

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CURSO DE MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**MICROSOFT EXCEL COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O
APRENDIZADO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA APLICADA A
JUROS COMPOSTOS**

Acadêmicos: PATRÍCIA UANA DA ROCHA CAMBRAIA

RONALDO COSTA RIBEIRO

Professor Orientador: ERASMO SENGER

Área de Concentração: MATEMÁTICA FINANCEIRA

MACAPÁ – AP

AGOSTO/2011

PATRÍCIA UANA DA ROCHA CAMBRAIA
RONALDO COSTA RIBEIRO

MICROSOFT EXCEL COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O
APRENDIZADO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA APLICADA A
JUROS COMPOSTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade Federal do Amapá como
requisito para obtenção do título de
Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Professor Erasmo Senger

MACAPÁ – AP
AGOSTO/2011

**MICROSOFT EXCEL COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O
APRENDIZADO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA APLICADA A
JUROS COMPOSTOS**

PATRÍCIA UANA DA ROCHA CAMBRAIA
RONALDO COSTA RIBEIRO

Este trabalho foi apresentado à Banca Examinadora, integrada pelos Professores:

.....
Prof. : ERASMO SENGER
Orientador (a)

.....
Prof. : MÁRCIO ALDO LOBATO BAHIA
Banca Examinadora

.....
Prof^ª. : VÂNIA DE FÁTIMA LEMOS DE MIRANDA
Banca Examinadora

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a DEUS, que me permite ter saúde e determinação para a realização de minhas conquistas.

Aos meus queridos pais que tanto lutaram e sempre se esforçam para a minha formação.

Aos meus professores, nos quais vejo referenciais a serem seguidos.

Ao professor orientador Erasmo Senger, pelos conhecimentos transmitidos, sua atenção, simplicidade e boa vontade.

Aos amigos da turma de Matemática – 2007, que com alegria e solidariedade ajudaram a tornar esta etapa menos cansativa.

Patrícia Uana da Rocha Cambraia

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a DEUS, que me fortalece a cada dia em minha vida.

À minha família, em especial à minha mãe Valéria da Costa Ribeiro.

Aos meus professores pelos ensinamentos que levarei por toda a vida.

Ao professor orientador Erasmo Senger, pelos conhecimentos transmitidos, sua atenção e boa vontade.

Aos amigos da turma de Matemática – 2007.

Ronaldo Costa Ribeiro

SUMÁRIO

RESUMO.....	7
INTRODUÇÃO.....	8
1. CAPÍTULO I - Introdução	
1.1 História.....	11
1.2 Relação da Matemática Financeira com o Excel.....	17
1.3. Dificuldades do aluno com a matemática e como a proposta de ensino deste trabalho pode ajudar.....	19
2. CAPÍTULO II – Conceitos	
2.1 Matemática Financeira.....	22
2.2 Progressão Geométrica.....	27
2.3 Planilha Eletrônica (Comandos Básicos).....	27
2.4 Sistema de Amortização Francês (Tabela Price) e Sistema de Amortização Constante (SAC).....	31
3. CAPÍTULO III – Juros Simples e Juros Compostos	
3.1 Juros Simples.....	33
3.2 Juros Compostos.....	34
4. CAPÍTULO IV	
4.1 Sistema de Amortização Francês (Tabela Price).....	49
4.2 Sistema de Amortização Constante (SAC).....	66
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	68
6. REFERÊNCIAS.....	69

RESUMO

No mundo globalizado a necessidade de se obter informações acerca das novas tecnologias e do sistema econômico mundial é cada vez mais freqüente e estimulada, para tanto, é necessário antes a obtenção do conhecimento básico que possibilitará o entendimento de conceitos mais apurados. Este raciocínio é o que norteia a Matemática Financeira, que se preocupa com o estudo do valor do dinheiro no tempo, sendo uma base de conhecimento indispensável para o entendimento da Engenharia Financeira que norteia a economia no sistema capitalista e da Análise de Investimentos e Empréstimos, práticas bastante comuns hoje. As pessoas buscam a melhor rentabilidade de seus recursos, e para que possam medir seu retorno faz-se necessária a aplicação de cálculos financeiros, que possibilitam tomadas de decisão corretas e uma gestão orçamentária adequada. Ainda com o intuito de melhor entender o método de cálculo de juros adotado pelas instituições financeiras hoje, serão abordados neste trabalho: conceitos básicos da Matemática Financeira, que auxiliam na introdução ao ensino desta matéria, exemplos que clarificam os conceitos mostrados e os dois principais sistemas de cálculo aplicado a juros compostos em aplicações financeiras. Será utilizado como recurso didático o Programa de Informática Microsoft Excel, que serve não apenas como instrumento facilitador dos cálculos financeiros, mas também como um atrativo aos alunos, tendo em vista que o mundo globalizado de hoje enfatiza o interesse pelos recursos tecnológicos. Assim, a proposta conjuga o ensino de uma matéria inclusa na grade escolar, com o interesse dos alunos, de forma a facilitar a prática docente e o aprendizado sobre um assunto de extrema utilidade no cotidiano das pessoas.

Palavras - chave: Matemática Financeira, Juros Simples, Juros Compostos, Sistema de Amortização Francês, Microsoft Excel.

INTRODUÇÃO

A matemática financeira tem por função estudar as várias formas de evolução do valor do dinheiro no tempo. A partir da análise sobre a evolução do dinheiro ao longo do tempo é possível definir as melhores alternativas para a aplicação ou obtenção de recursos financeiros. Com o escopo de melhor entender como funciona a sistemática financeira dos juros no contexto atual, o trabalho se apresenta em quatro capítulos. Assim, o primeiro capítulo traz noções históricas sobre o tema, curiosidades que ajudam a entender a origem e importância deste ramo da matemática. O segundo capítulo trata dos básicos e principais conceitos na matemática financeira (Capital, Juros, Taxa de juros e Montante), regimes de capitalização existentes, que são a capitalização a juros simples e a capitalização a juros compostos, além dos conceitos básicos do Software Microsoft Excel, úteis à matemática financeira. O terceiro capítulo estuda de forma pormenorizada o regime de capitalização composto (juros compostos), um dos focos deste trabalho, com aplicação dos conceitos e das respectivas fórmulas. E para encerrar, o capítulo quatro trata do Sistema de Amortização Francês, utilizado sobremaneira no mercado financeiro. Ao longo deste trabalho evidencia-se passo a passo de como efetuar cálculos financeiros do Excel, simultaneamente à fixação dos conceitos básicos.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 História

É bastante antigo o conceito de juros, tendo sido amplamente divulgado e utilizado ao longo da História. Esse conceito surgiu naturalmente quando o homem começou a perceber que existia uma estreita relação entre o **dinheiro e o tempo**. A partir disso, tem-se hoje a noção de que os processos de acumulação de capital e a desvalorização da moeda estão ligados à ideia de juros, já que desde tempos antigos, essa relação realizava-se basicamente devido ao valor temporal do dinheiro.

As **tábuas** mais antigas mostram um alto grau de habilidade computacional e deixam claro que o sistema sexagesimal posicional já estava de longa data estabelecida. Há muitos textos desses primeiros tempos que tratam da distribuição de produtos agrícolas e de cálculos aritméticos baseados nessas transações. Essas tábuas mostram ainda que os sumérios antigos estavam familiarizados com todos os tipos de contratos legais e usuais, como por exemplo, faturas, recibos, notas promissórias, crédito, juros simples e compostos, hipotecas, escrituras de venda e endossos.

Há tábuas que são documentos de empresas comerciais e outras que lidam com sistemas de pesos e medidas. Muitos processos aritméticos eram efetuados com a ajuda de várias tábuas. Das 400 tábuas matemáticas cerca de metade eram tábuas que envolvem tábuas de multiplicação, tábuas de inversos multiplicativos, tábuas de quadrados e cubos e mesmo tábuas de exponenciais. Quanto a estas, provavelmente eram usadas em problemas de juros compostos. As tábuas de inversos eram usadas para reduzir a divisão à multiplicação. [1]

O Valor e a Moeda

Na época em que os homens viviam em comunidades restritas, tirando da natureza todos os produtos de que tinham necessidade, sem dúvida devia existir muito pouca

comunicação entre as diversas sociedades. Mas com o desenvolvimento do artesanato e da cultura e em razão da desigual repartição dos diversos produtos naturais, a troca comercial mostrou-se pouco a pouco necessária nesse momento.

Desse modo, o primeiro tipo de troca comercial foi o escambo, meio pelo qual se trocam gêneros e mercadorias correspondentes a matérias primas ou a objetos de grande necessidade. diretamente, portanto, sem a intervenção de uma "moeda".

Por vezes, quando se tratava de grupos que entretinham relações pouco amistosas, essas trocas eram feitas sob a forma de um escambo silencioso, ou seja, uma das duas partes depositava, num lugar previamente estabelecido, as diversas mercadorias com as quais desejava fazer a troca e, no dia seguinte, encontrava em seu lugar (ou ao lado delas) os produtos propostos pelo outro parceiro. Se a troca fosse considerada conveniente levavam-se os produtos, senão retornava-se no dia seguinte para encontrar uma quantidade maior. O mercado podia então durar vários dias ou mesmo terminar sem troca quando as duas partes não podiam encontrar terreno para entendimento.

Cenas como tais puderam ser observadas, por exemplo, entre os Aranda da Austrália, os venda do Ceilão, os bosquímanos e os pigmeus da África, os botocudos do Brasil, bem como na Sibéria e na Polinésia.

Com a intensificação das comunicações entre os diversos grupos e a importância cada vez maior das transações, a prática do escambo direto tornou-se bem rapidamente um estorvo. Não se podiam mais trocar mercadorias segundo o capricho de tal ou qual indivíduo ou em virtude de um uso consagrado ao preço de intermináveis discussões.

Houve, portanto a necessidade de um sistema relativamente estável de avaliações e de equivalências, fundado num princípio (vizinho daquele da base de um sistema de numeração) dando a definição de algumas unidades ou padrões fixos. Nesse sistema é sempre possível estimar tal ou qual valor, não somente para as operações de caráter econômico, mas também (e talvez sobretudo) para a regulamentação de problemas jurídicos importantes e, todas as espécies de produtos, matérias ou objetos utilitários.

A primeira unidade de escambo admitida na Grécia pré-helênica foi o boi. Não é por acaso que a palavra latina pecúnia quer dizer "fortuna, moeda, dinheiro": provém, com efeito, de *pecus*, que significa "gado, rebanho"; além disso, o sentido próprio da palavra pecunia corresponde ao "ter em bois".

Mas nos tempos antigos a operação de escambo, longe de ser um ato simples, devia ser, ao contrário, envolta de formalidades complexas, muito provavelmente ligadas à mística e às práticas mágicas. É em todo caso o que revela a análise etnológica feita nas sociedades "primitivas" contemporâneas, que se viu confirmar por um certo número de descobertas arqueológicas. Pode-se, portanto, supor que nas culturas pastorais a idéia de boi-padrão (moeda de sangue) sucedeu à idéia de "boi de sacrifício", ela mesma ligada ao valor intrínseco estimado do animal.

Em contrapartida, nas ilhas do Pacífico as mercadorias foram estimadas em colares de pérolas ou de conchas. Após certo período, começou-se por trocar faixas de tecido por animais ou objetos. O tecido era a moeda; a unidade era o palmo da fita de duas vezes oitenta fios de largura.

Tais métodos apresentavam, contudo, sérias dificuldades de aplicação. Assim, à medida que o comércio se desenvolvia, os metais desempenharam um papel cada vez maior nas transações comerciais, vindo a se tornar, no fim das contas, a "moeda de troca" preferida dos vendedores e compradores. E as avaliações das diversas mercadorias passaram a ser feitas quantitativamente pelo peso, cada uma delas referindo a uma espécie de peso-padrão relativo a um ou a outro metal.

Igualmente no Egito faraônico, os gêneros e as mercadorias foram freqüentemente estimados e pagos em metal (cobre, bronze e, por vezes, ouro ou prata), que se dividia inicialmente em pepitas e palhetas. A avaliação era feita também sob a forma de lingotes ou de anéis, cujo valor se determinava em seguida pela pesagem.

Até o momento não somente tratamos de um simples escambo, mas também um verdadeiro sistema econômico. A partir de então, graças ao padrão de metal, as mercadorias

passaram a não mais ser trocadas ao simples prazer dos contratantes ou segundo usos consagrados freqüentemente arbitrários, mas em função de seu "justo preço".

Até então, tratava-se somente de introduzir nas transações e nos atos jurídicos uma espécie de peso-padrão, unidade de valor à qual o preço de cada uma das mercadorias ou ações consideradas era referido. Partindo desse princípio, tal metal ou tal outro podia então servir em toda ocasião como "salário", "multa" ou como "valor de troca", e no caso da "multa", algum tipo de cálculo de juros primários era utilizado para se obter um certo valor para a mesma.

Aprendendo a contar abstratamente e agrupar todas as espécies de elementos seguindo o princípio da base, o homem aprendeu assim a estimar, avaliar e medir diversas grandezas (pesos, comprimentos, áreas, volumes, capacidades etc.). Aprende igualmente a atingir e conceber números cada vez maiores, antes mesmo de ser capaz de dominar a idéia do infinito.

Pôde elaborar também várias técnicas operatórias (mentais, concretas e, mais tarde, escritas) e erguer os primeiros rudimentos de uma aritmética inicialmente prática, antes de tornar-se abstrata e conduzir à álgebra - onde hoje temos a Matemática Financeira amplamente desenvolvida.

Foi-lhe também aberta a via para a elaboração de um calendário e de uma astronomia, bem como para o desenvolvimento de uma geometria estruturada inicialmente em medidas de comprimento, áreas e volumes, antes de ser especulativa e axiomática. Numa palavra, a aquisição desses dados fundamentais permitiu pouco a pouco à humanidade tentar medir o mundo, compreendê-lo um pouco melhor, colocar a seu serviço alguns de seus inúmeros segredos e organizar, para desenvolvê-la, sua economia. [2]

Os Bancos

O surgimento dos bancos está diretamente ligado ao cálculo de juros compostos e o uso da Matemática Comercial e Financeira de modo geral. Na época em que o comércio

começava a chegar ao auge, uma das atividades do mercador foi também a do comércio de dinheiro: com o ouro e a prata. Nos diversos países eram cunhadas moedas de ouro e prata.

Durante a expansão do comércio, assim como durante as guerras de conquista, as moedas dos diferentes países eram trocadas, mas o pagamento só podia ser efetuado com dinheiro do país específico. Conseqüentemente, dentro das fronteiras de cada país, as moedas estrangeiras deviam ser cambiadas por dinheiro deste país. Por outro lado, os comerciantes e outras pessoas possuidoras de muito dinheiro, que viajavam ao exterior, precisavam de dinheiro de outros países, que compravam com moeda nacional. Com o passar do tempo, alguns comerciantes ficaram conhecendo muito bem as moedas estrangeiras e passaram a acumulá-las em grandes quantidades. Desta forma, dedicaram-se exclusivamente ao câmbio de dinheiro, ou seja, ao comércio de dinheiro.

Aconteceu então a divisão de trabalho dentro do campo do comércio: paralelamente aos comerciantes que se ocupavam com a troca de artigos comuns, surgiram os cambistas, isto é, comerciantes dedicados ao intercâmbio de uma mercadoria específica: o dinheiro.

Num espaço de tempo relativamente curto, acumularam-se fantásticas somas de dinheiro nas mãos dos cambistas. Com o tempo, foram se ocupando de uma nova atividade: guardar e emprestar dinheiro. Naquela época, e devido à deficiente organização das instituições responsáveis pela segurança social do indivíduo, não era recomendável que tivesse em sua casa muitas moedas de ouro e prata. Estas pessoas entregavam seu dinheiro à custódia do cambista rico, que o guardava e devolvia ao dono quando ele pedisse. Imaginemos um cambista qualquer que tenha acumulado, desta forma, em seus cofres, imensa quantidade de dinheiro.

Era natural que a seguinte idéia ocorresse: "Porque estas grandes somas de dinheiro haverão de permanecer em meu poder sem qualquer lucro para mim? - Aí então se percebe que a palavra "lucro" está diretamente interligada com o conceito de finanças - É pouco provável que todos os proprietários, ao mesmo tempo e num mesmo dia, exijam a devolução imediata de todo seu dinheiro. Empréstarei parte deste dinheiro a quem pedir, sob a condição de que seja devolvido num prazo determinado. E como meu devedor empregará o dinheiro como quiser durante este prazo, é natural que eu obtenha alguma vantagem. Por isso, além do

dinheiro emprestado, deverá entregar-me, no vencimento do prazo estipulado, uma soma adicional". Vimos que neste pensamento do mercador, a idéia de lucro já aparece fortemente.

Assim tiveram início as operações creditícias. Aqueles que, por alguma razão, se encontravam sem dinheiro - comerciantes, senhores feudais e não raras vezes o próprio rei ou o erário nacional -, recorriam ao cambista que lhes emprestava grandes somas de dinheiro a juros "razoáveis".

O juro era pago pelo usufruto do dinheiro recebido ou, mais -propriamente, era a "compensação pelo temor" de quem dava dinheiro emprestado e assim se expunha a um grande risco. Entretanto estes juros alcançaram, em alguns casos, quantias incríveis: na antiga Roma os usuários exigiam de 50 a 100 por cento e na Idade.Média, de 100 a 200 por cento, às vezes mais, em relação direta com a necessidade do solicitante ou do montante da soma.

Estes juros foram chamados - com toda justiça - de usurário, o dinheiro recebido emprestado, de capital usurário e o credor, de usureiro. O cambista exercia sua profissão sentado num banco de madeira em algum lugar do mercado. Daí a origem da palavra "banqueiro" e "banco". Os primeiros bancos de verdade da História foram criados pelos sacerdotes.

No mundo antigo, entre os egípcios, babilônios e mais tarde entre os gregos e romanos, estava amplamente difundido o costume segundo o qual os cidadãos mais abastados deviam confiar a custódia de seu ouro aos sacerdotes.

A Igreja cristã não só deu continuidade à tradição das operações creditícias dos antigos sacerdotes, que considerava pagãos, mas desenvolveu-as em grande escala. A Igreja Católica criou o "Banco do Espírito Santo", com um fabuloso capital inicial. Seu verdadeiro propósito era tornar mais expedita a exação, aos fiéis, dos chamados "denários de São Pedro" destinados a satisfazer as frugalidades do Papa e para facilitar o pagamento de dízimos e indulgências, assim como para a realização de transações relacionadas com os empréstimos, em outras palavras, com a usura.

Ao mesmo tempo lançou um anátema e condenou às masmorras da inquisição os cidadãos que emprestavam dinheiro a juros, mesmo que este juro fosse menor do que aquele que ela exigia por seu dinheiro. A Igreja proibia a seus fiéis que cobrassem juros por seu dinheiro, invocando como autoridade a Sagrada Escritura, onde se lê: "Amai pois vossos inimigos e fazei o bem, e emprestei, nada esperando disso" (São Lucas, 6,35). Na realidade, esta proibição era motivada por um interesse econômico muito "mundano": a Igreja ambicionava assegurar para si o monopólio absoluto na exação de juros.

Apesar das maldições e ameaças com o fogo eterno, a Igreja não pôde conter a avidez por ganhos e lucros das pessoas, tanto mais que o próprio desenvolvimento do comércio exigia a criação de uma ampla rede bancária. As iniciadoras desta atividade foram as cidades-estado da Itália, que tinham um vasto comércio, cujo raio de ação se estendia aos mais distantes confins do mundo conhecido.

O primeiro banco privado foi fundado pelo duque. Vitali em 1157, em Veneza. Após este, nos séculos XIII, XIV e XV toda uma rede bancária foi criada. A Igreja não teve outra alternativa senão aceitar a realidade dos fatos. Assim os bancos foram um dos grandes propulsores práticos para o avanço da Matemática Comercial e Financeira e da Economia durante os séculos X até XV. Pois sem essa motivação para o aprimoramento dos cálculos, talvez, essa área de Matemática não estivesse tão avançada nos dias atuais [3].

1.2 Relação da matemática Financeira com excel

A primeira calculadora capaz de realizar as operações básicas de soma e subtração foi inventada em 1642 pelo filósofo, físico e matemático francês Blaise Pascal. Pascal, que aos 18 anos trabalhava com seu pai em um escritório de coleta de impostos na cidade de Rouen, desenvolveu a máquina para auxiliar o seu trabalho de contabilidade. A máquina Pascal foi criada com objetivo de ajudar seu pai a computar os impostos em Rouen, França. O projeto de Pascal foi bastante aprimorado pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1726).

Em 1820, o francês natural de Paris, Charles Xavier Thomas, conhecido como Thomas de Colmar, projetou e construiu uma máquina capaz de efetuar as 4 operações aritméticas básicas: a Arithmomet. Esta foi a primeira calculadora realmente comercializada com sucesso. Ela fazia multiplicações com o mesmo princípio da calculadora de Leibnitz e efetuava as divisões com a assistência do usuário.

Todas essas máquinas, porém, estavam longe de ser considerado um computador, pois não eram programáveis. Isto quer dizer que a entrada era feita apenas de números, mas não de instruções a respeito do que fazer com os números.

A característica que define um "Computador Universal" é a "programabilidade" que permite ao computador emular qualquer outra máquina de calcular alterando a sequência de instruções armazenadas. Em 1835 Charles Babbage descreve sua Máquina Analítica. Esta máquina tratava-se de um projeto de um computador programável de propósito geral, empregando cartões perfurados para entrada e uma máquina de vapor para fornecer energia. Alguns reivindicam que ela é a primeira programadora de computadores do mundo, entretanto essa reivindicação e a validade de suas outras contribuições são disputadas por muitos.

Após longo processo de aprimoramento tecnológico, chegou-se ao modelo do microcomputador, que chega à sala de aula nas faculdades de administração, economia, ciências contábeis e matemática. Não mais para desenvolvimento de aulas de informática, que continuam a ser ministradas nos laboratórios de informática ou de computação, mas para o desenvolvimento de aulas de matemática financeira, administração financeira, orçamento, Planejamento e controle de produção, entre outras.

O uso deste recurso, alinhado a essa realidade, tem como objetivo principal a transmissão de conhecimentos fundamentais de matemática financeira para usuário do Excel, levando em conta a transmissão da planilha eletrônica do Microsoft Excel, (instalado em um computador) IBM-PC ou compatível. É uma prática muito comum entre as empresas ou instituições financeiras, a qual se recorre sempre que uma atividade implique um grande volume de processamento de cálculos financeiros repetitivos ou simulação de situações envolvendo simultaneamente várias variáveis.

Visando facilitar a migração do usuário da calculadora HP – 12C para o Excel ou aumentar a capacidade de resolução de problemas financeiros pelos iniciantes, cada tema dentro da matéria é abordado em livros , sempre que possível, sobre ótica da álgebra, do Excel e da HP-12C. O mesmo não se deve negligenciar quanto às utilidades das calculadoras financeiras, particularmente aquelas oferecidas pela HP-12C, além de programável e portátil é mais popular na sua categoria, o que a torna disponível em qualquer ambiente de negócio

1.3 Dificuldades do aluno com a matemática e como a proposta de ensino deste trabalho pode ajudar

As dificuldades que os alunos têm em Matemática vêm sendo notadas ao longo do tempo pelos pais, professores e a equipe escolar, que passaram a detectar junto aos alunos e a contribuir para seu êxito.

A Discalculia

Discalculia, em síntese, é o termo que denomina o problema daquelas pessoas que fazem confusões com os sinais matemáticos e apresentam dificuldades para fazer simples continhas, que podem estar ligadas a um distúrbio neurológico.

Semelhante à dislexia - dificuldade com o aprendizado da leitura e da escrita, a discalculia infantil ocorre em razão de uma falha na formação dos circuitos neuronais, ou seja, na rede por onde passam os impulsos nervosos. Normalmente os neurônios - células do sistema nervoso - transmitem informações quimicamente através de uma rede. A falha de quem sofre de discalculia está na conexão dos neurônios localizados na parte superior do cérebro, área responsável pelo reconhecimento dos símbolos.

As dificuldades de aprendizagem em matemática

Como uma criança pode ler um parágrafo em voz em voz alta impecavelmente e não recordar seu conteúdo logo depois? Como um aluno que lê três anos à frente do nível de sua série apresenta um trabalho manuscrito incompreensível completamente incompreensível?

Como um adolescente se sai muito bem em geometria e tem um desempenho inferior em álgebra?

O que esses três estudantes têm em comum?

O que as crianças, adolescentes e adultos com dificuldades de aprendizagem têm em comum é o baixo desempenho inesperado.

De acordo com o National Joint Committee on Learning Disabilities –NJCLD, "Dificuldades de aprendizagem" é um termo genérico que diz respeito a um grupo heterogêneo de desordens manifestadas por problemas significativos na aquisição e uso das capacidades de escuta, fala, leitura, escrita, raciocínio ou matemáticas.

As dificuldades de aprendizagem raramente têm uma única causa. Supostamente têm base biológica (Lesão cerebral, alterações no desenvolvimento cerebral, desequilíbrios químicos, hereditariedade). Mas o meio em que vive como: o ambiente-família, escola, comunidade - que determina a gravidade do impacto da dificuldade.

Vários autores, como Sara Pain, Alicia Fernández, Maria Lucia Weiss, chamam atenção para o fato de que o maior percentual de fracasso na produção escolar, de crianças encaminhadas a consultórios e clínicas, encontra-se no âmbito do problema de aprendizagem reativo, produzido e incrementado pelo próprio ambiente escolar.

Há pessoas com dificuldades, o desempenho não é compatível com a capacidade cognitiva; a dificuldade ultrapassa a enfrentada por seus colegas de turma sendo, geralmente, resistente ao seu esforço pessoal e ao de seus professores em superá-la, gerando uma auto-estima negativa podendo também surgir comportamento que causam problemas de aprendizagem, complicando as dificuldades na escola.

Os problemas na aprendizagem de Matemática que são apontados em todos os níveis de ensino não são novos: De geração a geração a Matemática ocupa o posto de disciplina mais difícil e odiada, o que torna difícil sua assimilação pelos estudantes. Por isso, antes de falar em dificuldades de aprendizagem em Matemática é necessário verificar se o problema não está no currículo ou na metodologia utilizada.

Algumas causas das dificuldades de aprendizagem em matemática:

- **Interesse dos próprios familiares** em relação aos alunos, que muitas das vezes so fazem a matrícula dos alunos e não fazem um acompanhamento de suas notas durante os semestres o que ocasionando em suas reprovações.

- **Ansiedade e medo de fracassar** dos estudantes em consequência de atitudes transmitidas por pais e professores e da metodologia e dos conteúdos muitas vezes inadequados.

- Distúrbios de memória auditiva:

a. A criança não consegue ouvir os enunciados que lhes são passados oralmente, sendo assim, não conseguem guardar os fatos, isto lhe incapacitaria para resolver os problemas matemáticos.

b. Problemas de reorganização auditiva: a criança reconhece o número quando ouve, mas tem dificuldade de lembrar-se do número com rapidez.

- Distúrbios de percepção visual: A criança pode trocar 6 por 9, ou 3 por 8 ou 2 por 5 por exemplo. Por não conseguirem se lembrar da aparência elas têm dificuldade em realizar cálculos.

- Distúrbios de escrita: Crianças com disgrafia têm dificuldade de escrever letras e números.

- Distúrbios de leitura: Os disléxicos e outras crianças com distúrbios de leitura apresentam dificuldade em ler o enunciado do problema, mas podem fazer cálculos quando o problema é lido em voz alta. É bom lembrar que os disléxicos podem ser excelentes matemáticos, tendo habilidade de visualização em três dimensões, que as ajudam a assimilar conceitos, podendo resolver cálculos mentalmente mesmo sem decompor o cálculo. Podem apresentar dificuldade na leitura do problema, mas não na interpretação.

CAPÍTULO II

2. CONCEITOS

2.1 MATEMÁTICA FINANCEIRA

Introdução

A matemática financeira é o ramo da Matemática Aplicada que estuda o comportamento do dinheiro no tempo. Ela busca quantificar as transações que ocorrem no universo financeiro levando em conta a variável tempo, ou seja, o valor monetário no tempo (time value money). As principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira são: a taxa de juros, o capital e o tempo.

Variáveis e suas representações:

C = Capital;

i = Taxa de Juros;

n = tempo;

J = Juros.

Fórmula Geral

$$J = \frac{C \cdot i \cdot n}{100}$$

(1.1)

Devemos entender como **Juros** a remuneração de um capital aplicado a uma certa taxa, durante um determinado período, ou seja, é o dinheiro pago pelo uso de dinheiro emprestado. Portanto, Juros (J) = preço do crédito. A existência de Juros, decorre de vários fatores, entre os quais destacam-se:

- 1 - inflação:** a diminuição do poder aquisitivo da moeda num determinado período de tempo.
- 2 - risco:** os juros produzidos, de certa forma, compensam os possíveis riscos do investimento.
- 3 – aspectos intrínsecos da natureza humana:** os seres humanos adoram ganhar dinheiro.

Normalmente, o valor do **capital** é conhecido também pela terminologia **principal (P)** e a **taxa de juros (i)** é a relação entre os Juros e o Principal, expressa em relação a uma unidade de tempo.

Assim por exemplo, se os juros anuais correspondentes a uma dívida de R\$ 2000,00 (Principal = P) forem R\$200,00 (Juros = J), a taxa de juros anual (i) será $200/2000 = 0,10 = 10\%$ ao ano. Indica-se: $i = 10\%$ a.a.

Costuma-se especificar taxas de juros anuais, trimestrais, semestrais, mensais, etc., motivo pelo qual se deve especificar sempre o período de tempo considerado.

CAPITAL

Capital (C) é o valor de um ativo representado por moeda e/ou direitos passíveis de uma expressão monetária, no início de uma operação financeira.

MONTANTE

É o capital inicial (C) acrescido do rendimento obtido durante o período (n) de aplicação, e é representado pela letra “M” ou “VF”, ou seja:

$$M = C + J$$

(1.2)

TAXA DE JUROS

A taxa de juros indica qual remuneração será paga ao dinheiro emprestado, para um determinado período. Ela vem normalmente expressa da forma percentual, seguida da especificação do período de tempo a que se refere:

8 % a.a. - (a.a. significa ao ano).

10 % a.t. - (a.t. significa ao trimestre).

TAXA UNITÁRIA

Temos também a taxa de juros unitária, que é igual à taxa percentual dividida por 100, sem o símbolo %:

0,15 a.m. - (a.m. significa ao mês).

0,10 a.q. - (a.q. significa ao quadrimestre)

JUROS

Juros representam a remuneração do Capital empregado em alguma atividade produtiva. Os juros podem ser capitalizados segundo dois regimes: simples ou compostos.

Quando a taxa de juros incide no decorrer do tempo, sempre sobre o capital inicial, dizemos que temos um sistema de capitalização simples (Juros simples). Quando a taxa de juros incide sobre o capital atualizado com os juros do período (montante), dizemos que temos um sistema de capitalização composta (Juros composto).

No mercado financeiro, utilizam-se apenas juros compostos, pois apresentam um rendimento de capital bem maior do que nos juros simples para um mesmo período de tempo, já que possui uma base de cálculo que é constantemente atualizada.

É fácil visualizar essa diferença, tendo em vista que os juros simples crescem como uma **função do 1º grau**, crescimento linear, pois os juros, a cada intervalo de tempo, são sempre calculados sobre o capital inicial emprestado ou aplicado. Enquanto que os juros

compostos crescem segundo uma **função exponencial**, tendo em vista que os juros de cada intervalo de tempo são calculados a partir do saldo no início do intervalo correspondente, ou seja, o juro de cada intervalo de tempo é incorporado ao capital inicial e passa a render juros também.

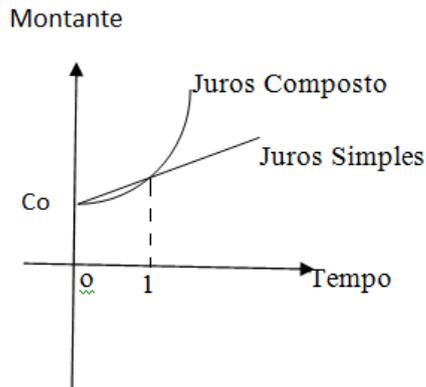


Figura [1.1] Ver [4]

JUROS SIMPLES

O regime de juros simples ou de capitalização simples é aquele em que a taxa de juros utilizada no cálculo de juros periódicos incide sempre sobre o capital inicial (C) de determinada operação. Calculam-se os juros a partir da fórmula:

$$J = C * i$$

(1.3)

JUROS COMPOSTOS

O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro e, portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia-a-dia. Os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte.

Chamamos de capitalização o momento em que os juros são incorporados ao principal.

Após três meses de capitalização, temos:

1º mês: $M = P \cdot (1 + i)$

2º mês: o principal é igual ao montante do mês anterior: $M = P \times (1 + i) \times (1 + i)$

3º mês: o principal é igual ao montante do mês anterior: $M = P \times (1 + i) \times (1 + i) \times (1 + i)$

Obtendo assim a fórmula:

$$M = P \cdot (1 + i)^n$$

(1.4)

Lembrando: a taxa i e tempo n tem que ser expressa na mesma unidade de medida de tempo.

Para calcularmos apenas os juros basta diminuir o principal do montante ao final do período:

$$J = M - P$$

(1.5)

Quando usamos juros simples e juros compostos?

A maioria das operações envolvendo dinheiro utiliza **juros compostos**. Estão incluídas: compras a médio e longo prazo, compras com cartão de crédito, empréstimos bancários, as aplicações financeiras usuais como Caderneta de Poupança e aplicações em fundos de renda fixa, etc. Raramente encontramos uso para o regime de juros simples: é o caso das operações de curtíssimo prazo, e do processo de desconto simples de duplicatas.

2.2 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Uma **progressão geométrica (P.g. ou P.G.)** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante (q). Esta constante é chamada *razão da progressão geométrica*. A letra **q** foi escolhida por ser inicial da palavra quociente. [5]

A soma dos termos de uma P.G. é obtida pela fórmula:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

(1.6)

2.3 PLANILHA ELETRÔNICA (comandos básicos)

Introdução

Uma planilha é simplesmente um conjunto de linhas e colunas, a intersecção de uma linha e uma coluna denominamos de células, que é a unidade básica da planilha, onde ficam armazenados os dados. Cada célula possui um endereço próprio, formado pela letra da coluna pelo número de linha.

Em razão da existência de duas empresas de sistemas operacionais, a Microsoft e o Br.Office, se trabalha hoje com dois programas de Planilha Eletrônica distintos, o MICROSOFT EXCEL e o OPEN OFFICE. Para a sequência deste trabalho, utilizou-se como recurso didático o programa Microsoft Excel, mas cabe ressaltar que todos os procedimentos mostrados para este software também se aplicam semelhantemente à planilha eletrônica do Br.Office, que é o Open Office.

Noções básicas do Microsoft Excel

Iniciando o Microsoft Excel

1. Clique no botão **Iniciar / Programas / Microsoft Office / Microsoft Office Excel** e clique para iniciar o programa.

Encerrando o Microsoft Excel

As três maneiras mais comuns de fechar o MS-Excel são:

1. A partir do menu **Arquivo**, escolha **Sair** ou,
2. Clique no **X** no canto superior direito da janela ou,
3. Pressione duas vezes o botão do mouse com o ponteiro posicionado na caixa do menu **Controle do Aplicativo**.

Observação: se você efetuou alterações em qualquer documento ou modelo desde a última vez em que ele foi salvo, será emitida uma mensagem perguntando se você quer salvar ou não as alterações antes de finalizar. Isso ocorrerá também quando você fechar o Windows, sem primeiro fechar o MS-Excel.

Formatando

Barra de ferramentas Formatação

A barra de ferramentas **Formatação** contém botões que irão ajudá-lo a formatar objetos, células e o conteúdo das células.

Conhecendo a janela do Microsoft Excel

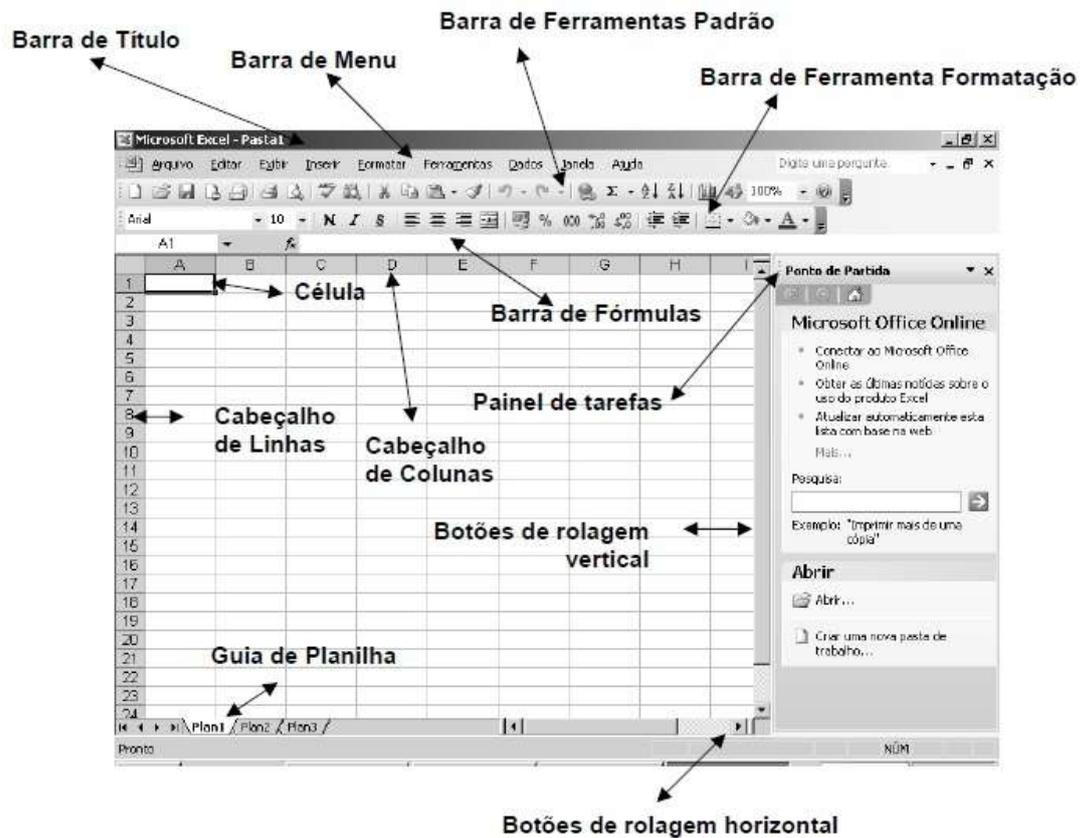


Figura [1.2]

Ver [4]

Fórmulas e Funções

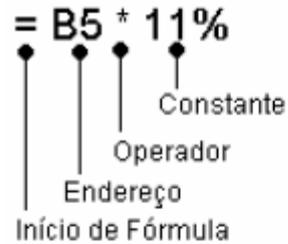
Criação de fórmulas:

As fórmulas de cálculo são necessárias para a realização de operações aritméticas e atualização dos dados após modificação. Estes cálculos podem ser simples operações aritméticas ou complexas equações matemáticas.

As fórmulas em Excel são sempre iniciadas pelo sinal de “=”.

Os elementos mais usuais numa fórmula são os **operadores**, os **endereços** e os **valores constantes**.

- **Exemplo:**



Tipos de Operadores	Operador	Exemplo
<i>Aritméticos</i>	+ - / * % ^	Adição Subtracção Divisão Multiplicação Percentagem Potenciação =15000*16% =(C10*12)/B12 =B3*12+4^2
<i>Comparação</i>	= > < >= <= <>	Igual Maior Menor Mair ou Igual Menor ou Igual Diferente =D14>=100000 (Devolve o valor Verdadeiro {True} ou Falso {False}, de acordo com a condição)
<i>Endereço</i>		Área (<i>Range</i>): conjunto de células compreendidas entre dois endereços. B3:C8 União entre um conjunto de células D4;D9
<i>Texto</i>		Concatenação: junção de dois ou mais conjuntos de texto =G10&G11 =C12&"Horas"

Figura 1.3

Ver [4]

2.4 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (Tabela Price) e SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

Primeiramente, o que vem a ser amortização? Segundo o Dicionário Aurélio, seria "extinguir a dívida aos poucos ou em prestações", ou, "abater dívidas, efetuando o pagamento correspondente".

A própria raiz do termo amortização, vem de a+morte+izar, ou seja, fazer "morrer" determinada obrigação, ou dívida. Sempre que pagamos determinada dívida, estamos, portanto, saldando-a, quitando-a, ou amortizando-a (matando-a).

Na literatura especializada, há diversos métodos de quitação de dívidas, ou seja, de sistemas de amortização. Uns mais simples, outros um pouco mais complexos, mas nota-se que o objetivo de todos é o pagamento do principal, isto é, de um determinado valor contraído em empréstimo ou financiamento.

Tabela Price, também chamado de **sistema francês de amortização**, é um método usado em amortização de empréstimo cuja principal característica é apresentar prestações (ou parcelas) iguais. O método foi apresentado em 1771 por Richard Price em sua obra "Observações sobre Pagamentos Remissivos" (em inglês: *Observations on Reversionary Payments*). O método foi idealizado pelo seu autor para pensões e aposentadorias.

No sistema PRICE as prestações são constantes, e calculadas segundo uma série uniforme de pagamentos. O valor amortizado é crescente ao longo do tempo, ao contrário dos juros, que decrescem proporcionalmente ao saldo devedor. Normalmente este sistema é utilizado para financiamentos de carros, eletrodomésticos, empréstimos bancários de curto prazo, etc. [6]

O Sistema de Amortização Constante (SAC) é uma forma de amortização de um empréstimo pelo pagamento de prestações de crescentes que incluem os juros, amortizando assim partes iguais do valor total do empréstimo.

Neste sistema o saldo devedor é reembolsado em valores de amortização iguais. Desta forma, no sistema SAC o valor das prestações é decrescente, já que os juros diminuem a cada

prestação. O valor da amortização é calculada dividindo-se o valor do principal pelo número de períodos de pagamento, ou seja, de parcelas.

O SAC é um dos tipos de sistema de amortização utilizados em financiamentos imobiliários e sua principal característica é que ele amortiza um percentual fixo do saldo devedor desde o início do financiamento. Esse percentual de amortização é sempre o mesmo, o que faz com que a parcela de amortização da dívida seja maior no início do financiamento, fazendo com que o saldo devedor caia mais rapidamente do que em outros mecanismos de amortização. [7]

CAPÍTULO III

3. JUROS SIMPLES e JUROS COMPOSTOS

3.1 JUROS SIMPLES

A título introdutório, vejamos o seguinte exemplo:

Considere que R\$100,00 são aplicados à taxa de juros simples de 1% ao mês, durante 3 meses; teríamos neste caso:

- Juros produzidos ao final do primeiro mês: $J = 100.(1\%) = 100.(1/100) = \text{R}\$1,00$
- Juros produzidos ao final do segundo mês: $J = 100.(1\%) = 100.(1/100) = \text{R}\$1,00$
- Juros produzidos ao final do terceiro mês: $J = 100.(1\%) = 100.(1/100) = \text{R}\$1,00$

Notas:

(a) observe que os juros simples são calculados sempre em relação ao capital inicial de R\$100,00.

(b) $1\% = 1/100 = 0,01$; de uma forma geral, $x\% = x/100$.

Então, se um capital inicial **P** for aplicado a juros simples de taxa **i** por período, durante **n** períodos e lembrando que os juros simples incidem sempre sobre o capital inicial **P**, podemos escrever:

$$J = P \cdot i \cdot n$$

(2.1)

onde **J** = juros produzidos depois de **n** períodos, do capital **P** aplicado a uma taxa de juros por período, igual a **i**.

No final de **n** períodos, é claro que o capital será igual ao capital inicial, adicionado aos juros produzidos no período. O capital inicial adicionado aos juros do período é denominado montante (**M**). Logo, teremos:

$$M = P + J = P + P.i = P(1 + i.n)$$

$$\text{Portanto, } M = P(1 + in)$$

Nota: em ambas as fórmulas $J = Pin$ e $M = P(1 + in)$, o número de períodos n e taxa i devem ser expressas em relação ao mesmo intervalo de tempo; assim, se n for expresso em meses, a taxa i deverá ser expressa em % ao mês (% a.m); se n for expresso em semestres, a taxa i deverá ser expressa em % ao semestre (% a.s), etc.

Solução:

Temos: $P = 3000$, $i = 5\% = 5/100 = 0,05$ e $n = 5 \text{ anos} = 5.12 = 60$ meses.

$$\text{Portanto, } M = 3000(1 + 0,05.60) = 3000(1+3) = 12000$$

Resposta: R\$12000,00

3.2 JUROS COMPOSTOS

Os juros compostos, popularmente denominados **juros sobre juros**, têm sua fundamentação teórica no Regime de Capitalização Composta. Enquanto o cálculo a juros simples é conhecido por cálculo linear, o cálculo a juros compostos é conhecido por cálculo exponencial.

Nota-se no diagrama a seguir que a base de cálculo do primeiro período é o capital inicial, a que se denominou de **(C)**. É exatamente sobre esse capital que será aplicada a taxa de juros e assim calculado o valor dos juros para o primeiro mês de uma determinada operação financeira.

$$J1 = C*i$$

Em seguida, para o cálculo dos juros referentes ao segundo mês, não mais se usará a mesma base de cálculo utilizada para o cálculo dos juros no primeiro mês, será tomada como base de cálculo a soma entre o capital inicial (C) e o valor dos Juros do primeiro mês (J1), soma esta que será denominada de Montante 1 (M1). Depois de encontrado o valor de M1, resta aplicar a taxa de juros sobre este valor e então encontrar os juros do segundo mês.

$$\mathbf{M1 = C + J1}$$

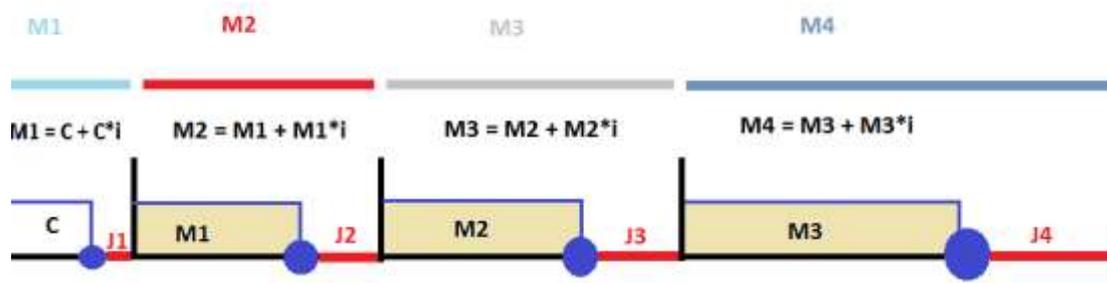
$$\mathbf{J2 = M1 * i}$$

Observe que para encontrarmos o valor dos juros no terceiro mês utilizou-se o mesmo procedimento. Adotou-se como base de cálculo (Montante 2 (M2)) o valor até então acumulado: $M2 = C + J1 + J2$, ou seja, $\mathbf{M2 = M1 + J2}$. Após o que, efetuando o produto entre Taxa de Juros e Montante 2 ($\mathbf{M2 * i}$), descobriu-se o valor dos Juros no terceiro mês.

$$\mathbf{J3 = M2 * i}$$

O mesmo se fará para o cálculo dos Juros no quarto mês e assim sucessivamente, Considera-se como base de cálculo sempre o novo montante gerado pela soma entre o capital inicial e os juros rendidos nos meses anteriores ($\mathbf{Mn = C + J1 + J2 + J3 + J4 + \dots + Jn}$), sobre a qual será aplicada a taxa constante de juros (i).

Observe no diagrama abaixo.



Vamos à resolução de um problema matemático para conseguirmos visualizar na prática a aplicação dos juros compostos em nosso cotidiano:

PROBLEMA 1

Imagine que você fez um empréstimo em um banco no valor de R\$10.000,00 (dez mil reais), a uma taxa de juros constante de 2% ao mês, com o vencimento no término do terceiro mês após a data do empréstimo. Qual o montante a ser desembolsado para pagar o empréstimo feito junto ao banco?

Como estamos tratando de juros compostos e, portanto, do cálculo de juros sobre juros, devemos saber que as bases de cálculo sobre as quais se calculará o valor dos juros em cada mês são distintas. Exemplificando, no primeiro mês o cálculo dos juros se fará sobre o valor do capital emprestado, no segundo mês o cálculo dos juros se fará sobre o valor do capital emprestado acrescido do valor dos juros referentes ao primeiro mês e assim sucessivamente.

Logo, com os dados fornecidos no problema e sabendo que a base de cálculo inicial é igual ao valor do capital emprestado (10.000,00), o primeiro passo para sua solução consiste em aplicar a taxa de juros oferecida pelo banco (2% ao mês) sobre este capital para obtermos o valor dos juros no primeiro mês.

Assim, teremos:

$$\mathbf{J_1 = C * i} \quad J = 10.000 * 0,02 = \mathbf{R\$ 200,00}.$$

Com isto, agora devemos encontrar a segunda base de cálculo para o cálculo dos juros referentes ao segundo mês desta operação.

Ora, se no primeiro mês incidiu um acréscimo (juros) no valor de 200 reais, somando-se estes juros ao capital inicial (10.000,00), teremos uma nova base de cálculo que servirá para encontrarmos o valor dos juros do segundo mês:

$$\mathbf{M_1 = C + J_1 = 10.000,00 + 200,00 = R\$ 10.200,00}.$$

Portanto, com esta nova base de cálculo encontrada, calculemos o valor dos juros para o segundo mês da operação financeira:

$$\mathbf{J2 = M1 * i} \quad J2 = 10.200 * 0,02 = \mathbf{R\$204,00.}$$

Agora resta acrescentar o valor dos juros correspondente ao segundo mês (J2) ao Montante 1 para encontrarmos uma nova base de cálculo (M2) que servirá para achar o valor dos juros do terceiro mês :

$$\mathbf{M2 = M1 + J2} = 10.200 + 204 = \mathbf{R\$ 10.404,00.}$$

Portanto, com esta nova base de cálculo encontrada, calculemos o valor dos juros para o terceiro mês da operação financeira (J3):

$$\mathbf{J3 = M2 * i} = 10.404 * 0,02 = \mathbf{R\$ 208,08.}$$

Por fim somamos o valor dos juros obtidos no terceiro mês (J3) à base de cálculo (M2) para obtermos o valor total da operação (M3 = MONTANTE):

$$\mathbf{M3 = M2 + J3} = 10.404 + 208,08 = \mathbf{R\$ 10.612,08.}$$

Portanto, o valor a ser pago pelo empréstimo ao final será de **R\$ 10.612,08**.

Agora imagine que ao invés de o empréstimo durar o período de três meses, você precisasse de 24 meses para pagá-lo. Logo se imagina o trabalho que levaria para concluir este cálculo de maneira algébrica.

Então surge a necessidade de se conhecer as fórmulas sobre a matéria, em especial a do MONTANTE, que é a equação mais importante da matemática financeira, pois dela derivam todas as demais fórmulas (do capital, da taxa de juros e do prazo), conforme se verá em capítulo apropriado.

Agora que já compreendido como funciona a rentabilidade dos juros no sistema de juros compostos, vamos entender matematicamente a fórmula do Montante (M) neste regime.

FÓRMULA do MONTANTE:

Por ser a fórmula da qual derivam todas as demais fórmulas sobre a matéria, vamos, antes de se adentrar na resolução de exercícios matemáticos, entender como chegamos à dedução da fórmula genérica do Montante.

Já vimos no capítulo anterior, que abordou os conceitos da matemática financeira, que o valor dos juros em determinada operação é calculado pelo produto entre uma Taxa de Juros (i) e um determinado Capital (C).

$$J1 = C * i$$

Depois de encontrado o valor dos juros referentes ao primeiro mês de uma determinada aplicação financeira a juros compostos, calcula-se o valor do Montante naquele primeiro mês, que nada mais é do que a soma entre o Capital e os Juros:

$$M1 = C + J$$

$$M1 = C + C * i$$

Colocando C em evidência:

$$M1 = C * (1 + i)$$

(2.2)

O mesmo se faz para a obtenção da fórmula do Montante 2, com seus respectivos juros e base de cálculo:

$$M2 = M1 + J2$$

$$M2 = M1 + M1 * i$$

Substituindo o Montante 1 (M1) na fórmula do Montante 2:

$$M2 = C*(1 + i) + i*(C*(1 + i))$$

$$M2 = C + C*i + C*i + C*i^2$$

$$M2 = C*i^2 + 2C*i + C$$

$$M2 = C(i^2 + 2*i + 1)$$

$$\boxed{M2 = C*(i + 1)^2}$$

Do mesmo modo, encontra-se a fórmula para o Montante 3:

$$M3 = M2 + J3$$

$$M3 = C*(i + 1)^2 + (C*(i + 1)^2)*i$$

$$M3 = C*i^2 + 2C*i + C + Ci^3 + 2C*i^2 + C*i$$

$$M3 = C*(i^2 + 2i + i^3 + 2i^2 + i + 1)$$

$$M3 = C*(i^3 + 3i^2 + 3i + 1)$$

$$M3 = C*(1 + i)^2 * (i + 1)$$

$$\boxed{M3 = C*(1 + i)^3}$$

Agora, vamos comparar as três fórmulas obtidas para fazermos a indução matemática acerca da fórmula genérica do Montante:

$$\boxed{M1 = C*(1 + i)}$$

$$\boxed{M2 = C*(i + 1)^2}$$

$$\boxed{M3 = C*(1 + i)^3}$$

Note que na medida em que se calcula o valor do montante mês a mês, o valor dos juros aumenta, numa proporção exponencial. Ora, no primeiro mês o valor dos juros fica condicionado a um expoente (1), no segundo mês ele se condiciona a um expoente (2), no terceiro mês a um expoente (3) e assim por diante.

Desta forma, podemos concluir uma fórmula genérica para o cálculo do montante em um determinado período (n):

$$M = C * (1 + i)^n$$

(2.3)

Vejamos agora a resolução do problema anterior com a utilização da fórmula acima, para o qual recorreremos ao recurso didático do Microsoft EXCEL.

CALCULANDO O VALOR DO MONTANTE NA PLANILHA ELETRÔNICA EXCEL

Após a análise passo a passo de como se calcular os juros compostos em uma operação financeira, faremos o mesmo cálculo utilizando agora a fórmula do Montante com o auxílio do Programa de Informática Microsoft EXCEL.

Primeiro colocamos os conceitos da matemática financeira nas células:

A1 = Valor do empréstimo (VALOR PRESENTE/CAPITAL)

A2 = Prazo

A3 = Taxa de Juros (i)

A4 = Montante

Em seguida, nas células D1, D2 e D3 colocamos os dados informados no problema, que correspondem aos conceitos inseridos na coluna A.

	A	B	C	D
1	Valor do empréstimo			10.000,00
2	prazo			3
3	taxa de juros			0,02
4	montante			?

Ao final, resta calcular o valor do MONTANTE através da inserção da fórmula do montante na célula D4, substituindo as variáveis da fórmula genérica pelos identificadores das células respectivas:

$$M = C * (1 + i)^n$$

		SOMA			
		A	B	C	D
1	Valor do empréstimo				10.000,00
2	prazo				3
3	taxa de juros				0,02
4	montante				=D1*(1+D3)^D2

Assim temos na célula D4 a seguinte expressão: $M = D1 (1 + D3) ^ D2$.

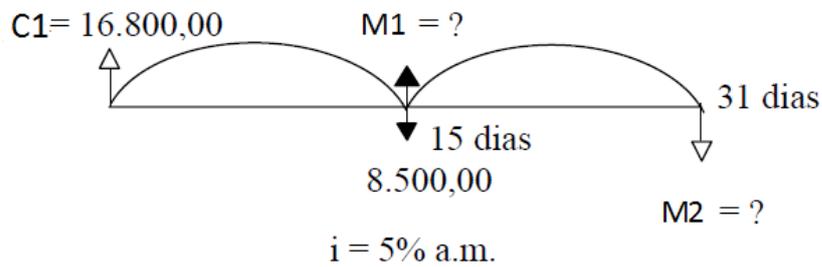
		D4			
		A	B	C	D
1	Valor do empréstimo				10.000,00
2	prazo				3
3	taxa de juros				0,02
4	montante				10612,08

E então encontramos o valor final da operação. Após o término dos três meses, você terá que pagar ao banco a quantia de **R\$ 10.612,08**.

Vejamos agora outro problema que envolve a fórmula do montante:

PROBLEMA 2

Uma empresa fez um empréstimo no valor de R\$16.800,00 pelo prazo de 31 dias a uma taxa de 5% a.m. Se, 15 dias depois, ela fizer um pagamento de R\$8.500,00, de quanto será a dívida no vencimento?



Primeiro calculamos o valor do Montante (M1) no 15º dia, ou seja, quanto de juros será acrescido ao capital inicial (C1) pela decorrência do prazo de 15 dias:

$$M1 = C1 * (1 + i)^n$$

$$M1 = 16.800 * (1 + 0,05)^{(1/2)}$$

$$M1 = 16800 * 1,024695$$

$$M1 = 17.214,88$$

C4		fx		=C1*((1+C3)^(C2))	
	A	B	C	D	E
1	CAPITAL		R\$ 16.800,00		
2	PRAZO		0,5		
3	TAXA DE JUROS (i)		0,05		
4	MONTANTE 1		17214,87729		

Assim, no 15º dia, já teríamos uma dívida no valor de R\$17.214,88, sobre a qual incidiria a taxa de juros para o cálculo dos juros para os próximos dias. Contudo, note que a empresa, no 15º dia, efetuou o pagamento de parte desta dívida no valor de R\$8.500,00. Portanto, não seria justo incluir no cálculo dos juros para os próximos 16 dias este valor. Daí a necessidade de subtrairmos os R\$8.500,00 do Montante (M1) para encontrarmos um Capital (C2):

$$C2 = R\$ 17.214,88 - R\$ 8.500,00 = \mathbf{R\$ 8.714,88}$$

Agora que temos uma base de cálculo correta, resta efetuar o cálculo dos juros que incidem sobre este Capital (C2) na fórmula do montante.

Antes, atente-se ao prazo restante no empréstimo, que é de 16 dias e, portanto, tendo em vista a necessidade da transformação para a mesma unidade de medida da taxa de juros (em meses), substituímos o prazo (n) na fórmula pelo valor (16/30).

$$M2 = C * (1 + i)^n$$

$$M2 = 8.714,88 * (1+0,05)^{(16/30)}$$

$$M2 = \mathbf{8.944,63}.$$

C4		fx		=C1*((1+C3)^C2)	
	A	B	C	D	E
1	CAPITAL 2		R\$ 8.714,88		
2	PRAZO		0,53333333		
3	TAXA DE JUROS (i)		0,05		
4	MONTANTE		8944,6298		
5					

No vencimento do empréstimo a dívida será de aproximadamente **R\$ 8.944,63**.

FÓRMULA DA TAXA DE JUROS

Na Matemática, quando se depara com uma fórmula que possui uma única variável em função de outras n variáveis, como é o caso da fórmula do montante trabalhada nos problemas anteriores, onde a variável **M** (montante) é calculada em função de três outras variáveis (capital, taxa de juros e período), é perfeitamente possível a inversão da fórmula para calcular o valor de quaisquer outras variáveis nela inseridas. Vejamos:

Fórmula do Montante (M):

$$M = C * (1 + i)^n$$

Note que a variável taxa de juros (**i**) pertence ao segundo membro da equação.

E é exatamente o valor desta variável (**i**) que está sendo pedido no problema 3.

Portanto, basta invertermos a fórmula do Montante, isolando a incógnita (**i**) no primeiro membro da equação e a colocando em função de todas as demais variáveis (montante, período e capital), agora situadas no segundo membro da fórmula. Observe como foi feita esta inversão:

$$M = C * (1 + i)^n$$

$$M/C = (1 + i)^n$$

$$\sqrt[n]{M/C} = 1 + i$$

$$(M/C)^{1/n} = 1 + i$$

$$\boxed{i = (M/C)^{1/n} - 1} \quad (2.4)$$

Assim, obtemos a fórmula para o cálculo da Taxa de Juros (**i**). Veja o problema abaixo.

PROBLEMA 3

Uma empresa teve que desembolsar R\$ 127.628,15 para pagar um empréstimo feito junto a um banco. Considerando que o prazo contratado para o pagamento do empréstimo foi de 5 meses e que o valor emprestado foi de R\$ 100.000,00, encontre a taxa de juros mensal oferecida pelo banco.

$$i = (M/C)^{1/n} - 1$$

D4		fx		=((D2/D1)^(1/D3))-1		
	A	B	C	D	E	F
1	CAPITAL			R\$ 100.000,00		
2	MONTANTE			R\$ 127.628,15		
3	PRAZO			5		
4	TAXA DE JUROS (i)			0,04999999		

Basta converter o valor da taxa de juros que está em decimais para a unidade percentual (%) e obtemos a taxa de juros aplicada pelo banco.

$$i = 0,05 * 100 = 5\%.$$

A taxa de juros é de aproximadamente 5% ao mês.

TAXAS EQUIVALENTES A JUROS COMPOSTOS

Duas taxas são consideradas equivalentes, a juros compostos, se, aplicadas sobre um mesmo capital, por um período equivalente de tempo, gerarem montantes iguais.

Assim, a título de exemplo, pode-se afirmar que a Taxa de Juros de 10% a.m. (**ao mês**) equivale à Taxa de 213,84% a.a. (**ao ano**) a juros compostos, se tomarmos um capital de R\$ 100,00 e efetuarmos uma aplicação por 12 meses, usando a taxa mensal ou por 1 ano, usando a taxa anual, e obtivermos o mesmo montante. Veja:

$$M = C * (1+i)^n$$

$$M = 100 * (1+0,10)^{12} = R\$313,84$$

$$M = 100 * (1+2,1384) = R\$313,84$$

Assim, apresentamos a fórmula geral para o cálculo da fórmula equivalente a juros compostos, representada pela seguinte equação:

$$I_p = (1 + i_c)^{n_p/n_c} - 1$$

(2.5)

i_p = taxa procurada

i_c = taxa conhecida

n_p = prazo da taxa procurada

n_c = prazo da taxa conhecida

Utiliza-se esta fórmula para fazer a conversão de uma taxa de juros informada sobre qualquer unidade (dias, mês, trimestre...) para qualquer outro período de tempo, por exemplo, de meses para dias, trimestre para ano, ano para dias, etc. Observe o exemplo:

Exemplo

Vou comprar um celular a uma taxa de 0,22% ao dia, se eu efetuar o pagamento deste celular no 35º dia, quanto será a taxa de juros referente ao período dos 35 dias?

$$I_p = (1 + i_c)^{n_p/n_c} - 1$$

$I_p = ?$ (ao período)

$i_c = 0,22\%$

$N_p = 35$

$N_c = 1$ dia

$$I_p = (1 + 0,0022)^{35} - 1$$

$$I_p = 1,078 - 1$$

$$I_p = 0,078 \text{ a.p.}$$

Assim, a taxa de juros referente ao período de 35 dias é de aproximadamente **7,8%**.

PROBLEMA 4

Maria investiu R\$1500,00 em uma poupança com rendimentos calculados sobre uma taxa anual de 27% a.a. a juros compostos. Suponha que depois de passado 1 mês da data desse investimento, Maria queria retirar o montante gerado por essa aplicação. Quanto será o montante no final deste primeiro mês?

$$I_p = (1 + i_c)^{np/nc} - 1$$

$$I_p = (1 + 0,027)^{30/360} - 1$$

D2		fx ==((1+D1)^(D3/D4))-1				
	A	B	C	D	E	F
1	TAXA CONHECIDA Ic			27%		
2	TAXA PROCURADA Ip			0,020118		
3	PRAZO DA Ip (Np)			30		
4	PRAZO DA Ic (Nc)			360		

Com o auxílio do EXCEL efetuou-se o cálculo para encontrar o valor da Taxa mensal. Agora resta aplicar a fórmula do Montante para encontrarmos os rendimentos ao final deste primeiro mês.

$$M = C * (1 + i)^n$$

$$M = 1500 * (1 + 0,0201)$$

$$M = 1500 * 1,0201$$

$$M = 1530,15$$

O valor do Montante ao final do primeiro mês da aplicação é de **R\$1.530,15**.

FÓRMULA DO CAPITAL INICIAL (VALOR PRESENTE)

PROBLEMA 5

Se uma empresa Alfa desembolsou R\$100.000,00 no vencimento de um empréstimo contratado por 90 dias com um Banco Beta, à taxa de 5,65% a.m. (ao mês), qual foi o valor emprestado pelo banco àquela empresa?

A partir da leitura do problema extraem-se as informações de que a empresa Alfa efetuou um empréstimo do Banco Beta, para pagá-lo no prazo de 90 dias, período durante o

qual incidiriam juros sobre juros a uma taxa de 5,65% ao mês. Após o término deste prazo, a empresa Alfa teve que pagar ao Banco Beta a quantia de R\$100.000,00.

A pergunta a ser respondida é: Qual o valor do empréstimo feito junto ao Banco Beta? Ou ainda, utilizando a terminologia da matemática financeira, devemos calcular o valor do **capital/valor presente**.

Então os mesmos passos usados para resolver o problema anterior a partir da fórmula do Montante serão aqui aplicados, com a diferença de que agora todas as variáveis contidas na fórmula ficarão em função de uma única variável, do CAPITAL (C). Observe:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Em relação à fórmula da taxa de juros (i), a inversão da fórmula do montante em função do capital se mostra mais fácil, bastando inverter a operação e o membro da potência $(1 + i)^n$, assim isolando a incógnita (C) e portanto, gerando a fórmula para calcularmos o valor presente da questão.

$$C = M / (1 + i)^n$$

(2.6)

Assim já podemos substituir os dados da questão na fórmula:

$$C = 100.000 / (1 + 0,0565)^n$$

Porém, antes de fazer a substituição da variável (n) pelo período informado na questão, devemos atentar ao detalhe de que a unidade da taxa de juros é dada em meses, e não em dias, por isso devemos antes fazer a conversão dos 90 dias informados no problema para meses, o que parece simples, já que um mês tem 30 dias. Assim, basta dividir 90 por 30 e encontrar o período de duração do empréstimo:

$$90/30 = 3$$

Agora sim vamos à substituição e aos cálculos:

$$C = 100.000 / (1 + 0,0565)^3$$

$$C = 100.000 / 1,0565^3$$

$$C = 100.000 / 1,179257$$

$$C = \mathbf{84.799,16}$$

Então o valor do empréstimo (capital/valor presente) feito pela empresa Alfa junto ao Banco Beta foi de R\$84.799,16.

Vamos efetuar o mesmo cálculo no EXCEL:

Nesta primeira tabela inserimos os dados informados na questão.

C5			
	A	B	C
1	CAPITAL		?
2	PRAZO		90 DIAS
3	TAXA DE JUROS (i)		0,0565
4	MONTANTE		100.000

Em seguida, basta aplicar a fórmula do capital na respectiva célula (célula C1) e fazer a conversão do prazo que está em dias para a unidade da Taxa de juros (i) que está em meses. Esta conversão pode ser feita dentro da própria fórmula do Capital:

C1				fx =C4/(1+C3)^(90/30)		
	A	B	C	D	E	F
1	CAPITAL		84799,15			
2	PRAZO		90 Dias			
3	TAXA DE JUROS (i)		0,0565			
4	MONTANTE		100.000			

Assim obtemos o valor aproximado do empréstimo: **R\$ 84.799,15**.

Você observou que, com exceção do Problema 2, todos os problemas acima têm algo em comum? Todos os empréstimos realizados foram pagos em uma única parcela, de modo que a base de cálculo para os juros aumentava a cada mês.

Então surge a dúvida, as mesmas fórmulas que utilizamos para calcular o Montante, Capital e a Taxa de Juros neste capítulo servirão também para calcular estas mesmas variáveis quando trabalharmos com um sistema de financiamento (parcelamento) no qual incidem juros compostos? A resposta veremos no capítulo seguinte.

CAPÍTULO IV

4. SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE JUROS

4.1 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS

No capítulo anterior vimos como é possível calcular o valor dos juros incidentes sobre determinado capital quando o resgate deste capital se der em uma única parcela. Neste capítulo iremos aprender a efetuar o cálculo dos juros que incidem sobre uma base de cálculo decrescente, ou seja, uma base de cálculo amortizada pelo pagamento mensal de parte desse capital. É o que se denomina Sistema de Amortização Francês na matemática financeira, ou simplesmente **Tabela Price**.

A Tabela Price usa o regime de juros compostos para calcular o valor das parcelas de um empréstimo e, dessa parcela, qual é a proporção relativa ao pagamentos dos juros e a amortização do valor emprestado. [7]

Tomemos como exemplo um empréstimo de \$ 1.000,00 com taxa de juros de 3% ao mês a ser pago em 4 parcelas mensais iguais. Para calcular o valor da parcela, deve-se usar a fórmula de juros compostos combinada com a da progressão geométrica, resultando em:

$$P = \frac{C}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{1+i}\right)^k} \quad (3.1)$$

- **P:** Valor da parcela
- **C:** Capital (Valor Presente)
- **i:** Taxa de juros
- **n:** Número de períodos

$$P = \frac{1000}{\sum_{k=1}^4 \left(\frac{1}{1+0,03}\right)^k} = 269,03$$

No caso do exemplo, o cálculo da parcela (p) é :

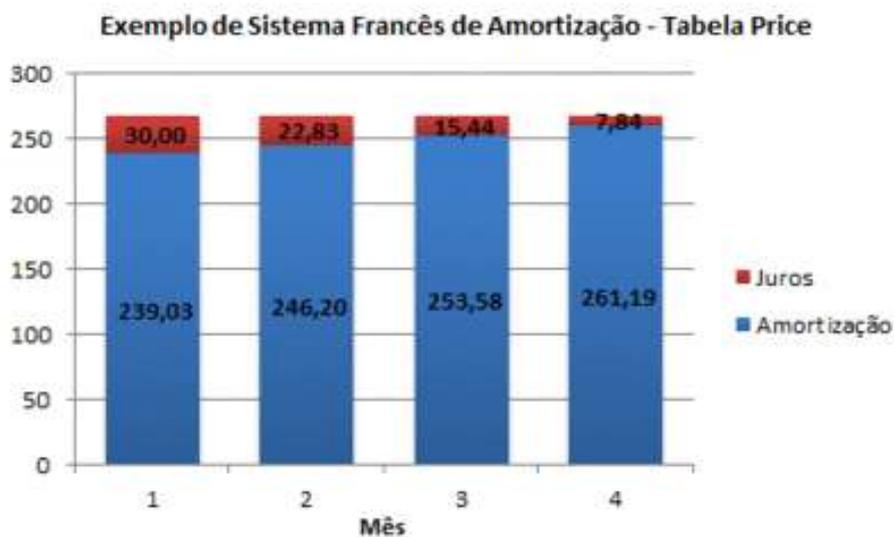


Figura 3; Ver [8]

Um mês depois do empréstimo, o saldo devedor cresce 3% indo para \$ 1.030,00, porém, como também deve ocorrer o pagamento de R\$ 269,03, o saldo devedor passa a ser \$ 760,97.

Perceba que o pagamento da parcela fez a amortização do valor emprestado para efeito do cálculo dos juros do próximo mês no valor de R\$ 239,03 e cobriu os juros do 1º mês de R\$30,00 (R\$239,03 + R\$30,00 = R\$269,03)

Assim, o saldo devedor após o pagamento da primeira parcela será de R\$760,97, sobre o qual incidirá a taxa de juros de 3% para aferir os juros referentes ao segundo mês. O mesmo ocorre nos meses seguintes, porém, como o saldo devedor diminui a cada mês, o valor das parcelas relativo ao pagamento dos juros é decrescente. Observe a tabela após os cálculos:

Mês	Saldo Devedor	Prestação	
		Amortização	Juros
0	1.000,00		
1	760,97	239,03	30,00
2	514,78	246,20	22,83
3	261,19	253,58	15,44
4	0,00	261,19	7,84

Note que as prestações são constantes, a amortização do capital é menor no início e maior no final, enquanto que os juros vão decaindo ao longo do período, já que o saldo devedor diminui a cada mês até chegar a zero. [6]

Desta forma, observou-se que o cálculo dos juros fica condicionado a um saldo devedor, que por sua vez é determinado pelo pagamento das parcelas do financiamento, diferentemente do que ocorre com os cálculos no capítulo anterior, no qual a base de cálculo dos juros consistia em um acúmulo do capital inicial mais os juros em cada mês do período, sem qualquer amortização da dívida durante o período.

Vamos trabalhar a fórmula da Tabela Price na resolução de alguns problemas.

PROBLEMA 1

Uma concessionária financia um automóvel no valor de R\$48.000,00 (quarenta e oito mil reais) a uma taxa de 3% ao mês para pagamento em 48 meses. Sabendo que o valor das prestações é fixo, qual o valor de cada prestação?

Note que se fossemos resolver este problema passo a passo levaríamos um tempo enorme para calculá-lo. Daí a importância da utilização dos recursos do EXCEL para pouparmos tempo na solução de problemas do nosso cotidiano, além da vantagem de garantia de maior precisão sobre nossos cálculos.

Observe o que aconteceria:

$$P = \frac{48.000}{\sum_{x=1}^{n=48} \left(\frac{1}{1+i} \right)^x} \quad P = \frac{48.000}{\left(\frac{1}{1+0,03} \right)^1 + \left(\frac{1}{1+0,03} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{1+0,03} \right)^{48}}$$

Esbarraríamos em um somatório com 48 termos, o que certamente consumiria um tempo bem maior do que o tempo que se gastaria aplicando a mesma fórmula no EXCEL. Portanto, segue abaixo a demonstração passo a passo de como efetuar este cálculo no Microsoft EXCEL:

Primeiro colocamos os conceitos da matemática financeira nas células:

Coluna A = Número de parcelas (n) = (A1... A49)

Coluna B = $(1/1 + i)^n$

Célula D2 = Taxa de Juros (i) = (3% = 0,03)

Célula F2 = Somatório = SOMA (B2: B49)

Célula I2 = Valor do Capital (C) = R\$48.000,00

Célula K2 = Valor do Montante

Note que o primeiro passo para resolvermos esta operação é calcular o denominador da fórmula, ou seja, fazer o somatório entre os (n) termos do problema dentro da função $(1/1+i)$, a que se chamou de uma variável (K).

$$K = (1/1+i) \quad K^n = (1/1+i)^n$$

$$P = \frac{C}{\sum_{x=1}^{n=48} \left(\frac{1}{1+i} \right)^x}$$

Para isto, basta inserir na célula B2 a função K, nos seguintes termos:

$$=1/(1+\$D\$2)^{A2}$$

Note que a função do símbolo ($\$$) ligado à célula D2 é a de fixar o valor da Taxa de Juros (i) na fórmula, não importando em quais linha e coluna ela esteja inserida, sempre será calculada sobre a taxa de juros constante de 3%.

		B2	fx =1/(1+\$D\$2)^A2									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	i	ki		TAXA (i)		SOMATÓRIO n = 48			CAPITAL		MONTANTE	
2		1	0,970874		0,03				R\$ 48.000,00			

Em seguida, com a célula B2 selecionada, é só arrastar o mouse até a célula B49 para que a fórmula seja calculada sobre os demais termos da coluna A:

		B2	fx =1/(1+\$D\$2)^A2									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	i	ki		TAXA (i)		SOMATÓRIO n = 48			CAPITAL		MONTANTE	
2		1	0,970874		0,03				R\$ 48.000,00			
3		2	0,942596									
4		3	0,915142									
5		4	0,888487									
			⋮									
			⋮									
47		46	0,256737									
48		47	0,249259									
49		48	0,241999									
50												

Agora que já foram encontrados todos os valores do somatório, basta somá-los, por meio da inserção da função SOMA do Excel na célula F2 com o intervalo de células correspondente a todos os valores de (K^n) encontrados anteriormente.

		F2	fx =SOMA(B2:B49)									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	i	ki		TAXA (i)		SOMATÓRIO n = 48			CAPITAL		MONTANTE	
2		1	0,970874		0,03	25,26671			R\$ 48.000,00			

Obtido o valor do somatório, agora ficou muito simples concluir o cálculo. Resta dividir o valor do capital pelo denominador encontrado. Veja:

		K2		fx		=I2/F2					
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	i	ki		TAXA (i)		SOMATÓRIO n = 48			CAPITAL		MONTANTE
2	1	0,970874		0,03		25,26671			R\$ 48.000,00		R\$ 1.899,73

Assim, temos na célula K2 o valor do montante em cada mês, em outras palavras, a parcela a ser paga todo mês será a quantia de **R\$ 1.899,73**.

Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma Progressão Geométrica (P.G.) finita:

Pôde-se notar que este tipo de problema demanda um pouco mais de trabalho, ainda que com o auxílio do recurso Excel, isto em razão de a fórmula apresentada comportar a função **Somatório** (\sum), o que exige um cálculo à parte no Excel.

Por isto, apresentamos outra forma de resolver o mesmo problema, através da fórmula da soma de uma P.G. finita.

Ora, se a fórmula abaixo apresenta o somatório de uma função exponencial $(1/1+i)^n$, com expoente (n) variando de 1 até 48 neste caso, logo vemos que o denominador da equação representa a soma dos termos de uma P.G. finita, já que qualquer termo do somatório é sempre igual ao produto do termo anterior pela **razão** (q) = $(1/1+i)$. Observe:

$$P = \frac{48.000}{\sum_{x=1}^{n=48} \left(\frac{1}{1+i} \right)^x} \quad P = \frac{48.000}{\left(\frac{1}{1+0,03} \right)^1 + \left(\frac{1}{1+0,03} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{1+0,03} \right)^{48}}$$

Assim, comecemos a resolver o Problema 1 no Excel com a soma dos termos da P.G. finita ($a_1 + a_2 \dots + a_{48}$) através da inserção da seguinte fórmula na célula C4:

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}$$

C4		fx		=E1*(1-(E1^48))/(1-E1)		
	A	B	C	D	E	F
1	Razão (q)	=a1	=1/1+i		0,970874	
2						
3						
4	Soma da P.G.		25,26671			
5						

Na sequência, efetuamos os mesmos passos feitos anteriormente, dividindo o valor do capital pelo resultado acima encontrado.

$$P = \frac{C}{\frac{S_n = a_1 (1 - q^n)}{1 - q}}$$

(3.2)

C9		fx		=C6/C4		
	A	B	C	D	E	
1	Razão (q)	=a1	=1/1+i		0,970874	
2						
3						
4	Soma da P.G.		25,26670664			
5						
6	CAPITAL		R\$ 48.000,00			
7						
8						
9	P = C/Sn		R\$ 1.899,73			

Veja que chegamos ao mesmo resultado: **R\$1.899.73**.

Suponha agora que estamos diante de um problema que forneça o valor da parcela a ser paga, do capital inicial e ainda o prazo do financiamento. Certamente ele pediria para que você calculasse a Taxa (i) que estaria sendo aplicada ao problema.

Conforme vimos no capítulo anterior, a saída foi utilizar a fórmula do Montante para fazer sua conversão em uma fórmula da Taxa, bastando para isso isolar o termo (i).

Contudo, ao procedermos da mesma forma, só que agora tendo como referência a fórmula da Parcela, fornecida pela Tabela Price, esbarramos em um cálculo no qual não se é possível isolar a variável (i). Observe:

$$P = \frac{C}{\frac{Sn = a1(1 - q^n)}{1 - q}}$$

$$\text{Razão } (q) = 1/1+i$$

$$P = \frac{C}{\frac{q^n(1-q^n)}{1-q}}$$

$$\frac{C}{P} = \frac{q^n(1-q^n)}{1-q}$$

Note que não é possível isolar a razão (q). [9]

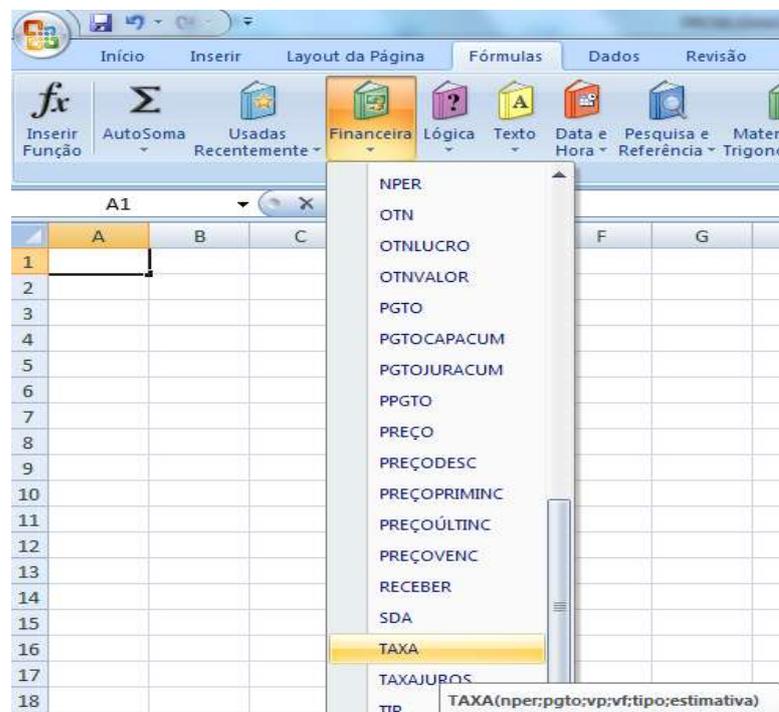
Com isto, não é matematicamente possível determinar uma fórmula algébrica para o cálculo da taxa de juros (rendimento) neste sistema de capitalização. Por isso recorremos a uma função do Microsoft Excel denominada **TAXA**.

PROBLEMA 2

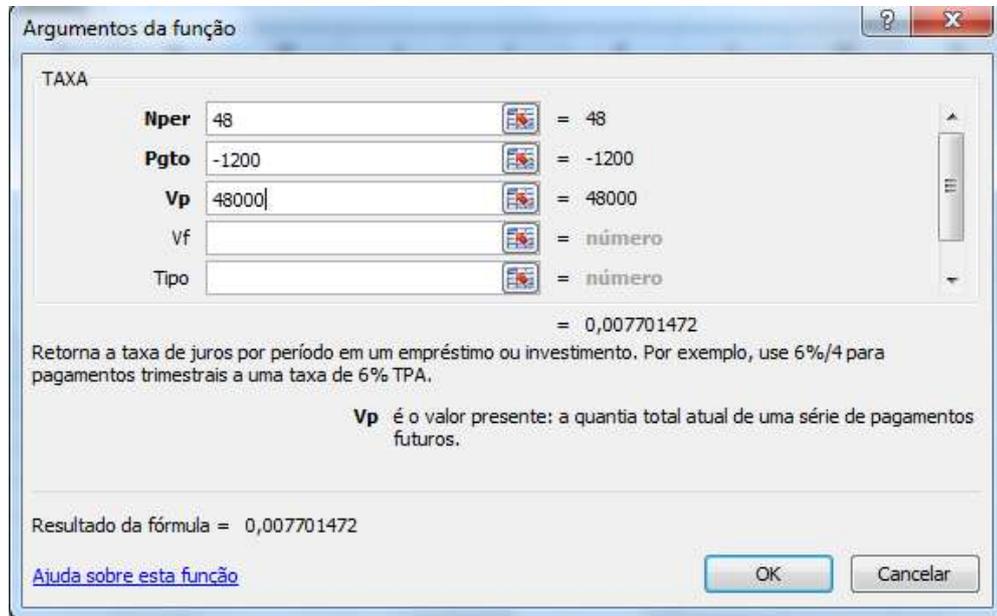
Uma concessionária financia um carro no valor de R\$48.000,00 em 48 parcelas de R\$1.200,00 cada. Qual a taxa que está sendo cobrada pelo banco?

Como não existe uma fórmula específica para o cálculo da Taxa de Juros proposto no problema que envolve a Tabela Price, que só se fará por meio de algoritmo, devemos seguir os passos seguintes no Excel:

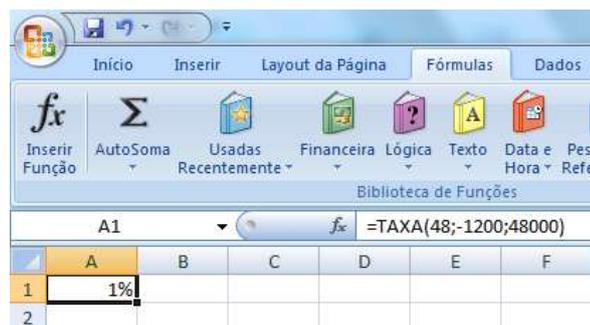
- Selecionar a opção **Fórmulas**
- Clicar no ícone **Financeira**
- Escolher a opção **TAXA**



Aparecerá então a janela abaixo, na qual devemos inserir os dados fornecidos na questão, da maneira como ilustrado.



Em seguida, com um simples toque no botão ENTER aparecerá dentro da célula selecionada automaticamente o valor da Taxa de Juros que está sendo cobrada, que no caso do problema proposto é de 1%.



PROBLEMA 3

Um computador de R\$5.000,00 pode ser adquirido através de seis prestações mensais de R\$ 938,47 cada, a juros compostos sob uma taxa mensal, sem entrada, ou ainda faturado no 90° dia pelo preço de R\$ 5.406,04. Em qual das opções a taxa de juros é menor?

O problema oferece duas alternativas para o pagamento do computador: a primeira consiste no parcelamento do preço do computador em 6 meses, preço este que corresponde ao valor inicial do objeto acrescido de juros compostos calculados mês a mês a uma taxa constante e não revelada no comando. A segunda alternativa seria efetuar o pagamento em apenas uma vez, no terceiro mês após a compra, sendo que o valor do computador após esses 90 dias equivale ao seu preço inicial acrescido dos juros gerados pela fluência desse prazo de 90 dias.

1ª ALTERNATIVA	2ª ALTERNATIVA
6 x de R\$938,47.	Pagamento de uma parcela de R\$ 5.306,04 em 90 dias.

Observe que a fórmula utilizada para o cálculo dos juros na primeira alternativa não será a mesma utilizada para o cálculo dos juros na segunda alternativa, pois na primeira há uma amortização mensal da base de cálculo dos juros por ocasião do pagamento das parcelas do financiamento (Sistema de Amortização Francês), enquanto que na segunda os juros incidem sobre uma base de cálculo cumulativa.

Portanto, calculemos primeiro os juros da primeira alternativa, utilizando o mesmo procedimento adotado no problema anterior:

Fórmulas – Financeira – TAXA

Argumentos da função

TAXA

Nper 6 = 6

Pgto -938,47 = -938,47

Vp 50000 = 50000

Vf = número

Tipo = número

= -0,405232735

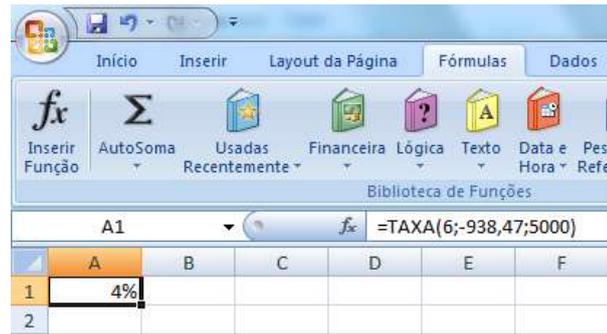
Retorna a taxa de juros por período em um empréstimo ou investimento. Por exemplo, use 6%/4 para pagamentos trimestrais a uma taxa de 6% TPA.

Nper é o número total de períodos de pagamento em um empréstimo ou um investimento.

Resultado da fórmula = -0,405232735

[Ajuda sobre esta função](#)

OK Cancelar



Então temos uma taxa de juros de 4% ao mês referente à 1ª alternativa de pagamento.

Vamos encontrar a segunda taxa de juros para compará-la à primeira.

Levando em consideração que não há nenhum pagamento no interstício dos 90 dias, logo não há que se falar em amortização dos juros, por isso a fórmula utilizada será a seguinte:

$$i = (M/C)^{(1/n)} - 1$$

Antes de efetuar a substituição das informações do problema na fórmula, observe que ainda não temos o valor do Montante (Valor Futuro), variável necessária que será utilizada na fórmula da Taxa de Juros. Para calcular o valor do Montante basta multiplicar o valor da parcela pelo número de meses (prazo) do financiamento:

$$M = R\$938,47 * 6 = \mathbf{R\$ 5.630,82.}$$

Agora sim, sabemos que depois de decorrido o período de 6 meses ($n = 6$), valor a ser pago pelo computador sobe para R\$ 5.630,82. Veja então como calculamos o valor da taxa de juros no Excel:

$$i = (M/C)^{(1/n)} - 1$$

$$i = ((5.630,82 / 5.306,04)^{(1/3)}) - 1$$

$$i = 0,02$$

$$i = 2\%.$$

Aqui também não deixamos de contar com o auxílio do Microsoft Excel para efetuar este cálculo.

D4		fx		=((D3/D1)^(1/D2))+1		
	A	B	C	D	E	F
1	CAPITAL			R\$ 5.000,00		
2	PRAZO			6		
3	MONTANTE			R\$ 5.630,82		
4	TAXA DE JUROS (i)			2,02000024		

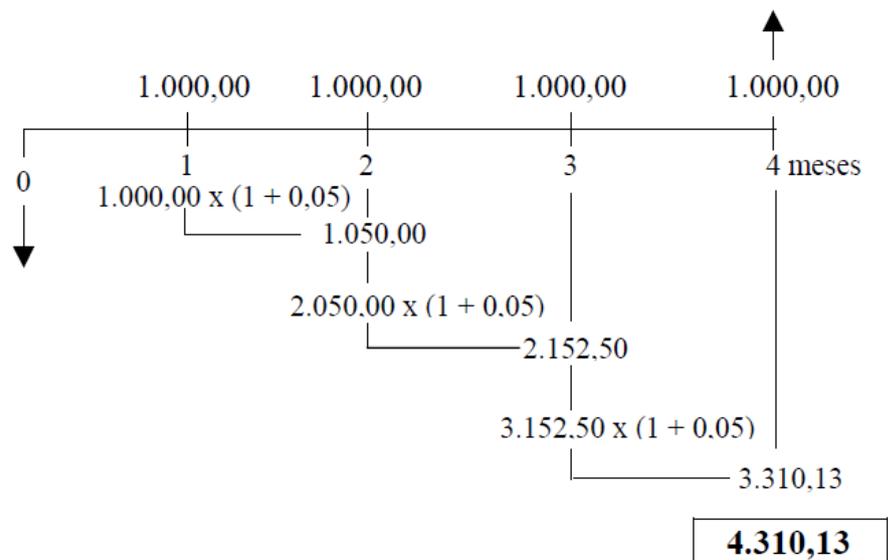
Por fim, comparando as duas taxas, é possível extrair a conclusão de que quanto maior o prazo para efetuar um pagamento, maior será o montante a ser pago ao final.

PROBLEMA 4

O problema a seguir utiliza o mesmo raciocínio dos problemas anteriores, só que de forma invertida, ou seja, ao invés de diminuir sucessivamente a base de cálculo dos juros em função do pagamento das prestações em determinado financiamento, ele traz uma situação na qual essa base de cálculo é aumentada mês a mês pelo depósito de parcelas fixas em um determinado investimento. Veja:

Pedro deposita R\$1.000,00, mensalmente, em um fundo de investimento, durante 4 meses, à taxa de 5% ao mês. Qual o montante a ser recebido por Pedro?

Conforme se analise no diagrama abaixo, os juros do primeiro mês são calculados sobre o 1º depósito de R\$1.000,00, em seguida, soma-se o 2º depósito ao montante (R\$1.000,00 + juros do 1º mês) para o cálculo dos juros no segundo mês e assim sucessivamente até o último depósito.



Fórmula $\longrightarrow FV = PV (1 + i)^n$

1º mês $\longrightarrow FV = 1.000,00 (1 + 0,05) = 1.050,00$

Depósito da 2º parcela = $\longrightarrow \frac{1.000,00}{2.050,00}$

2º mês $\longrightarrow FV = 2.050,00 (1 + 0,05) = 2.152,50$

Depósito da 3º parcela = $\longrightarrow \frac{1.000,00}{3.152,50}$

3º mês $\longrightarrow FV = 3.152,50 (1 + 0,05) = 3.310,13$

Depósito da 4º parcela = $\longrightarrow \frac{1.000,00}{4.310,13}$

Após esta visualização do cálculo feito mês a mês, que foi feito apenas para entendimento, note como resolveríamos de forma mais simples o problema com a utilização da fórmula específica do montante de uma série de parcelas iguais no Excel.

$$M = P \cdot \left\{ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right\}$$

(3.3)

C4		fx		=C1*((1+C3)^C2-1)/C3		
	A	B	C	D	E	F
1	Parcela (P)		R\$ 1.000,00			
2	Prazo (n)		4			
3	Taxa de Juros (i)		0,05			
4	Montante		4310,125			
5						

Logo, ao final do investimento, Pedro receberia o montante de **R\$4.310,13**.

QUITAÇÃO ANTECIPADA DO CRÉDITO

Outro problema de bastante utilidade prática é o que envolve a antecipação do pagamento de parcelas em determinado financiamento. Assim, digamos que você financia um videogame no valor de R\$1.000,00 sobre uma taxa de juros compostos de 3% na Tabela Price, para pagamento em 4 parcelas. Suponha que no segundo mês, quando você for efetuar o pagamento da 2ª parcela, você tenha ganhado um aumento em seu salário e, portanto, a fim de evitar o pagamento de juros, você queira antecipar a 3ª e 4ª parcelas e pagá-las juntamente com a 2ª parcela, no segundo mês.

Tendo em vista que os juros nada mais são do que a remuneração decorrente da aplicação/empréstimo de um capital em decorrência do tempo, certamente você terá direito a um abatimento dos juros, pois neste caso não se aplicariam os juros sobre a 3ª e a 4ª parcelas, já que estas seriam pagas antes do vencimento.

Então vejamos como descontar do Montante o valor referente a esses juros:

A fórmula é a seguinte [8]:

$$D = p - \frac{p}{(1+i)^n}$$

(3.4)

D é o valor do desconto referente a parcela antecipada;

p é o valor da parcela mensal;

i é a taxa de juros nominal;

n é o número de meses em que a parcela está sendo antecipada.

Vamos efetuar o cálculo do exemplo acima.

Lembre-se de que esta fórmula deve ser aplicada para cada uma das parcelas antecipadas. O que, em um problema mais complexo, poderá ser feito por meio da função SOMA no Excel, ou ainda pela fórmula da soma dos termos de uma P.G.

Obs: Como aproveitamos o exemplo explanado no começo deste Capítulo, já sabemos que o financiamento de um capital de R\$1.000,00 na Tabela Price a uma taxa de 3% a.m. gera 4 parcelas de R\$269,03, portanto nosso $P = 269,03$.

Desconto dos juros da terceira parcela:

$$D(3^a) = 269,03 - (269,03/(1+0,03))^1$$

$$D(3^a) = 269,03 - 261,20$$

$$\mathbf{D(3^a) = R\$ 7,83,00}$$

Desconto dos juros da quarta parcela

$$D(4^a) = 269,03 - (269,03/(1+0,03))^2$$

$$D(4^a) = 269,03 - (269,03/1.0609)$$

$$D(4^a) = 269,03 - 253,59$$

$$\mathbf{D(4^a) = R\$15,44}$$

Assim, somando os valores do desconto (juros que deixaram de ser cobrados) das duas parcelas antecipadas, temos o desconto total de **R\$ 23,28**, que correspondem exatamente aos juros que seriam cobrados pela fluência do 3º e 4º meses.

PROBLEMA 5

Maria financiou um carro no Banco Bradesco no valor de **R\$50.000,00**, a uma taxa de **1,5% ao mês**, para pagar em **60 parcelas iguais**. Calcule o valor de cada parcela. Depois de encontrado o valor da parcela mensal (P), descubra quanto será o desconto obtido por Maria caso ela, no **50º mês do financiamento**, antecipe o pagamento das **10 parcelas restantes**.

$$P = \frac{C}{\frac{Sn = a1(1 - q^n)}{1 - q}}$$

B5		fx = (B3*(1-B3^60))/(1-B3)				
	A	B	C	D	E	F
1	i=	0,015				
2						
3	q= 1/(1+i)	0,985222				
4						
5	Sn=	39,38027				
6						
7	CAPITAL =	R\$ 50.000				
8						
9	P = C/Sn	R\$ 1.270				

Temos o valor da Parcela = **R\$ 1.270,00**

Portanto, apliquemos agora a fórmula do desconto (D) para os dez meses restantes (51º a 60º):

$$D = p - \frac{p}{(1+i)^n}$$

Note que o n é igual ao número de meses em que a parcela está sendo antecipada, exemplificando, se eu pagar a 60ª parcela no vencimento do 50º mês, então o (n) será igual a 10, pois estaria havendo uma antecipação do pagamento da parcela, tendo em vista que esta só venceria 10 meses após a data do pagamento.

C2		fx = $=SE\$2-((SE\$2/(1+\$G\$2)^{A2}))$								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	n		Dn =		Parcela		Taxa (i)=		DESCONTO TOTAL	
2	1		18,76847		R\$ 1.270,00		0,015		987,8256	
3	2		37,25958							
4	3		55,47742							
5	4		73,42603							
6	5		91,10939							
7	6		108,5314							
8	7		125,696							
9	8		142,6069							
10	9		159,2679							
11	10		175,6826							
12										

O desconto obtido pelo pagamento antecipado das 10 últimas parcelas é de aproximadamente **R\$ 987,83**.

4.2 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

Para finalizar, tecemos comentários breves sobre o Sistema de Amortização Constante (SAC), apenas para efeitos de comparação com a Tabela Price.

Como se viu no Sistema de Amortização Francês, obtém-se os juros aplicando-se o percentual (i) sobre o valor principal respectivo a cada parcela e a Amortização é obtida pela diferença entre a Parcela e os Juros.

Por este método francês, paga-se mais juros, o financiamento sai mais caro, pois, como as prestações são constantes, a amortização do capital é menor no início e maior no final, enquanto que os juros vão decaindo ao longo do período, já que o saldo devedor diminui a cada mês até chegar a zero.

No SAC, o que se mantém constante é a amortização mensal do capital (C). Os juros continuam sendo calculados aplicando-se a taxa de juros (i) ao saldo devedor mensal, e as parcelas variam mensalmente, já que são o resultado da soma dos juros com a amortização mensais. Pelo método SAC as parcelas são maiores no início, porém o financiamento sai mais barato, paga-se menos juros no total, pois amortiza-se mais o saldo devedor no início do período. [10]

Observe a tabela abaixo [11]:

Nº. da parcela	Parcela	Juros	Amort.	Saldo
1	296,44	154,45	141,99	5.821,51
2	292,77	150,78	141,99	5.679,52
3	289,09	147,10	141,99	5.537,53
4	285,41	143,42	141,99	5.395,54

No Brasil, é mais utilizado pelo sistema financeiro o método da Tabela Price, que corresponde ao Sistema de Amortização Francês, tendo em vista que este gera um rendimento maior de capital do que o gerado pelo Sistema SAC.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Professores de matemática têm ciência das dificuldades vivenciadas no cotidiano das salas de aula. Isto ocorre, dentre outros fatores relevantes, principalmente em razão de a matemática ser uma disciplina abstrata, cujos conceitos não são dos mais fáceis de serem transmitidos aos alunos. Em razão disto, buscou-se neste trabalho conjugar um ensino e aprendizado prazerosos com a eficácia na obtenção de conhecimento sobre o tema matemática financeira. Para tanto, demonstrou-se a importância de se empregar na prática docente recursos didáticos de interesse dos alunos, tal como o computador. O uso de planilhas eletrônicas, além de tornar a fixação dos conceitos básicos por parte dos estudantes um processo de aprendizado involuntário e eficaz, permite o cálculo de problemas mais complexos, conforme foi demonstrado no capítulo 4, que tratou basicamente do Sistema de Amortização Francês e teceu ao final uma análise crítica sobre os métodos de cálculo de juros compostos no sistema financeiro nacional. Com a possibilidade de se fazer uma análise crítica sobre a realidade (economia), pautada em prévios conhecimentos matemáticos, pretende-se fazer o aluno perceber a importância das informações que lhe estão sendo repassadas. Recorrer a recursos informáticos dentro de sala de aula é um método de ensino que chega a ser até imprescindível quando se trata de alunos oriundos de uma geração digital. Além do quê, outro método bastante eficaz é a contextualização dos exercícios em cima de temas úteis no cotidiano dos estudantes, desta forma, se desperta neles interesses que permitam uma maior troca de informações entre professores e alunos. Esta maior troca de informações leva conseqüentemente a melhorias no ensino da matemática.

REFERÊNCIAS

[1] www.somatematica.com.br

[2] www.brasilecola.com

[3] [HTTP://apostilas.netsaber.com.br](http://apostilas.netsaber.com.br)

[4] LIMA, Ellon Lages. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume II. 6ª Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[5] <http://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/soma-dos-terminos-uma-pg-finita.htm>

[6] http://pt.wikipedia.org/wiki/Tabela_Price

[7] http://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_Amortiza%C3%A7%C3%A3o_Constante

[8] <http://www.apfree.com.br/?p=11>

[9] <http://fazaconta.com/financiamentos-pmt-rate-nper.htm>

[10] <http://www.matematicadidatica.com.br/SistemasAmortizacao.aspx>

[11] http://walmor_cardoso.sites.uol.com.br/tabelas.htm

[12] SHINODA, Carlos. **Matemática Financeira para usuários do Excel**. São Paulo. Editora Atlas. 1998.