UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PROFMAT- MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

SEBASTIÃO RODRIGUES DA SILVA

O uso da Modelagem Matemática no Ensino de Funções na Educação Básica

MACAPÁ-AP
2014

SEBASTIÃO RODRIGUES DA SILVA

O uso da Modelagem Matemática no Ensino de Funções na Educação Básica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em rede nacional - PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Guzman Isla Chamilco.

MACAPÁ-AP
2014

Silva, Sebastião Rodrigues da, 1974-
0xxx0 O uso da modelagem matemática no ensino de funções na educação básica / Sebastião Rodrigues da Silva - 2014.

72 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Guzman Eulálio Isla Chamilco.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Amapá, Área de Educação Matemática, 2014.

1. PCNs. 2.Modelagem Matemática. 3. Funções. 4. Atividades. I. Chamilco, Guzman Eulálio Isla. II. O uso da modelagem matemática no ensino de funções na educação básica.

SEBASTIÃO RODRIGUES DA SILVA

O uso da Modelagem Matemática no Ensino de Funções na Educação Básica

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em rede nacional - PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Guzman Eulalio Isla Chamilco - Orientador - UNIFAP
Universidade Federal do Amapá

Prof. Dr. Mauro Lima santos - UFPA
Universidade Federal do Amapá

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil - UNIFAP
Universidade Federal do Amapá

Prof. Drª. Elizabeth Gomes Souza
Universidade Federal do Amapá

MACAPÁ-AP
2014

À memória de meus irmãos José e Reginaldo Rodrigues que partiram durante esta caminhada. Sei que do berço divino, ao alcance da luz de Deus, ambos se regozijam com esta vitória, pois sempre me apoiaram e incentivaram.

Agradecimentos

A todos que contribuíram para a realização deste sonho fica aqui meu sincero e eterno agradecimento, especialmente:

Ao Deus Onipotente, por me abrir as portas e oportunizar o alcance de mais um objetivo na minha vida;

À minha esposa e filhos, por me fortalecerem e inspirarem nos momentos difíceis durante a caminhada; Aos meus pais, amigos e familiares, pelo incentivo e apoio;

Ao Prof. Dr. Guzman Isla Chamilco, pela contribuição e orientação nas horas necessárias;

Aos professores e colegas da turma, pela rica troca de experiência e saberes;

Enfim, a todos que, de alguma forma, colaboraram para a realização deste tão almejado sonho.

“O educador democrático não pode negarse o dever de, na sua prática docente, reforçar a capacidade crítica do educando, sua curiosidade, sua insubmissão. Uma de suas tarefas primordiais é trabalhar com os educandos a rigorosidade metódica com que devem se “aproximar” dos objetos cognoscíveis. E esta rigorosidade metódica não tem nada que ver com o discurso “bancário” meramente transferidor do perfil do objeto ou do conteúdo. É exatamente neste sentido que ensinar não se esgota no “tratamento” do objeto ou do conteúdo, superficialmente feito, mas se alonga à produção das condições em que aprender criticamente é possível. E essas condições implicam ou exigem a presença de educadores e de educandos criadores, instigadores, inquietos, rigorosamente curiosos, humildes e persistentes. (FREIRE, 1996). ”

(Albert Einstein)

Resumo

O Presente trabalho tem como objetivo subsidiar a discussão em torno do emprego da modelagem matemática como uma metodologia alternativa na sala de aula, mais especificamente no ensino de funções. Para tanto, se busca fundamentar o trabalho em uma pesquisa bibliográfica, partindo de uma visão crítica em relação ao ensino tradicional da matemática e em relação ao desenvolvimento do conceito de função por parte do educando, objetivando analisar as diferentes visões em torno do tema, bem como alicerçar o uso da modelagem matemática através da Teoria histórico-cultural de Vygotsk. Apresenta também algumas sugestões de atividades envolvendo modelagem matemática voltada para o desenvolvimento e construção de alguns conceitos dentro do ensino de funções na educação básica. Algumas publicações na área discutida são utilizadas como fundamentação, tais como artigos publicados em revistas científicas renomadas, como BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, e de alguns documentos públicos (PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais e as Orientações Curriculares para o ensino Médio - Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias). Mostra-se também a importância desta linha metodológica segundo sua relação com outras tendências dentro da Educação Matemática, tais como a História da matemática, Resolução de problemas, o ensino através de projetos e a Etnomatemática, entre outras. As diferentes etapas num processo de Modelagem Matemática, segundo Biembengut e na visão de Bassanezi são retratadas como subsídio do presente trabalho. Encerra-se com o desenvolvimento de algumas atividades de modelagem envolvendo conceitos inerentes ao ensino de funções, tais como maximização de função cúbica sem o uso de conhecimentos de cálculo diferencial, obtenção de um modelo exponencial para a população do Estado do Amapá no período de 2010-2030, bem como a inter-relação de temas específicos da matemática, como progressões aritméticas e função quadrática e probabilidade geométrica e funções lineares, quadrática e de duas variáveis. Não se espera encerrar as discussões em torno do tema, pelo contrário, que este trabalho sirva de apoio para as discussões que venham enriquecer a busca por uma educação matemática de qualidade e com significado para os educandos.

Palavras-chave: PCNs. Modelagem Matemática. Funções. Atividades.

Abstract

The present work aims to support the discussion around the use of mathematical modeling as an alternative approach in the classroom , specifically in teaching roles . To do so , we seek support work on a literature search , starting from a critical view of the traditional teaching of mathematics and in relation to the concept of function on the part of the student , aiming to analyze the different views around the subject , as well to underpin the use of mathematical modeling through the cultural-historical theory Vygotsk . Also presents some suggestions for activities involving mathematical modeling focused on the development and construction of concepts within the teaching functions in basic education . Some publications in the area are used as discussed reasons , such as articles published in renowned scientific journals, including BOLEMA : Bulletin of Mathematical Education , and some public documents (PCNs - National Curriculum Guidelines and the Curriculum Guidelines for Teaching Medium - Natural Sciences , Mathematics and its technologies) . It is also shown the importance of this methodological line according to their relationship with other trends in math education , such as the history of mathematics , Troubleshooting , teaching through projects and Ethnomathematics , among others . The different steps in Mathematical Modeling process, according Biembengut and vision Bassanezi are portrayed as allowance of this work. Ends with the development of some activities involving modeling concepts inherent to teaching functions such as maximizing cubic function without using knowledge of differential calculus , obtaining an exponential for the population of the state of Amapá model for the period 2010 -2030 , and the inter - relationship of specific subjects of mathematics , such as arithmetic progressions and geometric probability function and quadratic and linear , quadratic and two-variable functions . Not expected to close discussions around the theme , however , that this work will serve as a support for the discussions that will enhance the search for a mathematical quality education and meaningful to learners.

Keywords: PCNs. Mathematical Modeling. Functions. Activities.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

O objetivo do presente trabalho é subsidiar o processo de reflexão sobre o ensino da matemática na sociedade atual, tendo como foco o ensino de funções, considerando para tal uma visão renovadora de ensino, pautada no ensino através da modelagem matemática. Parte do princípio que o ensino das ciências da natureza nos moldes tradicionais, principalmente o da matemática, onde o professor é o centro do processo, não mais atende aos interesses do aluno, muito menos às necessidades da sociedade. Além disso, o avanço tecnológico da sociedade moderna não mais dá espaço às tradicionais aulas onde a lousa e o giz se destacam como principais ferramentas daquele que dirige todas as atividades no contexto da sala de aula.

A cada dia o concorrido mercado de trabalho se torna mais exigente em relação às habilidades e competências que os jovens devem apresentar e, dessa forma, a escola deve assumir de fato seu papel de formação de cidadãos críticos e participativos e com atitudes reflexivas frente às situações imediatas do mundo capitalista e globalizado. Neste sentido o uso da modelagem matemática no ambiente escolar, através de atividades investigativas, se justifica, uma vez que tal procedimento propicia ao educando possibilidade de participar ativamente no processo de construção/reconstrução do conhecimento, o que irá gerar uma aprendizagem significativa e, dessa forma, uma educação cidadã.

O ensino Tradicional da Matemática

O ensino da matemática no decorrer do século passado sofreu forte influência de diversas correntes de ensino que impuseram um modo específico de "ensinar matemática". Dentre estas correntes destacamos a denominada Matemática Moderna, que a partir da década de 1960 se implantou no Brasil. O movimento da Matemática Moderna contribui bastante com a formalização do ensino da disciplina, visto que apresentou como características marcantes, segundo Kline (apud Pinto, 2007); "o exagero da forma dedutiva de abordar os conteúdos, aliado ao excessivo formalismo e simbolismo da linguagem"; aproximando, desta forma, o ensino da Matemática daquele construído e pensado nas universidades. Tal fato colaborou para o fortalecimento do modo tradicional de ensinar matemática, uma vez que afasta o conhecimento matemático da realidade, do cotidiano do educando e caminha por um meio mais abstrato, conforme nos descreve os Parâmetros Curriculares Nacionais da disciplina:

> O ensino proposto fundamentava-se em grandes estruturas que organizam o conhecimento matemático contemporâneo e enfatizava a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a topologia etc. Esse movimento provocou, em vários países, inclusive no Brasil, discussões e amplas reformas no currículo de Matemática. No entanto, essas reformas deixaram de considerar um ponto básico que viria tornar-se seu maior problema: o que se propunha estava fora do alcance dos alunos, em especial daqueles das séries iniciais do ensino fundamental. O ensino passou a ter preocupações excessivas com formalizações, distanciando-se das questões práticas. A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, enfatizava o ensino de símbolos e de uma terminologia complexa comprometendo o aprendizado do cálculo aritmético, da Geometria e das medidas. (BRASIL, 1998, pg.19-20).

O ensino tradicional da Matemática fundamentou-se principalmente no tripé professor-estímulo-aluno, onde o papel principal era o do professor, que consistia em buscar modos de estimular a aprendizagem por parte dos alunos, dos conteúdos ensinados em sala de aula. Contudo, apesar de não corresponder às expectativas do educando, no sentido de construção e significado do conhecimento, e dos diversos estudos que visam à melhoria do ensino da disciplina, as práticas tradicionais de ensino da matemática ainda persistem em nossas escolas, conforme nos diz o professor Luiz Roberto Dante...

> Em todos os níveis de ensino, é comum que professores e textos resolvam algum "exercício-modelo" mostrando como se faz, pedindo em seguida que o estudante resolva dezenas de problemas semelhantes. Por "falta de tempo" preferem o "é assim que se faz" ao invés de deixar que os estudantes pensem por si próprios, experimentem as suas ideias, deem ouvidos à sua intuição. Melhor seria se o professor fosse mais um orientador, um incentivador, um burilador das ideias e iniciativas dos estudantes. (DANTE, 1985, p.32-33).

Teoria Sócio-histórica de Vigotsky: implicações no ensino da Matemática investigativa

Antes de discorrermos sobre a Teoria Sócio-histórica de Vigotsky, vamos falar um pouco sobre o ensino investigativo dentro da educação matemática, uma vez que nossa proposta de trabalhar a modelagem matemática no ensino de funções tem como fundamento a construção do conhecimento matemático pelo aluno num processo de ação-interação sobre o objeto de estudo, caracterizando-se então por um processo investigativo. Segundo Ponte (2003) uma atividade investigativa parte de uma situação mais geral, onde o aluno irá buscar organizar dados e informações com o objetivo de gerar conjecturas e alcançar a solução de um problema ou simplesmente testar uma hipótese. O ensino investigativo é de suma importância num processo de aprendizagem significativa, posto que deva surgir de situações cotidianas, da realidade cultural do aluno, além de primar pela autonomia do educando, que irá gerenciar o processo de construção-investigação.

Neste sentido a atividade investigativa, de busca de dados, exploração de padrões, relações, etc, é um forte aliado no processo de fortalecimento da autonomia do educando, pois oportuniza a este a possibilidade de confrontar ideias, discutir soluções, comparar resultados, fazer previsões; enfim, dá ao aluno a possibilidade de gerenciar a construção/reconstrução do conhecimento, gerando a partir dai uma aprendizagem realmente significativa. A teoria desenvolvida pelo pesquisador russo Lev Vigotsky, conhecida como Teoria Sócio-histórica, representa uma grande aliada ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática, uma vez que para esta é de fundamental importância o papel da interação social no desenvolvimento humano, ou seja, a valorização da realidade cultural e as relações interpessoais são essenciais no processo de construção e aquisição do conhecimento. Neste sentido Maia (2006) nos diz que...

> [...] para esse pesquisador, o desenvolvimento não é linear. Aprendizado e desenvolvimento estão interrelacionados desde o nascimento do sujeito, sendo os atos intelectuais decorrentes de praticas sociais. A interação social e o processo de intervenção social são fundamentais para o desenvolvimento do sujeito.(MAIA, 2006, p.68).

Os pontos principais desta teoria que se relacionam com o processo educacional são:

- **INTERAÇÃO SOCIAL**: Segundo o pensamento de Vigotsky o homem se forma a partir da diferentes ações e interações com o meio em que vive, pois destas relações com o meio social ocorre o amadurecimento das funções psicológicas superiores.

> Para Vygotsky, a formação se dá numa relação dialética entre o sujeito e a sociedade a seu redor - ou seja, o homem modifica o ambiente e o ambiente modifica o homem. Essa relação não é passível de muita generalização; o que interessa para a teoria de Vygotsky é a interação que cada pessoa estabelece com determinado ambiente, a chamada experiência pessoalmente significativa (FERRARI, 2012, p.02).

Dessa forma, uma educação matemática pautada na construção do conhecimento através de atividades investigativas e de modelagem, onde o aluno irá interagir com os colegas, professores e as demais pessoas em seu entorno, em busca de soluções para problemas de universo vivencial, apresentará uma grande possibilidade de interiorização do conhecimento elaborado neste processo de relações interpessoais.

- **MEDIAÇÃO**: Todo processo de aprendizagem, segundo Vigotsky, e fundamentalmente mediado, ou seja, a mediação é um processo sempre presente em qualquer relação do educando com o mundo e com outras pessoas. A aprendizagem é uma consequência de uma situação mediada, como por exemplo, uma criança ao tentar aprender a andar de bicicleta, pode ter como mediador nesta situação um adulto ou irmão mais velho, que já detém aquele conhecimento. Ferrari (2012, pg.04), nos diz que:

> Todo aprendizado é necessariamente mediado - e isso torna o papel do ensino e do professor mais ativo e determinante do que o previsto por Piaget e outros pensadores da educação, para quem cabe à escola facilitar um processo que só pode ser conduzido pelo próprio aluno. Segundo Vygotsky, ao contrário, o primeiro contato da criança com novas atividades, habilidades ou informações deve ter a participação de um adulto. (FERRARI, 2012, p.04).

Dentro deste contexto, o papel da escola e principalmente o do professor, se fortalecem, visto que o educador não é mais visto como o elaborador das atividades em que os alunos irão construir seus conhecimentos e sim como parte atuante (mediadora) na construção do conhecimento significativo por parte do aluno.

- **ZONA DE DESENVOLVIMENTO PROXIMAL - ZDP**: A zona de desenvolvimento proximal representa aquilo que o educando não consegue realizar sozinho, mas o faz com a mediação de outra pessoa. A ideia de ZDP é de suma importância nas atividades pedagógicas em sala de aula, principalmente em atividades em grupos, onde os alunos irão interagir conjuntamente em busca de soluções para os mais diversos problemas.

Neste sentido não devemos esquecer-nos de mencionar o papel pedagógico que o erro tem diante de um ensino pautado na teoria de Vigotsky, uma vez que o professor como mediador do processo de investigação e modelagem matemática, deverá interagir com o educando de forma a fazer com que a partir de uma situação errônea o aluno alcance os objetivos estabelecidos para aquela situação.

A intervenção do professor na ZDP do aluno tem um papel potencializador, tendo o "erro" como coadjuvante neste processo. Neste sentido, Rosso (2010) afirma que:

> Dessa forma, quando o objetivo é resolver uma situação-problema, as estratégias erradas assumem um papel importante no processo cognitivo e no ensino-aprendizagem, mostrando que não basta saber por onde ir, mas também o que evitar. Esse olhar para o erro do aluno orienta as práticas didático-metodológicas e, nessa relação, o professor amplia sua competência para ensinar.(ROSSO, 2010, p.15)

Ressaltamos também neste contexto o papel de mediador que o professor exerce em uma atividade de modelagem, bem como as relações culturais e interpessoais que se fazem presente. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias, nos oferece suporte a esta concepção de educação matemática, quando nos afirmar:

> As ideias socioconstrutivistas da aprendizagem partem princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando é colocado em situação de resolução de problemas. Essa ideia tem como premissa que a aprendizagem se realiza quando o aluno, ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor. Dessa forma, caberia a este o papel de mediador, ou seja, de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções, cabendo ao aluno o papel de construtor de seu próprio conhecimento matemático. (BRASIL, 2006, pg. 81).

Concordamos também com Orey e Rosa, citados por Hermínio (2009, p.23), quando nos dizem que:

> Em nosso ponto de vista, a Modelagem é uma metodologia de ensino voltada para a eficiência sócio-crítica dos alunos, pois os engaja num ensino-aprendizagem relevante e contextualizado, permitindo que os alunos se envolvam na construção do significado social do próprio mundo para que eles atinjam um grau de eficácia sócio-crítica necessária para agir no ambiente social.

Capítulo 1

Por que o ensino investigativo através da Modelagem Matemática

A educação moderna deve se adaptar aos anseios que os educandos apresentam ao adentrarem o espaço escolar. O processo de construção do conhecimento matemático deve trilhar este caminho. Então, a busca de como imprimir significado aos conteúdos matemáticos desenvolvidos em sala de aula deve ser uma prática constante. Neste sentido, a modelagem matemática surge como uma metodologia de ensino pautada num ensino investigativo e construcionista, buscando preencher essa lacuna.

1.1 Afinal o que é modelagem Matemática?

Antes de tentarmos justificar o uso da modelagem matemática no ambiente da sala de aula, vamos discorrer um pouco sobre o quê afinal significa modelagem matemática. Para tanto, devemos lembrar que devido ao tradicionalismo dentro do ensino da matemática, os conteúdos matemáticos desenvolvidos em sala de aula sempre se apresentaram desconexos, sem vinculo com a realidade vivida pelo educando, quase sempre gerando questionamentos do tipo "estudar isso para quê?".

Em algumas situações até o próprio professor não sabe responder tais questionamentos, justificando a aprendizagem de um determinado conteúdo devido ao "pré-requisito"necessário à aprendizagem de um conteúdo posterior, reforçando um circulo vicioso, que na realidade atual não mais se justifica, frente às diversas demandas tecnológicas e sociais que o ensino da matemática atende.

Segundo Bassanezi (2006. p.36), o ensino de um teorema matemático segue o seguinte esquema: "enunciado $>$ demonstração $>$ aplicação", enquanto que o caminho a ser seguido em sala de aula deveria ser o mesmo que deu origem a elaboração do Teorema, ou seja, a ordem inversa:

I. Motivação - externa ou não à matemática. Situações e problemas do cotidiano ou intrínseco da matemática;

II. Formulação e validação de hipóteses - Processo de investigação matemática;

III. Enunciado.

Não significa que defendemos a construção dos conceitos mais elaborados da matemática pelo aluno da educação básica, seria uma hipótese demagógica, mas neste ponto, devemos lembrar que o processo de modelagem matemática é tão antigo quanto os próprios conhecimentos matemáticos, uma vez que estes surgiram quase sempre diante da busca de soluções para problemas da realidade prática cotidiana. Podemos citar como exemplo as situações de agrimensura vivenciadas pelos egípcios nas margens do Rio Nilo, onde a necessidade de demarcar constantemente as terras inundadas se fundamentava em medições e traçados geométricos.

São vários os exemplos que podem ser utilizados pelo professor, fundamentados na História da Matemática, como forma de mostrar ao educando a importância da matemática e sua construção como uma ciência dinâmica, bem como dar-lhes uma ideia do que vem a ser um processo de modelagem matemática (iremos falar sobre este tema mais à frente).

Segundo Miola e Silveira (2008, p. 58) a modelagem matemática tem sua origem na matemática aplicada, sendo utilizada entre os matemáticos aplicados como um meio para a obtenção de um modelo matemático (fórmulas, equações, gráficos, tabelas, etc.) que expliquem uma situação da realidade.

O que se percebe neste momento é que um modelo matemático não consiste somente em uma fórmula ou equação que inter-relacione diversos parâmetros que representam dados da realidade, compilados através de uma observação sistemática, seguindo padrões e normas científicas. Dessa forma, um esboço gráfico, uma maquete, um desenho, dentro de um contexto matemático, podem representar modelos que auxiliem na solução de situações problemas de matemática.

Para Bassanezi (op.cit. p.16) "a Modelagem Matemática consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual". Consiste em uma metodologia alternativa, onde o professor irá buscar uma conexão entre o saber matemático escolar e a matemática vivenciada na realidade do educando, bem como uma ligação com as demais áreas do conhecimento, tais como a Biologia, a Física, Agronomia, Botânica, etc.

Para Biembengut e Hein (2013, p.13), "pode-se dizer que matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir". Ou seja, a modelagem matemática é o elo entre a realidade e a matemática, conforme mostra o esquema a seguir:

Fonte: Biembengut e Hein (2013, p.13).

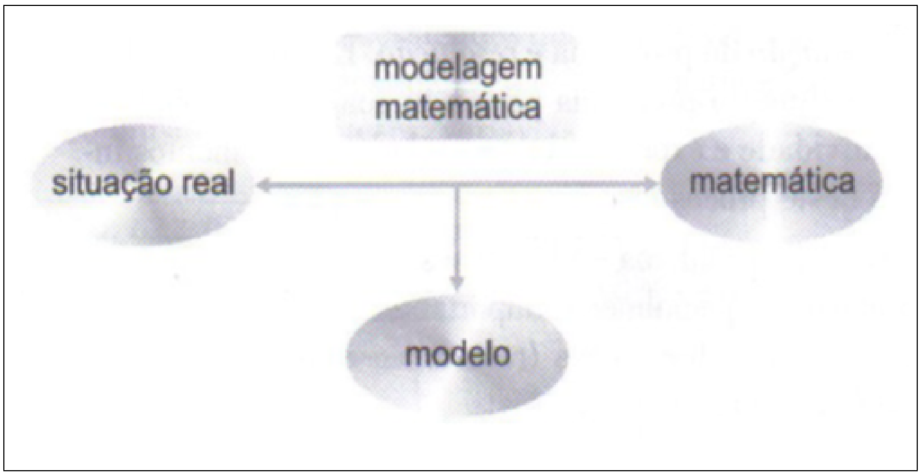


Figura 1.1: Esquema do processo da modelagem matemática, segundo Biembengut e Hein

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, "a modelagem matemática pode ser entendida como a habilidade de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real"(Brasil, 2006, pg.84). Esta concepção de modelagem matemática esta de acordo com o pensamento de Barbosa (2001, p.31), quando menciona que a modelagem matemática deve ser entendida "como um ambiente de aprendizagem as quais os alunos são convidados a investigarem por meio da matemática, situações com referências na realidade".

Como percebemos não existe uma definição única e universal para a modelagem matemática, cabendo ao professor analisar as mais diversas ideias em torno do conceito de modelagem matemática, afim de que desta forma possa fundamentar-se melhor e enriquecer suas atividades de sala de aula, porém, isto demanda comprometimento com a educação e uma busca constante de aperfeiçoamento através de formação continuada

1.2 Vantagens do uso da Modelagem Matemática na sala de Aula

Um modelo matemático elaborado pelo educando em uma situação de investigação propicia ao mesmo a oportunidade de agir e interagir com o objeto do conhecimento, uma vez que o processo de modelagem matemática é essencialmente ativo, tanto por parte do aluno, quanto do educador, que necessita está atento às diversas situações que irão surgir no decorrer do processo.

Dentro de uma situação que envolva o ensino através da modelagem matemática, o aluno deixa a periferia processo de ensino-aprendizagem e passa atuar no centro, como um construtor do conhecimento e não mais somente como um observador. Temos neste enfoque uma vantagem pedagógica inquestionável, visto que a interação do educando com a construção/reconstrução de um modelo matemático, enseja a mobilização de diversas competências e habilidades necessárias e essenciais ao desenvolvimento cognitivo e intelectual do educando. Algumas dessas competências são nomeadas no documento referente às Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2006, pg.85):

- Selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir;
- Problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido;
- Formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa;
- Recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado, o que, muitas vezes, requer trabalho de simplificação quando o modelo originalmente pensado é matematicamente muito complexo;
- Validar, isto é, confrontar as conclusões teóricas com os dados empíricos existentes;
- E, eventualmente ainda, quando surge a necessidade, modificar o modelo para que esse melhor corresponda a situação real, aqui se revelando o aspecto dinâmico da construção do conhecimento

A utilização da modelagem matemática como uma metodologia de ensino-aprendizagem em sala de aula atende as finalidades do ensino da disciplina pautado em uma formação cidadã do educando, conforme nos mostra os Parâmetros Curriculares Nacionais da disciplina matemática, voltado para o segundo segmento do ensino fundamental (Brasil, 1998, p.48):

- Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
- Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);

- Selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
- Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
- Comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;
- Estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
- Sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
- Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Como visto acima, a formação cidadã do educando tem suporte fundamental no ensino através da modelagem matemática, já que a utilização desta metodologia por parte do professor em sala de aula atende os objetivos estabelecidos pelos PCNs da disciplina, contribuindo assim com a formação integral do educando.

Outro fator que deve ser considerado a favor da utilização da Modelagem Matemática na sala de aula, consiste na possibilidade que esta metodologia oferece de interação com outras tendências dentro do ensino da matemática.

1.3 Modelagem e Educação Matemática

A modelagem é uma tendência na educação matemática que apresenta um grande gama de aplicabilidade dentro de outros ramos da educação matemática. Esse fato se deve ao caráter construtivo do próprio conhecimento matemático e as possibilidades de inter-relações das diferentes tendências. Mostramos a seguir algumas dessas possibilidades, ressaltando que existem outras e nosso objetivo aqui é de somente chamar atenção a essas possíveis aproximações.

1.3.1 Modelagem e História da Matemática

A história da matemática como tendência de ensino vem sendo bastante utilizada em sala de aula, tendo se mostrado como uma forte auxiliadora na construção de conceitos matemáticos. O uso da história da matemática numa parceria com a modelagem como estratégia didática pode ser feito através de reconstrução e reaplicação de modelos matemáticos construídos através dos tempos e que fazem parte da realidade do currículo escolar. Esta atitude em sala de aula gera um espaço favorável à aprendizagem significativa, uma vez que o uso de tal metodologia faz com que o educando perceba o papel investigativo que houve na construção de determinado modelo matemático, contribuindo para desmistificar a origem dos conhecimentos matemáticos. Podem-se citar alguns exemplos desta possibilidade metodológica:

- Medição de sombras para o cálculo de alturas inacessíveis - aplicação da semelhança de triângulos e do Teorema de Tales;

- A revisão de como o matemático grego Erastótenes (276-194 a.C) calculou o comprimento do raio da terra - aplicação do teorema das retas paralelas e trigonometria;

- Reconstrução do modelo utilizado pelo matemático e astrônomo grego Hiparco (190 - 126 a.C) para determinar a distância da terra à lua - aplicação de triângulos retângulos e trigonometria e noções de astronomia básica.

1.3.2 Modelagem e Resolução de Problemas

A resolução de problemas é outra tendência na educação matemática que tem se mostrado de grande valia no processo de aprendizagem. A integração da modelagem matemática juntamente com a resolução de problemas é sem dúvida um caminho viável, posto que, na resolução de uma situação-problema se tornam essenciais a investigação, o estabelecimento de estratégias e a obtenção de um modelo (gráfico, tabela, equação, etc.) que viabilizem a aplicação e a generalização do resultado, que podem ser alcançados através de caminhos diferentes. Neste sentido, a modelagem matemática é utilizada como uma ferramenta auxiliar no processo de resolução de problemas e vice-versa. No decorrer deste trabalho apresentaremos uma atividade que envolve uma articulação entre estas duas tendências de ensino em matemática.

1.3.3 Modelagem e Aprendizagem por Projetos

A utilização de projetos educativos como forma de desenvolver atividades curriculares é cada vez mais presente nas escolas. O trabalho educativo com projetos possibilita ao professor de matemática o desenvolvimento de atividades investigativas em torno de um tema ou de uma situação-problema real.

O ensino pautado numa proposta de modelagem matemática tem na pedagogia de projetos uma forte ferramenta, visto que toda atividade de aprendizagem matemática fundamentada num processo de modelagem pode surgir e se desenvolver através de um projeto contextualizado, discutido com a classe, de preferência tendo seu tema e objetivos definidos pelos educandos, dentro de sua da realidade sociocultural.

1.3.4 Modelagem e Etnomatemática

A realidade sociocultural do educando, dentro de uma proposta de Etnomatemática, é o ponto de partida para o desenvolvimento dos conteúdos curriculares, fundamentando o processo de aprendizagem a partir de situações contextualizadas. Dentro deste enfoque a modelagem matemática poderá ser utilizada para resolver problemas reais da comunidade onde o educando se encontra inserido, considerando os conhecimentos matemáticos praticados pela comunidade e suas peculiaridades socioculturais.

Vamos citar como exemplo, a matemática desenvolvida por comunidades que tem como principal atividade econômica a exploração da madeira. Sabemos que a matemática do cálculo de volumes dos troncos de madeira nessa realidade é bastante diferenciada daquela dita formal. O professor tem neste momento a oportunidade de trabalhar o conteúdo voltado para o cálculo de volume de prismas, cilindros e suas variações, partindo da realidade cultural do educando.

1.3.5 Modelagem e as Tecnologias da Informação e Comunicação - TICs

Em todo processo de ensino não podemos deixar de relacionar as potencialidades que as tecnologias da informação e comunicação apresentam. Diante de um ensino pautado pela modelagem matemática não poderia ser diferente, já que a análise de dados, variação de parâmetros, simulação numérica e construção de gráficos são elementos constantes na obtenção de dados relativos ao modelo que se construir. Neste sentido, a articulação destas duas correntes de ensino se torna indispensável numa educação moderna. Destacamos o uso do computador como uma poderosa ferramenta auxiliar na modelação de fenômenos, bem como na execução de cálculos que, quando realizados de forma tradicional, se tornariam enfadonhos e desestimulantes.

A simples visualização do esboço gráfico da relação entre duas grandezas contribui de forma preponderante na tomada de atitudes frente a uma situação de modelagem, já que a partir da análise gráfica pode-se caracterizar o comportamento de um conjunto de dados e direcionar a tomada de decisão frente ao que se deseja alcançar. Através deste exemplo nota-se a importância do emprego e da relação das TICs com a modelagem matemática na sala de aula. As possibilidades de relacionar a modelagem matemática com as demais tendências dentro da educação matemática são inúmeras, cabe ao professor buscar mecanismos que propiciem esta inter-relação.

1.4 Etapas num Processo de Ensino por Modelagem Matemática

Descrevemos a seguir as etapas necessárias num processo de ensino por modelagem matemática, de acordo Biembengut, Hein e Bassanezi, porém, vale ressaltar que existem outros, adotamos estes por apresentar maior facilidade em suas respectivas aplicações. Segundo Biembengut e Hein (2013, p.13.) o processo de modelagem matemática pode ser sistematizado em três etapas:

1º Etapa: Interação - Neste momento o educando reconhece a problemática em questão e busca identificar um conjunto de variáveis relativas à situação a ser modelada. Consistem no reconhecimento da situação-problema, no levantamento dos dados e do referencial teórico necessário a fundamentação e realização do trabalho de modelagem.

2º Etapa: Matematização - Nesta etapa ocorrerá a formulação do problema para a linguagem matemática, é o momento em que o educando irá trabalhar a produção/reconstrução do conhecimento matemático, utilizando algum sistema teórico - matemático. A seleção das variáveis e constantes envolvidas no problema, bem como o levantamento das hipóteses ocorre nesta fase, que se fecha com a obtenção de um modelo baseado na utilização das ferramentas matemáticas disponíveis.

3º Etapa: Modelo Matemático - A aplicação do modelo como forma de avaliar o processo é essencial para verificar sua aproximação com a situação-problema, bem como para reestruturá-lo caso necessário. Nesta etapa o educando irá testar a validade do modelo objetivando consolidá-lo ou reestruturá-lo.

As etapas anteriores se relacionam de forma dinâmica segundo o esquema apresentado abaixo:

Fonte: Biembengut e Hein (2013, p.15)

Figura 1.2: Dinâmica da modelagem segundo Biembengut e Hein

O esquema a seguir mostra etapas num processo de modelagem matemática defendido por Bassanezi. Neste modelo, "as setas contínuas indicam a primeira aproximação. A busca de um modelo matemático que melhor descreva o problema estudado torna o processo dinâmico, indicado pelas setas pontilhadas"(Bassanezi, 2006, p.27).

Fonte: Bassanezi (2006, p.27).

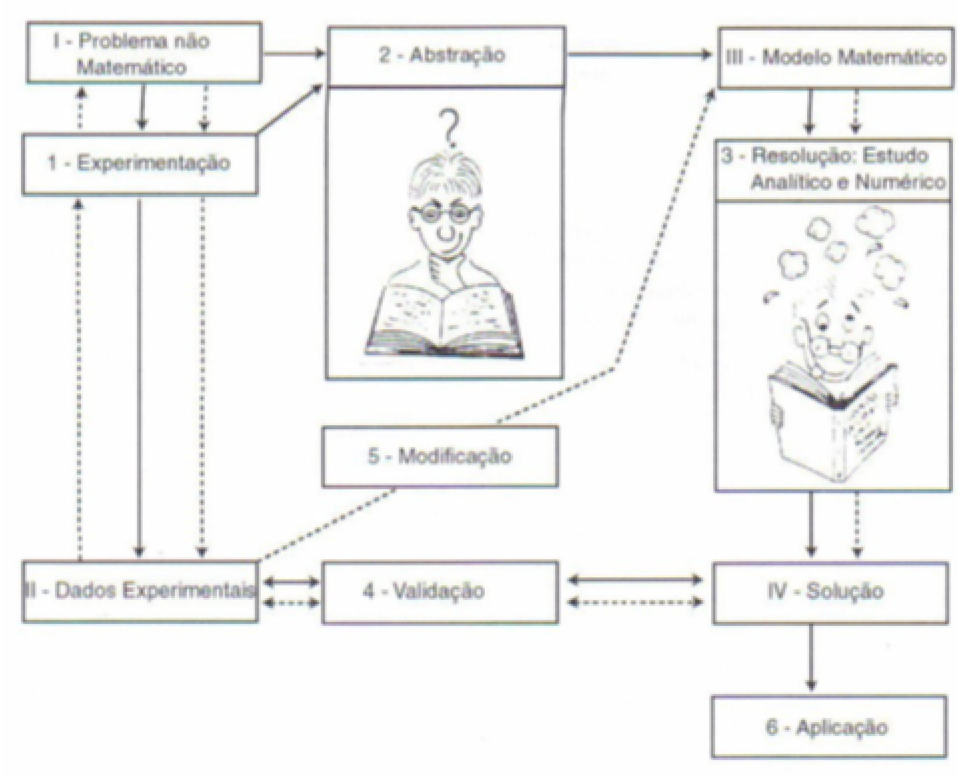


Figura 1.3: Esquema de modelagem segundo Bassanezi

Capítulo 2

O Desenvolvimento do Conceito de Função pelo Educando

O conceito de função é um dos mais importantes dentro da matemática, uma vez que nele se fundamenta os mais diversos campos de pesquisa, tanto dentro da matemática, como no âmbito de outras ciências, dando suporte nas mais diversas áreas do conhecimento. Neste sentido, o documento PCNEM (Parâmetros Curriculares nacionais - Ensino Médio) reforçar nosso ponto de vista em torno da importância do desenvolvimento do conceito de função pelo educando, afirmando que:

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 1999, p. 255).

2.1 A Noção Intuitiva de Função

A noção intuitiva de função é uma realidade no cotidiano do aluno, basta perceber as relações diárias em que a dependência entre grandezas se estabelece. No entanto, a prática educativa que se nota na sala de aula é aquela em que o conceito de função vem associado a uma excessiva formalização algébrica, quase sempre é mostrado em primeiro plano o conceito de função a partir de relações binárias. Nesse sentido o documento denominado PCN+ (p.121), do Ministério da Educação retrata que:

> Tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações. Todo esse percurso é, então, abandonado assim que a definição de função é estabelecida, pois para a análise dos diferentes tipos de funções todo o estudo relativo a conjuntos e relações é desnecessário. Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. (BRASIL, 2008, p.121).

Defendemos que o ensino de funções tenha inicio através de uma analise das relações de dependência entre duas grandezas, neste caminho o uso da modelagem matemática se torna uma ferramenta poderosa no processo de construção do conceito de função pelos alunos. Segundo os PCN+...

> [...] estudo de funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do circulo e raio; tempo e distância e percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude do movimento de um pendulo, entre outras. [...] (BRASIL, 2008, p. 72).

Tal procedimento faz com que o conceito de função surja de forma intuitiva, onde a importância maior de significado é dada ao conceito de relações entre duas grandezas. Isso não significa que o conceito de função através de relações binárias entre elementos de dois conjuntos estabelecidos, deva ser abandonado. Neste sentido, Trindade (2000) afirma que:

> [..] o estudo analítico de funções continua, naturalmente, a ser importante, mas ele deve surgir com base em atividades, sistematicamente feitas a partir das representações numéricas e gráficas. Dessa forma, a expressão algébrica adquire significado próprio. Trata-se de primeiro desenvolver o conceito intuitivo para depois formalizá-lo. (TRINDADE, 2000, p.44)

As funções são ferramentas úteis para descrever o mundo real em termos matemáticos. Assim, a noção intuitiva de função deverá ser trabalhada pelo professor antes da formalização do conceito de função como forma de dar significado ao tema. Dessa forma, vamos mostra a seguir alguns exemplos que envolvem o conceito de função como relação de dependência entre duas grandezas:

Exemplo 1. A população da cidade de Macapá tem variado nos últimos anos de acordo com a tabela abaixo:

Fonte: Elaborada pelo autor, conforme dados disponíveis no site do IBGE

Fonte	Ano	População
Estimativa IBGE	2010	398.204
Estimativa IBGE	2011	407.023
Estimativa IBGE	2012	415.554
Estimativa IBGE	2013	437.256

Tabela 2.1: População de Macapá 2010-2013.

Observe que para cada ano temos uma respectiva população, ou seja, o valor de P depende do tempo t.. Podemos, então, afirmar que a população P é dada em função do tempo t, em anos. Usando a notação de função dada pelo matemático suíço Leonard Euler (1707-1783), podemos escrever: . Dessa forma podemos relacionar, por exemplo, o ano de 2010 com sua respectiva população da seguinte forma: $P(2010) = 398.204$ habitantes. Os dados da tabela podem ser transformados em um gráfico através de um programa de computador e dessa forma o aluno poderá visualizar melhor a relação entre as variáveis, bem como notar o crescimento e levantar hipóteses em torno da população em um ano futuro.

Fonte: Elaborado pelo autor conforme tabela anterior.

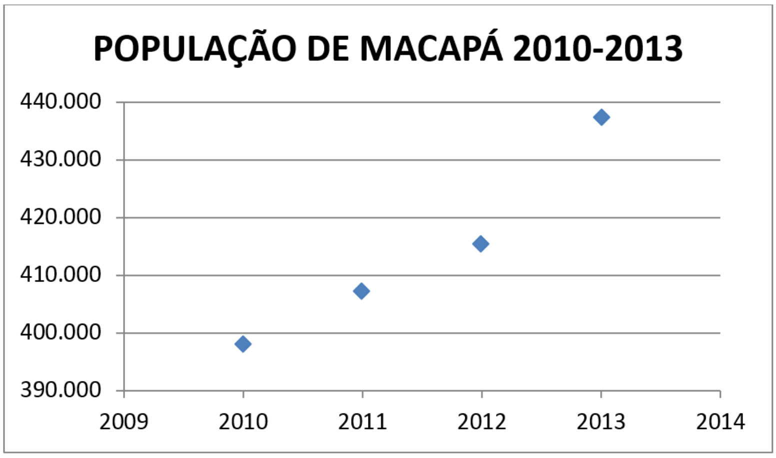


Figura 2.1: População de Macapá 2010-2013

Exemplo 2. Uma corrida de taxi tem um custo fixo (bandeirada) no valor de $R\$ \ 10,00$ e um custo variável de $R\$ \ 1,50$ para cada quilômetro rodado. Então o valor a ser pago por uma corrida depende do número de quilômetros rodados, ou seja, o valor a ser pago é função da quantidade de quilômetros rodados. Denotando o valor a ser pago por V e quantidade de quilômetros rodados por k, podemos preencher a tabela abaixo:

Fonte: Elaborada pelo autor.

k	V
1	$10 + 1,5 \cdot (1) = 11,5$
2	$10 + 1,5 \cdot (2) = 13$
3	$10 + 1,5 \cdot (3) = 14,5$
...	...
10	$10 + 1,5 \cdot (10) = 25$
20	$10 + 1,5 \cdot (20) = 40$
...	...
k	$10 + 1,5 \cdot k$

Tabela 2.2: Relação entre K e V

Observando o comportamento dos dados da tabela e usando a notação de função podemos escrever: $V = f(x)$ ou $V(k) = 10 + 1,5k$.

Exemplo 3. A área de um círculo varia conforme se altera o tamanho do raio, ou seja, a área do circulo depende do comprimento do raio, isto é, a área é função do raio. Se chamarmos de A o valor da área e r o comprimento do raio, temos, da geometria plana, que essas variáveis se relacionam da seguinte forma: $A = \pi \cdot r^2$. Usando a notação anterior temos: $A = f(r)$ ou $A(r) = \pi \cdot r^2$, onde A é a variável dependente e r é a variável independente.

Note que a ideia de variação e dependência de grandezas ficam bem explicitas nas situações exemplificadas anteriormente, uma vez que são tratadas de forma intuitiva, fazendo com que o aluno perceba de forma natural a relação funcional entre as variáveis.

2.2 Conceito de Função

As definições que apresentaremos a seguir são elencadas no livro "Introdução à Análise", da Coleção Tópicos de Matemática Elementar, publicado pela SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, na autoria de Antônio Caminha Muniz Neto.

Definição 2.2.1. Dados os conjuntos não vazios X e Y , uma relação de X em Y (ou entre X e Y nessa ordem) é um subconjunto R do produto cartesiano X x Y , isto é, R é um conjunto de pares ordenados do tipo (x, y), com $x \in X$ e $y \in Y$. (Muniz Neto, 2012, p.05).

Segundo Muniz Neto (2012. p.02), “informalmente, uma função é uma regra que associa a cada $x \in X$ um único $y \in Y$”. Vejamos a definição formal, segundo o mesmo autor.

Definição 2.2.2. Dados conjuntos não vazios X e Y, uma relação f de X em Y é uma função se a seguinte condição for satisfeita:

$$\forall x \in X, \exists \text{ um único } Y;\ f(x) = y$$

Observação 2.2.1. $f(x) = y$, significa que o par ordenado $(x, y) \in (X\text{x}Y)$ se relaciona através de f , ou seja, y é a imagem de x por f.

Capítulo 3

Algumas Sugestões de Atividades com modelagem Matemática no Ensino de Funções na Educação Básica

Busca-se a partir deste ponto mostrar alguns exemplos de atividades de sala de aula subsidiada pela modelagem matemática, como forma de validar e justificar o que até o presente momento fora defendido pelo presente trabalho, bem como servir de suporte para àqueles que pretendem utilizar a modelagem matemática como um instrumento auxiliar no ensino de funções no ensino médio. No entanto, cabe esclarecer que as atividades são apresentadas em linhas gerais, cabendo ao professor adaptá-las a realidade do educando, buscando meios de torná-las significativas.

3.1 O Número de Palitos necessários na Construção de n Triângulos Sobrepostos

A atividade seguinte busca mostrar uma forma de aplicação da caracterização da função quadrática num processo de modelagem simples, tendo como pano de fundo a geometria. Antes, porém, vamos definir e caracterizar função quadrática.

A definição abaixo, bem como a caracterização da função quadrática com sua demonstração, se encontra no livro "A Matemática do Ensino Médio", da Coleção do Professor de Matemática, publicado pela SBM - Sociedade Brasileira de Matemática.

Definição 3.1.1 (Função Quadrática)**.** "uma função f chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ". (Lima, 2006, p.114).

Observação 3.1.1 (Caracterização da Função Quadrática)**.** "A fim de que a função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não constante $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada: $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), \ldots, y_n = f(x_n), \ldots$"(Lima, 2006, p.149).

Definição 3.1.2 (Progressão Aritmética de Segunda Ordem)**.** É uma sequência (a_n) na qual as diferenças $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética não estacionária.

Exemplo 4. A sequência $a_n = (1, 2, 5, 10, 17, 26, ...)$ é uma P.A de 2º ordem. Vamos escrever a sequência Δa_n, formada pelas diferenças sucessivas dos termos da sequência Δa_n. Veja: $\Delta a_n = (2-1, 5-2, 10-5, 17-10, 26-17, ...) \Rightarrow \Delta a_n = (1, 3, 5, 7, 9, ...)$.

Note que a sequência Δa_n é uma P.A de 1º ordem, não estacionária. Então, pela caracterização da função quadrática, temos que o termo geral da sequência a_n pode ser expresso como um polinômio de segundo grau, ou seja: $a_n = an^2 + bn + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

De modo geral, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.1.1. "Toda sequência na qual o termo de ordem n é um polinômio em n, do segundo grau, é uma progressão aritmética de segunda ordem e, reciprocamente, se (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, então (a_n) é um polinômio de segundo grau em n"(lima et al,2006, v.02, p.09)

Demonstração 3.1.1. Com efeito, se $a_n = an^2 + bn + c$, com $a \neq 0$, temos:

$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = a \cdot (n+1)^2 + b \cdot (n+1) + c - (an^2 + bn + c) = 2an + (a+b)$; que é do primeiro grau em n, então é uma progressão não estagionária. Por outro lado, se (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, $b_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é uma progressão aritmética com razão diferente de zero e $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots b_{n-2} + b_{n-1} = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$ é um polinômio do segundo grau em n. EM consequência, a_n também é um polinômio do segundo grau em n.

A situação a ser modelada consiste no seguinte problema proposto na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP do ano de 2012:

Fonte: Prova $6^o/7^o$ Ano - OBMEP-2012.

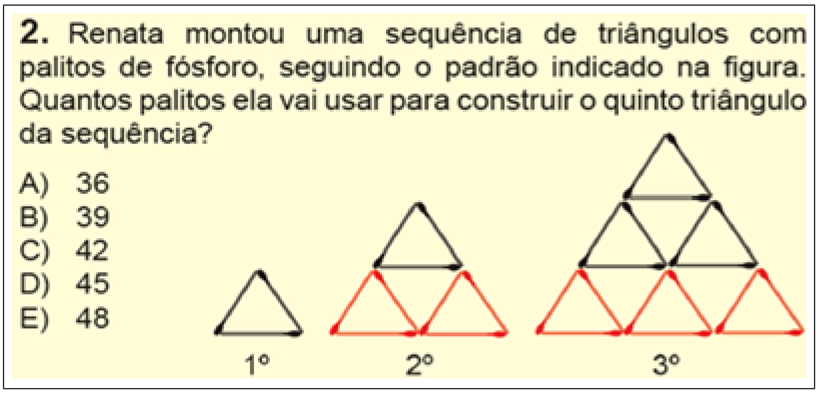


Figura 3.1: Sequências de triângulos.

A questão original consta na prova da 1^a fase para alunos do 6^o e 7^o ano do ensino fundamental. Mas o professor deverá adaptá-lo para o ensino médio.

Situação-Problema 1. Dada a sequência abaixo, determine:

a) Quantos palitos serão necessários para a construção do vigésimo triângulo da sequência abaixo?

b) E para construção do enésimo triângulo?

Fonte: Prova $6^o/7^o$ Ano - OBMEP-2012 (Adaptado).

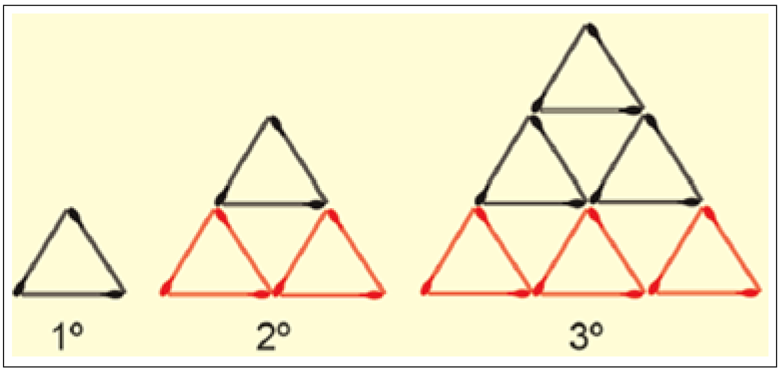


Figura 3.2: Sequências de triângulos.

Observe que agora a questão não pode ser mais resolvida com uma simples contagem do número de palitos, como na forma proposta originalmente.

Orientações Gerais

- A atividade poderá ser desenvolvida por alunos do 1^o ano do ensino médio, após os contatos iniciais com função quadrática;

- Desenvolver o trabalho em grupo de no máximo 03 alunos;
- Orientar a busca da melhor estratégia de resolução, não direcionando os trabalhos e sim atuando como mediador;
- Rever os conteúdos e conceitos necessários como pré-requisitos e desenvolver no decorrer da atividade àqueles ainda não trabalhados:
  - Grandezas contínuas e discretas;
  - Sequências numéricas definidas recursivamente;
  - Regularidades e padrões;
  - Progressão aritmética, progressão aritmética de 2ª ordem;
  - Caracterização da função quadrática;
  - Resolução de sistema linear de ordem 3 por rebaixamento da ordem;
  - Plano cartesiano e gráfico etc.
- Os alunos poderão trabalhar com figuras ou materiais manipulativos como palitos de fósforos ou de picolé ou através de algum software educativo, de modo a perceber com a construção de alguns casos o padrão e o comportamento dos elementos da sequência e, dessa forma, levantar hipóteses, testar conjecturas em torno da situação-problema;
- Propor aos alunos a construção de uma tabela para relacionar os dados obtidos na atividade prática, de modo a visualizar o comportamento da sequência.

Desenvolvimento da Atividade

As etapas a seguir apresenta o que se espera que os alunos desenvolvam para realizar as atividades; mas, cabe ao professor adaptá-las ou modificá-las de acordo com a realidade dos educandos.

- O primeiro passo no processo de modelagem da situação e identificar quais as grandezas relevantes envolvidas no problema e de que forma elas se relacionam. Observando a sequência, os alunos deverão perceber que as grandezas envolvidas são a posição do elemento na sequência e o número de palitos que formam o triangulo maior, ou seja, o número de palitos necessários para formar um elemento da sequência depende da posição do elemento na sequência e esta coincide com o número de palitos na base do triângulo maior;
- Denotando por n a posição do triângulo na sequência e por p o número de palitos que formam este triângulo temos que p é dado em função de n, ou seja, $p = f(n)$. Dessa forma:

$n \longrightarrow$ variável independente

$p \longrightarrow$ variável dependente

- O ideal é que os alunos construam alguns elementos da sequência com materiais manipulativos, objetivando perceber a dependência entre as grandezas variáveis. Abaixo temos uma construção feita no GEOGEBRA utilizando o padrão proposto na sequência, como forma de atender esse objetivo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

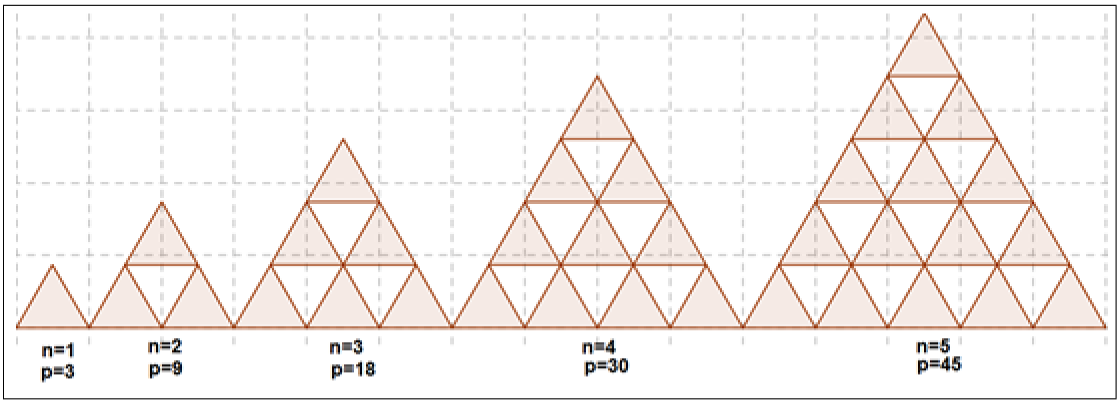


Figura 3.3: Sequências de triângulos

- Com base nas observações da sequência construída, temos a seguinte tabela:

Fonte: Elaborada pelo autor.

n	$p = f(n)$
1	3
2	9
3	18
4	30
5	45

Tabela 3.1: Relação entre n e $f(n)$

- Uma forma de perceber como as grandezas se relacionam é através de uma análise gráfica dos dados tabelados. Note que baseado no gráfico abaixo se pode afirmar que os dados não se relacionam de forma linear, visto que não há uma reta que contenha todos os pontos tabulados.

Fonte: Elaborado pelo autor a partir da tabela anterior.

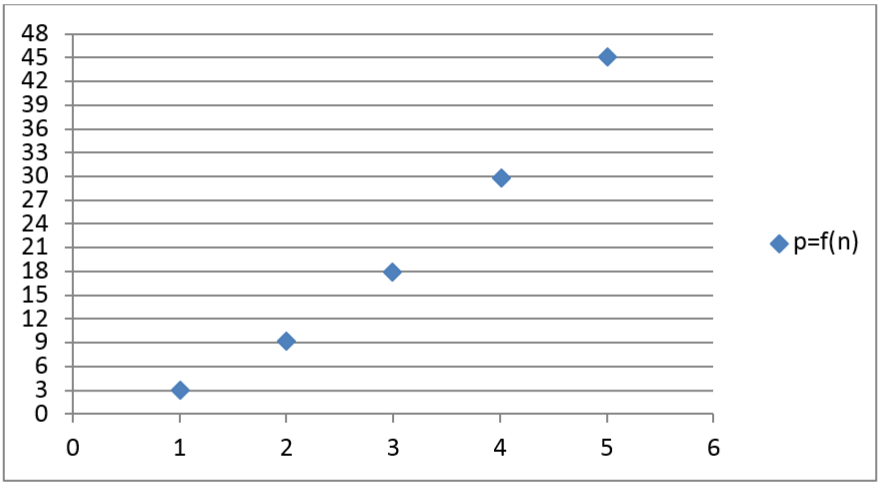


Figura 3.4: Relação entre a posição n e o n° p de palitos

- A tabela anterior pode ser acrescida de mais uma coluna com as variações Δp dos elementos p. Note na tabela abaixo que essas variações crescem segundo uma Progressão Aritmética de razão 3. Então, pela caracterização da função quadrática podemos afirmar que p é uma função quadrática de n.

Fonte: Elaborada pelo autor.

n	$p(n)$	Δp
1	3	6
2	9	9
3	18	12
4	30	15
5	45	...

Tabela 3.2: Relação entre a posição n e o n° de palitos p.

- Pelos fatos considerados anteriormente temos que $p(n) = An^2 + Bn + c$.Neste ponto, os alunos deverão perceber a existência da relação de dependência entre n e $p(n)$. O conceito de domínio e cálculos de imagens se tornam significativos e relevantes neste momento. Considerando os valores iniciais temos:

$$p(1) = 3 \;\Rightarrow\; A + B + C = 3$$
$$p(2) = 9 \;\Rightarrow\; 4A + 2B + C = 9$$
$$p(3) = 3 \;\Rightarrow\; 9A + 3B + C = 9$$

O que nos dá o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A+B+C=3 & i \\ 4A+2B+C=9 & ii \\ 9A+3B+C=18 & iii \end{cases}$$

Fazendo $iii - ii$ e $ii - i$, obtemos: $\begin{cases} 3A+B=6 \\ 5A+B=9 \end{cases}$, o que nos dá $A = \dfrac{3}{2}$, $B = \dfrac{3}{2}$ e $c = 0$.

Pelo item anterior, podemos escrever. $p(n) = \dfrac{3}{2}n^2 + \dfrac{3}{2}n \;\Rightarrow\; p(n) = \dfrac{3n^2+3n}{2}$

- Solucionando os questionamentos da situação-problema.

a) $p(n) = \dfrac{3n^2+3n}{2} \;\Rightarrow\; p(20) = \dfrac{3\cdot(20)^2 + 3\cdot(20)}{2} \Rightarrow p(20) = 630$ palitos

b) $p(n) = \dfrac{3n^2+3n}{2}$

Outra maneira de modelar a situação é através de uma contagem recursiva do número de palitos p numa posição n qualquer. Note na figura a seguir a relação que ocorre entre o numero de palitos de uma posição com o número de palitos de uma posição imediatamente anterior

Fonte: Elaborada pelo autor (Construção no Geogebra).

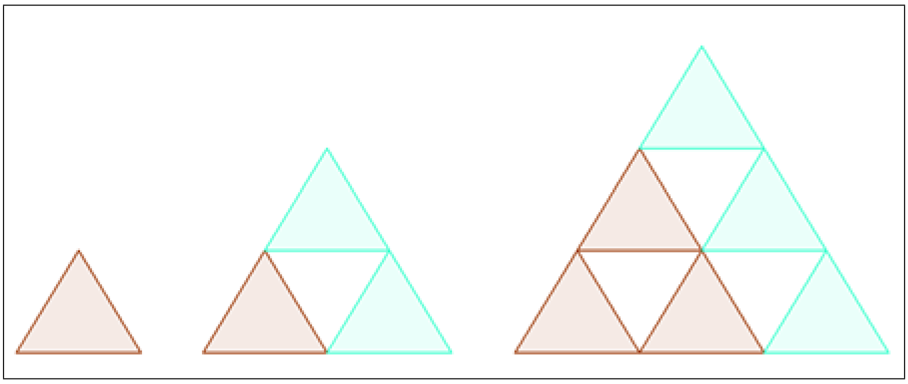


Figura 3.5: Sequências de triângulos.

Seja p_n o número de palitos numa posição n qualquer. Observe que num estágio n, o número de palitos p_n é igual ao número de palitos do estágio anterior, acrescido de n triângulos ($3n$ palitos), onde cada um desses n triângulos não apresenta nenhum lado em comum com os triângulos do estágio anterior. Daí vem:

$$p_n = p_{n-1} + 3n, \text{ com } \; p_1 = 3 \;\text{ e }\; n \geq 2$$

Atribuindo valores para n, variando de 2 até n e aplicando uma soma telescópica, temos:

$$\begin{aligned}
&p_2 = p_1 + 6\\
&p_3 = p_2 + 9\\
&p_4 = p_3 + 12\\
&p_5 = p_4 + 15\\
&p_6 = p_5 + 18\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_n = p_{n-1} + 3n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_n = p_1 + (6 + 9 + 12 + 15 + \ldots + 3n)
\end{aligned}$$

Note que a soma $(6 + 9 + 12 + 15 + \ldots + 3n)$ representa a soma de uma P.A de $n - 1$ termos de $a_1 = 6$ e $r = 3$, cujo termo geral é dado por:

$$a_{n-1} = a_1 + (n - 2) \cdot r \ \Rightarrow \ a_{n-1} = 6 + (n - 2) \cdot 3 \ \Rightarrow \ a_{n-1} = 3n$$

Dessa forma, a soma dos $n - 1$ termos dessa P.A é expressa por:

$$Sn - 1 = \frac{(a_1 + a_{n-1}) \cdot (n - 1)}{2} = \frac{(6 + 3n) \cdot (n - 1)}{2} \ \Rightarrow \ S_{n-1} = \frac{3n^2 + 3n - 6}{2}$$

Logo, $p_n = p_1 + (6 + 9 + 12 + 15 + \ldots + 3n) = p_n = p_1 + S_{n-1}$.

$$p_n = 3 + \frac{3n^2 + 3n - 6}{2} \ \Rightarrow \ p_n = \frac{3n^2 + 3n}{2}$$

Usando a notação de função, podemos escrever. $P(n) = \dfrac{3n^2 + 3n}{2}$.

3.2 Volume Máximo de uma caixa e sua relação com o corte lateral

O exemplo apresentado a seguir é uma adaptação de uma atividade proposta no livro Recursos computacionais no ensino da Matemática (Giraldo et al, 2012, pg.236), utilizado como material de apoio à disciplina de mesmo nome, parte da grade curricular do PROFMAT. Envolve uma situação onde o professor propõe à turma um problema onde se faz necessário à aplicação de diversos conhecimentos matemáticos que irão se desenvolver no desenrolar da resolução através de um processo de modelagem matemática com o uso de recursos computacionais. Cabe ao professor adaptá-la e buscar meios de tornar o processo significativo, como, visitação a fábrica de caixas e depósitos de empresas e construção em sala de aula com material reciclável.

Situação-Problema 2. Será construída uma caixa (sem tampa) com uma folha quadrada de papelão, com lado medindo 02 metros. Para tanto se deve recortar dos extremos da folha pequenos quadrados de forma a modelar a caixa. Qual deve ser o maior corte lateral (lado do quadrado menor) de forma que a caixa tenha a maior capacidade possível? Determine este valor em forma de um número racional com aproximação até décimos.

A figura a seguir ilustra a situação exposta no problema:

Fonte: Elaborada pelo autor.

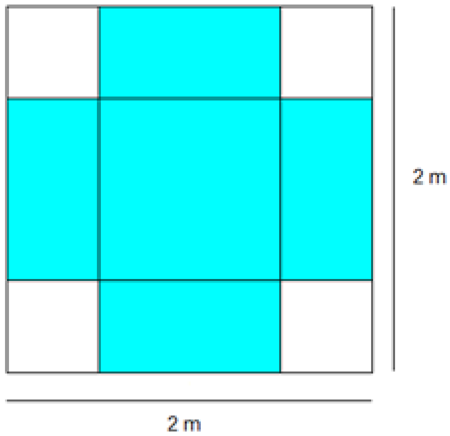


Figura 3.6: Folha quadrada de papelão com lado medindo 2 metros.

Orientações Gerais

- A atividade pode ser desenvolvida por turmas do 1º ou 3º ano do ensino médio, para tanto o professor deverá estabelecer qual conteúdo irá nortear o trabalho: Funções reais (1º ano) ou Volume de prismas (3º ano);
- Desenvolver o trabalho em grupo de no máximo 03 alunos;
- Orientar a busca da melhor estratégia de resolução, não direcionando os trabalhos e sim atuando como mediador;

Desenvolvimento da Atividade

- Os alunos deverão trabalhar em grupo com o objetivo de determinar um valor para a medida do corte nos extremos da chapa;
- O professor poderá sugerir a construção de diversos modelos de caixa usando cartolinas ou papelão com as dimensões especificadas na situação-problema;

- Temos abaixo um modelo que representa a situação proposta:

Fonte: Elaborada pelo autor.

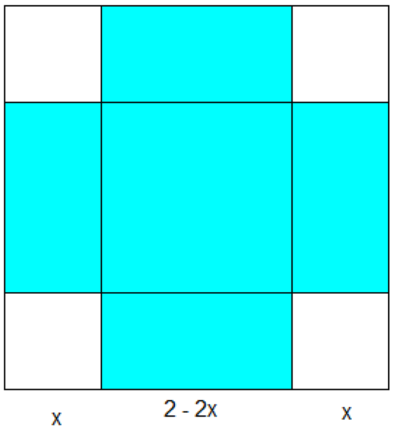


Figura 3.7: Folha quadrada de papelão recorte nos extremos.

- Após a construção de diversas caixas usando papelão ou cartolinas, espera-se que os alunos estejam aptos a resolver o problema através da aplicação da fórmula do volume de um paralelepípedo de dimensões a, b e c. Veja abaixo o que se espera que os alunos apresentem nesta etapa:

Fonte: Elaborada pelo autor.

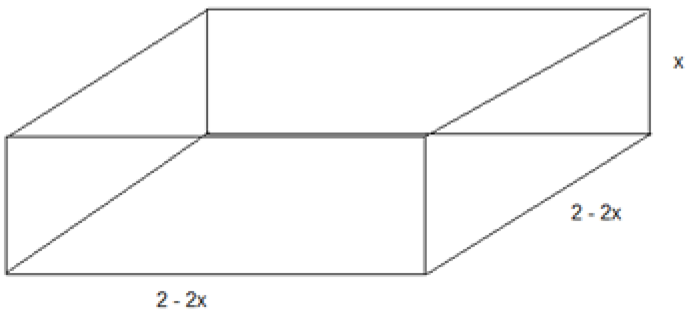


Figura 3.8: Dimensões da caixa após os recortes.

$$V = a \cdot b \cdot c \;\Rightarrow\; V = (2 - 2x)^2 \cdot x$$

$$V = (4 - 8x^2 + 4x^2) \cdot x \;\Rightarrow\; V = 4x^3 - 8x^2 + 4x$$

Temos uma situação que envolve o estudo de máximos de funções, onde podemos estabelecer que o volume (V) da caixa depende do comprimento do corte (x) efetuado nos extremos da caixa. Podemos escrever usando a notação de função:

$$V(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x \quad \text{(modelo algébrico)}$$

A solução do problema consiste em determinar o maior valor para o corte x de forma que a caixa tenha um volume máximo.

O professor, neste momento tem a possibilidade de utilizar e desenvolver diversos conteúdos matemáticos de forma significativa, tais como:

- Diferença entre volume e capacidade;
- Domínio de funções;
- Sistema de medidas - transformações de metros para centímetros e vice-versa;
- Densidade dos números reais;
- Grandeza contínua e discreta e suas relações com números reais;
- Maximização de funções com uso da informática.

Optamos em resolver o problema com o uso da informática, uma vez que conceito de maximização da função cúbica, que representa o modelo matemático do problema, é desenvolvido através do cálculo diferencial em aplicações do conceito de derivadas para maximização de funções reais, conteúdo não abordado no ensino médio. Para tanto utilizamos o programa de planilha EXCEL e o aplicativo GEOGEBRA, como instrumentos auxiliadores que deverão ser utilizados pelos alunos na construção e análise de tabelas e gráficos no decorrer da resolução da atividade.

Adota-se um processo inverso daquele que sempre foi apresentado no ensino de funções na educação tradicional, onde a construção e a analise de gráficos de funções ocorrem quase sempre após a discussão dos outros aspectos inerentes ao tema. Questões como o domínio de validade da função, conjunto imagem da função, significado dos pontos de intersecção do gráfico com os eixos coordenados deverão ser abordados pelo professor de forma com que os alunos percebam e construam estes conceitos de forma espontânea.

A seguir temos um esboço do gráfico da função $V(x)$ feito no aplicativo GEOGEBRA. Servirá como ponto de partida para a exploração dos conceitos necessários a modelagem do problema.

Fonte: Elaborada pelo autor.

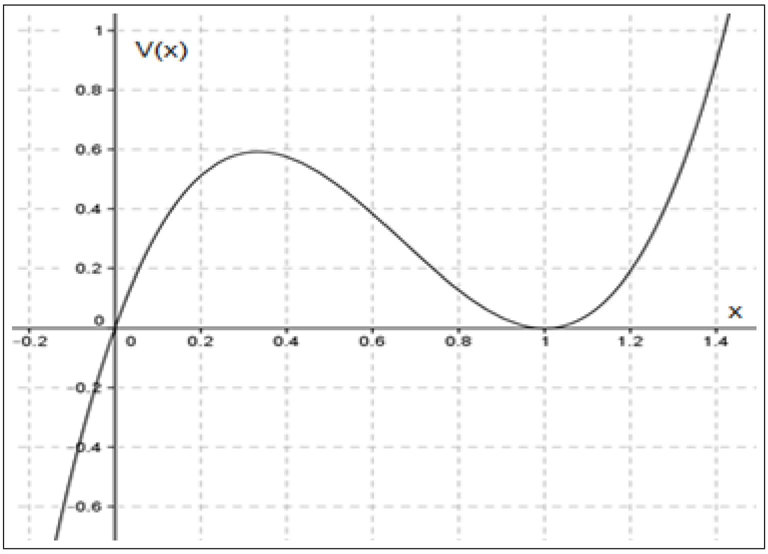


Figura 3.9: Esboço do gráfico da função $V(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x$

O objetivo neste momento e fazer com que os alunos percebam que o domínio da função deverá ser limitado, fato que poderá ser alcançado com as restrições aos tamanhos do corte (x) e seu significado no gráfico (intersecção com o eixo Ox) e que esta limitação irá gera um conjunto imagem também limitado, onde o limite superior deste intervalo irá coincidir com o ponto máximo da função. Neste momento o professor poderá introduzir a seguinte notação:

- $D(V)$ - domínio da função $V(x)$, que neste caso será: $D(V) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\} =]0; 1[$;
- $CD(V)$ - contradomínio da função $V(x)$, que será todo o conjunto dos números reais, ou seja, $CD(v) = R$;
- $Im(v)$ - conjunto imagem da função $V(x)$, que consiste do menor valor possível para o volume da caixa (próximo a zero), até o máximo valor, ainda a ser definido.

Mostramos a seguir uma tabela onde foi aplicada uma fórmula matemática simples usando a planilha EXCEL, que o professor poderá trabalhar com os alunos sem muitas dificuldades.

Fonte: Elaborada pelo autor.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$V(x)$	0	0,324	0,512	0,588	0,576	0,5	0,384	0,252	0,128	0,036	0

Tabela 3.3: Variação de $V(x)$ quando x varia de 0 a 1

A tabela deixa claro o motivo pelo qual se devem excluir os valores extremos do intervalo do domínio de $V(x)$. O professor deverá mediar às atividades de forma que tal fato seja percebido pelos alunos durante as atividades de recorte.

O gráfico abaixo mostra a variação do volume V da caixa em função da medida do corte x (modelo gráfico):

Fonte: Elaborado pelo autor, conforme tabela anterior.

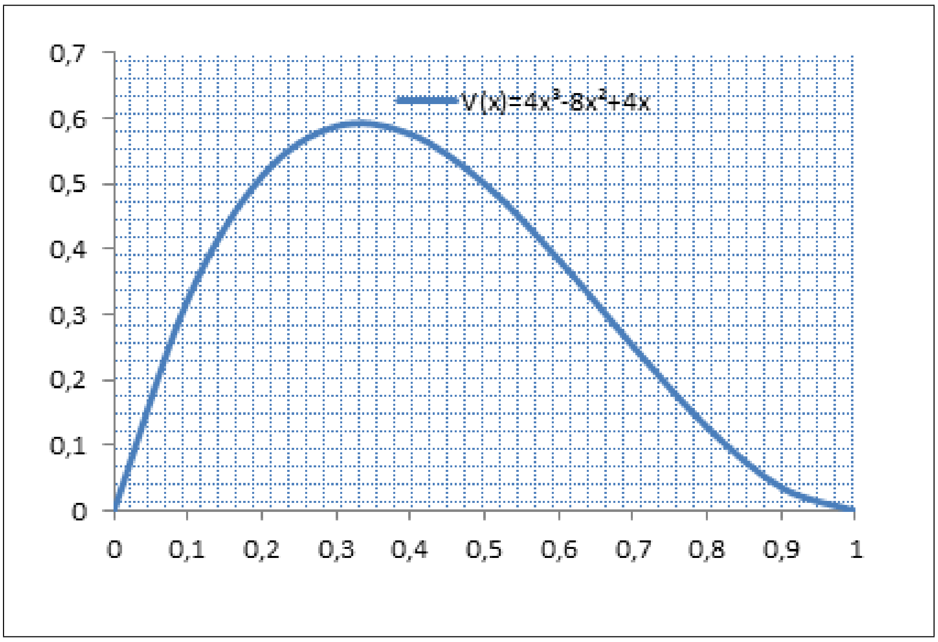


Figura 3.10: Esboço do gráfico de no intervalo]0,1[

Usando a notação de função temos:

$$V(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x$$

$$D(V) = 0 < x < 1$$

$$CD(V) = \mathbb{R}$$

O professor deverá conduzir a situação de modo que os alunos percebam o significado da curva em sí e notem o intervalo onde a função apresenta o ponto máximo. Com isso o professor poderá desenvolver o conceito de domínio e imagem no gráfico através de traçados de linhas horizontais e verticais por um dado ponto do gráfico e através de estimativas das respectivas coordenadas do ponto. A elobaração do gráfico e a impressão em malha quadriculada facilitará bastante esta etapa.

Observando a tabela e o comportamento do gráfico, pode-se perceber que o valor de $x(0 < x < 1)$ que torna o volume $V(x)$ máximo se encontra entre 0,30m e 0,40m. No entanto, nada há ainda a ser confirmado, uma vez que tal procedimento somente reduziu o intervalo inspecionado.

Como no procedimento anterior, faremos agora uma redução no intervalo, a tabela a seguir irá mostra o comportamento de $V(x)$ em função do novo intervalo estabelecido, ou seja, ocorre um corte no intervalo de domínio das função $V(x)$. Para isso, usamos os valores de x, tal que $0,30 \leq x \leq 0,40$ e optamos em trabalhar com quatro casas decimais nos valores da imagem.

Fonte: Elaborada pelo autor.

x	$V(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x$
0,3	0,588
0,31	0,590364
0,32	0,591872
0,33	0,592548
0,34	0,592416
0,35	0,591500
0,36	0,589824
0,37	0,587412
0,38	0,584288
0,39	0,580476
0,4	0,576000

Tabela 3.4: Variação de $v(x)$ quando x varia de 0,30 a 0,40

O gráfico seguinte mostra o comportamento da função $V(x)$ no novo intervalo:

Fonte: Elaborado pelo autor, conforme tabela anterior.

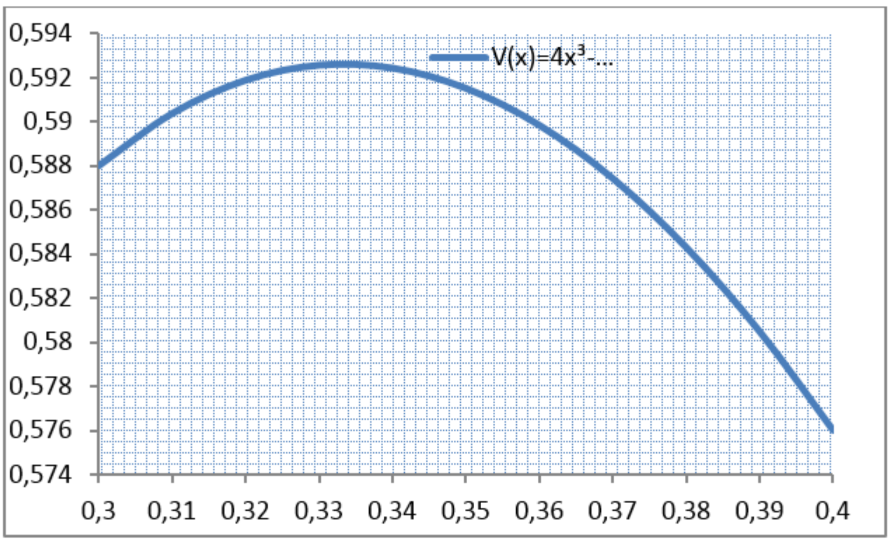


Figura 3.11: Variação de v(x) quando x varia de 0,30 a 0,40.

Usando a notação de função temos:

$$V(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x$$

$$D(V) = 0,30 < x < 0,40$$

$$CD(V) = \mathbb{R}$$

Através do processo anterior (corte no intervalo) o professor poderá explorar o conceito de densidade dos números reais paralelamente ao estudo do máximo da função através de seu gráfico. Neste ponto o aluno deverá perceber que o processo de corte e redução do intervalo poderá continuar indefinidamente.

A tabela abaixo nos mostra o comportamento da função num novo intervalo do domínio , onde $0,33 \leq x \leq 0,34$ e o domínio e a imagem são dados com três e nove casas decimais, respectivamente, como forma de mostrar uma aproximação bastante razoável e aceitável.

Fonte: Elaborada pelo autor.

x	$V(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x$
0,330	0,592548000
0,331	0,592570764
0,332	0,592585472
0,333	0,592592148
0,334	0,592590816
0,335	0,592581500
0,336	0,592564224
0,337	0,592539012
0,338	0,592505888
0,339	0,592464876
0,340	0,592416000

Tabela 3.5: Variação de $v(x)$ quando x varia de 0,33 a 0,34

Os dados tabelados anterioremente nos fornecem o gráfico a seguir, note que através da análise da curvatura do gráfico já podemos estimar uma aproximação razoável para o ponto de máximo da função, bem como o valor máximo naquele ponto.

Fonte: Elaborado pelo autor, conforme tabela anterior.

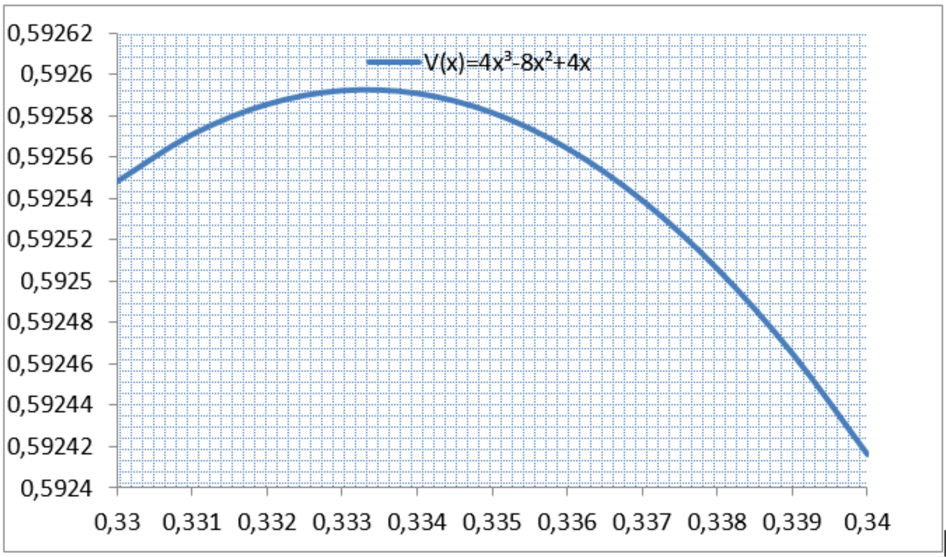


Figura 3.12: Variação de v(x) quando x varia de 0,33 a 0,34.

Usando a notação de função temos:

$$V(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x$$

$$D(V) = 0,333 < x < 0,334$$

$$CD(V) = \mathbb{R}$$

Através dos dados da tabela e pela inspeção no gráfico nota-se que o elemento do domínio de $V(x)$ que apresenta a imagem máxima se encontra no intervalo [0,333;0,334], ou seja, um corte entre 33,3cm e 33,4cm, o que já nos dá uma aproximação bem razoável . O processo de corte no intervalo pode continuar, mas neste momento é recomendável que o professor busque uma outra forma de complementar a atividade. A sugestão neste ponto é que possamos utilizar o aplicativo GEOGEBRA conforme descrições abaixo:

- Inseri o comando: Função [<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>], onde limitaremos o intervalo da função $V(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x$ a $]0, 1[$ da seguinte forma: Função $[< 4x^3 - 8x^2 + 4x >, < 0 >, < 1 >]$. O gráfico plotato segue abaixo (após aplicação de uma aproximação).

Fonte: Elaborado pelo autor no aplicativo Geogebra.

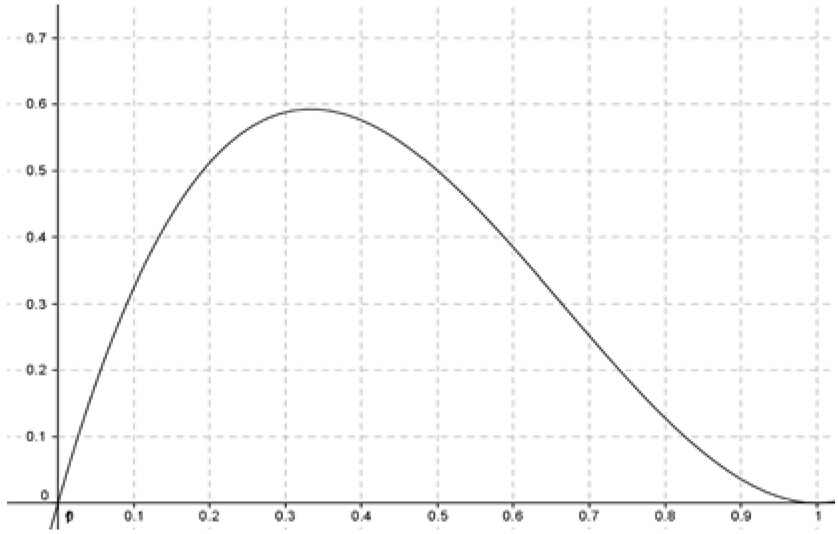


Figura 3.13: Esboço gráfico de $V(x)$ no intervalo]0,1[.

- Por um ponto A qualquer sobre o gráfico de $V(x)$ inserir uma reta tangente e sobre esta marcar um ponto B.

Fonte: Elaborado pelo no autor no aplicativo Geogebra.

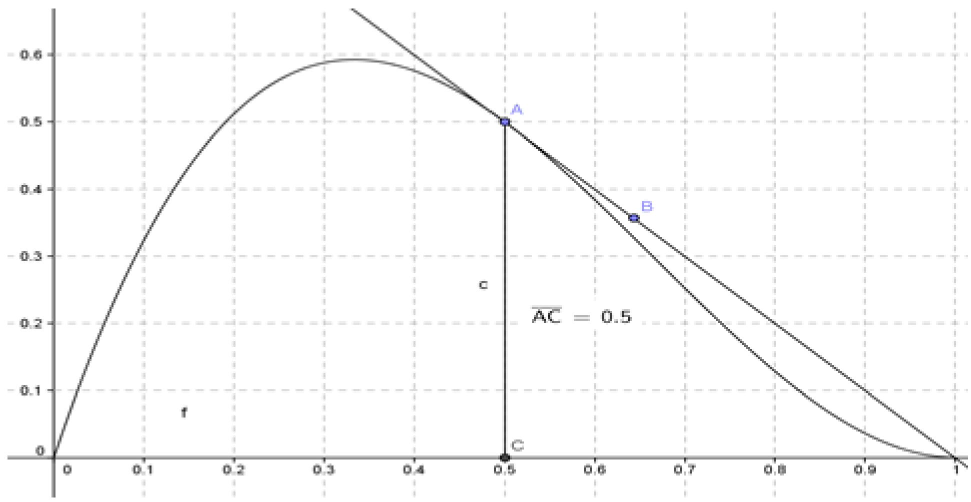


Figura 3.14: Reta tangente ao gráfico de $V(x)$ no intervalo]0,1[.

- Pelo ponto A traçar um segmento AC perpendicular ao eixo Ox e inserir o comando do comprimento do segmento AC. Mover a reta tangente de modo que os pontos A e B apresentem a mesma imagem. Neste momento a discussão deverá ser sobre o significado das coordenadas do ponto A, o comprimento do segmento AC e a inclinação da reta tangente. Os alunos deverão concluir que a reta tangente se encontra na horizontal e isso ocorrerá sempre que o ponto A for um ponto de máximo local.

Elaborado pelo autor no aplicativo Geogebra.

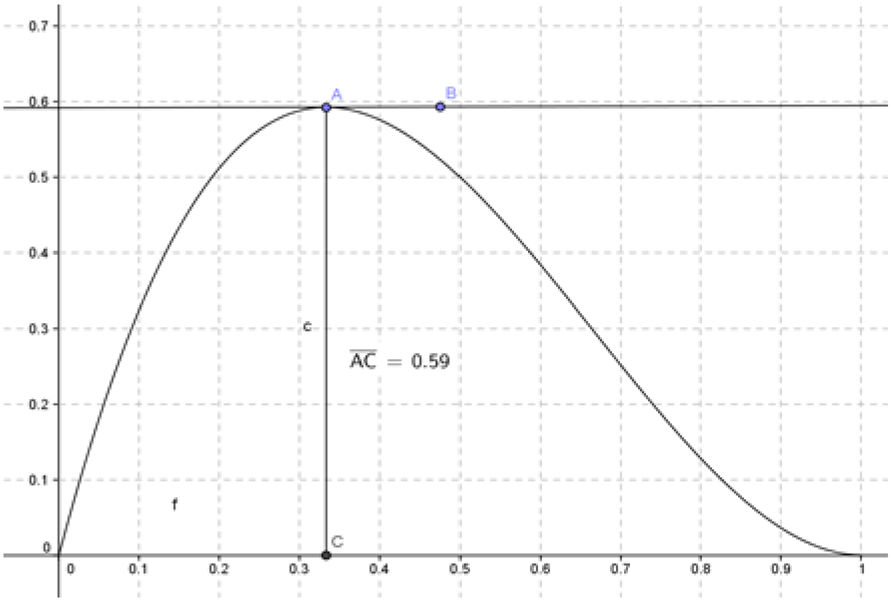


Figura 3.15: Reta tangente ao gráfico de $V(x)$ no ponto de Máximo

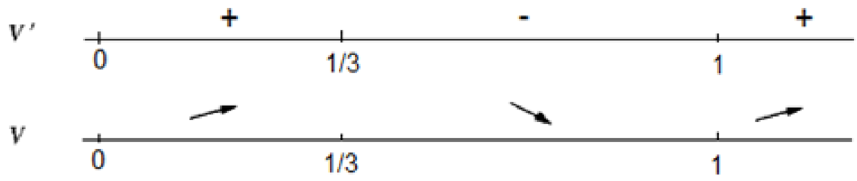
Dessa forma, podemos concluir que a função $V(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x$ tem as seguintes características:

- Domínio: $D(v) = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\} =]0, 1[$;
- Contradomínio: $CD(v) = \mathbb{R}$;
- Imagem: $Im(v) = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y \leq 0,592\} =]0; 0,592[$;
- Ponto de máximo: considerando os dados obtidos anteriormente $(0,333 \leq x \leq 0,334)$ e a análise gráfica $x = 0,333$ metros = 33,3 cm, que representa o corte máximo.
- Máximo: $y = V(0,333) \cong 0,592m^3$ (volume máximo).

Apesar do método anterior não nos fornecer um ponto exato de máximo, contribui de forma significativa na construção de diversos conceitos matemáticos, atendendo os objetivos de uma atividade proposta através da modelagem matemática.

Somente para efeito ilustrativo, vamos mostrar a validade do procedimento anterior através da aplicação do cálculo diferencial na resolução do problema proposto:

O problema consiste em maximizar a função $V(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x$ contínua no intervalo]0,1[. Note que a primeira derivada de $V(x)$ é expressa por $V^1(x) = 12x^2 - 16x + 4$ cujas raízes são $x_1 = \dfrac{1}{3}$ e $x_2 = 1$. Fazendo a análise de sinal de $V^1(x)$ e o respectivo crescimento/decrescimento de $V(x)$ temos:



Pelo teste da primeira derivada, temos que $x_1 = \dfrac{1}{3}$ representa um ponto de máximo local da função $V(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x$. Então, calculando $V\left(\dfrac{1}{3}\right)$, temos:

$$
\begin{aligned}
&V(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x \\
&V\left(\frac{1}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 8\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{3}\right) \\
&V\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27} - \frac{8}{9} + \frac{4}{3} \\
&V\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27} \quad \Longrightarrow \quad V\left(\frac{1}{3}\right) \cong 0,592
\end{aligned}
$$

3.3 O Jogo dos Discos

Esta atividade é uma adaptação daquela proposta no volume 03 da "Coleção Explorando o Ensino", fornecida pelo MEC/SEB, que trás em seu bojo diversos artigos que podem ser utilizados em sala de aula através de oficinas ou como forma enriquecer as reflexões em torno dos temas abordados. Apresentamos a situação-problema através de um texto; mas, o ideal é que o professor procure criar situações concretas que envolvam o jogo dos discos (feiras, oficinas, gincanas, etc) com forma de dar significado ao processo de modelagem do problema. Tal atividade, reforça a possibilidade mencionada anteriormente, de relacionar modelagem matemática e resolução de problemas.

Situação-Problema 3. O texto abaixo apresenta a problemática a partir da qual será desenvolvido o processo de modelagem pelos educandos:

O problema do jogo dos discos

"*Uma escola estava preparando uma Feira de Ciências e foi pedido aos estudantes que bolassem um jogo para arrecadar fundos. Os estudantes observaram que no salão da Feira o piso era feito com quadrados de 30 cm de lado. Pensaram então em construir discos de papelão de certo diâmetro d que seriam comprados pelos visitantes por R\$ 1,00 cada um. O visitante jogaria o disco aleatoriamente no piso. Se o disco, depois de pousar no piso, tocasse um lado de um quadrado, ele perderia para a escola o que tinha pago. Se,* *ao contrário, acertasse o disco inteiramente dentro de um quadrado qualquer, ele receberia* $R\$ \ 2,00$."

A figura a seguir as três possíveis situações que podem ocorrer no lançamento de um disco e seus respectivos favorecidos de acordo com a proposta do jogo:

Fonte:Elaborado pelo autor.

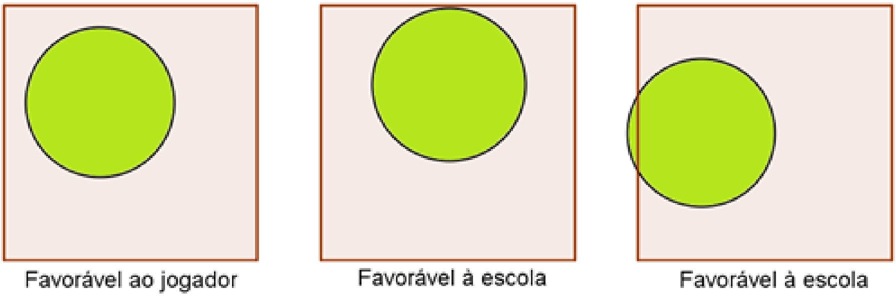


Figura 3.16: Possíveis resultados no lançamento de um disco.

O problema original consistia em determinar o diâmetro d dos discos, considerando um uma probabilidade de 60% favorável à escola num piso quadrado de lado 30 cm.

No entanto, vamos buscar também um modelo que relacione o raio r do disco em função do lado L do quadrado, quando seja P a probabilidade favorável ao jogador. Ou seja, queremos um modelo que seja aplicável em qualquer situação de piso e variando a probabilidade favorável à escola.

Orientações Gerais

- A atividade poderá ser desenvolvida por turmas do 1º ano do ensino médio como forma de aprofundamento do tema funções, associando a introdução do conceito de probabilidade geométrica;
- Desenvolver o trabalho em forma de oficina com os alunos, em grupo de no máximo 05 alunos;
- Orientar a busca da melhor estratégia de resolução, não direcionando os trabalhos e sim atuando como mediador;
- Rever e/ou apresentar os conteúdos e conceitos necessários como pré-requisitos ao desenvolvimento da atividade:
    - Domínio, contradomínio e imagem de funções;
    - Análise e interpretação gráfica de funções

- Função do 1º grau;
- Função quadrática;
- Função de duas variáveis;
- Probabilidade e probabilidade geométrica;
- Modelagem algébrica e geométrica;

Desenvolvimento da Atividade

- O professor deve mediar à introdução da atividade de modo que os alunos percebam a relação de dependência entre o comprimento r do raio e o respectivo comprimento l do lado do quadrado com a "chance"de um jogador ganhar ou não no lançamento de um disco (ver sugestão na pg. 57;

- A construção de discos de papelão de diferentes tamanhos (diâmetro ≤ 30) e um quadrado de lado igual 30cm, devem subsidiar a percepção da relação de dependência descrita anteriormente.

- A figura a seguir mostra uma situação possível que pode ocorre entre o comprimento do raio r e o comprimento do lado l do quadrado. Note que esse é um caso extremo, onde a probabilidade do jogador ganhar é nula.

Fonte: Elaborado pelo autor.

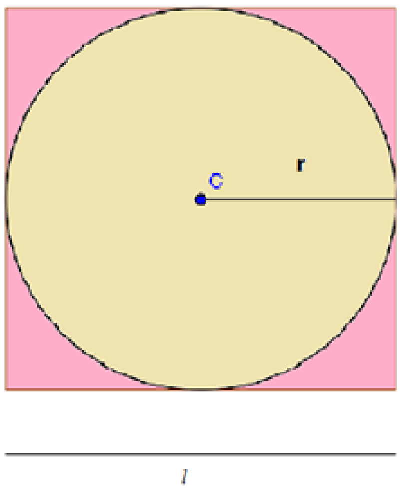


Figura 3.17: Disco de raio r medindo $l/2$

- Então, a partir da observação anterior, podemos definir que o raio tem que ser sempre menor que a metade do lado do quadrado e maior que zero para garantir a possibilidade de ganho e a existência do disco, respectivamente, ou seja, $0 < r < \dfrac{l}{2}$.

- O que acontece com a probabilidade de um jogador ganhar ao variarmos o raio do disco, mantendo fixa a medida do lado do quadrado? Essa é uma consideração a qual os alunos deverão fazer e partindo dessa discussão buscar os mecanismos necessários a modelagem do problema;

- A figura abaixo mostra as três situações possíveis de ocorrer quando um disco de raio r é lançado sobre um piso formado por ladrilhos quadrados com lado de medida l. Os discos de centro C_1 e C_2 representam dois casos favoráveis à escola, enquanto que o disco de centro C3 representa uma possibilidade favorável ao jogador;

Fonte: Elaborado pelo autor.

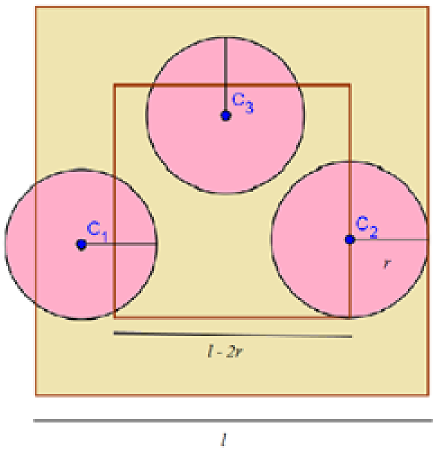


Figura 3.18: Posições dos centros dos discos no piso

- Através do modelo anterior, os alunos deverão perceber que a posição em que o centro do disco se localiza após o lançamento define a possibilidade de o jogador ganhar ou não em um lançamento. Dessa forma, calcular a probabilidade do disco, após lançado, se inserir totalmente no quadrado maior, implica em calcular a probabilidade do centro do disco ficar sobre a área do quadrado menor;

- Sugere-se que seja realizada uma atividade investigativa, onde os alunos irão confeccionar e lançar diversos discos de raios diferentes, um determinado número de vezes, num mesmo piso anotando a frequência dos eventos em uma tabela e representando graficamente;

- No entanto, optamos por aplicar uma modelagem algébrica ao problema. Para tanto precisamos do conceito de probabilidade geométrica. Na RPM 34 - Revista do Professor de Matemática, o professor Eduardo Wagner nos informa que “na probabilidade geométrica, se tivermos uma região B do plano, contida em uma região A, admitimos que a probabilidade de um ponto de A também pertencer a B é proporcional á área de B e não depende da posição que B ocupa em A"(WAGNER, 1997, p.34).

Dessa forma, a probabilidade de um ponto que pertence A, também pertencer a B é dada por: $P = \dfrac{\text{Área de B}}{\text{Área de A}}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

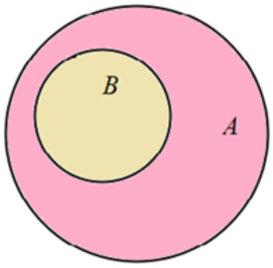


Figura 3.19: Regiões no Plano

- Partindo desse conceito de probabilidade geométrica, podemos dizer que a probabilidade de um jogador ganhar no lançamento de um disco, corresponde à probabilidade do centro do disco pertencer à área do quadrado $EFGH$ (figura abaixo) de lado medindo $l - 2r$. Então, sendo P a probabilidade de um jogador ganhar com um lançamento e S a área de um respectivo quadrado, temos:

$$P = \frac{S(EFGH)}{S(ABCD} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{(l - 2r)^2}{l^2}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

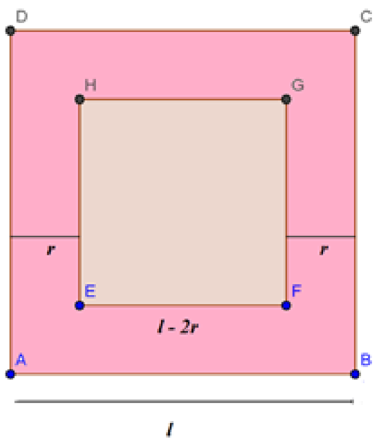


Figura 3.20: Área $S(EFGH)$ de interesse ao jogador.

Note que a probabilidade P depende de duas variáveis. Nesta oportunidade o professor poderá introduzir a ideia de função a duas variáveis. Usando a notação de função podemos escrever:

$P(l, r) = \dfrac{(l-2r)^2}{l^2}$, com $0 < r < \dfrac{l}{2}$. Desenvolvendo e simplificando a expressão $P(l, r)$, obtemos $P(l, r) = \dfrac{l^2 - 4lr + 4r^2}{l^2} = \dfrac{4r^2}{l^2} - \dfrac{4r}{l} + 1$.

A partir da expressão $P(l, r)$, o professor poderá mediar diversas intervenções envolvendo a ideia de função. Por exemplo:

- Fazendo $\dfrac{r}{l} = x$, obtém-se uma função quadrática em função da razão entre as variáveis r e l: $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$, onde $x = \dfrac{r}{l}$.

Vamos resolver o problema inicial, utilizando a função anterior. O problema consiste em determinar o tamanho do raio de modo que a escola ganhe em 60% das jogadas, ou seja, a probabilidade de um jogador ganhar seja de 40%, considerando um piso com ladrilhos quadrados de lado medindo 30 cm.

Solução 1. Escrevendo $P = 0,4$ e igualando a $P(x)$, vem:

$$4x^2 - 4x + 1 = 0,4 \;\Leftrightarrow\; 4x^2 - 4x + 0,6 = 0 \;\Leftrightarrow\; 20x^2 - 20x + 3 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 240}}{40} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{20 \pm 4\sqrt{10}}{40} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{5 \pm \sqrt{10}}{10}$$

Sendo $\sqrt{10} > 3$, então $\dfrac{5+\sqrt{10}}{10} > 0,8$, daí a razão $x = \dfrac{r}{l} > 0,8$, logo esta solução não condiz com a restrição inicial do problema ($0 < r < \dfrac{l}{2}$), já que é equivalente $r > 0,8l$. Dessa forma, $x = \dfrac{5-\sqrt{10}}{10}$ é solução única da equação. Fazendo $x = \dfrac{r}{l} = \dfrac{5-\sqrt{10}}{10}$, temos que $r = l \cdot \left(\dfrac{5-\sqrt{10}}{10}\right)$.

Fazendo $\sqrt{10} = 3,162$, obtemos uma função linear que relaciona a medida r do raio do disco em função da medida l do lado quadrado, quando a probabilidade P é fixada, veja:

$$r(l) = 0,1838l$$

Então, solucionando o problema, façamos $l = 30$ na função anterior, obtendo $r(30) = 0,1838 \cdot (30) \;\Rightarrow\; r(30) = 5,514$. O que significa que com um disco de raio medindo aproximadamente 5,51 cm, considerando o piso quadrado com 30 cm de lado, um jogador obterá êxito somente em 40% dos lançamentos.

O gráfico abaixo mostra como o raio r varia em função da medida do lado l do piso, considerando a P fixo:

Fonte: Elaborado pelo autor no aplicativo EXCEL.

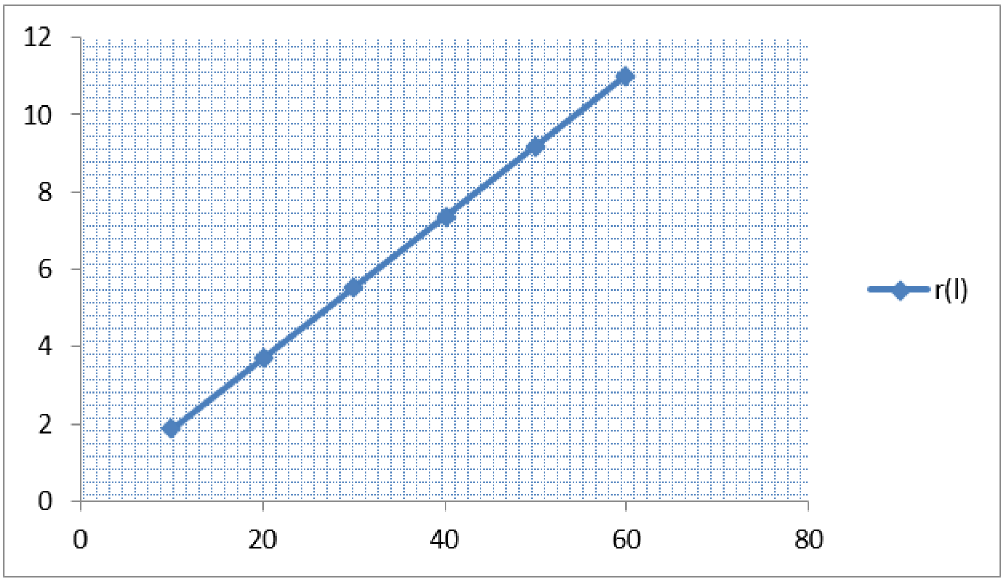


Figura 3.21: Variação de r em função da medida l.

A situação anterior pode ser generalizada como forma do professor explorar a ideia de funções de duas variáveis. Adotando um valor arbitrário para a probabilidade $P(0 < P < 1)$, a expressão da função $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$, se transforma numa equação de segundo grau em x. Veja:

$P(x) = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = P \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + (1 - P) = 0$. Resolvendo a equação temos: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{P}}{2}$. Como $x = \dfrac{r}{l}$, substituindo obtemos uma expressão que relaciona as variáveis r, l e P: $\dfrac{r}{l} = \dfrac{1 \pm \sqrt{P}}{2}$. Note a expressão anterior só tem significado para $\dfrac{1 - \sqrt{P}}{2}$, já que do contrário teríamos $\dfrac{r}{l} > \dfrac{1}{2}$, o que implicaria em termos $r > \dfrac{1}{2}$, o que não satisfaz o campo de existência da função $(0 < r < \dfrac{1}{2})$. Daí, temos $\dfrac{r}{l} = \dfrac{1 - \sqrt{P}}{2}$, então podemos expressar a medida do raio em função de duas variáveis da seguinte forma:

$$r = \left(\frac{1 - \sqrt{P}}{2}\right) \cdot l \quad \Rightarrow \quad r(P, l) = \left(\frac{1 - \sqrt{P}}{2}\right) \cdot l$$

Podemos agora solucionar o problema inicial: O problema consiste em determinar a medida do raio do disco, de modo que a probabilidade do jogador ganhar seja de

40%, num piso quadrado de lado medindo 30 cm. Então, considerando $P = 0,4$ e $l = 30$ na função $r(P, l)$ temos:

$$r = \left(\frac{1 - \sqrt{P}}{2}\right) \cdot l \quad \Rightarrow \quad r(0,4; 30) = \left(\frac{1 - \sqrt{0,4}}{2}\right) \cdot 30$$

Com o auxílio de uma calculadora, obtemos:

$$r(0,4; 30) \simeq 5,513 \text{ cm}$$

- Outra possibilidade de exploração da ideia de função pode ocorrer no caso em que a medida do lado do quadrado é tomada de forma fixa, ou seja, l se torna constante na expressão $P(l, r) = \frac{4r^2}{l^2} - \frac{4r}{l}$. Dessa forma, a função $P(l, r)$ se torna uma função de uma variável em r, ou seja, $P = P(r)$. Tomemos como exemplo o caso em que l=30 cm= 0,3m, que é dado na problemática inicial da modelagem em questão:

  Temos, então, que $P(r) = \frac{4r^2}{0,09} - \frac{4r}{0,3} + 1$, com $0 < r < 15$. O gráfico abaixo mostra como a probabilidade P varia em função de r. Note que $P(r) = 0,4$ corresponde a um valor de r menor que 0,06 m, o que está de acordo com a solução obtida anteriormente.

Fonte: Elaborado pelo autor no aplicativo Geogebra.

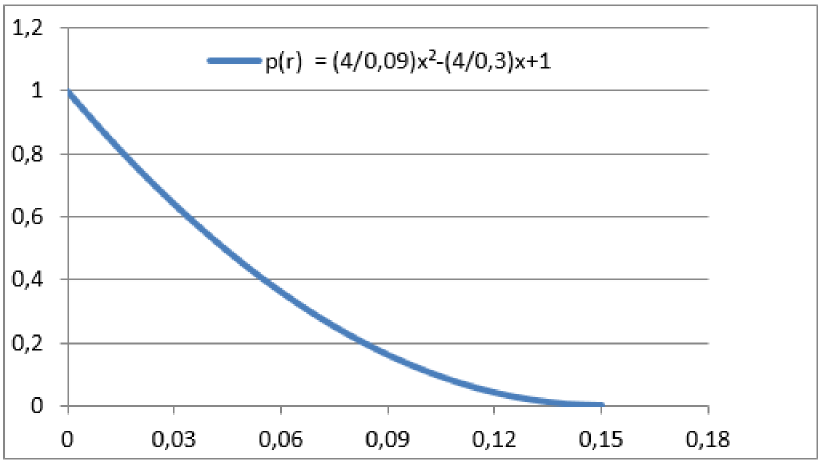


Figura 3.22: Variação de P em função de r, quando $l = 0,3m$.

Fazendo $P(r) = 0,4$, vem:

$$0,4 = \frac{4r^2}{0,09} - \frac{4r}{0,3} + 1 \Leftrightarrow \frac{4r^2}{0,09} - \frac{4r}{0,3} + 0,6 = 0 \Leftrightarrow 12r^2 - 3,6r + 0,162 = 0$$

$$r = \frac{3,6 \pm \sqrt{5,184}}{24} \Leftrightarrow r_1 \cong 0,2448 \text{ ou } r_2 = 0,0551$$

Note que $r_1 \cong 0,2448 \cong 24,48$ cm, não condiz com a condição $0 < r < \frac{l}{2}$, logo $r_2 = 0,0551 \cong 5,51$ cm é solução do problema.

Em resumo:

- $P(l, r) = \frac{4r^2}{l^2} - \frac{4r}{l} + 1$, nos fornece a probabilidade P de vitória do jogador em função da medida do lado l e do raio r do disco. É uma função de duas variáveis;
- Fixando uma probabilidade P, a medida do raio é proporcional à medida do lado do quadrado, sendo expressa pela função linear $r(l) = xl$, onde x é solução da equação $4x^2 - 4x + (1 - P) = 0$;
- Fixando a medida l do lado do quadrado (piso), a probabilidade P de ganhar em um lançamento pode ser expressa por uma função quadrática em r, ou seja, $P(r) = \frac{4r^2}{l^2} - \frac{4r}{l} + 1$.

3.4 O Crescimento Populacional do Estado do Amapá

Esta atividade envolve o estudo de crescimento populacional, que se caracterizam através de crescimento exponencial. O problema maior na modelagem de situações desse tipo consiste em definir o modelo exponencial adequado a situação sem recorrer ao uso do cálculo diferencial, já que estamos considerando o desenvolvimento da atividade com turmas de ensino médio. Para tanto, buscamos definir e caracterizar a função exponencial como forma de auxiliar na modelagem do problema. A definição que segue é apresentada por Iezzi (2013, p.27). Optamos pela mesma por ser de menos formalidade, favorecendo a compreensão dos alunos.

Definição 3.4.1. Dado um número real $0 < a \neq 1$, chamamos de função exponencial de base a, a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real o número a^x.

Observação 3.4.1. Os modelos relacionados a fenômenos da natureza ou processos científicos, quase sempre apresentam funções exponenciais do tipo $f(x) = b \cdot a$, onde b é uma constante que caracteriza o fenômeno estudado. A caracterização que apresentaremos a seguir, juntamente com sua demonstração se encontra em Lima (op. cit. p.184).

Caracterização de uma Função Exponencial

Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\dfrac{[g(x+h)-g(x)]}{g(x)}$ dependa apenas de h , mas não de x . Então, se $b = g(0)$ e $a = \dfrac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A seguir buscamos exemplificar como o processo de caracterização anterior pode ser útil na modelação de dados que se comportam de forma exponencial. Observem os dados apresentados na tabela abaixo, note que os elementos da coluna $g(x)$ se comportam de modo que o elemento seguinte é o dobro do elemento anterior. Porém, o que nos interessa é o acréscimo relativo, apresentado na última coluna:

Fonte: Elaborada pelo autor.

x	$g(x)$	$g[g(x+h)-g(x)]$	$[g(x+h)-g(x)]/g(x)$
0	0,3	...	...
1	0,6	0,3	1
2	1,2	0,6	1
3	2,4	1,2	1
4	4,8	2,4	1
5	9,6	4,8	1
6	19,2	9,6	1

Tabela 3.6: Caracterização da função $g(x) = b \cdot a^x$

Note que o acréscimo relativo $\dfrac{[g(x+h)-g(x)]}{g(x)} = 1$. Supondo que $g(x)$ é uma função do tipo exponencial, ou seja, $g(x) = b \cdot a^x$, temos que este acréscimo é dado em função somente de h. De fato:

$$\frac{[g(x+h)-g(x)}{g(x)} = \frac{b \cdot a^{x+h} - b \cdot a^x}{b \cdot a^x} = a^h - 1 = \xi(h)$$

Então, fazendo $a^h - 1 = 1$ e considerando $h = 1$ (ver tabela), temos que $a^1 - 1 = 1$, logo $a = 2$. Fazendo $b = g(0) = 0,3$, vem:

$$g(x) = b \cdot a^x \;\Rightarrow\; g(x) = 0,3 \cdot 2^x$$

A tabela a seguir mostra alguns valores da função $g(x) = b \cdot a^x$, considerando um acréscimo $h = 4$. Observe que o acréscimo relativo $\dfrac{[g(x+h)-g(x)}{g(x)} = 15$.

Então de $a^4 - 1 = 15$, obtemos $a = 2$. De $g(1) = 0,6$, tem-se $b = 0,3$. Portanto, temos que $g(x) = 0,3 \cdot 2^x$.

Nosso objetivo em utilizar as duas tabelas com dados diferentes de uma mesma função se resume em mostrar que independentemente dos dados tabelados, podemos obter a função que os origina, bastando para isso considerar o acréscimo relativo. Isso é de grande valia num processo de modelagem onde dados empíricos são obtidos e tabelados.

Fonte: Elaborada pelo autor.

x	$g(x)$	$g[g(x+h)-g(x)]$	$[g(x+h)-g(x)]/g(x)$
1	0,6	...	...
5	9,6	9	15
9	153,6	144	15
13	2,2457,6	2304	15
17	39321,6	36864	15
21	629146	589824	15

Tabela 3.7: Caracterização da função $g(x) = b \cdot a^x$

Com os fundamentos necessários apresentados, vamos agora buscar um modelo que expresse a população do Estado do Amapá em função do tempo, em anos.

Situação-Problema 4. Os dados abaixo foram obtidos no site do IBGE, onde mostra a previsão de crescimento da população do Estado do Amapá no período de 2010-2015.

Fonte: Dados disponíveis no site do IBGE - Acesso em 22/01/14.

Ano	População	Fonte
2010	686.189	Censo
2011	702.638	Projeção
2012	718.906	Projeção
2013	734.996	Projeção
2014	750.912	Projeção
2015	766.679	Projeção

Tabela 3.8: População do Estado Amapá 2005-2015

Considerado os dados da tabela, é possível projetar a população do Estado do Amapá para o ano de 2025? Em que ano a população do Amapá ultrapassará a marcar de 1 milhão de pessoas?

Orientações Gerais

- A atividade poderá ser desenvolvida por qualquer turma do ensino médio, haja vista que os conteúdos necessários para a realização podem ser vistos em qualquer ano do ensino médio:

  - Funções exponenciais;

  - Equações logarítmicas;

  - Sequências e progressões;

  - Média geométrica;

- Introdução à estatística.

- Desenvolver o trabalho em grupo de no máximo 03 alunos;
- Orientar a busca da melhor estratégia de resolução, não direcionando os trabalhos e sim atuando como mediador;
- Rever os conteúdos e conceitos necessários como pré-requisitos ao desenvolvimento da atividade.

Desenvolvimento da Atividade

Considerando que a população P do Estado do Amapá, no período estabelecido, é uma função do tempo x, em anos, então podemos escrever que $P = f(x)$. Aplicando o conceito de taxa de crescimento relativo, que caracteriza crescimento exponencial, aos dados da tabela anterior, obtemos os dados da tabela abaixo:

Fonte: Elaborada pelo autor, conforme dados da tabela anterior.

ANO	x	$f(x)$	$[f(x+h)-f(x)]$	$[f(x+h)-f(x)]/f(x)$
2010	0	686189		
2011	1	702638	16449	0,023971530
2012	2	718906	16268	0,023152747
2013	3	734996	16090	0,022381229
2014	4	750912	15916	0,021654540
2015	5	766679	15767	0,020997134

Tabela 3.9: Caracterização da função $f(x)$

Observando os valores da tabela, nota-se que a taxa de crescimento relativo não é constante. Este fato já era esperado, pois o crescimento populacional em longo prazo sofre influências de diversos fatores, tais como processos migratórios, taxa de mortalidade/natalidade, entre outros. Neste ponto, o professor poderá atuar juntamente com um professor de geografia para esclarecer esses fatores. Então, qual o procedimento a ser adotado nesta situação?

Segundo Givisiez (2004) “Uma metodologia muito utilizada para estimar a população em um tempo t qualquer consiste em estimar a taxa média de crescimento (r) da população entre dois pontos conhecidos”, que neste sentido é obtida por:

$$r_g = \left(\sqrt[t]{\frac{P^{\text{final}}}{P^{\text{inicial}}}}\right) - 1, \text{ onde } \begin{cases} r_g = \text{taxa média de crescimento geométrico} \\ P^{\text{final}} = \text{população fimdo período} \\ P^{\text{inicial}} = \text{população no inicio do periodo} \\ t = \text{tempo entre as duas datas de referência.} \end{cases}$$

Dessa forma podemos fazer um ajuste na taxa de crescimento relativo e adotar um valor que represente o conjunto de taxas: taxa média de crescimento geométrico. Agindo assim, temos:

$$r_g = \left(\sqrt[t]{\frac{P^{\text{final}}}{P^{\text{inicial}}}}\right) - 1 \ \Rightarrow \ r_g = \left(\sqrt[5]{\frac{766.679}{684.189}}\right) - 1 \cong 0,02243$$

O valor obtido para a taxa de crescimento relativo não difere muito caso tivéssemos adotado para tal a média geométrica das taxas do referido período. Veja:

$$t_{mg} = \sqrt[5]{(0,0239...) \cdot (0,0231...) \cdot (0,0223...) \cdot (0,0216...) \cdot (0,0209...)}$$

$$t_{mg} = 0,02240$$

Vamos adotar, então para $\xi(h) = \dfrac{[f(x+h) - f(x)]}{f(x)} = 0,02$. Dessa forma, fazendo $h = 1$ na função $\xi(h) = a^h - 1 = 0,02$, obtemos $a = 1,02$ e como $f(0) = b = 686.189$, temos que $f(x) = 686.189 \cdot (1,02)^x$. Portanto, a função exponencial que modela o crescimento populacional do Estado do Amapá é dada por: $f(x) = 686.189 \cdot (1,02)^x$, onde $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Agora podemos responder os questionamentos feitos na situação-problema:

a) Sendo $f(x) = 686.189 \cdot (1,02)^x$, devemos calcular $f(2025) - f(15)$. Então,$f(2025) = f(15) = 686.189 \cdot (1,02)^{15}$, com o auxílio de uma calculadora obtemos $f(15) =$ 923.520 habitantes.

b) O problema consiste em determinar o ano em que a população do Amapá alcançará a marcar de um milhão de habitantes. Ou seja, determinar $x/f(x) =$ 1.000.000. Igualando a função, temos:

$$f(x) = 1.000.000 \ \Leftrightarrow \ 686.189 \cdot (1,02)^x = 1.000.000 \ \Leftrightarrow \ (1,02)^x = \frac{1.000.000}{686.189}$$

Aplicando logaritmos decimais de ambos os lados da igualdade vem:

$$\log(1,02)^x = \log\left(\frac{1.000.000}{686.189}\right) \ \Leftrightarrow \ x\log(1,2) = \log 10^6 - \log(686.189)$$

$$x = \frac{6 - \log(686.189)}{\log(1,02)}$$

Com o auxílio de uma calculadora, obtemos $x \cong 19,01$, que não representa um valor inteiro. Poderíamos optar em utilizar o inteiro mais próximo, caso adotemos este procedimento, obteremos um valor abaixo do esperado. Veja:

- Para $x = 19$, temos $f(19) = 686.189 \cdot (1,02)^{19} = 999.647$;
- Para $x = 20$, temos $f(20) = 686.189 \cdot (1,02)^{20} = 1.019.640$;
- Considerando o valor de $x = 20$, então no ano de 2030, pelo modelo ora apresentado, a população do Estado do Amapá ultrapassará a marca de um milhão de habitantes

Consultando a página do IBGE-Instituto de Geografia e Estatística, podemos comparar os dados ora obtidos:

- Para a população de 2025, o IBGE faz uma projeção de 914.915 habitantes. Nosso modelo apresenta um valor de 8605 habitantes a mais. Um erro menor que 1%;
- Para a população de 2030, a projeção é 983.304 habitantes. Nosso modelo apresenta um valor de 16.696 habitantes a mais, um erro de 1,67%, bem razoável para uma matemática elementar;
- Um ponto a ser considerado para debate em sala de aula é se esse modelo serve para projeções muito acima do período estabelecido (2010-2030). Como o modelo é exponencial os erros, por menores que sejam em longo prazo apresentarão uma distorção nos valores previstos. O método dos mínimos quadrados seria aplicável nesta situação, mas não faz parte do escopo do presente trabalho;
- Vale ressaltar que adotamos o modelo exponêncial por motivos didáticos; porém, sabe-se que na realidade há outros modelos que podem expressar um resultado mais coerente, como por exemplo, um modelo polinomial.

Considerações Finais

O desenvolvimento do presente trabalho serviu como uma pequena introdução em torno das discussões inerentes ao desenvolvimento do conceito de função em sala-de-aula, tendo como ferramenta o emprego da modelagem matemática como uma metodologia alternativa. Através de uma análise e sugestões de atividades que utilizaram a modelagem matemática para auxiliar no desenvolvimento do conceito de função pelo educando, percebeu-se o poder que esta ferramenta tem na construção dos conceitos, os mais diversos, na escola. No entanto, vale ressaltar que a utilização da modelagem matemática como uma metodologia alternativa para o ensino de funções, demanda do educador comprometimento com sua práxis educativa, uma busca constante por continuidade na formação, além de estudo e pesquisa relativos aos temas específicos da disciplina. Não se pretende aqui exaurir o debate, pelo contrário, é consenso que ainda há muito a se analisar sobre o tema. A utilização da modelagem no ensino da matemática nas escolas é de suma importância para o processo de aprendizagem significativa e para desmitificação da disciplina.

Referências Bibliográficas

[1] **BARBOSA; Jonei Cerqueira**. Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores. 2001. 253 f. Tese (Doutorado)-Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001;

[2] **BASSANEZI; Rodney Carlos**. Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia. 3º. Ed. Editora Contexto, São Paulo, 2006;

[3] **BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson**. Modelagem matemática no ensino. São Paulo: Contexto, 2013.5 ed. 127 p;

[4] **BRASIL**. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. II Segmento. 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998;

[5] **Secretaria da Educação Básica**. PCN+-Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília. 2008;

[6] **Secretaria da Educação Básica**. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Vol. 02-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasilia. 2006;

[7] **DANTE; Luís Roberto**. Uma proposta para mudanças nas ênfases ora dominantes no ensino de matemática. Brasília, Revista do professor de matemática, 1987;

[8] **DOBROWOLSKI; Eunice Nunes**. Movimento da Matemática Moderna nas práticas escolares e suas repercussões na maneira de ensinar. Anais do IX congresso Nacional de Educação-EDUCERE. III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia.PUCPR.2009. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2009/anais/pdf/3038_1678.pdf>. Acessado em 10/11/2013;

[9] **FERRARI; Márcio**. Lev Vygotsky, o teórico do ensino como processo social. São Paulo. 2012. Seção Formação de Professores. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/historia/pratica-pedagogica/lev-vygotsky-teorico-423354.shtml?page= 0 >. Acessado em 10/01/2014;

[10] **FLEMMING, Diva Marília et al**. Tendências em Educação Matemática. 2º Ed. Palhoça: Unisul Virtual. 2005;

[11] **FREIRE, Paulo**. Pedagogia da Autonomia: Saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra. 1996;

[12] **GIRALDO, Victor. Et al**. Recursos computacionais no ensino da Matemática. PROFMAT-Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional. Sociedade Brasileira de Matemática. Roteiro para a disciplina: Recursos Computacionais no Ensino da Matemática. 2012;

[13] **GIVISIEZ, Gustavo Henrique Naves**. Introdução a Método de Estimativas e Interpolações Populacionais. In: RIOS-NETO, Eduardo L. Gonçalves; RIANI, Juliana de Lucena Ruas (Orgs.).Introdução à Demografia da Educação. Campinas: Associação Brasileira de Estudos Populacionais-ABEP.2004. Cap.02. p.49;

[14] **GOLBERT; Clarissa**. A matemática escolar numa sociedade informatizada. Revista de Educação: Matemática. Porto Alegre: Projeto. v. 2, n.3, P.14-19, Jul. /Dez. 2000;

[15] **HERMINIO; Maria Helena G. Barbosa**. O processo de escolha dos Temas dos Projetos de Modelagem Matemática. Dissertação de Mestrado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. UNESP-Rio Claro-SP. 139 f. 2009;

[16] **MUNIZ NETO, Antônio Caminha**. Tópicos de Matemática Elementar: Introdução a Análise. COleção do Professor de Matemática. V.3. RIo de Janeiro: SBM, 2012;

[17] **INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA**. Estimativa da população da cidade de Macapá. Disponível em: <http://www.cidades.ibge.gov.br/xtras/perfil.php?lang=&codmun=160030&search-=amapa—macapa>. Acessado em: 20/12/2013;

[18] **INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA**. Projeção da população do Estado do Amapá 2010-2030. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/estadosat/temas.php?sigla=ap&tema=projecao2013>. Acessado em: 12/02/2014;

[19] **LIMA, E.L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E. & MORGADO, A. C**. A Matemática do Ensino Médio. Coleção do Professor de Matemática. Vol. 1. 9º Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 2009.a;

[20] **LIMA, E.L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E. & MORGADO, A. C**. A Matemática do Ensino Médio. Coleção do Professor de Matemática. Vol. 2. 9º Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 2009.b;

[21] **KLINE; M**. O fracasso da matemática moderna. São Paulo: IBRASA, 1976;

[22] **MAIA, Christiane Martinatti**. Teoria Histórico-cultural-Vygotsky. In: Psicologia do Desenvolvimento e da Aprendizagem. Universidade Luterana do Brasil-ULBRA (org.). Curitiba: Ibepex. 2006;

[23] **MIOLA, Rudinei José; Silveira**. Everaldo. Metodologia do Ensino de Matemática e Física: Professor-pesquisador em Educação Matemática. Curitiba: Editora IBPEX. 2008;

[24] **OREY, D. C.; ROSA, M**. A dimensão Crítica da Modelagem Matemática: Ensinando para a eficiência Sócio Critica. In: Congresso Nacional de Modelagem em Educação Matemática, 5., 2007, Ouro Preto. Anais... Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto. 2007. 1 CD ROM;

[25] **PATERLINI. Roberto Ribeiro**. O problema do jogo dos discos. Revista do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, v. 48, 2002;

[26] **PATERLINI. Roberto Ribeiro**. O problema dos discos. In: Coleção Explorando o Ensino: Matemática-Ensino Médio. Vol. 03. Brasília: MEC/SEB. 2004;

[27] **PINTO; Neuza Bertoni**. Práticas escolares do Movimento da matemática Moderna. Disponível em: www.faced.ufu.br/colibhe06/anais/arquivos/364NeuzaPinto. Acessado em: 22/12/2011;

[28] **PONTE, João Pedro; BROCADO, Joana; OLIVEIRA, Helena**. Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2003;

[29] **RIBEIRO, Flávia Dias**. Metodologia do Ensino da Matemática e Física: Jogos e Modelagem na Educação Matemática. Curitiba: Editora IBPEX, 2008;

[30] **ROSSO, Ademir José**. O erro e o ensino aprendizagem da Matemática na perspectiva do desenvolvimento da autonomia do aluno. BOLEMA: Boletim de Educação Matemática. v.23. nº 37.p.1011.Rio Claro-SP.2010;

[31] **TRINDADE, J. O, MORETTI, M.T**., Uma Relação Entre a Teoria Histórico-cultural e a Epistemologia Histórico-crítica no Ensino de Funções: A Mediação. In: Zetetiké, Campinas, SP: UNICAMP-FE- CEMPEM, nº 13/14, vol.8,7-28, Jan/Jun - 2000.

[32] **WAGNER, Eduardo**. O problema do macarrão e um paradoxo famoso. Revista do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, v. 34, 1997.