UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ-UNIFAP
PROGRAMA MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DO MESTRADO

ANDRÉ LUIS BELTRÃO DA SILVA

" PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO E SUAS APLICAÇÕES NO COTIDIANO "

MACAPÁ – AP
2016

ANDRÉ LUIS BELTRÃO DA SILVA

Dissertação apresentada ao Programa Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal Amapá como parte dos requisitos para obtenção do titulo de Mestre em Ensino da Matemática, sob orientação do Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil.

MACAPÁ – AP
2016

ANDRÉ LUIS BELTRÃO DA SILVA

Dissertação apresentada ao Programa Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal Amapá como parte dos requisitos para obtenção do titulo de Mestre em Ensino da Matemática.

Data da Defesa: 01/12/16

Conceito: Excelente

Banca Examinadora

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil- UNIFAP
Orientador

Prof. Dr João Xavier da Cruz Neto-UFPI

Prof. Dr Guzman Eulalio Isla Chamilco-UNIFAP

Prof. Dr Erasmo Senger-UNIFAP

MACAPÁ – AP
2016

Ás pessoas mais importantes da minha vida: Dircira Beltrão da Silva (mãe), Paulo Adalberto dos Santos Pamplona da Silva (pai), Vânia Claudia Ramos Lima (esposa) e Claudia Vitoria Ramos Lima (filha).

AGRADECIMENTOS

Á Deus, por me manter firme em minhas convicções, por me carregar no colo nos momentos mais difíceis, que não foram poucos, pelos quais passei me dando sabedoria para continuar caminhando e chegar até o final deste mestrado.

A Secretária Estadual de Educação do Pará - SEDUC-PA, que permitiu a continuidade aos meus estudos;

Ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada- IMPA que coordena o projeto;

À Universidade Federal do Amapá UNIFAP, que nos oportunizou a realização de um sonho;

Aos meus inesquecíveis avós que me deram forças necessárias para que me formasse em Matemática e pude seguir em frente, embora tenham partido desse plano faz alguns anos e sei que sempre estiveram me observando;

Aos meus pais que sempre custearam meus estudos e me educaram;

Aos professores deste curso, pelos ensinamentos que levarei por toda a vida.

Ao orientador deste estudo, professor Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil que abraçou a idéia e contribuiu generosamente para a conclusão desta empreitada;

Aos colegas de turma que sempre estiveram dispostos a colaborar e me incentivaram em todos os momentos que precisei de apoio. Em especial aos colegas Luiz Silva e Flávia Henam.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma sequencia didática para ser adotada por professores de matemática no intuito de promover a compreensão por parte dos alunos do assunto de probabilidade, para que as aulas sejam mais dinâmicas e atraentes para a fixação do conteúdo como proposta de aplicação nas escolas públicas (para alunos do Ensino Médio) uma vez que em diversas provas como ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), OBMEP (Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas) e processos seletivos aparecem situações problemas com este assunto e também devido ao baixo índice de rendimento escolar no estado do Amapá e o desinteresse dos alunos pelo assunto. Nesta perspectiva, este estudo traz uma proposta de aplicação de atividades práticas de probabilidade, destacando o uso de experimento e pesquisas a serem feitas na própria escola, em uma turma do 2° ano do ensino médio. O tabalho traz um enfoque diferenciado das tradicionais aulas de matemática, quebrando a rotina da sala de aula e permitindo uma abordagem mais interativa no ensino dessa disciplina.

Palavras-Chave: Probabilidade. Probabilidade Condicional. Atividade Prática.

ABSTRACT

In this work we present a didactic sequence to be adopted by mathematics teachers in order to promote students' understanding of the subject of probability, so that the classes are more dynamic and attractive for fixing the content as a proposal for application in public schools (For high school students), since in several tests such as ENEM (National High School Examination), OBMEP (Brazilian Mathematics Olympiad of public schools) and selective processes, there are problems with this subject and also due to the low school performance index In the state of Amapá and the students' lack of interest in the subject. In this perspective, this study presents a proposal for the application of practical activities of probability, highlighting the use of experiment and research to be done in the school itself, in a class of the second year of high school. The study brings a differentiated approach to traditional math classes, breaking the classroom routine and allowing for a more interactive approach in teaching that subject.

Keywords: Probability. Conditional probability. Practice activity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
MEC	Ministério da Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
UNIFAP	Universidade Federal Do Amapá
UFPI	Universidade Federal Do Piauí

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Diante da realidade das escolas públicas brasileiras e das dificuldades que elas vêm enfrentando ao longo dos anos, sem recursos e recebem cada vez menos alunos no Ensino Médio em suas salas. A precariedade desse ambiente, somada a desmotivação desses alunos contribui severamente para a evasão escolar e consequentemente, o baixo rendimento. O Ministério da Educação (MEC), órgão oficial do governo, apontou que o Estado do Amapá obteve um baixo Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB-2007/2015) em 2013 e registrou média de 2,9 quando a meta esperada era de 3,2. Foi pensando neste cenário que resolvi desenvolver este trabalho, o qual trata da aplicação de atividades práticas de Probabilidade que tem como objetivos principais motivar os alunos do Ensino Médio, contribuindo para um melhor desempenho do ser humano no desenvolvimento de suas habilidades, aumentando assim, o seu entusiasmo e interesse pela matemática.

Como docente do Ensino Médio da escola publica há quase 10 anos, tenho observado que os alunos têm dificuldade na resolução de problemas de probabilidade e principalmente de Probabilidade condicional onde tal assunto e pouco abordado em sala de aula, mas que vem aparecendo cada vez mais em concursos públicos e no Exame Nacional do Ensino Médio-ENEM, Segundo Noronha (2011), a Probabilidade tem ganhando espaço entre os conteúdos que deverão ser ensinados na educação básica, tanto quanto a Geometria, a Álgebra e a Aritmética. Compreende-se que o desenvolvimento da competência, análise crítica e argumentação são privilegiadas com os tratamentos possibilitados pelos conteúdos probabilísticos. No âmbito da Educação Matemática, o trabalho com esse conteúdo tem se mostrado significativo a pesquisadores e professores, principalmente devido à inserção de novos modos de produção de conhecimento no currículo, que vão além da Matemática determinística. Das perspectivas epistemológicas, a Probabilidade é vistas como possibilidades de trabalhar com atividades escolares que tratam de incertezas e aleatoriedades. Pesquisadores como Mendoza e Swift (1981), apontam a necessidade do ensino de Probabilidade ser tratada na escola para ajudar nas tomadas de decisões inerentes às situações da vida social e econômica por meio de análises, comparações, sondagens e escolhas amostrais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN Matemática (Brasil, 1997), pg.40 estabelecem que a principal finalidade para o estudo de probabilidade:

> “é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória, onde é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifesta intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos”.

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) valorizam a resolução de problemas que envolvam relação com o cotidiano dos alunos e verificamos que as escolas públicas no estado do Amapá das quais tomamos conhecimento mediante pesquisa bibliográfica, algumas ainda não trabalham com essa metodologia em seus planos políticos pedagógicos. Alguns professores do ensino médio dessas escolas adotam essa proposta metodológica por conta própria.

De acordo com os PCNEM-2000, Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias pg. 112.

> “A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios.”

Pensando em auxiliar ao professor nessa tarefa, o presente trabalho se apresenta com a proposta de que ele possa compreender e utilizar os conceitos envolvidos nos problemas de probabilidade, em um nível crescente de dificuldade para o ensino médio. Dessa forma, o trabalho procura abordar o tema de probabilidade condicional durante o ensino médio, já com foco na resolução de problemas, por conta das avaliações por quais ele passará. Apresenta – se uma metodologia para desenvolver o estudo da probabilidade condicional, formalizar os conceitos e abstrair o raciocínio dos alunos.

1.1 O IDEB NO ESTADO DO AMAPÁ

Quando se fala em índices de aproveitamento da aprendizagem no ensino básico, o Estado do Amapá deu um passo atrás e contrariando todas as metas projetadas, conseguiu piorar. De acordo com Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB-2007/2015) (figura 1) em 2013 e levando-se em consideração o ensino médio, o estado não conseguiu alcançar a meta pretendida para aquele ano e também não manteve o mesmo rendimento da avaliação anterior. Retrocedendo portando suas expectativas de elevar a educação no Estado a patamares mais ambiciosos, como mostra o quadro abaixo:

inep Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

IDEB Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

IDEB - Resultado e Metas

Resultado: Estado **UF: AP**

Rede Ensino: Estadual **Série/Ano :3º série EM**

Metas Projetadas							
2007	2009	2011	2013	2015	2017	2019	2021
2,7	2,8	3,0	3,2	3,6	4,0	4,3	4,6

IDEB observado				
2007	2009	2011	2013	2015
2,7	2,8	3,0	2,9	3,1

Figura 1-Quadro do IDEB- Instituto de Desenvolvimento de Educação Básica.
Fonte: Instituto Nacional de Estudo e Pesquisa Anísio Teixeira- www.QEdu.org.br

1.2 HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

Segundo Morgado(2014) a palavra **probabilidade** deriva do Latim *probare* (provar ou testar). Informalmente, provável é uma das muitas palavras utilizadas para eventos incertos ou desconhecidos, sendo também substituída por algumas palavras como “sorte”, “risca”, “azar”, "chance", “incerteza”, “duvidoso”, dependendo do contexto.

A Teoria da Probabilidade iniciou com o fascínio do homem em estudar os fenômenos que envolviam determinadas possibilidades, teve início com os jogos de azar disseminados na Idade Média (figura 2). Esse tipo de jogo é comumente praticado através de apostas, na ocasião também era utilizado no intuito de antecipar o futuro.

Figura 2- Jogos da idade média e dos dias de hoje.
Fonte: http://www.ludomania.com.br/wp/?p=1322

O desenvolvimento das teorias da probabilidade, e os avanços dos cálculos probabilísticos segundo Grinstead e Snell (1997) devem ser atribuídos a vários matemáticos. Atribui-se aos algebristas italianos Pacioli, Cardano e Tartaglia (séc. XVI) as primeiras considerações matemáticas acerca dos jogos e das apostas. Os alicerces da teoria do cálculo das probabilidades e da análise combinatória foram estabelecidos por seus principais idealizadores (figura 3), Pascal e Fermat, as situações relacionando apostas no jogo de dados levantaram diversas hipóteses envolvendo possíveis resultados, marcando o início da teoria das probabilidades como ciências. As contribuições de Bernoulli enfatizaram os grandes números, abordando as combinações, permutações e a classificação binomial. Laplace formulou a regra de sucessão e Gauss estabelecia o método dos mínimos quadrados e a lei das distribuições das probabilidades. Atualmente, os estudos relacionados às probabilidades são utilizados em diversas situações, pois possuem axiomas, teoremas e definições bem contundentes. Sua principal aplicação diz respeito ao estudo da equidade dos jogos e dos respectivos prêmios, sendo sua principal aplicação destinada à Estatística Indutiva, na acepção de amostra, extensão dos resultados à população e na previsão de acontecimentos futuros.

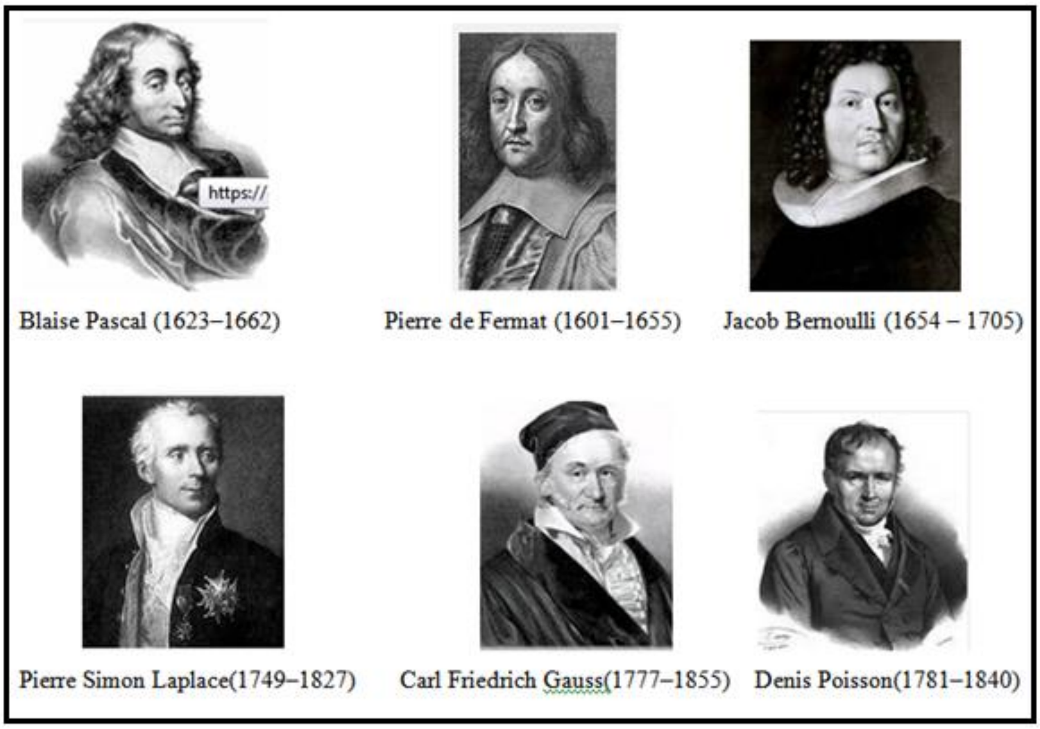


Figura 3- Os Idealizadores da Probabilidade.
Fonte: www.wikipedia.com.br

No segundo capítulo, cujo título é "Noções de Probabilidade", consiste em apresentar a proposta de ensino em probabilidade, ou seja, mostramos como o conteúdo deve ser ministrado para que o processo de ensino e aprendizagem seja satisfatório, iniciaremos com a diferença entre experimento determinístico e experimento aleatório, apresentaremos a função probabilidade e suas propriedades, definiremos espaço amostral, evento, modelo equiprovável e probabilidade condicional, será demonstrado o teorema de Bayes,faremos o uso de exemplos contextualizados,tal material servirá de apoio para os discentes.

O terceiro capítulo, "Metodologia", trará as aplicações em sala de aula sobre o conteúdo definido no capítulo anterior. Nesta parte, utilizaremos duas atividades práticas descrevendo as atividades desenvolvidas, os materiais empregados, a avaliação do conteúdo aplicada aos alunos e um questionário em que eles puderam responder e avaliar a prática utilizada.

Nas considerações finais, haverá uma reflexão sobre os resultados que poderão ser obtidos com esse trabalho. Além disso, teceremos comentário acerca de todo o processo, como coleta de dados e validação dos resultados.

2. NOÇÕES DE PROBABILIDADE

A teoria da probabilidade é um conjunto de técnicas pra se lidar na matemática com problema da incerteza e o objeto de estudo são os experimentos determinísticos e aleatórios. Temos:

Definição 2.1

Experimento determinístico: O experimento é determinístico quando repetido em condições semelhantes conduz a resultados essencialmente idênticos (MORGADO et al, 2006, p. 128). Quando os resultados de um experimento podem ser determinados antes do experimento ser realizado, esses são chamados de "Experimentos Determinísticos". Exemplos:

• Determinar a posição de um corpo em queda livre em função do tempo, conhecendo sua massa, posição inicial, gravidade do local e resistência do ar.

• Determinar o valor de uma aplicação financeira em função do tempo com taxa de rendimento fixa, conhecendo o valor da taxa e o valor inicial da aplicação.

Definição 2.2

O experimento quando repetidos sob as mesmas condições produzem resultados geralmente diferentes serão chamados **Experimentos Aleatórios** (MORGADO et al., 2006, p 128). Exemplos de "Experimento Aleatório" podem ser observados em:

• Quando se lança uma moeda várias vezes observam-se o resultado de cara ou coroa.

• Quando se lança várias vezes um dado com seis faces com números de 1 a 6 marcados em suas diferentes faces, nota-se o valor obtido.

• Quando se sorteia várias vezes uma carta em um baralho, repara-se a carta sorteada.

Existem basicamente três definições para a probabilidade

Definição subjetiva da probabilidade: afirma que a probabilidade é uma estimativa do que um indivíduo pensa que seja a viabilidade de ocorrência de um evento. Neste caso dois indivíduos podem estimar diferentemente uma probabilidade.

Definição frequêntista da probabilidade: a probabilidade de um evento (acontecimento ou resultado) é definida como sendo a proporção do número de vezes que eventos do mesmo tipo ocorrem em longo prazo. Em outras palavras, é quando precisamos realizar o experimento um número muito grande de vezes para observarmos que fração proporção das vezes tal evento ocorre.

Definição clássica de probabilidade: é quando estamos interessados em probabilidades iguais, ou seja, estamos lidando com experimentos equiprováveis.

Definição 2.3

Espaço amostral (S) (Iezzi 2013)**:** conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Exemplos:

• Considere o experimento que consiste em lançar uma moeda e observar a face voltada para cima. Então o espaço amostral é formado pelos dois elementos:

S = {c , k },onde c = cara e k= coroa.

• Lançamento de um dado e observar a face voltada para cima. S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Definição 2.4

Eventos: os subconjuntos do espaço amostral. No exemplo do lançamento do dado, se A é o evento em que a face voltada para cima é um número primo então A = {2,3,5}.

2.1 TIPOS DE EVENTOS.

Abaixo temos como os eventos podem ser classificados, isto é, os tipos de eventos. Serão dados exemplos de cada um para o espaço amostral do lançamento de um dado S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, onde a cardinalidade de S é n (S)= 6:

• **Evento certo:** é o próprio espaço amostral. Como exemplo tem:

A={jogar um dado e obter um número menor que 7}, assim teremos A =S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e n (A) = n (S) = 6.

• **Evento impossível:** é o subconjunto vazio do espaço amostral. Como exemplos têm:

A={ jogar um dado e obter um número maior que 7 }, assim teremos A = ∅ e n (A) = 0.

• **Evento elementar:** é aquele que tem um só elemento. Como exemplo tem:

A={jogar um dado e obter o número 2 }, assim teremos A = {2} e n (A) = 1.

• **Eventos mutuamente exclusivos:** são aqueles que têm conjuntos disjuntos. Como exemplo tem:

A={jogar um dado e obter um número menor que 3} ou B={ jogar um dado e obter um número maior que 4}, assim teremos o evento A = {1, 2} ou o evento B = {5, 6}, onde $A \cap B = \emptyset$.Sendo assim, a interseção entre os conjuntos disjuntos é o conjunto vazio.

• **Evento união:** é a reunião de dois eventos. Como exemplo tem: jogar um dado e obter um número menor que 4 ou número maior que 5, assim teremos o evento A = {1, 2, 3} e o evento B = {6}, onde $A \cup B = \{1, 2, 3, 6\}$.

• **Evento intersecção:** é a intersecção de dois eventos. Como exemplo tem: jogar um dado e obter um número menor que 4 e maior que 1, assim teremos o evento A = {1, 2, 3} e o evento B = {2, 3, 4, 5, 6}, onde $A \cap B = \{2, 3\}$.

• **Eventos complementares:** são dois eventos A e $\bar{A}$ tais que $(A \cup \bar{A}) = S$ e $(A \cap \bar{A}) = \emptyset$ .Em um lançamento de um dado, podemos citar como exemplo de eventos complementares A = {1, 2} e $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$, pois $A \cup \bar{A} = S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

<u>Definição 2.5</u>

Probabilidade de eventos seja um espaço amostral finito e não vazio; e seja A um evento desse espaço. Chama-se “Probabilidade de A” e indica-se por P(A), o número $\frac{n(A)}{n(S)}$, onde $n(A)$ e $n(s)$ indicam os números de elementos de A e S, respectivamente. Isto é:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{números de casos "favoraveis"}}{\text{números de casos "possiveis"}}}$$

<u>OBS</u>: Esta é a definição clássica de probabilidade quando o espaço amostral é finito e baseia-se no conceito de resultados equiprováveis (têm a mesma chance de ocorrer).

2.2 FUNÇÃO DE PROBABILIDADE:

Uma função que associa a cada evento A sua probabilidade P(A), satisfazendo:
- $P(A) \geq 0$, para todo evento A.

- P(S) = 1 (o evento certo).

- Sendo B um novo evento, P(A ∪ B) = P(A) + P(B), se A e B são disjuntos (ou mutuamente excludentes).

2.3 PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DE PROBABILIDADE

i) $\boldsymbol{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$.Onde $\boldsymbol{\bar{A}}$ é complementar de A, isto é $\boldsymbol{\bar{A} = S - A}$.

<u>Demonstração:</u>

$\mathrm{A} \cup \bar{\mathrm{A}} = \mathrm{S}$

$\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{A}} = \emptyset$

$\Rightarrow \mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}) = \mathrm{P(S)} = 1$

$\Rightarrow \mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}) = 1$

$\Rightarrow \mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)}$

ii) $\mathbf{P(\emptyset) = 0}$.Onde vazio é o evento impossível.

<u>Demonstração:</u>

$\bar{\mathrm{S}} = \emptyset$

$\Rightarrow \mathrm{P}(\bar{\mathrm{S}}) = 1 - \mathrm{P(S)}$, por (i)

$\Rightarrow \mathrm{P}(\emptyset) = 1 - 1$

$\Rightarrow \mathrm{P}(\emptyset) = 0$

iii) $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$.

<u>Demonstração:</u>

Por axioma $P(A) \geq 0$;

Por (i) obtemos que:

$\mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}) = 1, \text{como } \mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}) \leq 0$

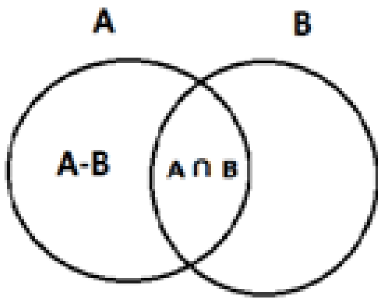
$\Rightarrow \qquad \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq \mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}) \leq 1.$

iv)$\mathbf{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)}$.

<u>Demonstração</u>:

Utilizaremos operações com conjunto.



$A - B$ e $A \cap B$ são dois conjuntos disjunto então:

$P[(A - B) \cup (A \cap B)] = P(A - B) + P(A \cap B),$

como $(A - B) \cup (A \cap B) = A,$ temos:

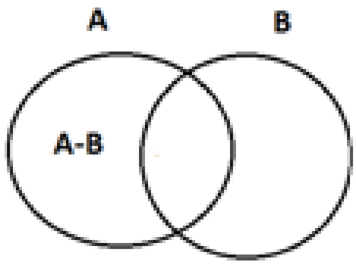
$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B),$ daí

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

v) $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$, ocorre quando A e B não são disjunto.

<u>Demonstração:</u>

Utilizaremos operações com conjunto.



$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$, por (iv) temos:

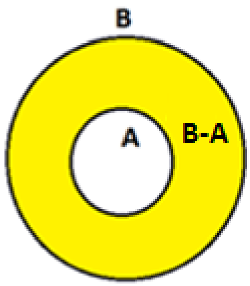
$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$, isto é

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

vi) $\boldsymbol{Se\ A \subset B\ então\ P(A) \leq P(B)}$.

<u>Demonstração:</u>

Utilizaremos a demonstração operações com conjunto.



$B = A \cup (B - A)$

$P(B) = P(A) + P(B - A)$

$\Rightarrow P(A - B) \leq 0$

$\Rightarrow P(A) \leq P(B)$

2.4 MODELO EQUIPROVÁVEL

Modelo equiprovável é modelo probabilístico que atribui probabilidade $\frac{1}{n}$ a cada evento unitário de um espaço amostral:

$$S = \{a_1, a_2, a_3 \ldots \ldots, a_n\}$$

Em conseqüência, a probabilidade de um evento A, sendo p > n.

$$A=\{a_1,a_2,a_3\ldots\ldots,a_p\} \text{ é}$$

$$P(A)=P(\{a_1\})+P(\{a_2\})+\ldots\ldots+P(\{a_p\})$$

$$P(A) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots. + \frac{1}{n}$$

$$P(A) = \frac{1}{n}$$

$$P(A) = \frac{P}{n}$$

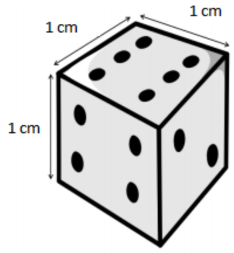
Portanto:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{números de casos "favoraveis"}}{\text{números de casos "possiveis"}}$$

Nos problemas mais interessantes, técnicas de Análise Combinatória são usadas para calcular o numerador e o denominador.

Atenção: O uso de modelos equiprovável isso se justifica quando algum tipo de simetria permite concluir que os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer, com os dados, moedas, cartas, bolas iguais em urnas, etc.

Exemplo 1 (PROFMAT-IMPA): Qual é o modelo probabilístico adequado para o lançamento de um dado? Qual é a probabilidade de que saia um resultado par?



O espaço amostral é S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Se o dado é um cubo geometricamente perfeito e feito com material homogêneo (um dado equilibrado ou honesto), não ha razão para acreditar que uma face saia mais freqüentemente que qualquer outra. O modelo razoável é o **equiprovável**, que atribui probabilidades iguais aos eventos correspondentes à ocorrência de cada face, isto é:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

O evento "sair resultado par" corresponde ao subconjunto A = {2, 4, 6} de S. Sua probabilidade é:

Solução 1:

$$P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\})$$

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

Solução2:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2 (PROFMAT-IMPA): Duas bolas são retiradas seguidamente e sem reposição de uma urna com 3 bolas brancas e 5 pretas, todas idênticas, a menos da cor. Qual é a probabilidade de que a primeira seja branca e a segunda preta?

Há quatro possibilidades para a cor das bolas: BB, BP, PB e PP (espaço amostral). Dos quatro casos possíveis, apenas um é favorável, isto é o evento (BP). Logo, a probabilidade deste evento acontecer é $\frac{1}{4}$.

A solução acima está ERRADA!

Não há qualquer razão para admitirmos, por exemplo, que a probabilidade de tirar duas bolas brancas seja a mesma que a de tirar duas bolas pretas, já que já mais bolas pretas do que brancas na urna.

Solução Correta:

A urna contem oito bolas sendo 3 branca e 5 pretas,nesta solução vamos considerar todas distintas,então o espaço amostral adequado é o que considera a combinação de oito bolas escolhendo-se duas a duas:

$$S = \begin{Bmatrix} (p_1,p_2),(p_1,p_3),(p_1,p_4),(p_1,p_5),(p_2,p_1),(p_2,p_3),(p_2,p_4),(p_2,p_5),(p_3,p_1), \\ (p_3,p_2),(p_3,p_4),(p_3,p_5),(p_4,p_1),(p_4,p_2),(p_4,p_3),(p_4,p_5),(p_5,p_1),(p_5,p_2), \\ (p_5,p_3),(p_5,p_4),(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_2,b_1),(b_2,b_3),(b_3,b_1),(b_3,b_2),(p_1,b_1), \\ (p_1,b_2),(p_1,b_3),(p_2,b_1),(p_2,b_2),(p_2,b_3),(p_3,b_1),(p_3,b_2),(p_3,b_3),(p_4,b_1), \\ (p_4,b_2),(p_4,b_3),(p_5,b_1),(p_5,b_2),(p_5,b_3),(b_1,p_1),(b_1,p_2),(b_1,p_3),(b_1,p_4), \\ (b_1,p_5),(b_1,p_1),(b_1,p_2),(b_2,p_3),(b_1,p_4),(b_2,p_1),(b_2,p_2),(b_2,p_3),(b_2,p_4), \\ (b_2,p_5),(b_3,p_1),(b_2,p_2),(b_2,p_3),(b_2,p_4),(b_2,p_5). \end{Bmatrix}$$

O número casos possíveis n (S)= 56 .

Como queremos a probabilidade de 1º ser branca e a 2º ser preta (esse será o evento que chamaremos A teremos:

$$A = \begin{Bmatrix} (b_1,p_1),(b_1,p_2),(b_1,p_3),(b_1,p_4),(b_1,p_5),(b_1,p_1),(b_1,p_2),(b_2,p_3), \\ (b_1,p_4),(b_2,p_1),(b_2,p_2),(b_2,p_3),(b_2,p_4),(b_2,p_5),(b_3,p_1),(b_2,p_2), \\ (b_2,p_3),(b_2,p_4),(b_2,p_5). \end{Bmatrix}$$

O número de casos prováveis n (A) = 15

A probabilidade do evento A acontecer é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{15}{56}$$

$$P(A) = 0{,}268$$

Solução 2:

O espaço amostral adequado é o que considera que há oito bolasb1, b2, . . . , b8 na urna e considera todos os possíveis pares (bi, bj), sendo i≠j ≥ 8 de bolas distintas retiradas.

Como todas as bolas são idênticas, todos os pares possíveis têm a mesma chance de ocorrer (um modelo equiprovável!). Número de casos possíveis:

A primeira bola pode ser qualquer uma das 8.

A segunda pode ser qualquer uma das outras 7.

O número de casos possíveis é 8 × 7 = 56.

Número de casos favoráveis:

A primeira bola pode ser qualquer uma das 3 bolas brancas.

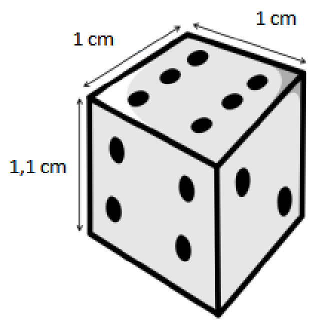
A segunda pode ser qualquer uma das 5 bolas pretas.

O número de casos favoráveis é 3 × 5 = 15.

A probabilidade é $\frac{15}{56} = 0{,}268$.

E se um modelo equiprovável não for adequado?

Exemplo 3 (PROFMAT-IMPA): Um dado tem a forma de um bloco retangular com as dimensões da figura abaixo. Qual é a probabilidade de sair a face 1?



Solução:

Como não há simetria perfeita, não é correto usar um modelo equiprovável. O que acontecer com esse dado e que por experimento ele ocorre com mais frequencia o número 1 e 6.

Observação:

Em um dado usual a soma das faces oposta tem que ser igual a 7 então temos que:

-A face que tem o número 1 é oposta face que tem número 6;

-A face que tem o número 2 é oposta face que tem número 5;

-A face que tem o número 3 é oposta face que tem número 4.

A simetria restante na figura permite escrever (utilizando as propriedades de probabilidade):

$$P(\{1\}) = P(\{6\}) = p$$

$$P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = \frac{1-2p}{4}$$

Para descobrir qual o valor de p, a única forma razoável e fazendo um experimento e verificando qual é a ocorrência das diversas faces, o valor de p pode ser estimado a partir das frequências de ocorrência das diversas faces (é o papel da Estatística).

2.5 NOÇÕES DE PROBABILIDADE CONDICIONAL

Introduziremos o conceito de probabilidade condicional através do seguinte exemplo: Considere o lançamento de um dado.

Ω ={1, 2, 3, 4, 5, 6) (6 resultados possíveis)

Seja o evento **A**= {sair face 4},

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} = 0{,}167.$$

Para entender o problema de probabilidade condicional, suponha que embora não possamos ver o dado, alguém diga que o resultado é um número par. Neste caso, qual é a probabilidade de **A** ocorrer ? Isto é, sabendo que saiu um número par, qual a probabilidade de **A** ocorrer ?

Teremos agora um novo espaço amostral, isto é:

π ={ 2, 4,6} (3 resultados possíveis)

Seja o evento **A**= {sair face 4},

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{1}{3} = 0{,}3333$$

Assim, a informação de que o valor ocorrido é um número par afeta a probabilidade de ocorrer o evento A, e o valor 0,3333 é chamado de probabilidade condicional, uma vez que ela é calculada sob a condição de que o valor na face do dado é um número par.

Notação: P(A|B) (lê-se, probabilidade de ocorrer o evento A, sabendo-se (dado) que o evento B já ocorreu.

Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Definimos Probabilidade Condicional de A dado que B ocorre (A|B) como segue:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ se } P(B) \neq 0$$

Ou, de forma análoga

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ se } P(A) \neq 0$$

Sabemos que $P(A \cap B)$, a probabilidade da intersecção, é a razão do seu número de elementos, pelo número de elementos do espaço amostral:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

A probabilidade de B também é a razão do seu número de elementos, para o número de elementos do espaço amostral:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

Os substituindo na fórmula original temos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \Big/ \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$\boxed{\Rightarrow P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}}$$

<u>Exemplo 4 (Enem -2010)</u>: Para verificar e analisar o grau de eficiência de um teste que poderia ajudar no retrocesso de uma doença numa comunidade, uma equipe de biólogos aplicou-o em um grupo de 500 ratos, para detectar a presença dessa doença. Porém, o teste não é totalmente eficaz, podendo existir ratos saudáveis com resultado positivo e ratos doentes com resultados negativo. Sabe-se ainda, que 100 ratos possuem a doença, 20 ratos são saudáveis com resultado positivo e 40 ratos são doentes com resultado negativo. Um rato foi escolhido ao acaso, e verificou-se que o seu resultado deu negativo. Qual a probabilidade de esse rato ser saudável?

Solução:

Vamos representar os ratos da seguinte maneira:

DP = rato doente com resultado positivo;

DN= rato doente com resultado negativo;

SP = rato saudável com resultado positivo;

SN= rato saudável com resultado negativo.

Sabe-se que 100 ratos são doentes e dentre esses, 40 são doentes com resultado negativo, então concluímos que 60 ratos são doentes com resultado positivo. A seguir, determinaremos o total de ratos saudáveis cujo resultado do teste deu negativo. Sabemos que foi aplicado esse teste em 500 ratos, então:

Total= DP + DN + SP + SN

$\Leftrightarrow 500 = 60 + 40 + 20 + SN$

$\Leftrightarrow SN = 380$

	Resultado Positivo	Resultado Negativo
Ratos Doentes	60	40
Ratos Saudáveis	20	380

Agora vamos determinar a probabilidade de esse rato ser saudável sabendo que o resultado deu negativo, onde:

$n(N) = 420$ e $n(S \cap N) = 380$

$$P(S/N) = \frac{n(S \cap N)}{n(N)}$$

$$P(S/N) = \frac{380}{420}$$

$$P(S/N) = \frac{19}{21}$$

Definição 2.6

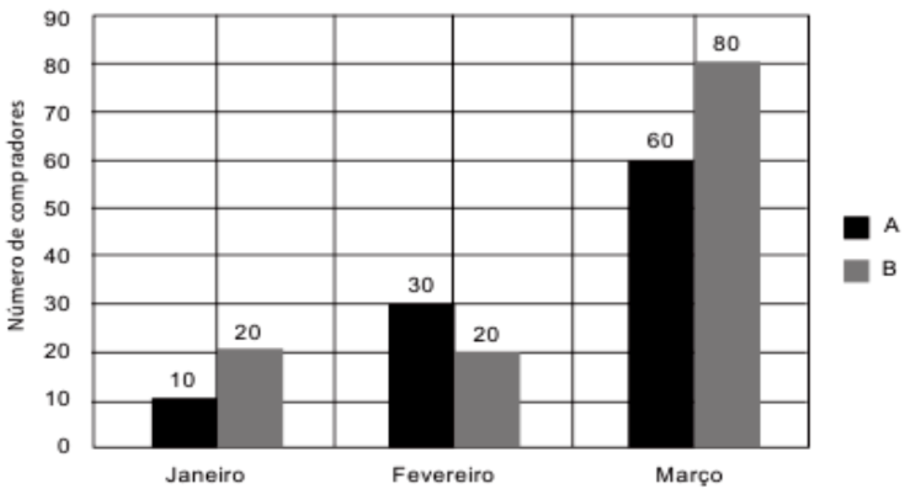
Dois eventos são independentes, se a informação da ocorrência ou não de um não altera a probabilidade da ocorrência de outro. Isto é:

$$P(A/B) = P(A).\ P(B) > 0$$

ou

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$$

Exemplo 5 (Enem-2013): Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos,e durante os meses de janeiro,fevereiro e março de 2012.Com isso,obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de?

Solução

Note que a escolha do sorteado que comprou o produto A, não influenciará na escolha do sorteado do produto B, ou seja, a ocorrência ou não de B não altera a probabilidade da ocorrência de A, assim como a ocorrência de também A não altera a de B. Vamos agora determinar a probabilidade dos sorteados terem comprados os produtos no mês de fevereiro e depois utilizaremos a regra do produto de probabilidades.

Chamando de A o sorteado no mês de fevereiro do produto A, vamos calcular a probabilidade do mesmo, onde e n(A) =30 e n(S) =100, logo

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{30}{100}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{10}$$

Agora denominamos de B o sorteado no mês de fevereiro do produto B, vamos calcular a probabilidade do mesmo, onde n (B) = 20 e n (S*) =120, logo:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S^*)}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{20}{120}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{6}$$

Então, aplicando o produto de probabilidades, encontraremos a probabilidade dos sorteados terem comprado os produtos no mês de fevereiro, logo:

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{10} . \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{60}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}05$$

2.6 TEOREMA DE BAYES

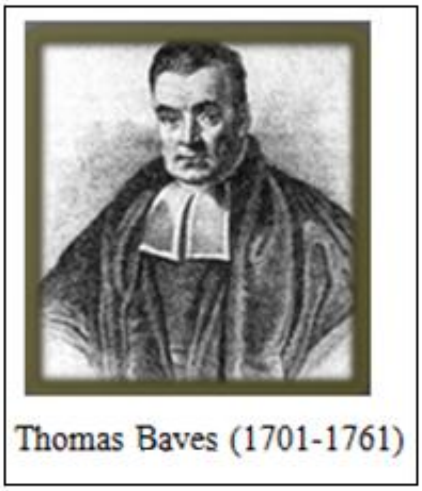


Figura 3- Os Idealizadores da Probabilidade.
Fonte: www.wikipedia.com.br

Thomas Bayes foi um pastor presbiteriano e matemático, conhecido por ter formulado o caso especial do teorema de Bayes.

Bayes foi eleito membro da Royal Society em 1742. Nasceu em Londres e faleceu em Tunbridge Wells, Kent. Foi enterrado no Bunhill Fields Cemetery em Londres. Basicamente o Teorema de Bayes é uma formula matemática usada para calcular probabilidades condicionais, Com base na definição de probabilidade condicional e na partição do espaço amostral considerada anteriormente, pode-se estabelecer um resultado bastante útil, geralmente conhecido como Teorema de Bayes, o qual será apresentado agora:

Sejam A e B dois eventos arbitrários com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$. Então:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$\text{temos que } P(A/B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(B \cap A) = P(A/B).P(B), \text{então :}$$

$$\boxed{\Rightarrow P(B/A) = \frac{P(A/B).P(B)}{P(A)}}$$

<u>Exemplo 6:</u> Determinado veículo pode ter problemas mecânicos ou elétricos. Se ele tiver problemas mecânicos, não para, mas se tiver problema elétrico tem de parar imediatamente. A chance de esse veículo ter problemas mecânicos é de 0,2. Já a chance do mesmo veículo ter problemas elétricos é de 0,15 se não houve problema mecânico precedente, e de 0,25 se houve problema mecânico precedente. Agora, calcule:

a) Qual é a probabilidade de o veículo parar em determinado dia?

b) Se o veículo parou em certo dia, qual a chance de que tenha havido defeito mecânico?

c) Qual é a probabilidade de que tenha havido defeito mecânico em determinado dia se o veículo não parou nesse dia?

<u>Solução:</u>

Considere os eventos:

M= ter problema mecânico

$\overline{M}$ = não ter problemas mecânicos.

E = ter problema elétrico

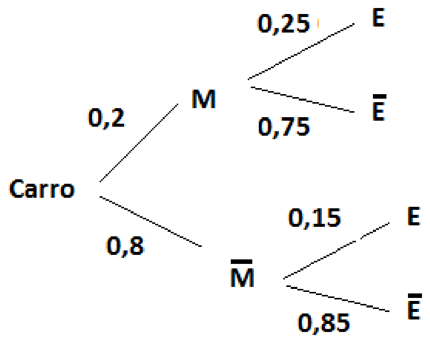
$\overline{E}$ = não ter problemas elétrico.

São dadas as informações:

P(M) = 0,2

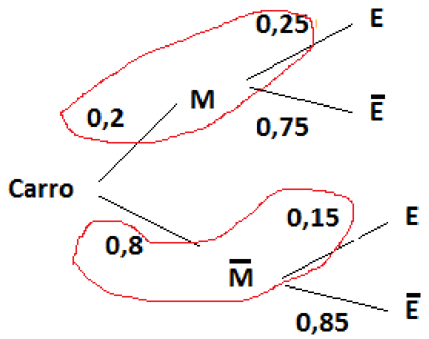
P(E/ $\overline{M}$) = 0,15

P(E/M)-0,25



Vamos verificar cada um dos itens:

a) O veículo somente vai parar se tiver problema elétrico. Então, precisamos calcular a Probabilidade Total de ocorrer defeito elétrico, independentemente de ter havido ou não defeito mecânico.



Isto é:

$$P(E) = P(M).P(E/M) + P(\overline{M}).\ P(E/\overline{M})$$
$$P(E) = 0{,}2.\ 0{,}25 + 0{,}8.\ 0{,}15$$
$$P(E) = 0{,}05 + 0{,}12$$
$$P(E) = 0{,}17$$

b) Devemos calcular a probabilidade de ter havido defeito mecânico condicionada ao fato de sabermos que o veículo parou (lembre-se que o veículo para quando há defeito elétrico). Isso é feito por meio do Teorema de Bayes.

$$P(M/E) = \frac{P(M).\ P(E/M)}{P(E)}$$

$$P(M/E) = \frac{0{,}2.\ 0{,}25}{0{,}17}$$
$$P(M/E) = 0{,}294$$

c) Mais uma vez, vamos utilizar o Teorema de Bayes para calcular a probabilidade de que tenha havido problema mecânico, dado que não houve defeito elétrico.

$$P(M/\overline{E}) = \frac{P(M).\ P(\overline{E}/M)}{P(\overline{E})}$$

A probabilidade de não haver defeito elétrico é dada pela propriedade do evento complementar:

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

$$P(\overline{E}) = 1 - 0,17$$

$$P(\overline{E}) = 0,83$$

Agora vamos calcular a probabilidade de não haver defeito elétrico, dado que houve defeito mecânico = $P(\overline{E}/M)$. Considerando o espaço amostral de todos os eventos que podem ocorrer, dado que houve defeito mecânico, sabemos que a chance de haver defeito elétrico é P(E|M) = 0,25. A chance de não haver defeito elétrico será, portanto, o complementar do evento E em relação a este espaço amostral.

$$P(\overline{E}/M) = 1 - P(E|M)$$

$$P(\overline{E}/M) = 1 - 0,25$$

$$P(\overline{E}/M) = 0,75$$

Substituindo na expressão do Teorema de Bayes, temos:

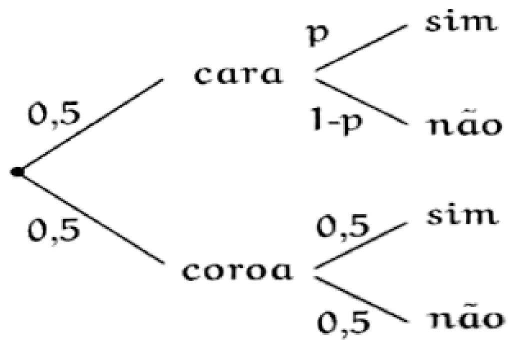
$$P(M/\overline{E}) = \frac{P(M).\ P(\overline{E}/M)}{P(\overline{E})}$$

$$P(M/\overline{E}) = \frac{0{,}2.\ 0{,}75}{0{,}83}$$

$$P(M/\overline{E}) = 0{,}181$$

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Exemplo 7 (PROFMAT-IMPA): Para estimar a proporção p de usuários de drogas em certa comunidade, pede-se ao entrevistado que jogue uma moeda: se o resultado for cara, responda a “você usa drogas?” e, se o resultado for coroa, responda a “sua idade é um número par?”. Assim, caso o entrevistado diga sim, o entrevistador não saberá se ele é um usuário de drogas ou se apenas tem idade par. Se 30% dos entrevistados responderem sim, qual é o valor estimado p?



$\Rightarrow S = P(Sim) = 0{,}5.\,P + 0{,}5.\,0{,}5$

$\Rightarrow$ Daí, $P = 2S - 0{,}5$

$\Rightarrow P = 2 \times 0{,}3$

$\Rightarrow P = 0{,}1$

Concluído o referencial teórico iniciou-se a aplicação de atividades práticas, descrevendo as atividades desenvolvidas, os materiais empregados, a avaliação do conteúdo aplicada aos alunos e um questionário em que eles puderam responder e avaliar a prática utilizada.

3 METODOLOGIA

3.1 DELINEAMENTO DA PESQUISA

O trabalho foi realizado com um grupo de 33 alunos da turma de 2016 do 2º Ano do turno da manhã, da Escola Estadual Prof.ª Maria Carmelita do Carmo (figura 4) localizada na Rua Barão de Mauá n° 345 no Bairro Buritizal na cidade Macapá-AP.

Figura 5 – Escola Estadual Prof.ª Maria Carmelita do Carmo-2016
Fonte: Acervo Pessoal

Dependências

Segundo Senso 2015, a escola possui: 14 salas de aulas; 134 funcionários, sala de diretoria; sala da secretaria, sala de professor; biblioteca; auditório; banheiros; refeitório; laboratório de informática; laboratório de ciências; sala de recursos multifuncional para atendimento educacional especializado (AEE);quadra de esporte coberta, área verde e pátio coberto.

Equipamentos:

- Computadores administrativos; Computadores para alunos; Tv; Copiadora; equipamento de som; impressora; equipamentos multimídias; Dvd; antena parabólica e data show .

3.2 PERFIL DA TURMA

A pesquisa desenvolvida compreende uma amostra de 33 alunos do 2º ano do Ensino Médio do turno da manhã, sendo 23 sexos femininos e 10 do sexo masculino (figura 5). A turma é tranquila e tem bom relacionamento uns com os outros, no geral gostam de realizar as atividades. No entanto apresenta uma grande diversidade em relação aos conhecimentos prévios em Matemática, ou seja, alguns alunos ainda apresentam certas dificuldades com conteúdo das séries anteriores. Esta turma é, em sua maioria, composta por adolescentes entre 14 a 17 anos que a ainda mora com seus pais e não está inserido no mercado de trabalho.

A atividade foi realizada nos dias 17 outubro de 2016 á 17 de novembro 2016.

Figura 6 - Turma do 2º ano da manha E.E. Prof.ª Maria Carmelita Carmo
Fonte: Acervo Pessoal

3.3 EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA

No primeiro momento foi utilizado um questionário para determinar o nível de conhecimento dos alunos sobre o assunto, com nove questões de múltipla escolha, adaptado do projeto de José Marcos Lopes, João Vitor Teodoro e Josiane de Carvalho Rezende em jul 2011 no trabalho “Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio” neste questionário envolveu conceitos básicos de probabilidade. Optando por questões de múltiplaescolha, por favorecerem uma análise mais objetiva dos resultados do teste aplicado e facilitarem a comparação entre porcentagens de acertos. O número de alternativas em cada questão varia de três a cinco, sendo uma delas “não sei”. As questões foram organizadas num nível crescente de dificuldades: as primeiras apresentam noções básicas de probabilidade; conceito de probabilidade condicional; e a última é uma questão conceitual. O Teste de Nivelamento aplicado aos alunos foi o seguinte:

E.E.E.F.M Prof Maria Carmelita do Carmo

Prof: Flávia Hernan e Andre Beltrão

Atividade de Nivelamento

1. No lançamento de um dado honesto teremos mais chances em obter a face 2 do que a face 5?

( ) Sim ( ) Não ( ) Não sei

2. No lançamento de uma moeda honesta a probabilidade de sair cara é iguala $\frac{1}{2}$?

( ) Sim ( ) Não ( ) Não sei

3. É mais provável obter cara, no lançamento de uma moeda honesta, do que a face 1, no lançamento de um dado honesto?

( ) Sim ( ) Não ( ) Não sei

4. É mais provável ocorrer faces iguais, no lançamento de duas moedas, do que faces iguais no lançamento de dois dados?

( ) Sim ( ) Não ( ) Não sei

5. Retirando-se ao acaso uma carta de um baralho com 52 cartas, é mais provável retirar um rei do que um ás?

( ) Sim ( ) Não ( ) Não sei

6. Numa primeira caixa existem dez bolas, sendo cinco pretas e cinco brancas. Numa segunda caixa existem seis bolas, sendo quatro pretas e duas brancas. Um jogo consiste em retirar ao acaso uma única bola de uma das duas caixas. Vence o jogo quem retirar uma bola preta. Você teria mais chance de vencer o jogo se escolhesse a:

( ) primeira caixa;

( ) segunda caixa;

( ) qualquer uma das duas;

( ) Não sei.

7. Numa caixa existem cinco papeis numerados de 1 a 5. Serão retirados sucessivamente dois papeizinhos da caixa, sem reposição do primeiro. Sabendo-se que o primeiro número sorteado foi ímpar, é mais provável que o segundo número sorteado seja par 93Zetetiké – FE/Unicamp – v. 19, n. 36 –jul/dez 2011.

( ) sim ( ) não ( ) não sei

8. Considere uma família com duas crianças, sendo que uma delas é menino. Qual é a probabilidade de que ambos sejam meninos?

( ) 50%

( ) 33,3%

( ) 25%

( ) Não sei.

9.Como você definiria o que é probabilidade?

( ) É a parte da Estatística que estuda fenômenos determinísticos.

( ) É a ciência que cuida da análise e da interpretação de dados experimentais.

( ) É um número entre 0 e 1 que mede a possibilidade de que um certo evento aconteça.

( ) É um número entre 0% e 100% que serve para medir a nossa sorte.

( ) Não sei.

Gabarito:

1.Não

2.Sim

3.Sim

4.Sim

5.Não

6.Segunda caixa

7.Não

8. 33,3%

9. É a ciência que cuida da análise e da interpretação de dados experimentais

Foi explicado aos alunos (figura 6), que se tratava de um projeto de pesquisa e seria importante que respondessem com atenção, Além de utilizar os resultados do pré-teste como forma de análise da metodologia aplicada, o objetivo foi verificar os conhecimentos prévios e a intuição dos alunos em relação a problemas de probabilidade.

Figura 7 - Turma do 2º ano da manhã fazendo teste nivelamento
Fonte: Acervo Pessoal

Após a aplicação do pré-teste, foram desenvolvidas as aulas semanais de Matemática que ocorreram no horário de 08h45min as 09h30min na segunda e 07h30min as 08h45min na quarta feira.

3.4 DESENVOLVIMENTO DA METODOLOGIA

- Aula 1 (1 hora aula):

Iniciou a aula com entrega de uma apostila, para os alunos participantes (figura 7), contendo o material apresentado no capitulo 2 desta dissertação:Noções de Probabilidade.Foi solicitado que cada aluno fizesse a leitura e após a mesma foram desenvolvidos estes conceitos com alguns exemplos como aplicação.

Figura 8–aluno fazendo a leitura da apostila de Probabilidade.
Fonte: Acervo Pessoal

- Aula 2 (2 horas aulas):

Inicia-se a aula com apresentação de vídeo (figura 8), seguido de explicações do assunto abordado.

Figura 9 - Turma do 2º ano da manhã assistindo ao vídeo.
Fonte: Acervo Pessoal

Tema do Vídeo 1 :Coisa de passarinho; Série: Matemática na Escola-UNICAMP, A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do Ensino Médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático; além disso, pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Conteúdos: Probabilidade, Frequências relativas.

Duração: Aprox. 10 minutos.

Objetivos:

1. Introduzir o conceito de probabilidade;
2. Apresentar a interpretação frequêntista de probabilidade;
3. Definir experimentos equiprováveis.

Sinopse: Caio se acha um rapaz sem sorte. Através de uma conversa com o pai, é abordado o conceito de probabilidade de um evento e sua importância em previsão de fenômenos aleatórios.

Após o vídeo, foi comentado o conceito e as propriedades de probabilidade e fizemos algumas aplicações com os exemplos 1, 2 e 3 da apostila. Dispomos também uma lista com vinte dois exercícios com atividade de fixação

AULA 3 (1 HORA AULA):

Resolução de atividades 1,3,5,7,9,11,13,15 e 21 da lista de exercício (anexo I) dando explicações e tirando duvidas.

AULA 4 (2 HORAS AULAS):

Aula prática nº 01.

a) Material utilizado:

-6 bolas de isopor de mesmo tamanho e massa, sendo 4 brancas (numeradas de 1 a 4) e 2 pretas (numeradas de 1 a 2);

-1 sacola para colocar as bolas

-30 cartões contendo uma combinação de duas bolas

-Caixa de bombons

b) Regras:

- Cada aluno deve receber apenas uma cartela contendo uma combinação de duas bolas;

- As bolas (numeradas) devem ser sorteadas uma a uma, aleatoriamente e sem reposição;

- Os alunos devem observar as bolas sorteadas na ordem;

- O vencedor é o aluno que tiver a cartela com as bolas sorteadas e ganhará um bombom.

c) Encaminhamento:

As regras foram apresentadas aos alunos. As cartelas entregues e, na presença deles, foram colocadas as 6 bolas dentro da sacola. Antes da retirada das bolas, foi apresentando oralmente alguns questionamentos:

-Qual o espaço amostral deste jogo?

-Qual a probabilidade de um de vocês seja sorteado?

-Trata-se de um experimento aleatório ou determinístico?

-Trata-se de um experimento equiprovável?

Após os questionamentos os alunos colaboraram no sorteio de bolas (figura 9),Com esta atividade foram explorados os conceitos de experimentos aleatórios, espaço amostral, evento, probabilidade simples e independência de eventos.

Figura 10–Aluna do 2º ano fazendo o sorteio.
Fonte: Acervo Pessoal

AULA 5 (2 HORAS AULAS):

Iniciou-se a probabilidade condicional com vídeo.

Tema do Vídeo 2: Cara ou coroa

Série: Matemática na Escola

Conteúdos: Probabilidade; Combinação; Problema dos pontos; História da Matemática.

Duração: Aprox. 10 minutos.

Objetivos:

1. Mostrar um problema envolvendo conceitos de análise combinatória;

2. Apresentar as origens da teoria das probabilidades por meio da história de dois matemáticos.

Sinopse: Em um cenário fictício, Fermat e Pascal disputam um jogo de cara ou coroa. O sono toma conta de Fermat quase no fim do jogo e então se coloca a pergunta: como dividir o prêmio sem que o jogo tenha chegado ao fim? Eles iniciam então uma interessante discussão sobre essa questão, que ficou conhecida posteriormente como o Problema dos Pontos.

Após o vídeo, foi comentado o conceito de probabilidade condicional e foi realizada algumas aplicações com os exemplos 4, 5,6 e 7 da apostila . Dispomos também de exercício fixação (anexo I) entregue na aula anterior.

AULA 6 (2 HORAS AULAS):

Foi feita a resolução de atividades dando explicações e tirando dúvidas. Nesta aula houve uma atividade práticas nº02 de probabilidade condicional:

a) Material utilizado:

-Um jogo de baralho (retirado coringas, valetes, damas e reis)

-Cartão contendo duas perguntas cada um;

b) Regras:

Para estimar a proporção **p** de alunos que são usuários de drogas na turma do 2º ano da manha da EEEM Carmelita, pede-se ao entrevistador distribua para:

- Cada aluno um cartão contendo as seguintes perguntas:

1º) Você consome algum tipo de droga ilícita? (Carta for par)
2º) Sua idade é um número par?"(Carta for impar);
( ) Sim   (   ) Não

- Depois será misturado um baralho (40 cartas), pois foi retirado o valete, dama, rei e coringa e distribuída uma carta aleatória para cada aluno.

-Ao olha a carta o aluno respondera um das questões conforme estiver indicado no cartão, isto é se a carta recebida for par (2,4,6,8 e 10 de qualquer naipe) ele responde a 1º pergunta e se a carta for impar (1,3,5,7 e 9 de qualquer naipe) ele responde a 2º pergunta.Assim, caso o entrevistado diga sim, o entrevistador não saberá se ele é um usuário de drogas ou se apenas tem idade par, portanto o entrevistado não terá intimidação em responder a verdade.

c) Encaminhamento:

As regras foram apresentadas aos alunos. A cartela foi entregue e distribuída uma carta para cada aluno e só após o último aluno receber a sua carta eles foram autorizados a olhar a carta e responder o cartão;

AULA7 (1 HORA AULA):

Foi passado o mesmo teste (nivelamento) para aferir os conhecimentos adquiridos pelos alunos.

4 RESULTADOS DA PESQUISA

Na atividade pratica nº 01 (do jogo de bolas) a maioria dos alunos respondeu as questões orais corretamente, observou-se que tiveram mais dificuldade em definir o espaço amostral. Outro questionamento nesta atividade foi levantado: Se as bolas brancas e pretas não fossem numeradas, qual a probabilidade do vencedor seja o aluno que tem a cartela com 1ª bola preta e a 2ª bola branca? Nessa questão os alunos tiveram muitas duvidas, pois observaram que teriam mais de um vencedor, porem depois conseguiram montar a probabilidade pedida. Os discentes compreenderam que em uma atividade com elementos semelhantes fica mais fácil resolver a questão se identificá-los cada elemento de maneira diferente. Outra observação importante foi que tinha sobrado duas cartelas, dei pra aluna que estava na minha frente e perguntei: ”Qual a probabilidade agora dessa aluna ser sorteada?” e “Esse experimento é equiprovável?” Depois de observarem que a colega tinha duas cartelas a mais, constataram que ela teria mais chance de ganhar e concluíram que aquele experimento não era equiprovável, a resposta da maioria foi correta, foi feito mais dois sorteio, porém a aluna que tinha três cartelas não foi vencedora, perguntei a turma “não era ela pra ganhar, pois a probabilidade de ela ganhar era maior de que qualquer um de vocês?” Alguns alunos se lembraram do vídeo (cara e cora) e responderam “teria quer ser muitos lançamento e então ela seria vencedora mais vezes”. Os questionamentos foram conduzidos de modo a levar os alunos a perceberem que cada um deles possuía uma cartela com números distintos de bolas dos demais alunos, levando-os a perceberem, que para que fossem considerados vencedores seria necessário que as bolas sorteadas estivessem em sua cartela, e assim foi-se construindo, conjuntamente, o conceito de evento, espaço amostra e probabilidade. Houve participação dos alunos e se mostraram bastante interesse nessa atividade.

Na atividade pratica nº 02, depois de recolhidos os cartões iniciamos a contagem da resposta e anotado no quadro os valores correspondentes. Após colocar os dados no quadro os alunos perceberam que era uma probabilidade condicional efetuaram as contas, tiveram dificuldade em resolver os cálculos, pois se tratava de multiplicação e divisão de números decimais e discutimos os resultados. Assim como na atividade pratica nº 01 tivemos a participação de todos e interesse desses alunos para determinar a probabilidade da turma de ter contato com algum tipo de droga, após essa atividade foi feita discurso para os alunos terem cuidado com as drogas, pois é um caminho sem volta e foi feito um alerta para que nunca aceite nada de ninguém e saiba dizer não as drogas.

Em relação aos vídeos foram importantes para fixar os conteúdos, por serem de pequena duração não se tornou cansativo, os alunos tiveram dificuldade em entender o vídeo cara e coroa, o que já era esperado por se tratar de uma questão problema envolvendo analise combinatória. Pode-se observar que uso desse instrumento em sala de aula constitui uma importante metodologia, por proporcionar grande interação entre o aluno e o objeto de conhecimento, permite aproximar a matemática de situações vivenciadas cotidianamente, além de possibilitar momentos de descontração e socialização durante as aulas.

4.1 COMPARANDO OS RESULTADOS

Os procedimentos metodológicos para o levantamento de dado dos discentes do ensino médio serão determinados pelo caráter da pesquisa descritiva e qualitativa, que permite ao pesquisador estabelecer uma serie de relações novas entre seus registros e conclusões não se limitando apenas ao material coletado como sugere Minayo (1994). Através de um trabalho de cunho qualitativo, realizar-se-á pesquisa bibliográfica de aprofundamento no tema, sondagem diagnóstica através de técnicas de pesquisa documental e aplicação de questionário. A parte quantitativa da pesquisa receberá tratamento estatístico como suporte da análise qualitativa, e recorrer-se-á à metodologia da Análise de conteúdo quando necessária. A revisão bibliográfica será constante, bem como a pesquisa pela internet. Trabalhando conjuntamente as duas abordagens se torna, assim, complementar e abrem espaço para uma maior criatividade e intervenção do pesquisador com sua construção teórica. Usando como sugere Minayo (1994,p.21-22) as técnicas de entrevistas estruturadas com formulários previamente elaboradas.

Os dados serão coletados e registrados em ficha e os resultados serão organizados em tabelas e gráficos para melhor entendimento e visualização dos resultados. Como o número de alunos que responderam o pré e o pós-teste não foi igual, utilizamos, na sequência, as porcentagens de acertos por questão.

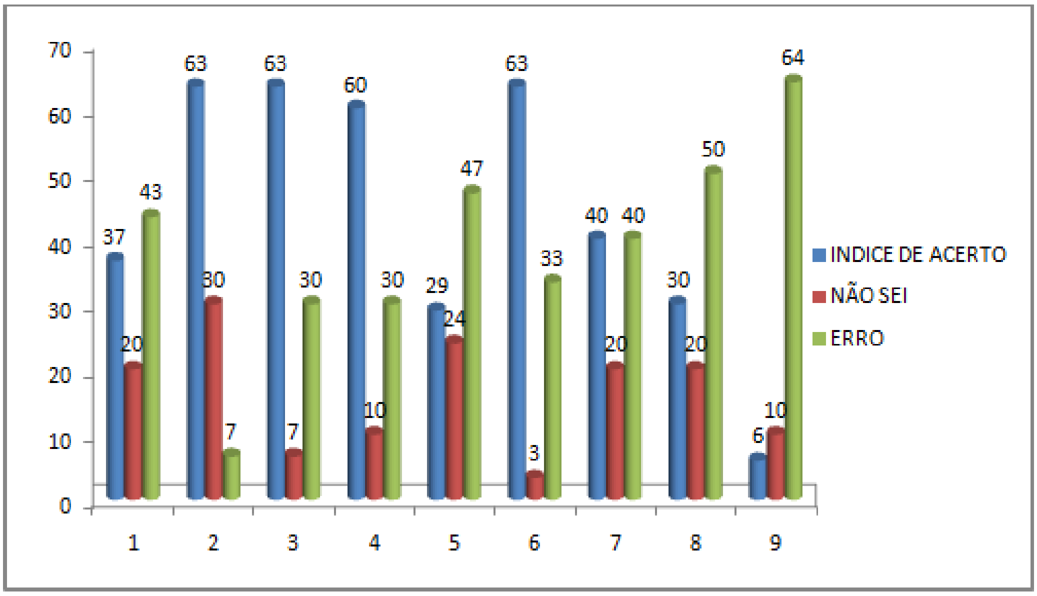


Figura 11 - Índice de acertos, erros e não sei no teste nivelamento

Fonte: Próprio Autor

Analisando a figura 10, pode contatar que os índice da questão 1 e 5, considerando as questões de nível fácil, teve um grande números de erros e não sei,comprovando que os alunos não conhecem o conceito de experimentos equiprováveis com mais de dois elementos no conjunto do espaço amostral,isso fica claro quando observamos os índices de acertos da questão 2 que teve um alto número de acerto por se tratar de um espaço amostral com dois elemento.

Nas questões 3 e 4 houve um grande número de acertos,pois se tratava de comparação de probabilidade de um dado com uma moeda, mostrando que os alunos já têm um conceito intuitivo de probabilidade,o mesmo acontecendo com a questão 6.

Em relação à probabilidade condicional observamos na questão 8 um alto índice de erro mostrando que a maioria não tem noção de probabilidade condicional.

Na questão 9 tivemos um grande índice de erro mostrando que os alunos não dominam o conceito formal de probabilidade.

Analisando os dados da turma observamos um índice de acerto de 45,7%,índice de erro 38,3% e não sei 16%.

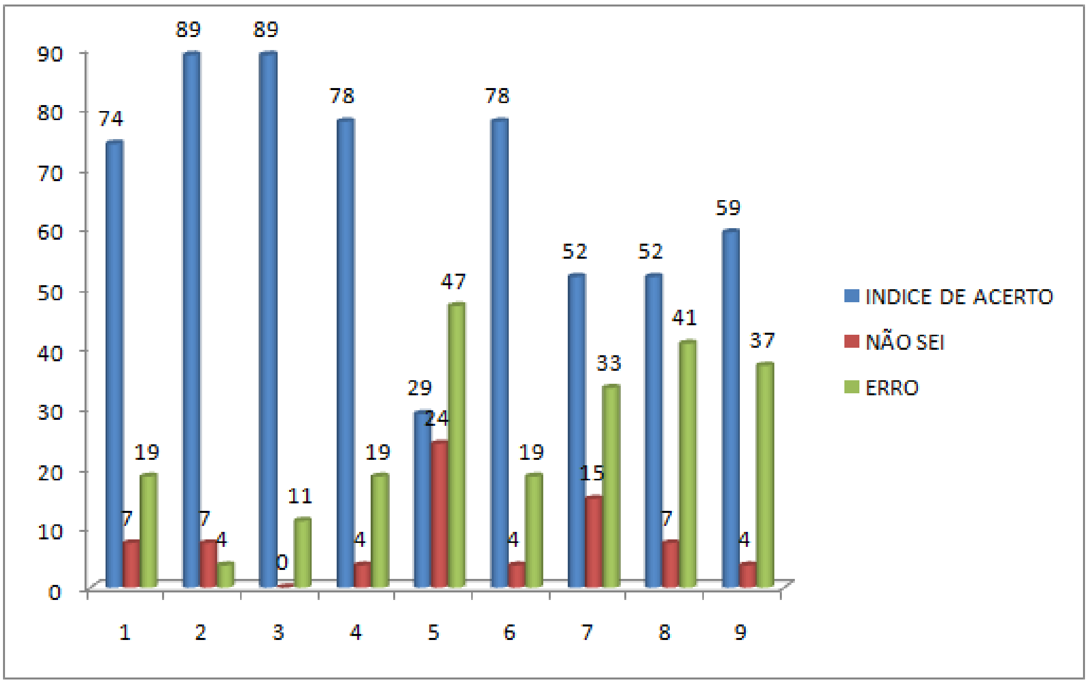


Figura 12- Índice de acertos, erros e não sei no pós-teste nivelamento
Fonte: Próprio Autor

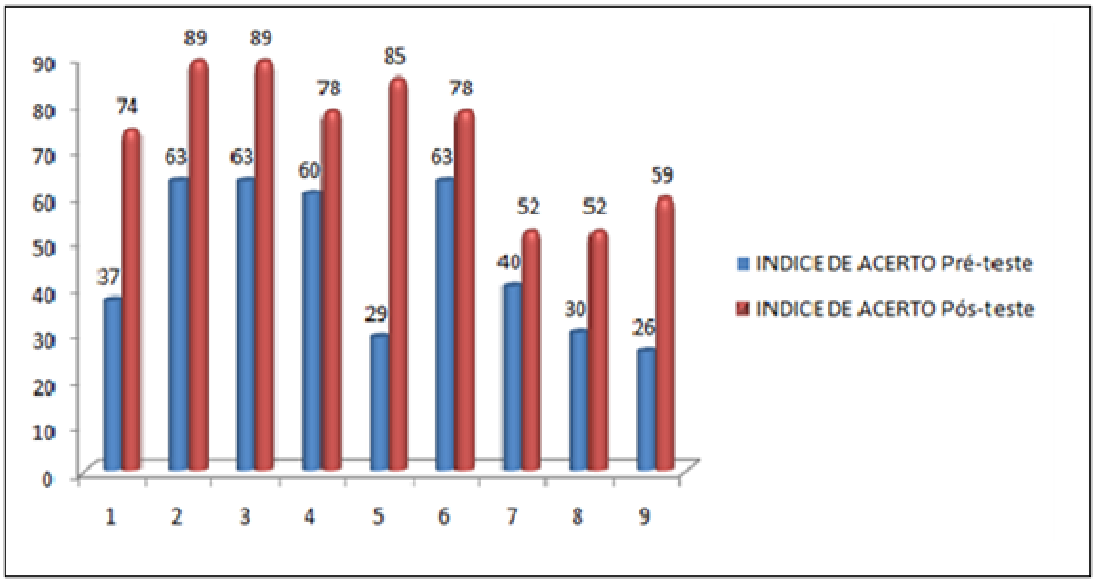


Figura13 – Comparação dos dados do índice de acerto do pré-teste e pós-teste
Fonte: Próprio Autor

Observando a figura 11 e 12, observou que as questões 1 e 5 do pós-teste da turma apresentaram o índice maior que 70% de acertos onde houve uma melhora significativa em relação ao pré-teste que teve o índice muito baixo (37% e 29% respectivamente),mostrando que houve um entendimento sobre o que seria um experimento equiprovável com número de elementos do espaço amostral maior que dois o que não aconteceu no pré-teste.Na questão 2

,como era esperado o índice de acerto foi um dos melhores com 89% de acerto,isso ocorreu pois se tratava de experimento equiprovável apenas com espaço amostral igual a dois e como no pré-teste tinha sido alto melhorou bastante.

Os menores índices de acertos ocorreram para a questão 8 (que era 30% no pré-teste, porem no pós-teste o índice foi para 52%) o que também já era esperado não ter aumentado mais,pois se tratava de probabilidade condicional e 9 (que era 26% porem no pós-teste o índice foi para 59%) surpreendeu pois esperava um maior indicie de acerto,pois se tratava de uma questão de conceito de probabilidade,isto mostre que apesar de todo o trabalho realizado ainda não ficou claro para os alunos o que probabilidade condicional e o conceito formal de probabilidade.

Analisando os dados da turma observamos um índice de acerto de 72%,índice de erro 21,8% e não sei 6,2%.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente texto teve como objetivo explorar uma proposta didática que integrasse a atividades prática a teoria, procurando mostrar que o ensino de probabilidade não é só uso de fórmulas, devendo ocorrer apenas no final das atividades, depois que o aluno assimilou o conceito matemático estudado. Nosso interesse foi desenvolver o raciocínio dedutivo do aluno. Para isso, realizou-se uma pesquisa bibliográfica acerca dos temas probabilidade e atividades em sala de aula a fim de se conseguir subsídios para elaboração e aplicação de tal proposta.

Os alunos se mostraram, particularmente, bastante interessados em resolver a atividades propostas, visto que apresentava uma situação que eles puderam relacionar a fatos do dia a dia. Pelos depoimentos dos alunos feitos em sala de aula, percebemos que houve nesses discentes um despertar para questões relacionadas à Probabilidade, conteúdo hoje indispensável para a formação plena do cidadão.

Percebeu-se que para o desenvolvimento do trabalho com uma nova proposta didática em sala de aula é necessário um maior preparo do professor, pois este, além de conhecer o conteúdo a ser ministrado, deve estar atento aos objetivos a serem alcançados, porém esse tipo de trabalho demanda muito tempo de planejamento e organização que às vezes esta fora da realidade do professor.

Ao inserir essas atividades sala de aula, os alunos demonstraram maior interesse pelas aulas, sendo que, os alunos pontuaram positivamente a proposta trabalhada, afirmando que o uso de atividades tornou as aulas mais dinâmicas e facilitou a compreensão do conteúdo explorado.

A partir da análise de desempenho dos alunos na Avaliação, pode-se perceber que, de modo geral, os alunos se familiarizam com os conceitos e procedimentos apresentados durante a realização das atividades proposta, isto pode ser comprovada pelos índices de acertos s que eram de 45,7% e passaram para 72%. No entanto, devido ao baixo desempenho nas questões 8 e 9, nota-se a necessidade de uma retomada destas questões, procurando descobrir o fator dificultador encontrados pelos alunos para resolução destas situações.

Há esperança é que este trabalho possa contribuir para uma abordagem mais ampla a respeito de probabilidade e suas aplicações e verificar a possibilidade de dar alternativas para as práticas pedagógicas dos professores de Matemática. Sendo assim, pode-se afirmar que novas metodologias pedagógicas podem ser usadas não só para o trabalho com probabilidade, mas também com outros conteúdos da disciplina de matemática.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

IDEB- Índice de desenvolvimento de educação básica, 2007-2015, Dados disponível em http://ideb.inep.gov.br/Site/.Acessado em maio de 2016.

NORONHA ,C. H., Editorial.**Boletim de Educação Matemática**.Rio Claro,vol. 24,num. 40,pg. 7-9,dezembro 2011.

MENDOZA, L.P.;SWIFT,J.Por que ensinar estatística e probabilidade.**Anuário Conselho Nacional de Professores de Matemática,**pg. 90-100,Brasília 1981.

BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Matemática.** São Paulo *1998.*

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO (MEC);Secretária do Ensino médio .**Parâmetro Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias** .Brasília 2000.

MORGADO, Augusto C. e CARVALHO, Paulo C. P**. Matemática Discreta**, ed.1ª,Editora SBM, Rio de Janeiro, 2014. (Coleção PROFMAT).

GRISTEAD,C.M.;SNELL J.L.**Introduction to probability,**ed.1ª,Editora America Mathematical Society,EUA, julho 1997.

IEZZI, G. et al. Fundamentos De **Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade. 8**.ed. São Paulo: Atual, 2013.

SIARETTA,P., **Coisa de Passarinho**,; Produtora: Casa Blanca; Duração de aprox. 10 minutos; film 2010; Disponível em www.m3.ime.unicamp .br/recursos/170, acessado 10/06/16.

SIARETTA,P **Cara e Coroa**;Produtora:Casa Blanca; Duração de aprox. 10 minutos; film 2010; Disponível em www.m3.ime.unicamp.br/recursos/1062, acessado 10/06/16.

LOPE,J. M.;TEODORO J. V.;REZENDE J. C; **Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio**, São Paulo-2008.

MINAYO,M.C.S.,organizador.**Pesquisa Social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis:Vozes;1994.

ANEXO I

Escola Estadual Prof Maria Carmelita do Carmo
Prof: Flávia Hernan e André Beltrão

Aluno(a):____Nº_____

Série:______ Turma:_______ Turno:Manhã

<u>LISTA DE PROBABILIDADES – 2016 - GABARITO</u>

1) (FGV) Uma urna contém 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Sorteando-se uma bolinha, a probabilidade de que o número observado seja múltiplo de 8 é:

(A) 3/25 (B) 7/50 (C) 1/10 (D) 8/50
(E) 1/5

Solução. O espaço amostral (Ω) possui 50 elementos. O número de múltiplos de 8, pode ser calculado utilizando a progressão aritmética de razão 8, com a_1 = 8 (1º múltiplo) e a_n = 48 (último múltiplo).

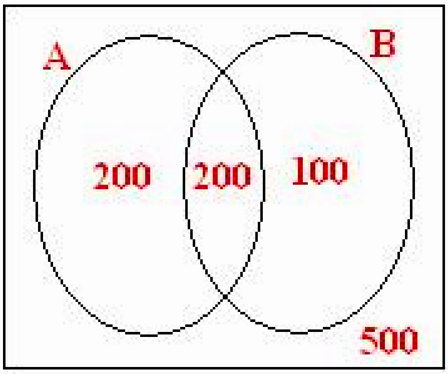
$$\boxed{48 = 8 + (n-1).8 \Rightarrow 48 = 8 + 8n - 8 \Rightarrow n = \frac{48}{8} = 6}.$$

O número de elementos do evento E (múltiplos de 8) é n(E) = 6. Logo, $\boxed{P(E) = \frac{6}{50} = \frac{3}{25}}$**.**

2) Numa comunidade de 1000 habitantes, 400 são sócios de um clube **A**, 300 de um clube **B** e 200 de ambos. Escolhendo-se uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade dessa pessoa ser sócia de **A** ou de **B**?

(A) 75% (B) 60% **(C)** 50% (D) 45% (E) 30%

Solução. Utilizando a teoria de conjuntos, temos:



n(A ∪ B) = n(A) + n(B) – n(A ∩ B) = 400 + 300 – 200 = 500.

Logo, $\boxed{P(A \cup B) = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2} \rightarrow 50\%}$.

3) Uma pessoa joga uma moeda quatro vezes, qual a probabilidade de sair CARA nas quatro jogadas?

(A) 1/2 (B) 1/4 (C) 1/8 **(D)** 1/16 (E) 1

Solução1. O espaço amostral para essas jogadas possuirá 2^4 = 16 elementos. O evento CCCC ocorrerá somente uma vez. Logo, $\boxed{P(CCCC) = \frac{1}{16}}$.

Solução2. Como as jogadas são independentes, isto é, um resultado não depende do outro, temos pelo teorema da multiplicação:

$$\boxed{P(C \cap C \cap C \cap C) = P(C).P(C).P(C).P(C) = \left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}}.$$

4) (UPF) - Uma urna contém 3 bolas brancas e 4 bolas pretas. Tira-se, sucessivamente, 2 bolas. Então a probabilidade das bolas serem da mesma cor, é:

(A) 1/7 (B) 2/7 **(C)** 3/7 (D) 4/7 (E) 5/7

Solução. Não há reposição, pois as retiradas são sucessivas.

$$\boxed{P(\text{mesma cor}) = P(BB \cup PP) = P(B \cap B) + P(P \cap P) = \left(\frac{3}{7}\right).\left(\frac{2}{6}\right) + \left(\frac{4}{7}\right).\left(\frac{3}{6}\right) = \frac{6+12}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}}.$$

OBS: Usando o espaço amostral: $\boxed{P(\text{mesma cor}) = \frac{C_3^2}{C_7^2} + \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{3+6}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}}$.

6) Um prédio de três andares, com dois apartamentos por andar, tem apenas três apartamentos ocupados. A probabilidade de cada um dos três andares tenha exatamente um apartamento ocupado é:

(A) 2/5 (B) 3/5 (C) 1/2 (D) 1/3 (E) 2/3

Solução. Como queremos que três estejam ocupados teremos três desocupados. Alinhando os apartamentos utilizando O (ocupado) e D (desocupado), temos a sequência: ODODOD. O número total de possibilidades de permutar (com repetição) essa situação seria $\boxed{P_6^{2,2} = \frac{6!}{3!3!} = 20}$ **. Mas como a situação é por andar, temos 2 possibilidades em cada andar. Logo, 2x2x2 = 8 possibilidades de termos 1 vazio e 1 ocupado por andar. Então,** $\boxed{P(1O/\text{Andar}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}}$.

OBS: O número total de ocupações poderia ser calculado como combinação: $\boxed{C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20}$.

7) (VUNESP) Dois jogadores, A e B vão lançar um par de dados. Eles combinam que, se a soma dos números dos dados for 5, A ganha, e, se essa soma for 8, B é quem ganha. Os dados são lançados. Sabe-se que A não ganhou. Qual a probabilidade de B ter vencido?

(A) 10/36 **(B)** 5/32 (C) 5/36 (D) 5/35 (E) não se pode calcular

Solução. O espaço amostral do lançamento de dois dados é composto de 36 elementos (pares ordenados). O evento "soma 5" será E(A) = {(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)}. Os eventos "soma 5" e soma "8" são disjuntos, logo não há interseção. Se A não ganhou o espaço amostral ficará reduzido para 36 – 4 = 32 elementos. O evento soma 8 será E(B) = {(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)}.

Logo, a probabilidade de B vencer será: $\boxed{P(\text{soma}\,8)=\frac{5}{32}}$**.**

10) (UFRGS) Em uma gaveta, cinco pares diferentes de meias estão misturados. Retirando-se ao acaso duas meias, a probabilidade de que elas sejam do mesmo par é de:

(A) 1/10 **(B)** 1/9 (C) 1/5 (D) 2/5 (E) 1/2.

Solução1. Considerando os pares como AA, BB, CC, DD, EE, há um total de 10 meias. O número de formas de retirar duas meias quaisquer desse total será: $\boxed{C_{10}^{2}=\frac{10.9.8!}{2!8!}=45}$**. Há 5 possibilidades de saírem duas do mesmo par. Logo,** $\boxed{P(\text{Mesmo Par})=\frac{5}{45}=\frac{1}{9}}$**.**

Solução2. O resultado é um dos pares (AA) ou (BB) ou (CC) ou (DD) ou (EE). Como não há interseções entre os pares, a probabilidade total será a soma das probabilidades de cada caso.

$$\boxed{P[(AA)\cup(BB)\cup(CC)(DD)(EE)]=\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right).\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right).\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right).\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right).\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right)=5.\left(\frac{2}{10}.\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9}}.$$

11) (UFRGS) As máquinas A e B produzem o mesmo tipo de parafuso. A porcentagem de parafusos defeituosos produzidos, respectivamente, pelas máquinas A e B é de 15% e de 5%. Foram misturados, numa caixa 100 parafusos produzidos por A e 100 produzidos por B. Se tirarmos um parafuso ao acaso e ele for defeituoso, a probabilidade de que tenha sido produzido pela máquina A é de:

(A) 10% (B) 15% (C) 30% (D) 50% **(E)** 75%

Solução:

A caixa possui um total de 200 parafusos e há 15% de 100 = 15 parafusos defeituosos da máquina A e 5% de 100 = 5 parafusos defeituosos da máquina B. Logo, há um total de 20 parafusos defeituosos. Como já foi detectado que o parafuso retirado é defeituoso, o espaço amostral fica reduzido de 200 para 20.

	Máquina A	Máquina B	Total
defeituoso	15	5	20
não defeituoso	85	95	180
Total	100	100	200

Logo,

$$\boxed{P(A\,|\,\text{defeituoso}) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \to 75\%}$$

12) (UFRGS) Em um jogo, dentre dez fichas numeradas com números distintos de 1 a 10, duas fichas são distribuídas ao jogador, que ganhará um prêmio se tiver recebido fichas com dois números consecutivos. A probabilidade de ganhar o prêmio neste jogo é de:

(A) 14% (B) 16% **(C)** 20% (D) 25% (E) 33%

Solução. O espaço amostral será $\boxed{C_{10}^{2} = \frac{10.9.8!}{2!8!} = 45}$**. Cada número de 1 a 9 possui um consecutivo, excetuando o 10, pois não há a ficha 11. Logo,** $\boxed{P(\text{consecutivo}) = \frac{9}{45} = \frac{1}{5} \to 20\%}$**.**

13) (FUVEST) Escolhido ao acaso um elemento do conjunto dos divisores positivos de 60, a probabilidade de que ele seja primo é:

(A) 1/2 (B) 1/3 **(C)** 1/4 (D) 1/5 (E) 1/6

Solução. A decomposição em fatores primos de 60 é (2 x 2 x 3 x 5) = 2^2 x 3 x 5. O número de divisores é calculado pelo produto (2+1).(1+1).(1+1) = 12. Os únicos divisores primos são 2, 3 e 5, num total de três elementos. Logo, $\boxed{P(\text{DivPrimo}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}}$**.**

14) (VUNESP) Numa gaiola estão 9 camundongos rotulados 1 , 2 , 3 , . . . , 9 . Selecionando-se conjuntamente 2 camundongos ao acaso (todos têm igual possibilidade de serem escolhidos) , a probabilidade de que na seleção ambos os camundongos tenham rótulo ímpar é:

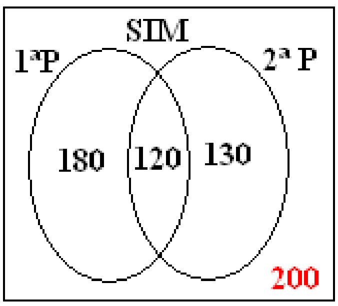
(A) 0,3777... (B) 0,47 (C) 0,17 **(D)** 0,2777... (E) 0,1333...

Solução. Há cinco rótulos ímpares e quatro pares. Considerando cada retirada de camundongo e buscando a possibilidades (Ímpar, Ímpar), temos: $\boxed{P(II) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18} = 0{,}2777...}$**.**

15) (FEI) Em uma pesquisa realizada em uma Faculdade foram feitas duas perguntas aos alunos. Cento e vinte responderam sim a ambas; 300 responderam sim à primeira; 250 responderam sim à segunda e 200 responderam não a ambas. Se um aluno for escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de ele ter respondido não à primeira pergunta?

(A) 1/7 (B) 1/2 (C) 3/8 **(D)** 11/21 (E) 4/25

Solução,O número de alunos será a soma do número de alunos que responderam SIM com o número de alunos que responderam NÃO. Como há interseção nas respostas sim, forma-se o diagrama mostrado.



i) Total de alunos: 180 + 120 + 130 + 200 = 630 alunos.

ii) Responderam NÃO à primeira pergunta: 130 + 200= 330 alunos. Observe que responder NÃO à primeira pergunta, implica em responder SIM <u>somente</u> segunda pergunta ou NÃO a ambas. Logo, $\boxed{P(N1^{a}P)=\frac{330}{630}=\frac{33}{63}=\frac{11}{21}}$**.**

16) (FATEC) Considere todos os números de cinco algarismos distintos obtidos pela permutação dos algarismos 4, 5, 6, 7 e 8. Escolhendo-se um desses números, ao acaso, a probabilidade de ele ser um número ímpar é:

(A) 1 (B) 1/2 **(C)** 2/5 (D) 1/4 (E) 1/5

Solução. Para que o número seja ímpar a unidades simples deverá ser um algarismo ímpar. Há dois casos a considerar: _ _ _ _ 5 e _ _ _ _ 7. Como 5 e 7 estão fixos, a permutação será entre os quatro algarismos restantes. Logo há 2.4! = 2(24) = 48 números ímpares. O espaço amostral será 5! = 120 números de cinco algarismos distintos. Logo, $\boxed{P(Nímpar)=\frac{48}{120}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}}$**.**

17) (Objetivo) Uma urna contém apenas 10 bolas. Essas bolas são de diversas cores, e somente 4 são brancas. Sabe-se que as bolas diferem apenas na cor. Retira-se uma bola ao acaso, e em seguida retira-se outra bola, sem reposição da primeira. A probabilidade de obter duas bolas que não sejam ambas brancas é:

(A) 2/15 **(B)** 13/15 (C) 1/3 (D) 3/5 (E) 2/9

Solução. Como há várias possibilidades, o evento complementar E = {duas bolas brancas} facilitará o cálculo: $\boxed{P(BB)=\frac{4}{10}.\frac{3}{9}=\frac{2}{5}.\frac{1}{3}=\frac{2}{15}}$ **. Logo, o evento pedido é o complementar desse:** $\boxed{P(\overline{BB})=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}}$**.**

18) (EFOA) Uma pessoa tem em mãos um chaveiro com 5 chaves parecidas, das quais apenas uma abre determinada porta. Escolhe uma chave ao acaso, tenta abrir a porta, mas verifica que a chave escolhida não serve. Na segunda tentativa, com as chaves restantes, a probabilidade de a pessoa abrir a porta é de:

(A) 20% **(B)** 25% (C) 40% (D) 75% (E) 80%

Solução. Na primeira tentativa a pessoa já excluiu uma das chaves. Logo seu espaço amostral fica reduzido a quatro chaves. Na segunda tentativa a probabilidade será 1 em 4. Logo, $\boxed{P(abrir) = \frac{1}{4} \rightarrow 25\%}$.

19) Das 180 pessoas que trabalham em uma empresa, sabe-se que 40% têm nível universitário e 60% são do sexo masculino. Se 25% do número de mulheres têm nível universitário, a probabilidade de selecionar-se um funcionário dessa empresa que seja do sexo masculino e não tenha nível universitário é:

(A) 5/12 **(B)** 3/10 (C) 2/9 (D) 1/5 (E) 5/36

Solução. Observe a tabela com os cálculos de acordo com as informações.

	Possui curso	Não possui curso	Total
Masculino	72 – 18 = 54	54	60% de 180 =108
Feminino	25% de 72 = 18	72 – 18 = 54	72
Total	40% de 180 = 72	180 – 72 = 108	180

Logo, $\boxed{P(M \cap NãoCurso) = \frac{54}{180} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}}$.

20) (F .Maringá) Um número é escolhido ao acaso entre 20 inteiros, de 1 a 20. A probabilidade de o número escolhido ser primo ou quadrado perfeito é:

(A) 1/5 (B) 2/25 (C) 4/25 (D) 2/5 **(E)** 3/5

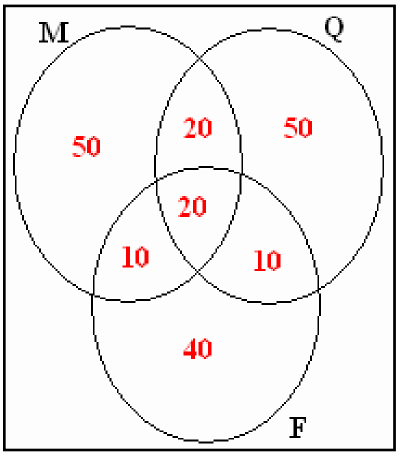
Solução. Não há interseção entre esses eventos. Logo P(Primo ∪ QPerfeito) = P(Primo) + P(QPerfeito). Há n{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} = 8 primos e n{1, 4, 9, 16} quadrados $\boxed{P(Primo \cup QPerfeito) = \frac{8+4}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}}$.

21) (FASP) Um colégio tem 400 alunos. Destes, 100 estudam Matemática, 80 estudam Física, 100 estudam Química, 20 estudam Matemática, Física e Química, 30 estudam Matemática e Física, 30 estudam Física e Química e 50 estudam somente Química. A probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, estudar Matemática e Química é:

(A) 1/10 (B) 1/8 (C) 2/5 (D) 5/3 (E) 3/10

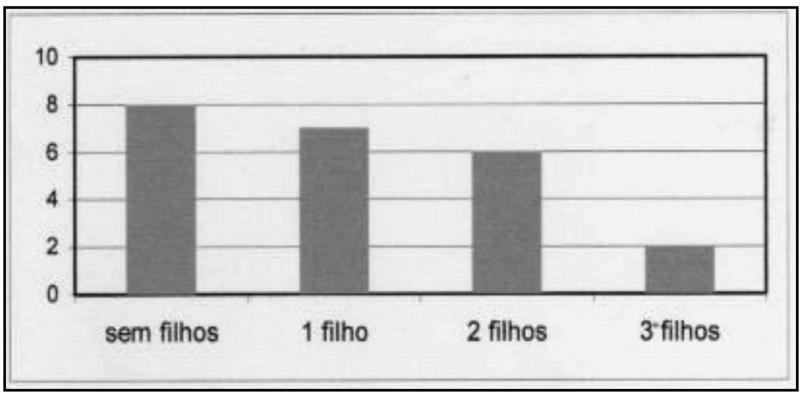
Solução. Construindo o diagrama com as informações basta identificar a região que indica o número de alunos que estudam Matemática e Química.

.



$$P(\text{Matemática} \cap \text{Química}) = \frac{20+20}{400} = \frac{40}{400} = \frac{1}{10}$$

22) (ENEM) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico mostrado. Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:



(A) 1/3 (B) 1/4 (C) 7/15 (D) 7/23 **(E)** 7/25

Solução. De acordo com o gráfico, há 8 mulheres sem filhos, 7 mulheres com 1 filho, 6 mulheres com 2 filhos e 2 mulheres com 3 filhos. O total de crianças é: 8(0) + 7(1) + 6(2) + 2(3) = 7 + 12 + 6 = 25. O número de mulheres com filho único é 7. Logo, $\boxed{P(\text{FilhoÚnico}) = \frac{7}{25}}$**.**