de área e a ideia de infinito. Os exercícios podem ser ilustrados para que os alunos os vejam em seu cotidiano, melhorando sua compreensão e incentivando-os a encontrar mais aplicações para serem discutidas em sala. O objetivo também desse trabalho é de contrariar uma falsa realidade de que as noções básicas de cálculo diferencial e integral no ensino médio é inviável, pois requer um certo conhecimento mais amplo da disciplina, devendo apenas ser ministrado no ensino superior. Isto não é verdade, a introdução do assunto é totalmente possível e necessária nesta etapa na vida dos alunos, que em um futuro próximo, poderão escolher algum curso de nível superior que contemple essa vertente do conhecimento.

REFERÊNCIAS

AFONSO, A. P. *Materiais.* Disponível em <www.matematiques.com.br/materiais> Acesso em 13 de Out. 2016.

AMARAL, J. C. N. *Proposta metodológica para o ensino do conceito de limite de uma função aos iniciantes do ensino superior.* Belém: UFPA, 2004.

AMORIM, L. I. F. *A (re) construção do conceito de limite do cálculo para a análise [manuscrito]*: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática. 2011. 133f. Dissertação (Mestrado em Educação matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

ÁVILA, G. *Limites e derivadas no ensino médio?* Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, nº 60, p.30 - 38, 2006.

_________. *Ensino de Cálculo no 2º grau.* Revista do Professor de matemática, Rio de Janeiro, nº 18, p. 1 - 9, 1991.

BOYER, C. B.*História da matemática.* São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRITO, J. C. *O cálculo diferencial e integral como ferramenta interdisciplinar no ensino médio.* (2013). 43 f. Dissertação (Mestrado em matemática) - Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.

BROLEZZI, A. C. *A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino da matemática.* (1996) Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da matemática.* 1ª edição. Lisboa: 1951.

DOMINGUINI, L; GOMES, S. F.; ALVES, E. S. B. *Limite de uma função:* vonteúdo viável para o ensino médio? In: II Congresso Nacional de Educação Matemática. (II CNEM) e IX Encontro Regional de Educação Matemática (IX EREM), 2011, Ijuí. Revista CNEM. Ijuí: Unijuí, 2011. v. Único. p. 1 - 10.

GUIDORIZZI, H. L. *Matemática para administração.* Rio de Janeiro: Ed LTC, 2002.

GIOVANNI, J. R; BONJORNO, J. R. *Matemática, 3*: geometria anlítica, números complexos, polinômios, limites e derivadas, noções de estatística do 2º grau. São Paulo: FTD, 1992.

__________. *Matemática Completa, 3ª série:* ensino médio. São Paulo: FTD, 2009.

LIRA, A. F. *O processo da construção do conceito matemático de limite pelo aprendiz com utilização de objetos digitais.* 2008. 184f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

MESSIAS, M. A. V. F. *Um estudo exploratório sobre a imagem conceitual de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função.* 2013. 133f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Matemática) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.

MORAES, M. S, F. *Um estudo sobre as implicações dos obstáculos epistemológico de limite de função.* 2013, 133f. Dissertação (Mestrado em Educação e Ciência e Matemática) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.

SILVA, S. M. da; SILVA, E. M. da; SILVA, E. M. da; SILVA. *Matemática:* para os cursos de administração, economia, ciências contábeis. 5º ed. São Paulo: Atlas, 1991.

STEWART, J. *Cálculo.* São Paulo: Cengage Learning, 2011. Volume I.

VERAS, L. L. *Matemática aplicada à economia:* síntese da teoria - mais 300 exercícios resolvidos e propostos com respostas. 2ª ed. São Paulo: Atlas, 1991.

WEBER, J. 2ª ed. *Matemática para economia e administração.* São Paulo: Ed Harbra, 1986.

ZUCHI, I. *A abordagem do conceito de limite na sequência didática:* do ambiente lápis papel ao mabiente computacional. 2005. 255f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

Cálculo no ensino médio já passou da hora. Disponível em <imaginariopuro.wordpress.com> Acesso em 28 de Out. de 2016.