UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

PRÓ-REITORIA DE PÓS GRADUAÇÃO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Introdução ao Ensino do Cálculo e Aplicações da Derivada no Ensino Médio

Paulo de Tarso Smith Neves

Macapá

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Introdução ao Ensino do Cálculo e Aplicações da Derivada no Ensino Médio

Autor: Paulo de Tarso Smith Neves

Orientador: Prof. Dr. Guzman Eulalio Isla Chamilco

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá, como requesito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Macapá, AP

2016

Neves, Paulo de Tarso Smith

Introdução ao Cálculo e Aplicações de derivadas no Ensino Médio/
Macapá, xx, 2016
74 p.

1. Matemática 2. Cálculo Diferencial 3. Aplicações de derivada 4.
Máximos e Mínimos I. Título

CDU 536.21

Paulo de Tarso Smith Neves

Introdução ao Ensino do Cálculo e Aplicações da Derivada no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá, como requesito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

APROVADO EM: 02 de Dezembro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Guzman Eulalio Isla Chamilco
UNIFAP

Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto
UFPI

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil
UNIFAP

Prof. Dr. Erasmos Senger
UNIFAP

Macapá, AP

2016

À Margareth Smith, minha esposa, (in memoriam),

que tanto esperava por esse momento, sempre me

admirando com orgulho, pela oportunidade alcançada.

Aos meus filhos Victor e Fhilipe, pela presença e pelo

apoio neste importante momento de nossas vidas.

A meus pais, Ruy e Regina exemplos e alicerces em minha vida,

pela formação e pela fé inabalável que depositam em mim.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela presença constante e pela proteção.

A meus familiares e aos amigos, pelos bons e pelos maus momentos e pela força que me deram para seguir.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Guzmán Isla Chamilco, pela dedicação, pela compreensão e pela contribuição para a realização deste trabalho.

Aos colegas da turma 2013 - PROFMAT pela colaboração.

Ao Jésu Márcio por ter se tornado um parceiro em todo o trajeto dos estudos e um grande amigo para a vida toda.

Em especial, a minha sobrinha Fernanda pela atenção depositada, nas necessárias intervenções.

Resumo

O Cálculo Diferencial é uma das ferramentas matemáticas que possui inúmeras aplicações. Porém, o seu ensino tem se restringido a cursos de Educação Superior. Em diversos estudos tem se discutido as dificuldades de aprendizagem do cálculo no ensino superior. Neste trabalho, apresentou-se uma maneira de introduzir os conceitos e as definições do cálculo de limite e, especialmente da derivada de funções polinomiais de uma variável no ensino médio. Inicialmente através de uma abordagem histórica do cálculo, buscou-se conhecer como este foi surgindo ao longo da história da humanidade, e os matemáticos que mais contribuíram para o desenvolvimento do cálculo diferencial. Em seguida, mostrou-se a ideia intuitiva até chegarmos à definição nos processos de derivação e algumas aplicações em diversos ramos da ciência, tais como: no próprio ensino da matemática, da física, na economia, com a maximização e minimização de lucros e de custos de empresas, nas ciências biologias e até mesmo em situações problema do cotidiano.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino Médio, História do Cálculo, Introdução ao Cálculo, Derivada de Polinômios, Aplicações Básicas da Derivada.

Abstract

Differential Calculus is one of the mathematical tools that has many applications. However, their teaching has been restricted to higher education courses. In several studies the learning difficulties of calculus in higher education have been discussed. In this work, we present a way of introducing the concepts and definitions of the limit calculation, and especially of the derivative Polynomial of functions of a variable in high school. Initially through a historical approach to calculus, seeking to know how this has emerged throughout the history of humanity, and the mathematicians who most contributed to the development of differential calculus. Next, we show the intuitive idea until we arrive at the definition in the processes of derivation and some applications in several branches of science, such as: in the teaching of mathematics, physics, economics, with the maximization and minimization of profits and costs of companies, in the biology sciences and even in daily problem situations.

KEYWORDS: Secondary Education, History of Calculus, Introduction to Calculus, Derivative of Polynomials, Basic Derivative Applications.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Há mais de uma década, o ensino da matemática vem tomando novos rumos no Brasil. Em 2000, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apresentaram novos objetivos de abordagem do estudo da Matemática tomando como referência a Lei de Diretrizes e Bases (LDB 9.394/96), que considera o Ensino Médio como última e complementar etapa da Educação Básica.

O estudo do Calculo Diferencial e Integral é considerado um dos conteúdos matemáticos mais influentes no desenvolvimento científico e tecnológico atual, esse conteúdo é muito abordado nos cursos superiores nas áreas de ciências da natureza, engenharias e tecnologias. Sua importância se dá por sua aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento. Mas quando se trata do ensino deste conteúdo no ensino médio, passamos por questionamentos, como: É possível ensinar cálculo diferencial e integral nas escolas de Ensino Médio?

Introduzir conceitos de Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio auxilia na compreensão de algumas propriedades, entre elas o limite de uma função, ferramenta indispensável para a compreensão de fenômenos físicos, como velocidade, força, etc.

Os alunos egressos do ensino médio ingressam no nível superior, sem ter a noção de limite, derivada e integral e apresentam muita dificuldade nas disciplinas de Cálculo. Cabe destacar que o ensino de matemática no Brasil e em outras partes do mundo já contou com o ensino de Cálculo em seu currículo no ensino médio. O Cálculo deixou de fazer parte dos currículos brasileiros após a reforma da Matemática Moderna, nas décadas de 60 e 70. Dentre eles, houve a exclusão de Cálculo.

Segundo Ávila (1991, p.3), o cálculo vem desempenhando um papel de fundamental importância no desenvolvimento das ciências e da tecnologia e, em relação ao currículo de matemática no ensino médio, o autor menciona que “descartá-lo no ensino é grave, porque deixaria de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual”.

Devido algumas justificativas tais como falta de tempo para trabalhar o conteúdo, conteúdo muito difícil para o ensino médio, os professores acabam excluindo de suas aulas esse tema. O cálculo passou a fazer parte do livro didático, mas não do currículo de ensino médio, o que o torna então, pouco valorizado, gerando assim, deficiências na aprendizagem que acabam refletindo no ensino superior.

Algumas universidades adaptaram os currículos dos seus cursos introduzindo disciplinas de Introdução ao Cálculo, e até mesmo, Tópicos de Funções, que revisam e aprofundam os conteúdos abordados no ensino médio. Essas disciplinas básicas têm como objetivo principal retomar os conhecimentos dos estudantes acerca do comportamento de funções, introduzir os conceitos de infinito, variabilidade e outros tópicos de importante relevância para o aprendizado subsequente dos conceitos de limites, derivadas e integrais. Dessa forma, investir na Educação Básica pode auxiliar a modificar o quadro de fracasso no ensino e na aprendizagem de Cálculo, proporcionando aos estudantes, desde cedo, o contato com as noções intuitivas necessárias a um bom desempenho nessas disciplinas. Assim, justifica-se a necessidade da inserção das ideias de cálculo no ensino médio. Atividades que envolvam as ideias intuitivas de limites, que explorem a questão da variabilidade através de problemas de aplicação e o cálculo da área de regiões delimitadas por curvas que são gráficos de funções, podem se mostrar, nesse sentido, bons caminhos para o trabalho significativo da matemática no ensino médio.

A abordagem deste trabalho surgiu a partir de uma curiosidade que provavelmente muitos professores já se perguntaram, em especial aqueles que lecionam na 3ª série do ensino médio: por que não trabalhamos o conteúdo de limites, derivadas e integral com nossos alunos, uma vez que alguns livros didáticos contêm páginas dedicadas aos mesmos?

Nílson[1] acha que o melhor jeito de corrigir esse problema é justamente no ensino médio, onde o estudante conheceria as ideias mais importantes do cálculo por meio tão somente de funções simples, especialmente as funções polinomiais. (São aquelas do tipo $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$, nas quais os coeficientes a_i são números reais.) Um estudante que conheça as principais ideias do cálculo, e que saiba usá-las para, por exemplo, esboçar o gráfico de funções polinomiais, está bem posicionado para estudar muitas ideias interessantes: a função logarítmica, a função exponencial, as séries infinitas, as equações diferenciais mais simples. Com a ideia de derivada, por exemplo, ele não precisa nunca mais decorar as fórmulas das coordenadas do vértice de uma parábola, pois, quando precisar das coordenadas, pega um pedaço de papel, calcula à mão a derivada de $y = ax^2 + bx + c$, e a iguala a zero; com isso, acha a expressão para x, e com ela, a expressão para y.

Na história, a evolução do cálculo desde a Grécia antiga até o movimento Iluminista

[1] Nilson José Machado, professor na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, e autor de vários livros didáticos e paradidáticos, mostra a peça de que o professor e seus alunos necessitam para organizar melhor os assuntos do ensino médio: cálculo diferencial e integral.

na Europa no final do século XVIII e início do XIX, o cálculo diferencial e integral é a mais poderosa ferramenta matemática da atualidade. Porém, para chegar a essa descoberta, a humanidade estuda o assunto há séculos, buscando respostas para problemas de áreas e tangentes, e atualmente, com a contribuição de diversos pensadores.

Tem-se então as divisões dos capítulos[2]:

O Capítulo 2, é destinado à fundamentação teórica, e no Capítulo 3 apresentamos alguns tópicos como pré-requisitos para um melhor entendimento do cálculo diferencial e integral como, estudos sobre a reta real, sua densidade e continuidade, valor absoluto de uma variável e vizinhança.

Os Capítulos 4 e Capítulo 5 foram destinados à iniciação da ideia de uma nova ferramenta muito útil não só para a matemática, mas também para outras áreas da ciência. Apresentamos as ideias intuitivas de limites e derivadas, buscando a interação destes conceitos, de forma que possamos aplicá-los numa sala de aula de ensino médio, através de atividades contextualizadas, com aplicações práticas.

No Capítulo 6 faremos uma exploração do conceito de limites e derivadas com aplicações práticas em situações de diversas áreas do conhecimento como, Engenharia, Física, Biologia, Economia e como identificar pontos de máximos e de mínimos, intervalos de crescimento e de decrescimento, de forma que possam ser mais facilmente assimiladas pelos estudantes do ensino médio.

[2]Este trabalho é parte de um projeto desenvolvido pelos discentes: Jésu Marcio Azevedo da Costa e Paulo de Tarso Smith Neves. Sendo os capitulos 2, 3, 4 e 5 comuns.

2 O DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO

O foco de nosso trabalho é o processo de ensino e aprendizagem de uma breve introdução do conceito de Cálculo no ensino médio. Assim faremos um histórico sobre o desenvolvimento do conceito de Cálculo, acompanhado com uma revisão da literatura relacionada ao ensino desse conceito.

A intenção é situar o ensino e aprendizagem de Cálculo como objeto de estudo dentro do ensino da matemática e levantar elementos que contribuam para uma melhor compreensão do nosso estudo em questão.

2.1 DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO NA ANTIGUIDADE E IDADE MÉDIA

O limite é um conceito fundamental do Cálculo, visto que seus principais conceitos, derivada e integral, são definidos em termos do limite. Para que o conceito de limite fosse estabelecido como é hoje, foram necessários muitos séculos. Tais definições são agora tão claramente tratadas que é fácil esquecer como estes conceitos foram desenvolvidos ao longo da história (BOYER, 1974).

A Matemática grega mostra como as ideias originais relacionadas ao Cálculo têm início em considerações que envolvem tanto noções de grandezas discretas quanto de grandezas contínuas. Boyer (1974) observa que o inicio pode ser situado na escola pitagórica com o refutamento da incomensurabilidade.

Com Pitágoras, a generalização da geometria fez surgir um obstáculo, a noção de número irracional. A descoberta dos irracionais destruiu a correspondência entre números e distância.

Para os pitagóricos todo o universo era constituído por números inteiros e suas razões. Ou seja, as grandezas comensuráveis. Eles acreditavam que todos os problemas da vida poderiam ser solucionados com tais saberes. Naturalmente, a vida em seu curso natural foi mostrando que nem tudo era como se pensava a princípio. Segundo Boyer (1974), os números inteiros e suas razões se mostraram insuficientes para demonstrar propriedades básicas como a relação entre o lado e a diagonal de um quadrado, bem como, lado e diagonal de um pentágono, pois tais segmentos são incomensuráveis. Por menor que seja a unidade adotada, ainda assim, nunca haverá uma medida comum entre estes segmentos anteriormente citados.

Por muitos séculos, a noção de limite foi confundida com ideias vagas, às vezes filosóficas relativas ao infinito - números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos e com intuições geométricas subjetivas, nem sempre rigorosas. O termo limite no sentido moderno é produto dos séculos XVIII e XIX, originário da Europa. A definição moderna tem menos de 150 anos.

De acordo com Brolezzi (1996), a teoria dos infinitesimais de Demócrito, e seus seguidores, foi combatida por outra escola filosófica pela influência das ideias de Parmênides de Eléia (c. 530 a.C). Esta doutrina chamava a atenção para os paradoxos e contradições existentes na concepção do mundo físico como composto por partículas infinitamente pequenas e indivisíveis (MORAES, 2013).

O surgimento do infinito pelas grandezas incomensuráveis proporcionou uma crise que se traduziu por um debate entre duas concepções: a concepção continuista tomava o número, o espaço e a matéria, como divisível ao infinito; e a concepção atomista admitia a existência de elementos primeiros indivisíveis. A ilustração dessa crise está relacionada aos paradoxos de Zeno.

O problema da incomensurabilidade entre magnitudes gerou algumas concepções polêmicas a cerca da natureza do mundo físico, como a doutrina atomística, defendida por Demócrito (*c.* 400 a.C.), que propunha a existência do infinitamente pequeno compondo o ser das coisas (MORAES, 2013).

Boyer, apud Amaral (2004), Demócrito no cálculo do volume de cones e cilindros:

> "Ao usar suas técnicas infinitesimais, ele concluiu, por exemplo, que 'o volume de um cone é um terço do volume do cilindro circunscrito'. Para tanto, comparou a base de um cone com a base de uma pirâmide de infinitos lados, e considerou uma infinidade de áreas de secções infinitamente finas e paralelas à base".

Zeno de Eléia, famoso por dons de dialética, buscava desacreditar os argumentos de seus antagonistas, considerando como verdadeiras as hipóteses das teses de seus adversários ele chegava a contradições inaceitáveis. Zeno buscava demonstrar a inexistência do movimento e, para isso criou alguns paradoxos.

> Zeno dizia que a ideia de infinitésimos é totalmente absurda, pois se possuem algum comprimento, então uma quantidade infinita deles irá compor uma reta de

> comprimento infinito; e se não têm nenhum comprimento, então uma quantidade infinita deles tampouco terá comprimento algum. Além disso, dirá também: aquilo que acrescentado a outro não o faz maior, e subtraído de outro não o faz menor, é simplesmente nada. (Brolezzi: 1996, 22).

Dos paradoxos de Zeno, quatro causaram maior perturbação: o da Dicotomia, o de Aquiles, o da Flecha e o do Estádio. Apenas para ilustrar suas ideias, embora o mais conhecido seja o de Aquiles, iremos apresentar o paradoxo da Dicotomia, assim descrito por Brolezzi (1996, p. 22):

> "Zeno nos coloca frente à aparente impossibilidade de percorrermos um número infinito de distâncias num tempo finito. Imaginemos uma pessoa que deve atravessar uma sala de um lado a outro. Antes de chegar à parede oposta, deve evidentemente chegar à metade da sala. Antes disso, porém, deve percorrer a metade da metade, ou um quarto da distância. E assim por diante, sempre dividindo a distância pela metade, indefinidamente. Desse modo, a pessoa nunca chegará ao outro lado, pois terá que percorrer um número infinito de espaços, ainda que pequenos, num tempo evidentemente finito".

A dicotomia demonstra a impossibilidade do movimento porque quando alguma coisa se move ele deve chegar primeiro ao estágio intermediário antes de chegar à sua meta.

Não há dúvida, que a pessoa chegará à parede oposta, pois o espaço e o tempo não são infinitamente indivisíveis, isto é, todas as infinitas e infinitamente pequenas distancias indivisíveis foram percorridas (AMARAL, 2004).

Os paradoxos de Zeno ilustram a perplexidade da mente ante os fenômenos do movimento e da velocidade, trazendo à tona controvérsias intrínsecas que, em geral, tendem a passar despercebidas. Como consequência da perplexidade ante esses fenômenos, os gregos desenvolveram o que se chamou de Horror ao Infinito, que na Matemática teve consequências muito importantes. Segundo Boyer, a Matemática adquiriu outra configuração após Zeno: As grandezas não são associadas a números ou pedras, mas a segmentos de reta.

O pensamento de Zeno chamou a atenção de posteriores estudiosos, quanto: A possibilidade da razão entre incomensuráveis; A necessidade de compreender melhor o infinito; a descoberta da continuidade, pois as grandezas incomensuráveis eram representadas por segmentos de retas (AMARAL, 2004).

2.2 A TEORIA DAS PROPORÇÕES E O MÉTODO DE EXAUSTÃO

Eudoxo de Cnido (408 - 255 a.C.), um dos maiores discípulos de Platão, era autor de obras que causaram uma revolução na orientação que Platão conduzia sobre a matemática da época. Foi o primeiro a resolver completamente o problema das grandezas incomensuráveis construindo uma "teoria das Proporções" que se aplicava tanto a grandezas comensuráveis quanto a grandezas incomensuráveis. Essa teoria encontra-se exposta no livro V de Euclides (BOYER, 67).

Para Amaral (2004), "As considerações sobre a essência do 'conceito de razão' e a 'definição de igualdade de razões' de Eudoxo podem ser resumidas por seu 'lema', nos seguintes termos:

> "se duas grandezas estão numa razão (isto é, nenhuma delas é zero) é possível achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra". (BOYER, 1974, p. 66)

Credita-se também a Eudoxo o chamado "método de exaustão", que eliminava o infinito da matemática grega, haja vista a possibilidade de explorar valores cada vez menores (ou maiores) que a unidade. (AMARAL, 2004, p. 12). Esse método permite comparar áreas e volumes.

Segundo Brolezzi (1996, 26), além de excluir o infinitésimo das demonstrações geométricas dos gregos, tal método permite chegar a uma grandeza tão pequena quanto se queira, sem que seja necessário ir até o infinito para atingir o limite. A ideia de proporção usada pelos pitagóricos, associando a razão entre dois segmentos de reta à razão entre números inteiros, não podia ser aplicada para as grandezas incomensuráveis. Desse modo Eudoxo propõe um instrumento útil que podia ser usado sem ferir o pensamento grego. "podia-se já falar de 'a razão entre as áreas de dois círculos' como sendo equivalente a 'a raizão entre quadrados construídos sobre os diâmetros dos círculos', conforme a Figura 2.1 " (BROLEZZI, 1996, p. 26).

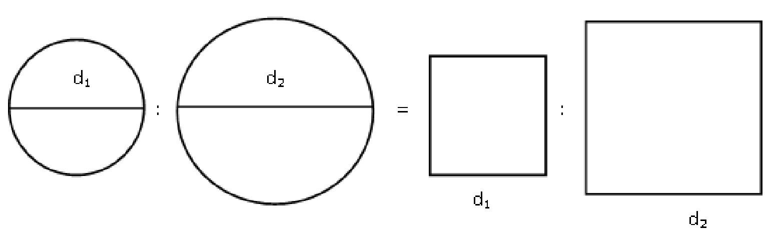


Figura 2.1: Relação entre as áreas dos círculos e quadrados.

Amaral (2004, p. 13) entende que, Eudoxo definiu a razão, esclareceu a exclusão do zero, explicou o que vinha ser grandeza de uma mesma espécie e validou um postulado ao tornar possível provar por “redução ao absurdo”, que:

> “se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte se não menor que sua metade e do resto novamente subtrair-se não menos que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza da mesma espécie”. (BOYER, 1974, p. 67)

Baron & Bos (1985) apud Moraes (1989, p. 26) assinalam que, Arquimedes foi o primeiro a demonstrar isso rigorosamente usando processo de redução ao absurdo. Embora fosse evidente a ideia da demonstração de Arquimedes, o tipo de demonstração usada não era suficiente na Matemática grega sendo, então, necessário usar a demonstração por absurdo duplo, posteriormente, tratada como exaustão por Grégoire de Saint-Vicent (1584–1667). O procedimento tornou-se comum e tais provas continuaram sendo essenciais até o final do século XVII, quando os matemáticos passaram da repetição constante para a prática de passagem direta ao limite.

O “Postulado de Arquimedes” atribuído pelo próprio Arquimedes (287 - ? a.C.) a Eudoxo, ao afirmar que, dada uma grandeza, por menor que seja, ainda é possível encontrar outra grandeza ainda menor. (AMARAL, 2004)

Considerando a formulação de Eudoxo e para efeito de ilustração, é válido supor a seguinte situação:

> “Seja a sequencia infinita decrescente cujos valores são representados por $(e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots,\ e_{n1},\ \ldots,\ e_n,\ \ldots)$.
>
> Considerando-se o elemento e_{n1}como o menor, a partir dele todos os demais elementos são ainda menores. Desse modo, diz-se que para todo inteiro $n <\ n_1$, existe um elemento $e_n <\ e_{n1}$, qualquer que seja n_1. Ora, nestas condições, os valores dos elementos $e_n\ e\ \ e_{n1}$ são tão pequenos, de um para o outro, que passa a ser importante saber o ‘quanto próximo’ e_{n1} ‘está de’ e_n.
>
> Em sua prática, Eudoxo, aparentemente, vislumbrou poder ‘controlar’ o ‘grau de aproximação’ entre valores de uma mesma grandeza e, em seu ‘Método da Exaustão’, trata de um parâmetro para ‘medi-la’. A diferença $e_{n1} - e_n$, pode ser tão pequena quanto se queira, é este o padrão”. (AMARAL, 2004, p. 13)

Lira (2008) em seus estudos, conclui que a definição apresentada por Eudoxo, “se aproxima do conceito de limite, pois a diferença entre o método de exaustão e o limite do Cálculo Diferencial e Integral reside apenas no fato de que os gregos não realizaram a **passagem ao infinito**", uma vez que os mesmos não tinham noção de contínuo aritmético. No entanto, para Brolezzi (1996), o tipo de argumentação é o mesmo, tanto no caso do atual limite quanto no método de exaustão geométrico.

(BARON & BOS, 1985) apud MORAES (2013, p. 26), "Dentre os matemáticos gregos, Arquimedes foi o que mais se destacou na aplicação da Matemática a problemas físicos e em suas demonstrações", além dele, outros matemáticos também contribuíram com esforços na construção de demonstrações mais rigorosas.

Conforme Brolezzi (1996), o surgimento do Cálculo no século dezessete está em plena conexão com a busca de meios de simplificar os métodos gregos, como o método da exaustão. Para avaliar até que ponto chegaram os gregos, basta verificar que Arquimedes realizou o Cálculo da área sob a parábola, antecipando-se, assim, em mais de dezessete séculos aos resultados do Cálculo Integral.

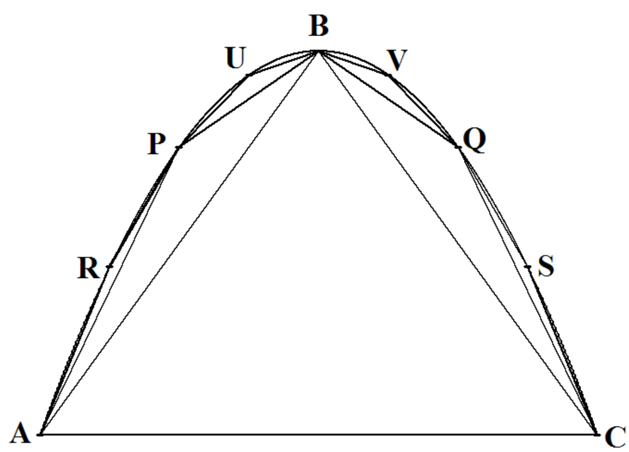


Figura 2.2: Cálculo da área sob a parábola. Fonte: Do autor.

Segundo Brolezzi (1996), em sua obra O Método, Arquimedes concluiu que um segmento parabólico é 4/3 do triângulo de mesma base e vértice (o vértice é o ponto a partir do qual a perpendicular à base é maior). Arquimedes considerava que as superfícies são constituídas por retas, dessa forma ele inscreveu sucessivos triângulos no segmento de parábola, calculou a área desses triângulos e obteve valores cada vez mais próximos do pretendido, somando as áreas dos sucessivos triângulos (ver Figura 2.2).

Assim calculou a área do segmento parabólico. No entanto Arquimedes não prolongou as somas até ao infinito. Usando o método da Exaustão, ele deduziu o seu valor demonstrando que não pode ser nem maior, nem menor que a proporção de 4/3, (SERRA, 2002) apud (ZUCHI, 2005).

O método da exaustão é o fundamento de um dos processos essenciais do cálculo infinitesimal. Arquimedes nunca considerou que as somas tivessem uma infinidade de termos. A noção de limite pressupõe a consideração do infinito que esteve sempre excluído da matemática grega, mesmo em Arquimedes. No entanto, o seu trabalho foi, provavelmente, o mais forte incentivo para o desenvolvimento posterior das idéias de limite e de infinito. (MORAES, 2013)

> "Arquimedes inventou o Cálculo Integral, e, em um de seus problemas, antecipou a criação do Cálculo Diferencial. Estes dois cálculos juntos estabelecem o que se denomina de 'cálculo infinitesimal', considerado como o instrumento mais poderoso que já foi inventado para a exploração Matemática do universo físico". (BELL, 1984) apud MORAES (2013, p. 27)

2.3 A IMPORTÂNCIA DE EUCLIDES

Euclides de Alexandria (Século III a. C.) foi um autor prolífico. Nascido entre a comunidade grega do Egito, Euclides revolucionou a matemática com apenas uma obra, que também garantiu seu nome para a posteridade como **pai da geometria**: este livro é conhecido como Os Elementos.

Para Amaral (2004), Euclides foi considerado o "autor do texto de matemática mais bem sucedido de todos os tempos". Em seu trabalho, no Livro XII, Euclides apresenta dezoito proposições, todas referentes a medidas de figuras usando o método da exaustão de Eudoxo e o método de redução ao absurdo, por exemplo para provar que:

"as áreas de círculo estão entre si como os quadrados dos diâmetros" (BOYER, 1974, p. 86).

2.4 OUTRAS CONTRIBUIÇÕES IMPORTANTES

Segundo Boyer (1974), o período do Renascimento para o desenvolvimento da Matemática, se constitui numa interação de ideias mais novas e mais antigas. Nesta época, a retomada de interesse pelas obras de Arquimedes levou a simplificação do cálculo integral, sendo para geometria, o conceito de indivisíveis de fundamental importância.

Boyer (1992) apud Moraes (2013, p. 29), ressalta outro aspecto da integral tendo o método de exaustão pouca aceitação no período medieval. Para Boyer, eram poucos os que se destacavam no Renascimento quanto à precisão lógica da Antiguidade em Matemática.

Moraes (2013) entende, que “no século XVII houve uma retomada de interesse ampla pelas obras de Arquimedes, tendo o conceito de indivisível em geometria um papel salutar”.

Em 1635, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) escreveu sobre os indivisíveis ou infinitesimais fixos aplicados com êxito em problemas de mensuração de áreas e volumes (Boyer, 1974), esse tratado hoje é conhecido como “teorema de Cavalieri”

Cavalieri aplicou a ideia dos indivisíveis a vários problemas suscitados por outros matemáticos como Pierre de Fermat (1601–1665), Roberval e Evangelista Torricelli (1608-1647), podendo afirmar assim que o método dos indivisíveis não era propriamente de Cavalieri, pois estava sendo amplamente usado por pensadores matemáticos da época. (BOYER, 1974).

Boyer (1992) apud (Moraes, 2013, p. 30), entende que a consequência lógica dessas ideias foi a geometria analítica de Fermat e René Descartes. La géometrie de Descartes, publicada em 1637, dois anos depois da Geometria indivisibilbus de Cavalieri, mudaram inevitavelmente o curso da análise infinitesimal, ofuscando a geometria pura. Para o autor, pouco se desenvolveu no século seguinte, fazendo com que a análise infinitesimal entrasse num processo de arimetização que quase resultou numa revolução.

Boyer (1974, p.281) ressalta que podemos observar essa mudança de visão na publicação de John Wallis (1616-1703), em 1655, Arithmetica infinitorum. Nesse tratado o autor mostra claramente uma aritmetização do Cálculo.

Ainda Boyer (1974). A prática de Wallis consistia em, sempre que possível, substituir conceitos geométricos por conceitos numéricos, vale ressaltar que nesta época da história, os números reais não tinham sido definidos.

> “Wallis considera uma sucessão infinita de números a_1, a_2 , a_3 , . . . , a_{n1}, . . . , a_n, . . . e um numero $\boldsymbol{a}$ tal que a diferença $a_{n1} - a_n$ se torne inferior, em valor absoluto, a qualquer numero dado, arbitralmente pequeno, a partir de um certo valor de índice $\boldsymbol{n}$” (COSTA, 1981, p. 257) apud (AMARAL, 2004, p. 21).

Neste caso, a partir do termo com índice n_1, a diferença $a_{n1} - a_n$ alcança e permanece menor que qualquer valor, por mais pequeno que seja.

No entanto, de modo semelhante a Arquimedes e Eudoxo, Wallis encontrava-se preso à intuição de limite como resultado da quantidade de lados de um polígono necessários para definir uma curva, ideia que persiste ao longo dos séculos XVI e XVII.

Ressaltando o esforço de muitos estudiosos, a história do Cálculo foi marcada de incertezas, onde muitas das contribuições para trajetória do desenvolvimento do Cálculo foram estabelecidas após a Idade Média. Fica evidente que este período é considerado de suma importância, pois preparou terreno para os estudos posteriores que anteciparam e em muito influenciaram as descobertas de Newton e Leibniz no século XVII.

Baron & Bos (1985) citado por Moraes (2013), entendem que "a tradição atribuiu a Isaac (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) um papel central na 'invenção' do Cálculo, ainda que o Cálculo não tenha começado nem terminado com estes dois homens".

2.5 AS CONTRIBUIÇÕES DE NEWTON E LEIBNIZ PARA DESCOBERTA DO CÁLCULO

Newton e Leibniz merecem um destaque especial na história do Cálculo, pois foram os pioneiros em estabelecer a estreita ligação entre dois problemas. Unificando os novos métodos que se tornaram instrumentos poderosos da ciência. Brolezzi (1996) em seus estudos observa que, "tanto Newton como Leibniz podem ser considerados como os primeiros a ideia de reciprocidade entre a diferencial e a integral, que constitui o Teorema Fundamental do Cálculo".

Por volta de 1666, Newton sintetizou um estudo coerente baseado no que ele chamava de "método de fluxões", no qual as noções de movimento desempenharam um papel central e significativo.

Baron & Bos (1985, p. 39, v. 3) citados por Moraes (2013, p. 31) resume as contribuições de Newton da seguinte maneira:

> 1. Newton formulou regras e procedimentos sistemáticos para cobrir as soluções gerais da maioria dos problemas relativos ao cálculo infinitesimal que eram conhecidos no seu tempo.
>
> 2. Embora muitas dessas regras tivessem sido estabelecidas ou introduzidas de uma ou de outra maneira pelos seus predecessores, ele estabeleceu uma estrutura unificada e um quadro dentro do qual todos os problemas podiam ser formulados.
>
> 3. O uso das séries infinitas foi uma ferramenta importante ao estender-se à classe das curvas "quadráveis", isto é, curvas cuja quadratura podia ser determinada [...].
>
> 4. Com Newton a ideia de que a diferenciação e a integração eram operações inversas foi firmemente estabelecida considerando a ordenada móvel proporcional ao momento ou a fluxão de uma área [...].
>
> 5. A síntese que Newton atingiu foi possibilitada pelo uso do simbolismo algébrico e das técnicas analíticas. Ele estabeleceu muito tarde a notação"padrão" com ponto

> para representar a diferenciação e, aparentemente, não sentiu grande necessidade de introduzir qualquer notação específica para a integração.
>
> 6. Os fundamentos do cálculo foram apresentados por Newton de várias maneiras em épocas diferentes, ele constantemente procurava estabelecer os seus métodos analíticos sobre uma base mais segura."

Moraes (2013, p.31) citando Boyer (1974), observa que a contribuição de Newton está no reconhecimento de que tudo isso constitui parte de uma nova análise: a aplicação de processos infinitos ao estudo geral de funções de qualquer tipo.

Para Amaral (2004), Newton aproximou-se muito da ideia de limite, quando relaciona os conceitos de derivada e infinitamente pequeno. Para o autor "a operação de limite ainda é metafísica".

Para Messias (2013), apesar das considerações de Newton sobre a nova análise, Leibniz desenvolveu método próprio para determinar somas e diferenças de infinitesimais, caracterizando-o por uma notação própria: $\int xdx$ para as "somas" (a qual denominou de integral de x) e para as "diferenças", dx.

Segundo Boyer (1974). Leibniz apresentou as fórmulas $dxy = xdy + ydx$, $d\left(\frac{x}{y}\right) = \dfrac{ydx - xdy}{y^2}$ e $dx^n = nx^{n-1}dx$, correspondente ao produto, quociente e potências (ou raízes). Para Messias (2013, p. 54), Leibniz percebeu que "a 'diferença' de x^n seria nx^{n-1} e, sabendo que as 'somas' eram o inverso das 'diferenças', determinou que $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$"

Brolezzi (1996) afirma que as concepções de Leibniz, quanto ao discreto, e a de Newton, quanto ao contínuo, recaíram na teoria do Cálculo, que posteriormente define melhor o que eram os números reais e a ideia de limite. Para Ávila (2006) citado por Amorim (2011, p.34):

> "o cálculo de Leibniz, na sua origem, é mais complicado que o de Newton. No entanto, a sua vantagem é a notação, os símbolos 'd' para derivada e '$\int$' para integral, utilizados até hoje, e ainda as notações *dx, dy, ds* para elementos infinitesimais tem a grande conveniência de 'sugerir' os próprios resultados"

Com Leibniz, o cálculo diferencial começou a ter outra aparência. Leibniz conseguiu escrever "cada termo" (termo geral) de uma soma de infinitas parcelas como a soma de duas frações. (Amaral: 2004).

Baron & Bos (1985) citados por Moraes (2013), três ideias fundamentaram a invenção do Cálculo por Leibniz:

> ‘1. Seu interesse pelo simbolismo e pela notação vinculada à sua ideia de uma linguagem simbólica geral;
>
> 2. O reconhecimento de que somar sequências e tomar as suas diferenças são operações inversas e que a determinação de áreas e a de tangentes são operações inversas;
>
> 3. O uso de um triângulo característico para deduzir transformações gerais de áreas.”

Brolezzi (1996, p. 30) também compara os estilos de cada um, da seguinte forma:

As maneiras de Newton e Leibniz em abordar o problema mostraram-se igualmente úteis, pois, enquanto não estava estabelecida a noção de limites, as ideias de movimento contínuo e de infinitésimos discretos surgiram como tentativas de esquematizar as impressões sensíveis a respeito da variação.

Segundo Messias (2013), Newton e Leibniz foram os primeiros a desenvolver algoritmos universalmente aplicáveis, cuja essência assemelha-se aos métodos utilizados atualmente e que as manifestações tanto de Newton quanto de Leibniz acerca do *Cálculo* não apresentavam rigor e clareza em suas definições e, portanto, havia a necessidade de buscar esse rigor matemático para esclarecer as concepções envolvidas na *nova análise*. Essa busca pelo rigor matemático esteve presente durante o século XVIII e predominou em todo o século XIX, período no qual as principais definições da *nova análise*, inclusive a de limite de função com os épsilons e deltas, foram estabelecidas conforme o rigor que conhecemos hoje.

3 PRÉ-REQUISITOS PARA O CÁLCULO

3.1 A RETA REAL

A representação geométrica dos números reais é feita:

Entre os pontos de uma reta e os números reais existe uma correspondência biunívoca, isto é, a cada ponto de reta corresponde um único número real e vice-versa.

> "por meio de pontos de uma reta, estabelece-se, então uma correspondência natural entre os pontos da reta e os números reais, isto é, cada ponto da reta representa um único numero real, e a cada numero real é representado por um único ponto da reta. Por esta razão, referimo-nos à reta como reta real. Além disso, usaremos indistintamente as palavras ponto e número." (LIPSHUTZ, 70) citado por (AMARAL, 2004, p.38)

3.2 A DENSIDADE DA RETA REAL

A relação biunívoca entre ponto e número, é

> "a suposição de que o ponto geométrico não tem dimensões leva imediatamente admitir que, entre dois pontos quaisquer A e B da reta, existe sempre uma infinidade de pontos, e isto por mais próximos que A e B estejam um do outro.
>
> Todo o conjunto em que isto se dê, isto é, tal que entre dois dos seus elementos quaisquer exista uma infinidade de elementos do mesmo conjunto, diz-se um conjunto denso"; (CARAÇA, 1951, p. 56)

3.3 CONTINUIDADE DA RETA REAL

Para Caraça (1951) a linha reta representa a imagem ideal de continuidade.

> "sempre que, numa reta se tem uma repartição de seus pontos em duas classes (A) e (B) satisfazendo às duas condições:
>
> 1ª Nenhum ponto escapa à repartição;
>
> 2ª Todo ponto da classe (A) está a direita de todo ponto da classe (B) – diz-se que se tem um corte, do qual (A) e (B) são as classes constitutivas; o corte constituído pelas duas classes (A) e (B) representa-se abreviadamente por (A , B)".

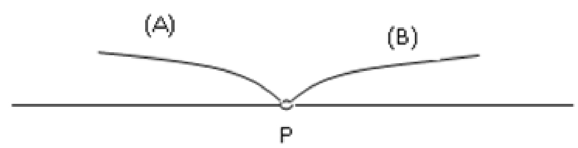


Figura 3.1: Divisão de classes na reta.

De acordo com a Figura 3.1 afirmativo que,

> "todo ponto da reta produz nela um corte".

Segundo Caraça (1951), Dedekind caracteriza a continuidade da reta real, pela seguinte afirmação, "todo o corte da reta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte (A , B) existe sempre um ponto da reta que separa as duas classes (A) e (B)". Tal afirmação é chamada de "postulado de dedekind"[1]

3.4 NOÇÃO DE VARIÁVEL

Segundo Caraça (1951, p. 127), uma variável é um instrumento matemático e que sobre esse instrumento, incide uma correspondência de dois conjuntos numéricos.

Se A é um conjunto numérico qualquer, finito ou infinito, por convenção qualquer de seus elementos será representado por um símbolo x, a este símbolo chamamos de variável. O símbolo x sem representar individualmente, nenhum dos elementos do conjunto A, está apto de representar a todos, isto é, é e não é cada um dos elementos do conjunto A. O que determina uma variável é o conjunto numérico que ela representa, isto é, o seu domínio. Se x representa o

[1]Quase pela mesma altura, o matemático Alemão G. Cantor formulou a caracterização da continuidade por uma maneira semelhante; por isso a este a este enunciado se chama, com maior propriedade, axioma da continuidade de Dedekind-Canlor

conjunto dos números reais, diz-se "que é uma variável real contínua, ou simplesmente variável real". Se x tem domínio igual a dos números naturais, então dizemos que x é variável inteira. (CARAÇA, 1951, p. 128)

3.5 VALOR ABSOLUTO DE UMA VARIÁVEL

Lipshutz (1980, p. 290) citado por Amaral (2004, p. 42), afirma que:

> "o significado geométrico do valor absoluto de x é a distância entre o ponto x da reta real e o ponto O da abscissa zero; além disso, a distância entre dois pontos quaisquer, dados a e b reais, é $|a - b| = |b - a|$."

Sendo assim tem-se $|0 - x| = |x - 0| = |x|$, onde zero é a origem das distâncias do ponto x em relação ao ponto O, como mostra a figura 3.2.

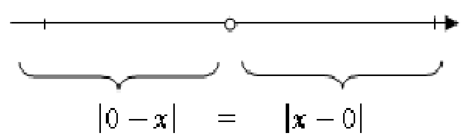


Figura 3.2: Representação geométrica da reta.

Por definição, $|x| = \begin{cases} x, \ \text{se } x \geq 0 \\ -x, \ \text{se } x < 0 \end{cases}$

De acordo com a notação a ser utilizada aqui, de modo geral, a distância entre dois pontos quaisquer é representada por $|a - x| = |x - a|$, como mostra a figura 3.3.

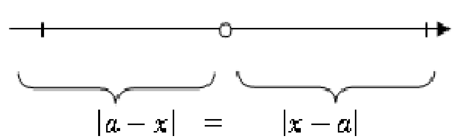


Figura 3.3: Representação geométrica da reta.

Por definição, $|x - a| = \begin{cases} x - a, \ se\ x \geq a \\ -(x - a), \ se\ x < a \end{cases}$

Consequentemente, o número a, abscissa de O, passa a ser a origem das distâncias entre o ponto de abscissa x e o ponto a. Portanto, justifica-se dizer que.

> "o ponto O, por simplicidade, corresponde à abscissa de zero. Assim quando x se aproxima de zero" (CARAÇA, 289) citado por Amaral (2004, p.43)

4 LIMITE

4.1 INTRODUÇÃO

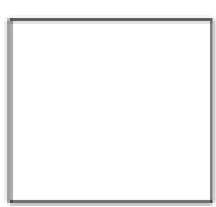
A ideia de limite é utilizada no intuito de expor o comportamento de uma função nos momentos de aproximação de determinados valores. Aparentemente, a ideia de se aproximar o máximo possível de um ponto ou valor e, mesmo assim, nunca alcançá-lo, não é intuitivamente atraente. Para Weber (1986, p. 135), " conceitos do tipo limite são utilizados frequentemente no pensamento não matemático e na conversação".

Weber (1986) cita alguns exemplos como: A produtividade máxima teórica de uma máquina ou de uma fábrica é um limite, seu desempenho ideal (ou limitante) que nunca é atingido na prática, mas que pode ser aproximado arbitrariamente; O desempenho de qualquer dispositivo mecânico ou eletrônico, para o qual os engenheiros podem calcular um desempenho (ou limitante); esta mesma ideia se aplica aos lucros sob condições ideais; à quilometragem da gasolina sob condições ideais; como também existem limites inferiores de custo, desperdício e desgaste.

4.2 IDEIA INTUITIVA DE LIMITE

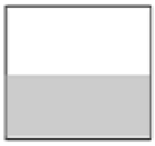
Para que ocorra a ideia intuitiva de limite é suficiente a análise de alguns exemplos.

Exemplo 4.1: Consideremos uma figura de forma quadrada e de área igual a 1.



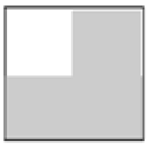
Vamos desenvolver as seguintes etapas:

a) Preencher metade dessa figura.



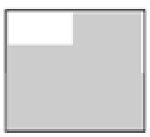
Área preenchida: $\frac{1}{2}$

b) Preencher metade do que restou em branco.



Área preenchida: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

c) Preencher, novamente, metade do que restou em branco.



Área preenchida: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Continuando esse processo sucessiva e indefinidamente, a área hachurada vai preenchendo quase todo o quadrado inicial, isto é, a medida da área vai se aproximando de 1 ou tendendo a 1.

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8}, \ldots, \boxed{1}$$

Dizemos então que o limite desse processo, quando o número de partes preenchidas tende a um valor maior do que qualquer valor imaginável, é preencher a figura toda, ou seja, obter uma área preenchida igual a 1. Quando dizemos que a área preenchida tende a 1, significa que ela se aproxima de 1, sem no entanto assumir esse valor.

Exemplo 4.2: Considere uma pessoa que observa o ângulo de elevação do topo de um prédio, da qual ela se aproxima, em uma mesma direção, conforme a Figura 4.1.

Observe que quando a distância **d** dessa pessoa ao prédio diminui cada vez mais se aproximando de zero, o ângulo θ se aproxima de 90º. A pessoa poderá aproximar-se o quanto quiser do prédio, porém não pode ultrapassar a parede do prédio. Assim o prédio é o limite. Logo o ângulo de elevação de θ é a função da distância **d** (quanto menor a distância, maior

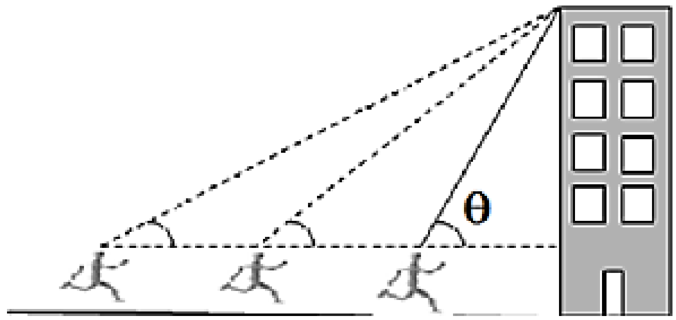


Figura 4.1: Ideia intuitiva de limite.

é o ângulo de elevação), assim podemos escrever que $\theta = f(d)$. Podemos então dizer que "o ângulo de elevação θ tendeu ao limite 90º quando a distância **d** se aproximou de zero".

Exemplo 4.3: Um carro em movimento progressivo que passa pela origem da trajetória em t = 0 s, com uma velocidade escalar constante de 6 m/s. A Tabela 4.1 demonstra as posições do objeto ao longo do tempo.

Tabela 4.1: Posição de (x em m), em funçao do tempo (t em s)

t (s)	**x (m)**
0	0
1	6
2	12
3	18
4	24
5	30

Plotando os dados em um gráfico (Figura 4.2) posição (x) em função do tempo (t), é possível explorar limites de função.

Questões como "O que acontece com os valores de posição, quando o tempo se aproxima de 4 s?" ou "O que acontece com os valores de posição quando o tempo se aproxima de zero?". A partir desses questionamentos surgem as respostas:

i) Os valores de posição para um tempo próximo de 4 s são próximos de 24 m. Assim, é possível demonstrar que, quanto mais próximo de 4s for o tempo, mais próximo ele estará da posição 24 m. Logo, é possível escrever a função de limite (Equação 4.1).

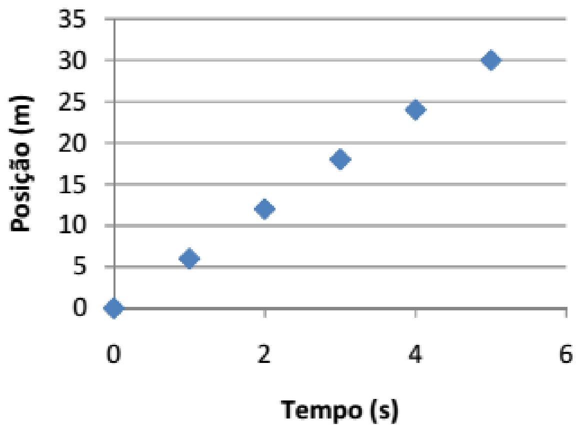


Figura 4.2: Gráfico *x(t)*.

$$\lim_{t \to 4} x(t) = 24 \tag{4.1}$$

ii) Os valores de tempo próximos a 0s, a posição do objeto tende a também a 0m. Diferente do que ocorreu no primeiro questionamento, neste caso só é possível ter valores de tempo acima de zero. Com isso, explica-se o limite pela esquerda e pela direita. Assim, é possível escrever as funções de limite da função. Para valores de tempo que se aproximam de zero pela direita, a posição tende a zero (Equação 4.2). Mas não existem valores de tempo que se aproximam de zero pela esquerda (Equação 4.3)

$$\lim_{t \to 0^+} x(t) = 0 \tag{4.2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} x(t) = \nexists \tag{4.3}$$

Exemplo 4.4: Tendo um tanque cheio de água, ao abrir uma tampa no fundo do reservatório, a água iniciará o escoamento. Supondo que sua taxa inicial de vazão seja de 4,0 L/s , o que acontece com esta vazão ao longo do tempo? Observa-se que a vazão da água diminui, isto porque a vazão depende diretamente da pressão exercida pela altura da coluna de água do tanque e com o escoamento da água, esta coluna diminui sua altura.

Ilustrando essa situação em um gráfico (Figura 4.3), observa-se que a taxa de vazão (V, em L/s) diminui em função do tempo (t, em s) até que todo o líquido contido no tanque se tenha esvaído.

O gráfico da Figura 4.3 serviu para se trabalhar limites para o eixo do x tendendo ao

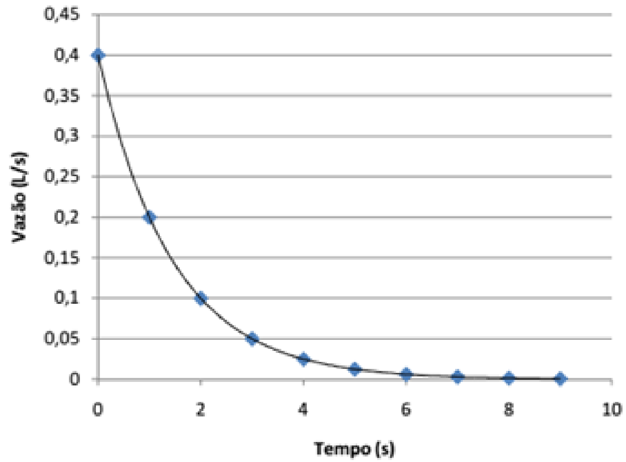


Figura 4.3: Gráfico *V(t)*.

infinito. Para a presente função, para valores de tempo muito grandes (infinitos) os valores de vazão se aproximam de zero. Assim, pôde-se escrever a Equação:

$$\lim_{t \to \infty} V(t) \ = 0$$

Exemplo 4.5: Dada a função $y = x + 2$, pode-se observar no gráfico da Figura 4.4 quais são os valores que y assume quando x está próximo de 2.

Verifica-se que y assume valores próximos de 4. Diz-se, então, que y tende a 4 quando *x tende a 2* ou que o limite da função y é 4 quando x tende a 2, escreve-se simbolicamente com a notação:

$$\lim_{x \to 2} y = 4$$

Exemplo 4.6: Dada a função $y = \frac{x^2-4}{x-2}$, já se pode observar um fato mais interessante quando se tenta determinar o limite de y para x tendendo a 2.

No exemplo anterior, x pode assumir o valor 2, pois a função é definida nesse ponto e o valor de y, para $x = 2$, é 4, nada havendo de extraordinário no limite, que coincide com esse valor. A partir dos valores da tabela, traçamos o gráfico da função Figura 4.5.

Agora, neste exemplo, a situação é diferente. A função não é definida para $x = 2$ e não se pode calcular o valor de y nesse ponto. Mas pode-se observar que o valor de y, quando x se aproxima de 2, aproxima-se de 4, como no caso anterior, pois as duas funções assumem os mesmos valores nos mesmos pontos, com exceção do ponto $x = 2$, onde a primeira função e

x	$y = x + 2$
1,7	3,7
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
2	4
2,001	4,001
2,01	4,01
2,1	4,1
2,3	4,3

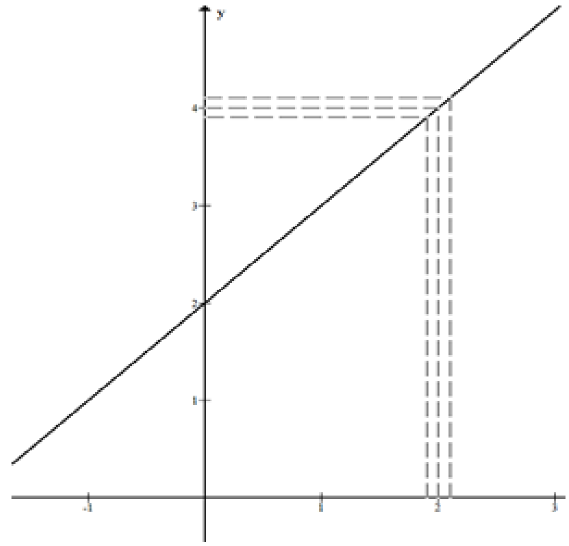


Figura 4.4: Limite de $y = x + 2$ quando x tende a 2.

definida e a segunda, não.

De fato, a função $y = \frac{x^2-4}{x-2}$ pode ser escrita na forma $y = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$ e, $x \neq 2$, pode ser simplificada, dando origem à função $y = x + 2, \quad x \neq 2$, que é equivalente à função dada. Seu gráfico pode ser visto na Figura 4.5.

Nesse caso, embora y não assuma o valor 4, também se tem:

$$\lim_{x \to 2} y = 4$$

Exemplo 4.7: Consideremos também o gráfico (Figura 4.6) da função f:$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:$f\left(x\right) = \begin{cases} x \ se \ x \leq 3 \\ x + 2 \ se \ x > 3 \end{cases}$

Observe:

- quando x se aproxima de 3 pela esquerda, *f(x)* se aproxima de 3, isto é:

$$\lim_{x \to 3^-} f\left(x\right) = 3$$

- quando x se aproxima de 3 pela direita, *f(x)* se aproxima de 3, isto é:

$$\lim_{x \to 3^+} f\left(x\right) = 5$$

Estes limites são chamados **limites laterais** e, como são diferentes, dizemos que neste

x	$y = \frac{x^2-4}{x-2}$
1,997	3,997
1,998	3,998
1,999	3,999
2	-
2,001	4,001
2,002	4,002
2,003	4,003

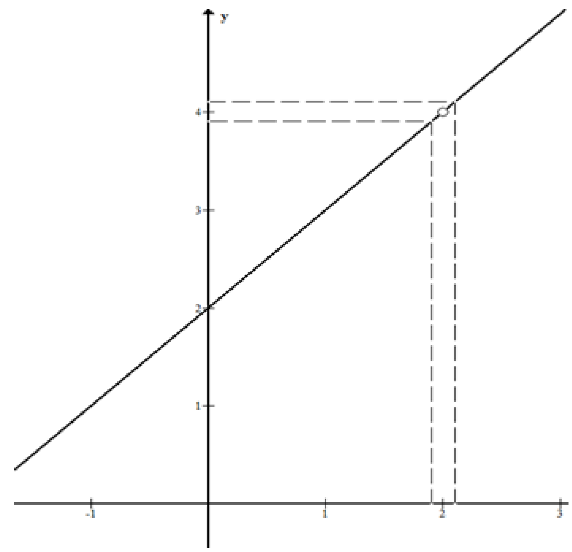


Figura 4.5: Limite da função $y = \frac{x^2-4}{x-2}$ quando x tende a 2.

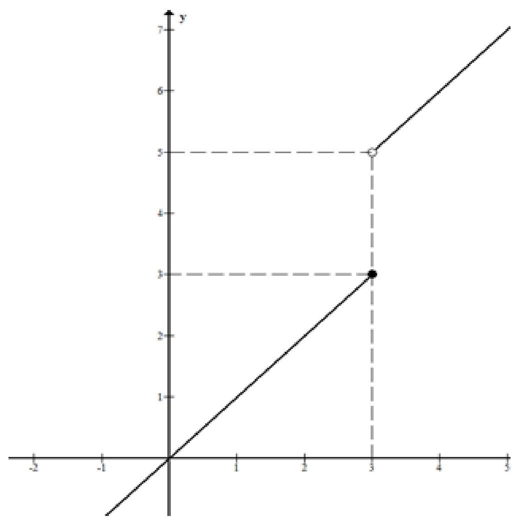


Figura 4.6: Limites laterais.

caso não existe o limite de *f(x)* quando x tende a 3.

Para que exista o limite, *f(x)* deve se aproximar de um mesmo valor quando x se aproxima de ***a*** pela direita ou pela esquerda, isto é:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Exemplo 4.8: a função $y = \frac{1}{x^2}$ também tem um ponto, $x = 0$, para o qual não está definida.

Mas observando-se o gráfico da Figura 4.7 o que acontece com a função quando x se aproxima de zero, verifica-se que y assume valores cada vez maiores. Exprime-se essa ideia, dizendo que y tende a infinito quando x tende a zero ou que o limite de y é infinito quando x tende zero, e escreve-se:

$$\lim_{x\to 0} y \; = \infty$$

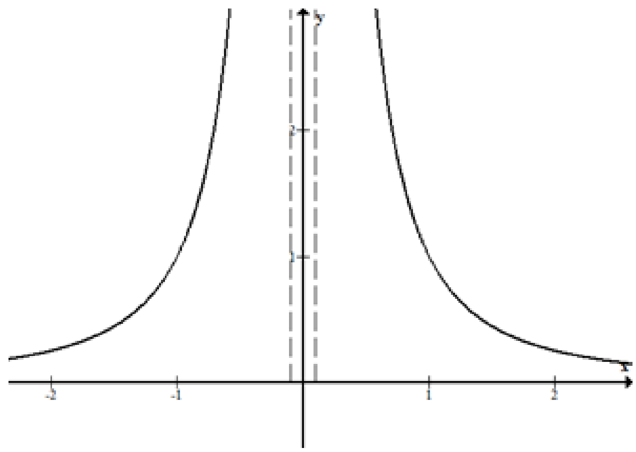


Figura 4.7: Gráfico da função $\frac{1}{x^2}$.

Exemplo 4.9: Observe agora. A função Montante do capital de R$ 1000 a 5% ao mês de juros simples, supondo que os juros são calculados fração de período. Então, o montante permanece igual por um mês para depois saltar bruscamente para um valor maior e novamente permanecer igual por um mês.

A função $M = 1000 + 50n$, onde n é o tempo em meses, e seu gráfico pode ser visto na Figura 4.8.

O que acontece com os valores de M quando n tem valores próximos de 3?

A pergunta não tem resposta única. Se n está próximo de 3, mas é menor que 3, M é 1100. Se n está próximo de 3, mas é maior que 3, M é 1150. Nesse caso, diz-se que não existe o limite de M quando n tende a 3 ou, simbolicamente:

$$\nexists \; \lim_{n\to 3} M$$

Exemplo 4.10: seja a função $y = \frac{1}{x}$ que não é definida para $x = 0$, a partir dos valores da tabela, observe o gráfico da Figura 4.9, qual é o limite de y quando x tende a zero.

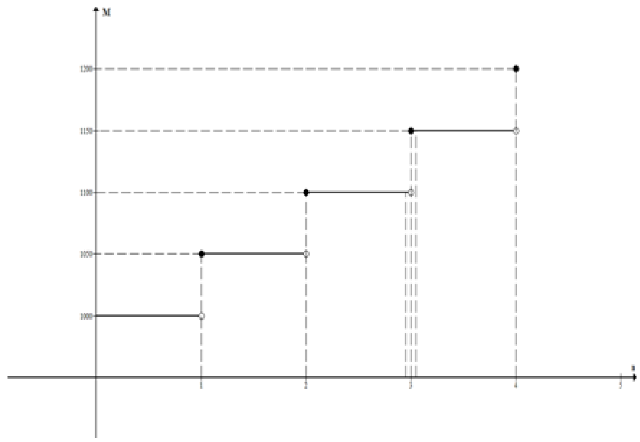


Figura 4.8: Gráfico da função montante.

x	$y = \frac{1}{x}$
- 0,002	- 500
- 0,001	- 1000
- 0,0001	- 10000
0	-
0,0001	10000
0,001	100
0,002	500

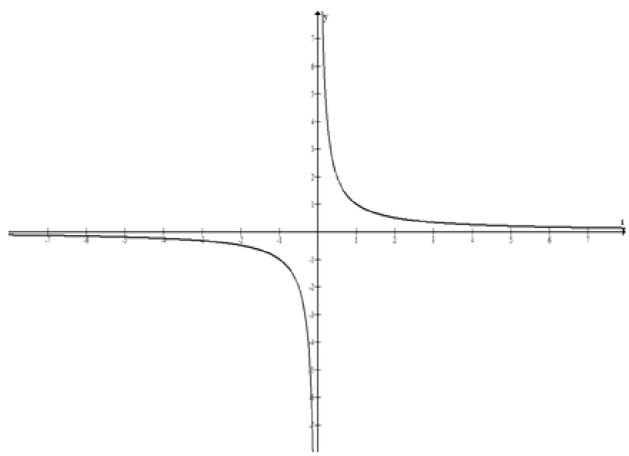


Figura 4.9: Gráfico da função $\frac{1}{x}$.

Novamente acontece o mesmo que se observou no caso anterior. Se $x < 0$, os valores de y são cada vez menores, quando x tende a zero e diz-se que y tende a $-\infty$. Se $x > 0$, os valores de y ficam cada vez maiores à medida que x se aproxima de zero, isto é y tende a ∞.

Como a resposta não é única, diz-se também nesse caso que não existe o limite de y quando x tende a zero, isto é.

$$\nexists \lim_{x \to 0} y$$

4.3 DEFINIÇÃO DE LIMITE

Mostraremos aqui, a definição de limite proposta por (GIOVANNI, 1992).

Considere o gráfico da função *f(x)*, na Figura 4.10.

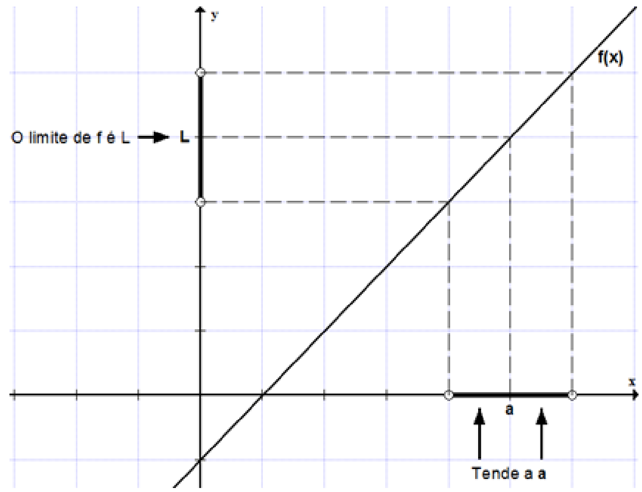


Figura 4.10: Definição de limite.

Dizemos que o limite da função *f(x)* quando x tende a $\boldsymbol{a}$ é igual ao numero real L se, e somente se, os números reais *f(x)* para os infinitos valores de x permanecerem próximos de L, sempre que x estiver muito próximo de $\boldsymbol{a}$.

Indica-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

De um modo geral para calcularmos o limite de uma função *f(x)* com x tendendo a $\boldsymbol{a}$, basta que façamos a substituição da variável $\boldsymbol{x}$ na função pelo valor de $\boldsymbol{a}$.

Vejamos alguns exemplos básicos.

1) $\lim_{x \to 3} (2x - 1)$

2) $\lim_{x \to -2} (x^2 + 3x - 1)$

3) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x + 1}$.

Resolução

1) $\lim_{x \to 3} (2x-1) = 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$

2) $\lim_{x \to -2} (x^2+3x-1) = (-2)^2 + 3(-2) - 1 = 4 - 6 - 1 = -3$

3) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2+3x-1}{x+1}$

Quando x se aproxima de 1, o valor numérico de (x^2+3x-1) se aproxima de $(1+3-1)$, ou seja, de 3, e o valor numérico de (x + 1) se aproxima de (1 + 1), ou seja, de 2. Logo, o valor numérico de $\frac{x^2+3x-1}{x+1}$se aproxima de $\frac{3}{2}$. Poderíamos aplicar diretamente o valor numérico de x = 1 no limite e calculá-lo de maneira mais rápida. Assim:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-1}{x+1}=\frac{1^2+3\,(1)-1}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

4.4 LIMITES INFINITOS

O símbolo de infinito, denotado por ∞, não expressa um número real, mas uma tendência do limite. Intuitivamente, podemos dizer que:

- Quando $\lim_{x\to x_0} f\,(x)=\infty$ simboliza que $f(x)$ cresce ilimitadamente além de qualquer número real x dado, à medida que x se aproxima de x_0.
- Quando $\lim_{x\to x_0} f\,(x)=-\infty$ simboliza que $f(x)$ decresce ilimitadamente além de qualquer número real x dado, à medida que x se aproxima de x_0.

Já quando tomando o limite de f(x) quando x cresce (ou decresce) ilimitadamente utilizamos, respectivamente, os símbolos:

$$\lim_{x\to+\infty} f\,(x) \quad e \lim_{x\to-\infty} f\,(x)$$

4.5 CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO

Seja f uma função e x_0 um ponto de seu domínio. Dizemos que f é contínua em x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f\,(x)=f(x_0)$$

Caso $\lim_{x\to x_0} f(x)$ não exista ou exista, mas seja diferente $f(x_0)$ diremos que $f(x)$ é descontínua em x_0

Assim devem ser satisfeitas as seguintes condições:

a) Existe *f(*x_0*)*

b) Existe $\lim_{x\to x_0} f\,(x)$

c) $\lim_{x\to x_0} f\,(x)=f(x_0)$

Exemplo 4.11:

Verificar se a função $f\left(x\right) = \frac{x^2-4}{x-2}$ é contínua em x = *3*.

Resolução: Cálculo de $f(3)$:

$$f\left(3\right) = \frac{3^2-4}{3-2} = 5$$

Cálculo de $\lim_{x\to 3} f\left(x\right)$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 3}\frac{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}{x-2} = \lim_{x\to 3} x+2 = 5$$

Como $\lim_{x\to 3} f\left(x\right) = f(3)$, *f(x)* é contínua em x = *3*.

a) Sendo *R(q)* a função receita total de q unidades produzidas e vendidas de um produto, definida por:

$$R\left(q\right) = \begin{cases} q & ,\ se\ 0 \leq q \leq 20; \\ 1,1\ q & se\ q > 20. \end{cases}$$

Utilizando a definição mostraremos que a função R é descontínua em q = *20.*

Solução: De fato, temos $R(20) = 20$ mostrando que *R(q)* existe, mas o $\lim_{x\to 20} R(q)$ não existe, pois:

$$\lim_{x\to 20^+} R\left(q\right) = 1,1\ \times 20 = 22 \tag{4.4}$$

$$\lim_{x\to 20^-} R\left(q\right) = 20 \tag{4.5}$$

Portanto, a função R é descontínua em q.

A seguir esboçamos o comportamento da função R(q) na Figura 4.11.

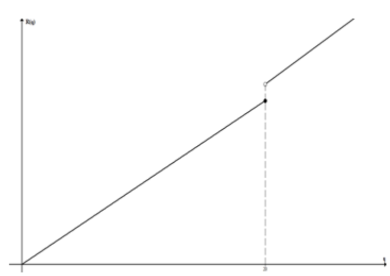


Figura 4.11: Expressão gráfica da função R(q).

5 DERIVADAS

A introdução deste conceito pode ser acompanhada de aplicações que pode facilitar o entendimento, de forma clara e objetiva, buscando oferecer um embasamento teórico mínimo para o estudante que procura ingressar aos cursos de exatas do ensino superior.

5.1 TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO

Em nosso dia a dia, pensamos muitas vezes na variação de grandezas, como, por exemplo, o tempo gasto para chegar à escola, o quanto engordamos ou emagrecemos no último mês, a variação da temperatura num dia específico, a velocidade com que nos deslocamos, e assim por diante.

Por exemplo, de nada adianta saber que determinada aplicação de dinheiro rende um certo valor, se não soubermos em quanto tempo ocorrerá tal variação de capital. Pode acontecer que uma grandeza varie na dependência de apenas uma, ou de várias outras, sendo difícil isolar uma única variável independente. Estaremos estudando aquelas funções que dependem de somente uma variável.

De modo geral, quando uma grandeza y está expressa em função de outro x, ou seja, *y=f(x)*, observamos que, para uma dada variação de x, ocorre, em correspondência, uma variação[1] de y, desde que y não seja uma função constante.

Vejamos o seguinte exemplo, mostrado na Figura 5.1: para um dado intervalo de comprimento Δx, no qual x varia, funções que dependem de x sofrem variações diferentes.

Dadas as funções $y = f_1\,(x) = 2x+4$, $y = f_2\,(x) = 2x^2$, $y = f_3\,(x) = \frac{x^2}{4}$ e, considerando $\Delta x = 1,5$, a partir do mesmo ponto, temos:

$y = f_1\,(x) = 2x + 4$	$y = f_2\,(x) = 2x^2$	$y = f_3\,(x) = \frac{x^2}{4}$
$\Delta y_1 = 7$	$\Delta y_2 = 4,5$	$\Delta y_3 = 0,5625$

[1]A variação de uma grandeza $y = f(x)$, quando x varia num determinado intervalo **I**, é obtida através da diferença entre o valor final e o valor inicial.

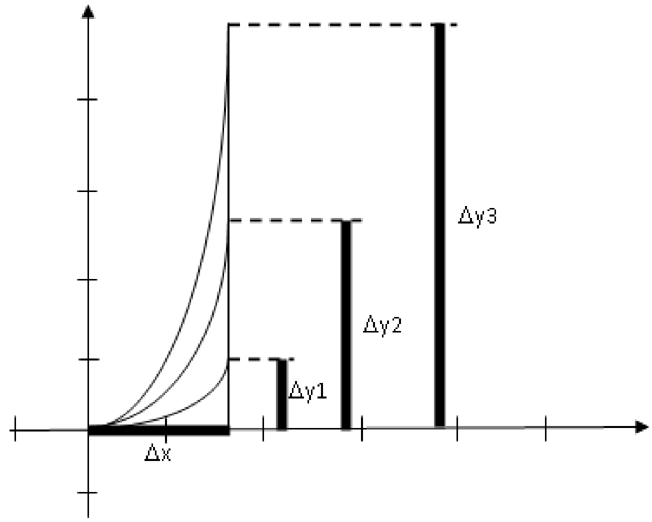


Figura 5.1: Variação de y em função da variação de x.

Assim, para a mesma variação em x, as funções dadas variam de maneiras diferentes.

De um modo geral temos:

Seja f uma função definida num conjunto D e x_0 e $x_0 + \Delta x$ dois pontos de D, quando a variável x passa do valor x_0 para o valor $x_0 + \Delta x$ sofrendo uma variação Δx, o correspondente valor da função passa de $f(x_0)$ para o valor $f(x_0 + \Delta x)$ sofrendo portanto, uma variação.

$$\Delta y = f\,(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Conforme mostra a Figura 5.2:

O quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\,(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

recebe o nome de *taxa média de variação* quando passa de x_0 para o valor $x_0 + \Delta x$ e expressa a variação média sofrida pelos valores da função entre estes dois pontos.

Exemplo 5.1:

Seja a função f tal que $f\,(x) = 3x + 1$, com $x \; \varepsilon \; R$.

Sejam $x_0 = 1$ e $x_0 + \Delta x = 4 \;\therefore\; \Delta x = 3$

Então: $f\,(x_0) = 4$ e $f\,(x_0 + \Delta x) = 13$

Logo, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f\,(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{13 - 4}{3} = 3$

Vejamos o gráfico na Figura 5.3.

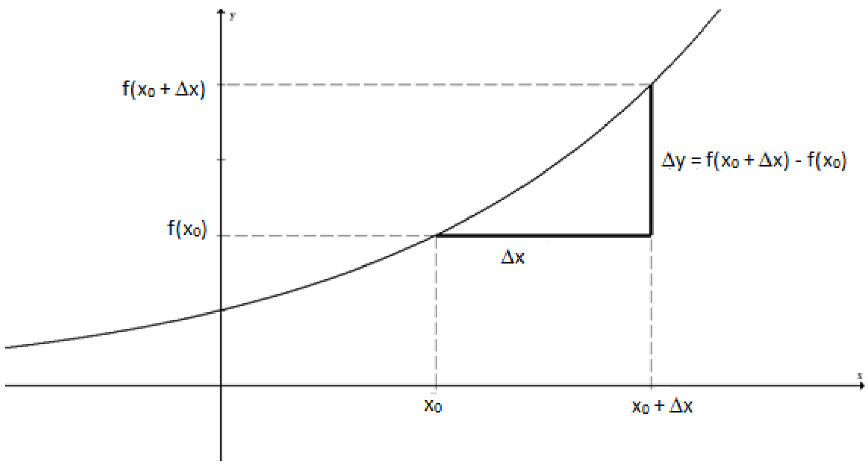


Figura 5.2: (SILVA, Sebastião Medeiros da: 1999, p. 160).

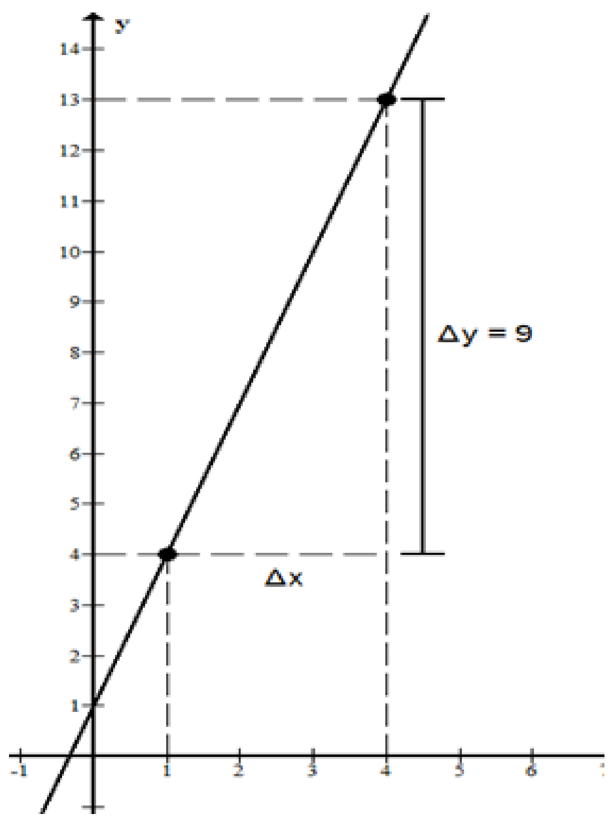


Figura 5.3: SILVA, Sebastião Medeiros da: 1999, p. 160).

5.2 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO

O conhecimento da taxa média de variação não nos fornece uma quantidade razoável de informações para podermos decidir como a variável dependente se comporta em relação à variável independente em um ponto específico. Para tanto, o conhecimento da taxa de variação em cada ponto do domínio será muito mais eficaz.

Conforme vimos no item anterior, a taxa média de variação da função f é expressa pelo quociente.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Vamos estudar o comportamento dos valores desta taxa média para pequenas variações Δx.

Uma das maneiras de examinarmos este comportamento consiste em avaliarmos o limite do quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ quando Δx tende a zero ($\Delta x \to 0$), pois tal limite caso exista, nos fornece um valor aproximado do quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para pequenos valores de Δx.

Vejamos o seguinte exemplo:

Se $f\left(x\right) = x^2$, a taxa média de variação entre x_0 e $x_0 + \Delta x$ é dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} = \frac{\left(x_0 + \Delta x\right)^2 - x_0^2}{\Delta x} =$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

Mas, $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2x_0 + \Delta x\right) = 2x_0$ que é um valor aproximado de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, para pequenos valores de Δx.

5.3 DEFINIÇÃO

Seja a função $f(x)$ definida no intervalo aberto]a , b[e x_0 um ponto deste intervalo.

O limite,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Quando existe, isto é, quando é um número real, recebe o nome de *derivada da função f no ponto x_0*. Indica-se por:

$$f^{'}\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Sendo, $\Delta x = x - x_0$ então $x = \Delta x + x_0$ e, quando $\Delta x \to 0$ podemos dizer que $x \to x_0$, assim a expressão acima pode ser da forma:

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Notações: utilizaremos neste estudo as seguintes notações para as derivadas:

- $f^{'}(x)$ ou y'

$$f^{'}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Nota: A derivada de uma função num ponto é a taxa de variação instantânea.

Exemplo 5.2:

a) Usando o exemplo da Sessão 5.1, temos:

A função f tal que $f(x) = 3x + 1$, $x_0 = 1$ com $x \varepsilon R$. Sendo, $\Delta x = x - x_0$, então $x = \Delta x + x_0$ e, quando $\Delta x \to 0$.

Vamos determinar a derivada da função no ponto $x_0 = 1$, logo:

$$f(x) = 3x + 1$$

$$f(x_0) = 3x_0 + 1 \Rightarrow f(1) = 3.1 + 1 = 4$$

Assim,

$$f^{'}(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$f^{'}(1) = \lim_{x \to 1} \frac{3x + 1 - 4}{x - 1}$$

$$f^{'}(1) = \lim_{x \to 1} \frac{3x + 1 - 4}{x - 1}$$

$$f^{'}(1) = \lim_{x \to 1} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$$

Portanto, $f^{'}(1) = 3$

b) Determinar a derivada da função $f(x) = 3x^2$ no ponto de abscissa $x_0 = 2$

Vamos aplicar a definição e resolver o problema de duas maneiras:

1ª maneira:

Se $x_0 = 2 \Rightarrow f(x_0) = f(2) = 3 .2^2 = 12$

Logo:

$f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, assim, temos que:

$$f^{'}(2) = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2}$$
$$f^{'}(2) = \lim_{x \to 2} \frac{3(x+2)(x-2)}{x - 2}$$
$$f^{'}(2) = \lim_{x \to 2} 3(x+2)$$
$$f^{'}(2) = 12$$

2ª maneira:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(2 + \Delta x) = 3(2 + \Delta x)^2 = 12 + 12\Delta x + 3(\Delta x)^2$$
$$f(x_0) = 3\ .2^2 = 12$$

Logo:

$f^{'}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, assim, temos que:

$$f^{'}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12 + 12\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 12}{\Delta x}$$
$$f^{'}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$f^{'}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} (12 + 3\Delta x)$$
$$f^{'}(2) = 12$$

5.4 DERIVADAS FUNDAMENTAIS

5.4.1 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO CONSTANTE

Se k é uma constante e $f(x) = k$, para todo x real, então $f^{'}(x) = 0$, isto é:

$$f(x) = k \Rightarrow f^{'}(x) = 0$$

Exemplo 5.3:

a) $f(x) = 3 \ \Rightarrow f^{'}(x) = 0$

b) $f(x) = -\sqrt[3]{2} \ \Rightarrow f^{'}(x) = 0$

5.4.2 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO POTÊNCIA

Se $f\,(x) = x^n$, com $n \;\varepsilon\; R$, então $f^{'}\,(x) = n\;.\;x^{n-1}$, isto é:

$$f\,(x) = x^n \;\Rightarrow f^{'}\,(x) = n\;.\;x^{n-1}$$

Exemplo 5.4:

a) $f\,(x) = x \;\Rightarrow f^{'}\,(x) = 1\;.\;x^{1-1} = 1\;.\;x^0 = 1$

b) $f\,(x) = x^5 \Rightarrow f^{'}\,(x) = 5\;.\;x^{5-1} = 5x^4$

5.5 DERIVADA DO PRODUTO DE UMA CONSTANTE POR UMA FUNÇÃO

Se $g\,(x) = k\;.f(x)$, com k igual a uma constante e $f(x)$ derivável, então $g^{'}\,(x) = k\;.f^{'}(x)$, isto é:

$$g\,(x) = k\;.f\,(x) \Rightarrow\; g^{'}\,(x) = k\;.f^{'}(x)$$

Exemplo 5.5:

a) $f\,(x) = 4x^7 \;\Rightarrow f^{'}\,(x) = 4\;.7\;.\;x^{7-1} = 28x^6$

b) $f\,(x) = \frac{2}{3}x^6 \;\Rightarrow f^{'}\,(x) = \frac{2}{3}\;.6\;.\;x^{6-1} = 4x^5$

5.6 PROPRIEDADES OPERACIONAIS

5.6.1 DERIVADA DE UMA SOMA (OU DIFERENÇA) DE FUNÇÕES

Se as funções $u(x)$ e $v(x)$ são deriváveis, a derivada da soma ou da diferença é igual à soma ou à diferença das derivadas de cada uma das funções. Isto é.

Se $f\,(x) = u\,(x) + v\,(x) \Rightarrow f^{'}\,(x) = u^{'}\,(x) + v^{'}(x)$

Se $f\,(x) = u\,(x) - v\,(x) \Rightarrow f^{'}\,(x) = u^{'}\,(x) - v^{'}(x)$

De um modo mais simples, temos:

$$y = u + v \Rightarrow y^{'} = u^{'} + v'$$

$$y = u - v \Rightarrow y^{'} = u^{'} - v'$$

Exemplo 5.6:

a) Dada a função $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$, calcular $f'(x)$.

Resolução:

$$f'(x) = 2.3.x^{3-1} + 5.2.x^{2-1} - 7.x^{1-1} + 0$$
$$f'(x) = 6x^2 + 10x - 7x^0 + 0$$
$$f'(x) = 6x^2 + 10x - 7$$

5.7 DERIVADA DO PRODUTO ENTRE DUAS FUNÇÕES

Se as funções $u(x)$ e $v(x)$ são deriváveis, então:

$$f(x) = u(x)\,.\,v(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = u'(x)\,.v(x) + u(x)\,.v'(x)$$

De um modo mais simples, temos:

$$y = u.v \;\Rightarrow y' = u'.v + u.v'$$

Exemplo 5.7: Calcular a derivada da função $f(x) = (1 + 2x)(5 - 3x)$.

Resolução:

Fazendo $y = (1 + 2x)(5 - 3x)$, onde:

$u = 1 + 2x$ e $v = 5 - 3x$

Logo, $u' = 2$ e $v' = -3$, assim:

$$y = u.v \;\Rightarrow y' = u'.v + u.v'$$
$$y' = 2.(5 - 3x) + (-3)(1 + 2x)$$
$$y' = 10 - 6x - 3 - 6x$$
$$y' = 7 - 12x$$

5.8 DERIVADA DO QUOCIENTE ENTRE DUAS FUNÇÕES

Se $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, com $v(x) \neq 0$, então:

$$f^{'}(x) = \frac{u^{'}(x).v(x) - u(x).v^{'}(x)}{[v(x)]^2}$$

De um modo mais simples, temos:

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y^{'} = \frac{u^{'}v - uv'}{v^2}$$

Exemplo 5.8: Dada a função $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$, calcular $f^{'}(x)$.

Resolução:

Fazendo $y = \dfrac{x^2+1}{x-3}$, onde:

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow u^{'} = 2x$$

$$v = x - 3 \Rightarrow v^{'} = 1$$

Logo:

$$y^{'} = \frac{u^{'}v - uv'}{v^2}$$

$$y^{'} = \frac{2x(x-3) - 1(x^2+1)}{(x-3)^2}$$

$$y^{'} = \frac{2x^2 - 6x - x^2 - 1}{x^2 - 6x + 9}$$

$$y^{'} = \frac{x^2 - 6x - 1}{x^2 - 6x + 9}$$

5.9 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA

Sabemos que a tangente a uma circunferência num ponto é definida como uma reta que tem um ponto comum com a circunferência e todos os outros exteriores ao círculo determinado pela circunferência, conforme Figura 5.4.

Observe que a reta t_1, tangente à curva no ponto A intercepta também a curva no ponto B, a reta t_2 não é tangente à curva, mas tem com esta um único ponto em comum.

Problemas com esse desafiaram durante muito tempo a inteligência dos matemáticos que, buscando sua solução, contribuíram para o desenvolvimento da Matemática.

Para estudar esse problema, consideremos o gráfico da função $y = f(x)$ indicado na Figura 5.5.

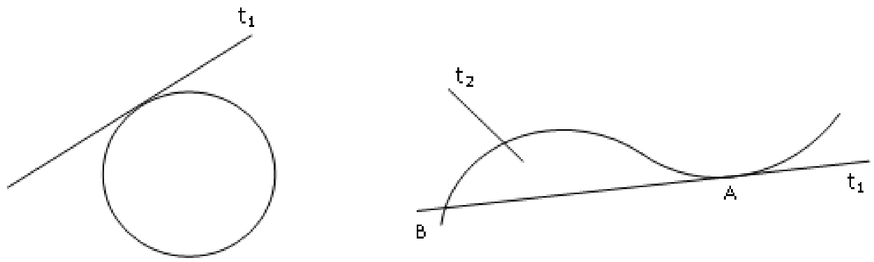


Figura 5.4: Tangente.

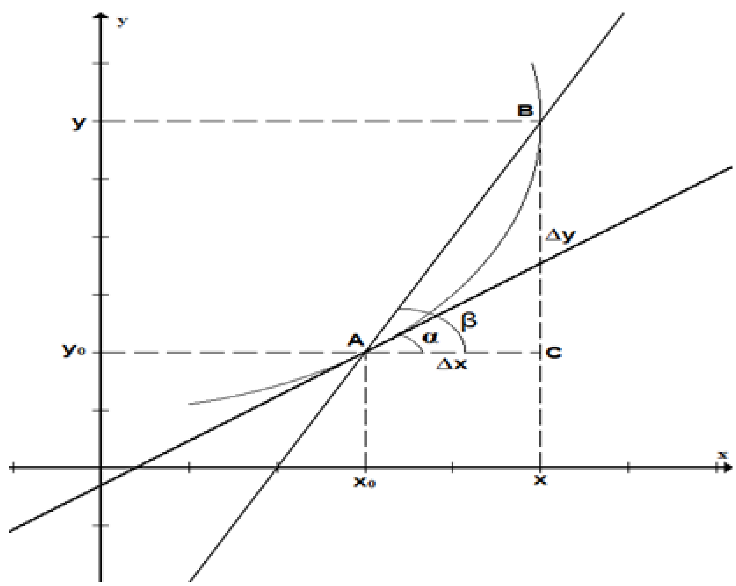


Figura 5.5: Interpretação geométrica da derivada.

Na Figura 5.5, temos:

- s é uma reta secante à curva;
- t é uma reta tangente à curva no ponto A *(x_0, y_0);*
- $\tan\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (considerando o triangulo ABC).

Note que quando $\Delta x \to 0$, o ponto B tenderá ao ponto A e a reta secante s tenderá à reta tangente t; como consequência, o ângulo β tenderá a α, e teremos:

$\lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{y-y_0}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ que é a derivada da função $f(x)$ no ponto de abscissa x_0 e indica-se por $f^{'}(x_0)$.

6 APLICAÇÕES DO CÁLCULO

A maneira como os conceitos matemáticos são desenvolvidos em sala de aula expressa o grande fracasso no desempenho dos alunos, tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) propõe que o currículo do Ensino Médio deve ser organizado de modo que possa ampliar e aprofundar os conhecimentos matemáticos adquiridos no decorrer da vida escolar do aluno, as áreas que envolvem as leis naturais e relações sociais possibilitam um amplo espaço pedagógico para o desenvolvimento de grande parte dos conteúdos de matemática de forma contextualizada, isto deve ser proposto visando a preparação do aluno para o trabalho e exercício da cidadania e também a continuação de seus estudos em níveis superiores. O estudo da derivada de uma função é um dos tópicos do Cálculo Diferencial e Integral que tem importância especial em virtude das inúmeras aplicações em vários campos das ciências, tais como: problemas da física, biologia, química, modelagem matemática, arquitetura, geologia, engenharia. Neste capitulo, mostraremos algumas aplicações em diversas áreas de conhecimento

6.1 EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Nesta seção vamos destacar a utilização da derivada em problemas de máximos e mínimos:

Sejam $y = f(x)$ uma função e p é um *ponto de máximo local* de f se existir um intervalo aberto J, com p em J, tal que, para todo x em J e x no domínio de f, ocorrer

$$f(x) \leq f(p).$$

Diremos, também, que $f(p)$ é um *valor máximo local de* f. Dizemos que p é um *ponto de mínimo local* de f se existir um intervalo aberto J, tal que, para todo x em J e x no domínio de f, ocorrer

$$f(x) \geq f(p).$$

Neste caso diremos que $f(p)$ é um *valor mínimo local de* f. Por outro lado, dizemos que p é um *ponto de máximo* (*de mínimo*) *global* ou *absoluto* se para todo x no domínio de f se ocorrer

$$f\,(x) \leq f\,(p) \qquad\qquad (f(x) \geq f(p)).$$

Todo ponto de máximo (mínimo) global é, também, um ponto de máximo (mínimo) local.

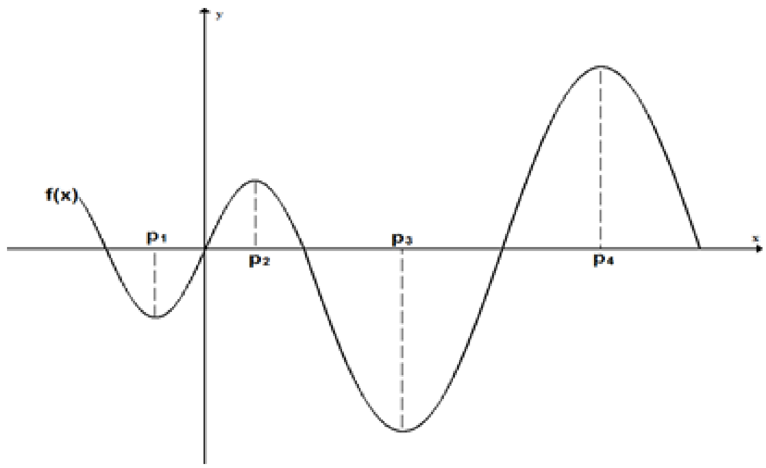


Figura 6.1: GUIDORIZZI, p. 103.

Na Figura 6.1, p_1 é ponto de mínimo global; p_2 é ponto de máximo global; p_3 é ponto de mínimo local e p_4 é ponto de máximo local.

Dizer que o ponto (p , f(p)) do gráfico de f(x) é um ponto de máximo (mínimo) local ou global é equivalente a dizer que p é, respectivamente, um ponto de máximo (mínimo) local ou global de f(x).

Diremos ainda que é um extremante par a função y = f(x) se p for um ponto de máximo ou de mínimo da função. Será um extremante local (ou global) se p for um ponto de máximo ou de mínimo local (ou global). Da mesma forma dizer que (p , f (p)) do gráfico é um extremante é equivalente a dizer que p é um extremante.

Teorema 1: Se f é uma função contínua e sejam a, b, c tais que a $< b < c$ e tal que o intervalo fechado [a , c] esteja contido no domínio de f.

Nestas condições, f (a) $<f(b)$ e f (b) $>f(c)$, então admitirá pelo menos um ponto de máximo local p entre a e c. Podemos, então, tomar b como uma estimativa para este ponto de máximo local.

Se no mesmo teorema, admitirmos f (a) $< f(b)$ e f (b) $< f(c)$, então f admitirá pelo menos um ponto de mínimo local p entre a e c.

6.1.1 CONDIÇÃO NECESSÁRIA PARA EXTREMANTE LOCAL

Teorema 2: seja y = f(x) uma função derivável num intervalo J e seja p interior a J. Nestas condições, para p ser extremante local de y = f(x), p deverá ser obrigatoriamente raiz da equação f$'$ (x) = 0.

6.1.2 RELAÇÃO ENTRE O SINAL DA DERIVADA E O CRESCIMENTO OU DECRESCIMENTO DA FUNÇÃO

Teorema 3: seja $y = f(x)$ derivável no intervalo J.

a) Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a J, então, $f(x)$ será crescente em J.

b) Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a J, então, $f(x)$ será decrescente em J.

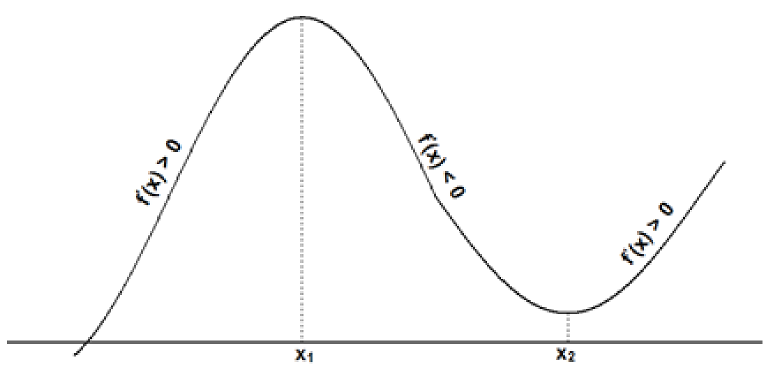


Figura 6.2: GUIDORIZZI, p. 129.

Exemplo 6.1: Seja $y = 2x^2 + 3x + 5$.

a) Quais os candidatos a extremantes locais?

b) É ponto de máximo? È ponto de mínimo? É local? É global?

Resolução

a) Os candidatos a extremantes locais são as raízes da equação $y' = 0$. Como $y' = 4x+3$, os candidatos serão,então as raízes da equação

$4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$ ou $x = -0,75$

Assim $x = -\frac{3}{4}$ é o único candidato a extremante local da função.

b) Para decidir de $x = -\frac{3}{4}$ é o ponto de máximo ou de mínimo local, vamos olhar o sinal da derivada: y será crescente no intervalo em que $y^{'} > 0$ e decrescente no intervalo em que $y^{'} < 0$.

Vejamos a tabela a seguir:

x	-1	$-\frac{3}{4}$	0
$y^{'} = 4x + 3$	-1 (neg)	0	3 (pos)
y	decrescente	min. local	crescente

Pela tabela, $y' < 0$ para $x < -\frac{3}{4}$ e $y^{'} > 0$ para $x > -\frac{3}{4}$.

Logo, y é decrescente no intervalo $x < -\frac{3}{4}$ e crescente para o intervalo $x > -\frac{3}{4}$ o valor de y será o menor possível, ou seja, $x = -\frac{3}{4}$ é o ponto de mínimo global.

Conclusão

$x = -\frac{3}{4}$ é o ponto de mínimo global. Para este valor de x teremos $y = 3,875$ que é o menor valor de y. (observe: gráfico de $y = 2x^2 + 3x + 5$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, e o ponto (-0,75; 3,875) nada mais é do que seu vértice. Aliás, o fato do gráfico ser uma parábola voltada para cima já nos garante que $x = -0,75$ é um ponto de mínimo global.

Exemplo 6.2: Deseja-se construir uma caixa, com 1 m^3 de volume, de base quadrada, sem tampa, e com faces laterais perpendiculares à base. Sabe-se que o metro quadrado do material a ser utilizado custa R$ 80,00. Quais a s dimensões da caixa que minimizam o custo do material? Qual o custo mínimo?

Resolução: Trata-se de uma caixa, em forma de um paralelepípedo, cuja base é um quadrado de lado x e de altura y. O volume da caixa será dado por

$$V = \textit{área da base vezes altura} = x^2y, \; x \geq 0 \text{ e } y \geq 0.$$

Da condição $V = 1\ m^3$ resulta

$$x^2y = 1, \; x \geq 0 \text{ e } y \geq 0.$$

Sendo x^2 a área da base e $4xy$ a soma das áreas laterais, resulta que o custo C do material será $C = 80x^2 + 320xy$. Agora temos que determinar x e y que minimizam o custo

$$C = 80x^2 + 320xy$$

Com as restrições

$$x^2y = 1,\ x \geq o \text{ e } y \geq 0.$$

Vamos isolar y na equação $x^2y = 1$ e substituir o y na equação do custo.

Assim, temos $y = \frac{1}{x^2}$ e, substituindo em

$C = 80x^2 + 320x\left(\frac{1}{x^2}\right)$ e, portanto, $C = 80x^2 + \frac{320}{x},\ x > 0.$

Como os candidatos a extremantes locais são as raízes da equação $C' = 0$. Para resolvê-la, primeiro devemos determinar a derivada de C:

$$C' = \left(80x^2\right)' + \left(320x^{-1}\right)' = 160x - 320x^{-2} = 160x - \frac{320}{x^2}$$

Ou seja,

$$C' = 160x - \frac{320}{x^2}.$$

Os candidatos a extremantes locais são, então as raízes da equação

$160x - \frac{320}{x^2} = 0$ que é equivalente a $160x^3 - 320 = 0.$

Temos, então,

$$x^3 = 2 \text{ e, portanto, } x = \sqrt[3]{2} \cong 1,26.$$

Assim,

$x = \sqrt[3]{2} \cong 1,26$ é o único candidato a extremante local. Vejamos a tabela:

x	1	1,26	2
$C' = 160x - 320/x^2$	- 160	0	240
$C = 80x^2 + 320/x^2$	decrescente.	380,97 (min. Loc.)	crescente.

Segue que $x = 1,26$ é o ponto de mínimo global. Substituindo este valor de x em $y = \frac{1}{x^2}$, resulta $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cong 0,63$.

Conclusão

$x = \sqrt[3]{2} \cong 1,26$ e $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cong 0,63$ são as dimensões da caixa que minimizam o custo. Por outro lado, o menor valor do custo é R\$ 380,97.

Pela tabela, $C' < 0$ para $0 < x\sqrt[3]{2}$ e $C' > 0$ para $x > \sqrt[3]{2}$.

Segue que o custo C é decrescente no intervalo $0 < x < \sqrt[3]{2}$ e crescente no intervalo $x \geq \sqrt[3]{2}$. Logo, o custo será mínimo para $x = \sqrt[3]{2} \cong 1,26$.

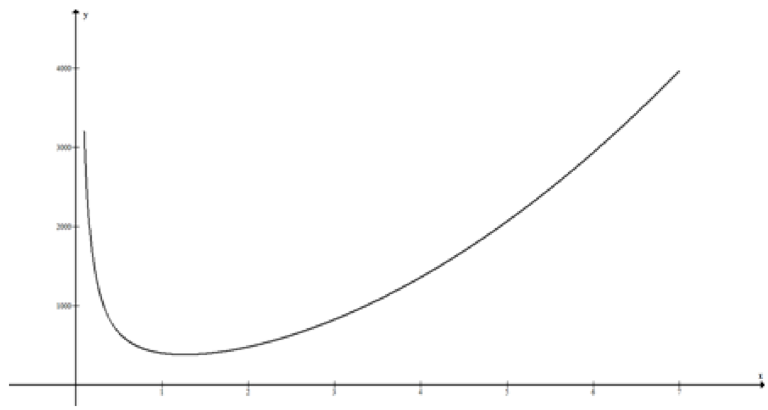


Figura 6.3: Gráfico gerado no MATLAB.

Observe o gráfico da função na Figura 6.3:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(80x^2+\frac{320}{x}\right)=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+}\left(80x^2+\frac{320}{x}\right)=+\infty$$

6.2 NA GEOMETRIA ANALÍTICA

As derivadas podem ser usadas para calcular a equação da reta tangente a uma curva num determinado ponto. Vejamos o gráfico da função $y = f(x)$, indicado na Figura 6.4.

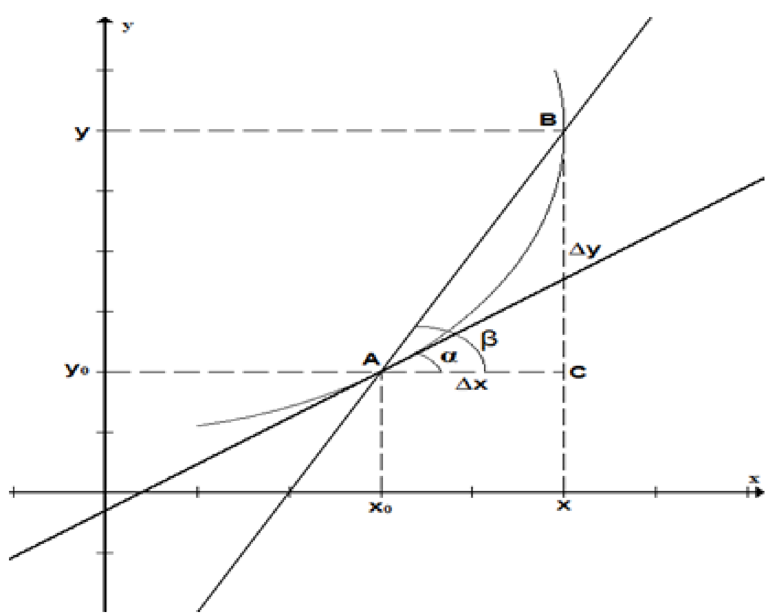


Figura 6.4: Coeficiente angular da reta tangente .

Já vimos que a reta secante s tende à reta tangente t quando $\Delta x \to 0$ (β *tende a* α), isto é, a derivada de *f(x)* no ponto de abscissa x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente t, logo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\ \alpha \Rightarrow f^{'}(x_0) = tg\ \alpha \quad ou \quad m_t = f^{'}(x_0)$$

Daí, podemos afirmar:

A derivada da função $y =$ *f(x)* no ponto x_0, quando existe, é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico cartesiano da função $y =$ *f(x)* no ponto de abscissa x_0.

Exemplo 6.3

Determinar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 1$ no ponto P(1,-2)

Resolução:

Cálculo de *f'(x):*

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f^{'}(x) = 2x - 4$$

Como $m = f^{'}(1)$, vem:

$$m = 2.1 - 4 \Rightarrow m = -2$$

Resposta: -2

Exemplo 6.4

Determinar a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 + 5x$ no ponto de abscissa -1.

Resolução:

Cálculo de *f'(x):*

$$f^{'}(x) = 2x + 5$$

Cálculo de m:

$m = f^{'}(1) \Rightarrow m = -2 + 5\ m = 3$

Cálculo da ordenada do ponto de tangencia:

$f(-1) = (-1)^2 + 5.(-1) = -4$

Cálculo da equação da tangente:

$y - y_0 = m.(x - x_0) \Rightarrow y + 4 = 3(x + 1)$ $y + 4 = 3x + 3$ $3x - y - 1 = 0$

Resposta: $3x - y - 1 = 0$

Exemplo 6.5

Determinar a equação da reta tangente a $f\,(x) = x^2$, no ponto de abscissa $x_0 = 1$. Esboce, num mesmo sistema de referência, os gráficos da função e da reta tangente.

Resolução:

A equação da reta tangente é

$y - y_0 = m(x - x_0)$, onde $y_0 = f(x_0)$ e $m = f^{'}\,(x_0)$.

Como $x_0 = 1$, falta apenas determinar y_0 e m. Temos $f\,(x) = x^2 \Rightarrow f^{'}\,(x) = 2x$ $x_0 = 1$ $y_0 = f\,(x_0) = (x_0)^2 = (-1)^2 = 1$ $m = f^{'}\,(x_0) = 2x_0 = -2$

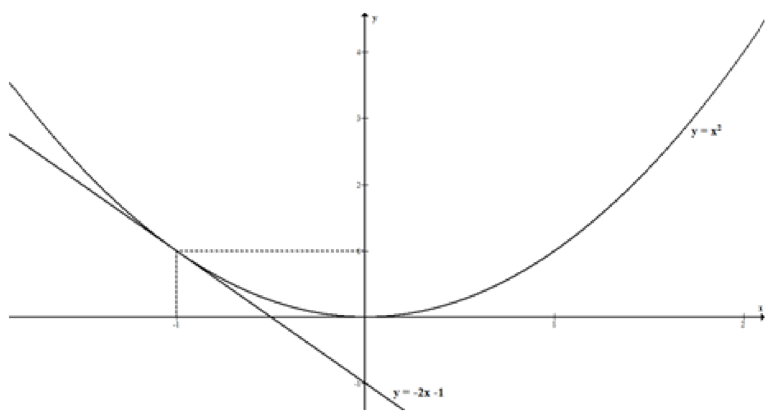


Figura 6.5: Gráfico da tangente à função $f(x) = x^2$.

Assim, temos.

$y - 1 = -2(x - (-1))$, ou seja, $y = -2x - 1$

é a equação da reta tangente pedida.

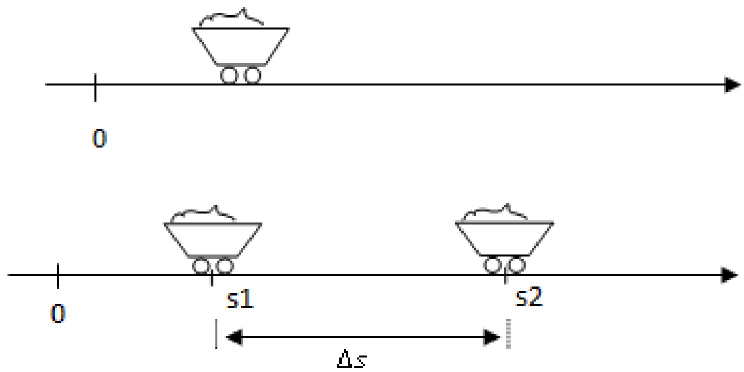
6.3 NA FÍSICA

Exemplo 6.6

Considere um corpo em movimento sobre uma trajetória retilínea.

A posição do corpo, no instante t, em relação à origem O é dada pela função horária *s = f(t)*. Assim temos

Em que:



- $s_1 = f(t_1)$ é a posição do corpo no instante t_1;
- $s_2 = f(t_2)$ é a posição do corpo no instante t_2;
- $\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow t_2 = t_1 + \Delta t$
- $f\,(t_2) = f(t_1 + \Delta t)$

A velocidade média do corpo entre os instantes t_1 e t_2 é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{s_2 - s_1}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{f\,(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

Quanto menor for a variação Δt, mais próximo estará

$$v\,(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f\,(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

Observe que essa expressão representa a derivada da função $s = f(t)$ no instante t_1, ou seja:

$$v\,(t_1) = s^{'} = f^{'}(t)$$

Da mesma forma, se a função horária da velocidade é $v = f(t)$, temos:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_m = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \Rightarrow a_m = \frac{f\,(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

Se $\Delta t \to 0$, o quociente anterior irá representar a aceleração do corpo no instante t_1, ou seja:

$$a\,(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f\,(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

Como a expressão anterior representa a derivada da função $v = f(t)$, temos:

$$a\,(t_1) = v^{'} = f^{'}(t)$$

Conclusão

A velocidade de um corpo é a derivada primeira da função $s = f(t)$.

$$v = s^{'} = f'(t)$$

A aceleração é, portanto, a derivada segunda de $s = f(t)$.

$$a = v^{'} = f^{''}(t)$$

6.4 NA BIOLOGIA

Uma médica, ao analisar seu paciente que tem um tumor no corpo e suponha que seja de forma esférica, quer saber, qual será a taxa de aumento do volume do tumor naquele instante. Sabendo que o raio do tumor é 0,5 cm, e que o raio está crescendo a uma taxa de 0,001 cm por dia.

Resolução

Temos que o volume de uma esfera é dado pela função $V = 4\pi r^2$. No tempo t o tumor tem raio $r =$ *0,5* cm, $\frac{dr}{dt} = 0,001$cm. Como a taxa de crescimento instantânea é a derivada da função $V = 4\pi r^2$, então:

$$\frac{dV}{dt} = 4.\pi.r^2.\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dV}{dt} = 4.\pi.(0,5)^2.0,001$$
$$\frac{dV}{dt} = 4\ .\ \pi\ .\ 0,25\ .\ 0,001$$
$$\frac{dV}{dt} = 0,001.\pi \quad cm^3/dia$$

6.5 NA ECONOMIA: ANÁLISE MARGINAL

A Análise Marginal, essencialmente, estuda o aporte de cada produto e/ou serviço no lucro das empresas. Através dela, busca-se responder a perguntas do tipo: é conveniente deixar de produzir um determinado produto já existente? Que quantidade de um produto, uma empresa deve vender para continuar produzindo? Quais são os efeitos nos lucros da empresa quando ocorrem perturbações na demanda de um produto?

Suponha que $C(x)$ é o custo total de uma companhia incorre na produção de x unidades de um certo produto. A função C é chamada Função custo. Se o número de itens produzido aumenta de x_1 para x_2, o custo adicional será $\Delta C = C\,(x_2) - C(x_1)$, e a taxa média de variação do custo será

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{C\,(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C\,(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

O limite dessa grandeza quando $\Delta x \to 0$, isto é, a taxa de variação instantânea de variação do custo em relação ao número de itens produzidos, é denominado custo marginal pelos economistas

Custo marginal $= \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta c}{\Delta x} = \dfrac{dC}{dx}$

Em geral, é apropriado representar uma função custo por um polinômio

$$C\,(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

onde a representa os custos gerais indiretos(custos fixos), os outros termos o custo das matérias primas, da mão de obra e assim por diante.

Os economistas estudam a demanda marginal, a renda marginal e o lucro marginal, que são derivadas das funções, demanda, renda e lucro.

Exemplo 6.7: Suponha que uma determinada companhia tenha estimado que o custo de produção de x itens seja $C\,(x) = 10\ 000 + 5x + 0,01x^2$. Então a função custo marginal é

$$C^{'}\,(x) = 5 + 0,02x$$

O custo marginal no nível de produção de 500 itens é

$$C^{'}\,(500) = 5 + 0,02\,(500) = R\$\ 15,00/item$$

Isso dá a taxa segundo a qual os custos estão crescendo em relação ao nível de produção quando $x = 500$ e prediz o custo da 501 unidade.

O custo real da produção da 501 unidade é

$$C^{'}\,(501) - C\,(500) = [10\ 000 + 5\,(501) + 0,01(501)^2 - [10\ 000 + 5\,(500) + 0,01(500)^2 = R\$\ 15,01$$

Observe que $C^{'}\,(500) \approx C\,(501) - C(500)$

Exemplo 6.8: A Cia. Alfa Ltda. produz um determinado artigo e vende-o a um preço unitário de R$230,00. Estima-se que o custo total CT para produzir mensalmente q unidades seja dado por $CT = q^3 - 3q^2 + 4q + 2,\ q \geq 0$. Supondo que toda a produção seja absorvida pelo mercado consumidor, que a quantidade deverá ser produzida mensalmente para se ter lucro máximo? Qual o lucro máximo?

Resolução:

Sabemos, que

$Lucro = Receita - Custo$

Logo,

$RT = 230q$

$CT = q^3 - 3q^3 + 4q + 2$

Então,

$LT = 230q - (\ q^3 - 3q^2 + 4q + 2)$, simplificando, temos

$$LT = -q^3 + 3q^2 + 226q - 2,\ q \geq 0$$

Como já sabemos, os candidatos a extremantes locais são as raízes da equação $LT^{'} = 0$. Para resolvê-la, primeiro devemos determinar a derivada de LT. Assim:

$$LT^{'} = -3q^2 + 6q + 226,\ q \geq 0.$$

Os candidatos a extremantes locais são, então as raízes da equação

$$-3q^2 + 6q + 226 = 0$$

Temos, então,

$q = \frac{6 \pm \sqrt{2748}}{6} \Rightarrow q \cong 9,74$ ou $q = -7,74$. Como $q \geq 0$, só interessa a raiz positiva.

Observando a tabela, abaixo:

q	0	9,74	10
LT'	226 (> 0)	0	114 (< 0)
LT	cresc.	max. Loc.	decresc.

Conclusão:

O lucro é crescente no intervalo $0 \leq q \leq 9,74$ e decrescente no intervalo $q \geq 9,74$. Então, o lucro será máximo para $q = 9,74$. O lucro máximo será $LT\,(9,74) = 1559,83$.

6.6 LANÇAMENTO VERTICAL

Se uma bola for atirada ao ar com uma velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $h = 10t - 9,6t^2$. Vamos determinar a velocidade quando $t = 2$.

Resolução

Como a função horária é a função que determina o espaço em função do tempo, ao derivar a expressão $h = 10t - 4,9t^2$, tem-se a velocidade instantânea em função do tempo, assim, $v\left(t\right) = h^{'} = 10 - 9,8t$.Substituindo $t = 2$, temos

$$v\left(2\right) = 10 - 9,8(2)$$

$$v\left(2\right) = 10 - 19,6$$

$$v\left(2\right) = -9,6m/s$$

6.7 PROBLEMA DA CERCA (Otimização)

Um fazendeiro tem 1200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

Resolução

Com o intuito de entender melhor o problema, vamos mostrar algumas possibilidades de cercar o campo. A Figura 6.6 mostra três maneiras de estender os 1200 m de cerca.

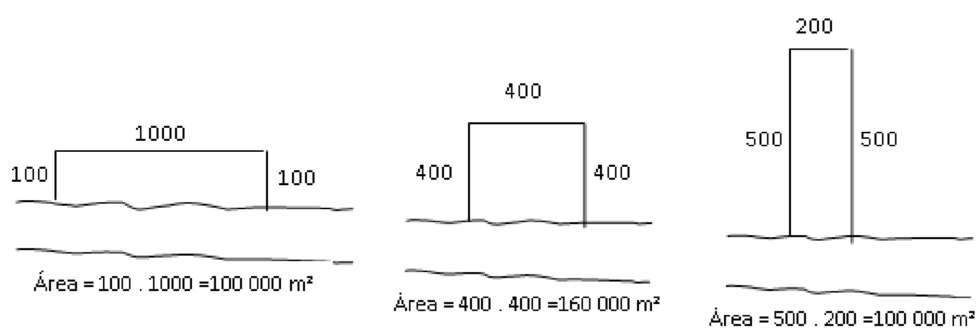


Figura 6.6: Possíveis áreas do campo.

Notamos que ao tentar cercar campos com áreas extensas e rasas ou estreitos e profundos, obtemos áreas relativamente pequenas e diversas. Para melhor encontrar as medidas necessárias que proporcione a área máxima, vamos generalizar as possíveis situações. Vejamos a Figura 6.7.

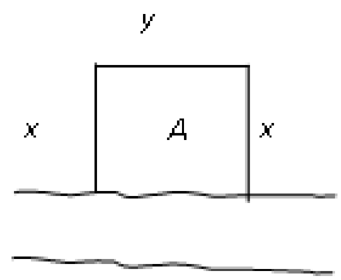


Figura 6.7: Área máxima para cercar o campo.

Como queremos maximizar a área do retângulo, consideremos x a profundidade e y a largura do retângulo (em metros), logo teremos a expressão de A em função de x e y:

$$A = xy \tag{6.1}$$

Sabemos também que o comprimento total do campo é de 1200 m e dessa forma

$$2x + y = 1200 \tag{6.2}$$

Para expressar A em função de uma única variável, eliminamos y na Equação 6.2, assim temos,

$$y = 1200 - 2x \tag{6.3}$$

Substituindo a Equação 6.2 na Equação 6.1, resulta:

$$A = x\,(1200 - 2x) = 1200x - 2x^2$$

Considerando que $x \geq 0$ e $x \leq 600$ pois de outra forma resultaria $A < 0$. logo, a função que desejamos maximizar é:

$$A\,(x) = 1200x - 2x^2\ , \qquad\qquad 0 \leq x \leq 600$$

Para obtermos a área máxima, devemos encontrar os pontos críticos, então basta calcularmos $A'\,(x) = 0$. Logo

$$A^{'}\,(x) = 1200 - 4x$$

Assim

$$1200 - 4x = 0$$

que fornece $x = 300$. que é a medida que irá fornecer o valor máximo de A, que deverá ocorrer ou nesse valor crítico ou em uma extremidade do intervalo.

Fazendo $A(0) = 0, \quad A(300) = 180\ 000, \; A(600) = 0$

Portanto as dimensões do campo que maximizarão a área pretendida são:

$$x = 300 \ e \ y = 600$$

6.8 (ENEM 2015)

Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A Tabela 6.1 associa intervalos de temperatura, em graus Celsius com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Tabela 6.1: Intervalos de temperatura, em grau Celsius e classificações.

Intervalo de Temperatura	**Classificação**
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está:

A) muito baixa.

B) baixa.

C) média.

D) alta.

E) muito alta.

Resolução

Vejamos os pontos principais dessa questão:

A temperatura da estufa é uma função quadrática das horas do dia: $T(h) = -h^2 + 22h - 85$. O estudante retira as bactérias quando a temperatura da estufa é a máxima.

Logo, precisamos descobrir qual é o ponto máximo da função, ou seja, qual a temperatura máxima que a estufa pode atingir durante o dia.

Esse é um problema de ponto crítico máximo. Para resolver precisamos seguir os passos:

Fazer a derivada primeira da função $T(h) = -h^2 + 22h - 85$ e igualar a *0*, obtendo um valor para h, que é o valor de h para o ponto crítico.

Então

$$T'(h) = -2h + 22$$

$$T'(h) = -2h + 22 = 0$$

$$h = 11$$

Logo, $h = 11$ é candidato a ponto crítico.

De acordo com a Seção 6.1.2, temos:

se $T' > 0$, então T é crescente.

se $T' < 0$, então T é decrescente.

Assim observando a tabela

h	10	11	12
$T'(h) = -2h + 22$	2 (> 0)	0	-2 (< 0)
$T(h) = -h^2 + 22h - 85$	crescente	max. Loc.	decrescente

Portanto $h = 11$ é ponto de máximo

Sabendo que $h = 11$ é o valor que resulta no maior valor de T (ponto máximo), Substituindo $h = 11$ na função $T(h) = -h^2 + 22h - 85$ obtém-se .

$$T(11) = -11^2 + 22\,.11 - 85$$

$$T(h) = 36^\circ$$

Sendo assim, a temperatura máxima está entre 30°C e 43°C, e a resposta da questão é a letra d) Alta!

7 CONCLUSÕES

Ao ingressar no Ensino Superior, muitos alunos defrontam-se com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, disciplina esta que figura como obrigatória em muitos cursos de diversas áreas e tem um alto índice de reprovação, segundo estudos desenvolvidos pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP). Surge então um questionamento: "Por que não incluir conceitos de Cálculo no Ensino Médio, para preparar esses alunos, com estratégias que contemplem a interdisciplinaridade e tornem mais amplo o aprendizado dos conteúdos?"

Nosso trabalho consistiu em mostrar a importância do ensino do cálculo diferencial para o desenvolvimento das ciências e para o avanço da matemática, principalmente quando os assuntos são abordados para os alunos do ensino médio de maneira introdutória e de fácil entendimento. Destacamos como se deu o processo histórico, que constituiu o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral ao longo dos anos e a ausência no currículo das escolas de educação básicas do Brasil, onde o mesmo não é trabalhado. Este conteúdo encontra-se no final de alguns livros didáticos, que nem chegam a ser adotados nas escolas brasileiras.

O Cálculo, desde que apresentado convenientemente, ao contrário de ser difícil, é muito gratificante pelas ideias novas que traz e pelo poder e alcance de seus métodos. Seu ensino iniciado na primeira série do Ensino Médio pode se integrar harmoniosamente com a Física no estudo do movimento, além de servir para o estudo de polinômios e outras aplicações científicas.

Constatamos ainda que existem preocupações por parte de alguns estudiosos, propondo algumas alternativas metodológicas para abordagem do tema. No Capítulo 2, podemos perceber que o conceito de derivada antecede o conceito de limite, dessa forma o limite aparece naturalmente através da derivada. Assim começamos com a ideia mais simples, e com as funções mais simples, que são as funções polinomiais de primeiro grau e do segundo grau e em poucas aulas é possível passar as ideias mais importantes do uso da derivada.

Abordando as noções de limites e derivadas sem o rigor matemático das demonstrações e das definições formais, o objetivo foi elaborar um material que possa ser utilizado por professores e por alunos de ensino médio e a partir desta buscar intervenções adequadas e dinâmicas.

Espera-se com a produção deste material, poder inspirar uma reflexão acerca do currículo do ensino de Matemática na Educação Básica, pois trata-se de um assunto bastante significativo para quase todas as áreas no ensino superior e esperamos ajudar a preparar melhor os alunos para que possam ingressar neste nível de ensino, já com um conhecimento matemático mais conciso.

REFERÊNCIAS

AFONSO, A. P. *Materiais.* Disponível em <www.matematiques.com.br/materiais> Acesso em 13 de Out. 2016.

AMARAL, J. C. N. *Proposta metodológica para o ensino do conceito de limite de uma função aos iniciantes do ensino superior*. Belém: UFPA, 2004.

AMORIM, L. I. F. *A (re) construção do conceito de limite do cálculo para a análise [manuscrito]*: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática. 2011. 133f. Dissertação (Mestrado em Educação matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

ÁVILA, G. *Limites e derivadas no ensino médio?* Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, nº 60, p.30 - 38, 2006.

_________. *Ensino de Cálculo no 2º grau.* Revista do Professor de matemática, Rio de Janeiro, nº 18, p. 1 - 9, 1991.

BOYER, C. B.*História da matemática.* São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRITO, J. C. *O cálculo diferencial e integral como ferramenta interdisciplinar no ensino médio.* (2013). 43 f. Dissertação (Mestrado em matemática) - Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.

BROLEZZI, A. C. *A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino da matemática.* (1996) Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da matemática.* 1ª edição. Lisboa: 1951.

DOMINGUINI, L; GOMES, S. F.; ALVES, E. S. B. *Limite de uma função:* vonteúdo viável para o ensino médio? In: II Congresso Nacional de Educação Matemática. (II CNEM) e IX Encontro Regional de Educação Matemática (IX EREM), 2011, Ijuí. Revista CNEM. Ijuí: Unijuí, 2011. v. Único. p. 1 - 10.

GUIDORIZZI, H. L. *Matemática para administração.* Rio de Janeiro: Ed LTC, 2002.

GIOVANNI, J. R; BONJORNO, J. R. *Matemática, 3*: geometria anlítica, números complexos, polinômios, limites e derivadas, noções de estatística do 2º grau. São Paulo: FTD, 1992.

__________. *Matemática Completa, 3ª série:* ensino médio. São Paulo: FTD, 2009.

LIRA, A. F. *O processo da construção do conceito matemático de limite pelo aprendiz com utilização de objetos digitais.* 2008. 184f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

MESSIAS, M. A. V. F. *Um estudo exploratório sobre a imagem conceitual de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função.* 2013. 133f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Matemática) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.

MORAES, M. S, F. *Um estudo sobre as implicações dos obstáculos epistemológico de limite de função.* 2013, 133f. Dissertação (Mestrado em Educação e Ciência e Matemática) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.

SILVA, S. M. da; SILVA, E. M. da; SILVA, E. M. da; SILVA. *Matemática:* para os cursos de administração, economia, ciências contábeis. 5º ed. São Paulo: Atlas, 1991.

STEWART, J. *Cálculo.* São Paulo: Cengage Learning, 2011. Volume I.

VERAS, L. L. *Matemática aplicada à economia:* síntese da teoria - mais 300 exercícios resolvidos e propostos com respostas. 2ª ed. São Paulo: Atlas, 1991.

WEBER, J. 2ª ed. *Matemática para economia e administração.* São Paulo: Ed Harbra, 1986.

ZUCHI, I. *A abordagem do conceito de limite na sequência didática:* do ambiente lápis papel ao mabiente computacional. 2005. 255f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

Cálculo no ensino médio já passou da hora. Disponível em <imaginariopuro.wordpress.com> Acesso em 28 de Out. de 2016.