Ítalo Bruno Mendes Duarte
Jossean Leal da Rocha

Uma Abordagem da Prova do Lema de Ladyzhenskaya - Solonnikov

Curso de Licenciatura em Matemática - UNIFAP
Macapá-AP
2012

Ítalo Bruno Mendes Duarte
Jossean Leal da Rocha

Uma Abordagem da Prova do Lema de Ladyzhenskaya - Solonnikov

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente do curso de Licenciatura em Matemática - UNIFAP, como requisito parcial para obetenção da Graduação de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Gilberlandio Jesus Dias

Curso de Licenciatura em Matemática - UNIFAP
Macapá-AP
2012

Uma Abordagem da Prova do Lema de Ladyzhenskaya - Solonikov

por

DUARTE, Ítalo Bruno Mendes
ROCHA, Jossean Leal

Este Trabalho de Conclusão de Curso, foi julgado e aprovado, pelo Corpo Docente do Curso de Licenciatura em Matemática - UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção da Graduação de Licenciatura em Matemática.

Macapá, 23 de Fevereiro de 2012

Gilberlandio de Jesus Dias

Orientador: Prof. *Dr.* Gilberlandio de Jesus Dias.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Márcio Aldo Lobato Bahia

Membro: Prof. *Ms.* Márcio Aldo Lobato Bahia.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Membro: Prof. *Esp.* Steve Wanderson C. de Araújo.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá

Duarte, Ítalo Bruno Mendes
Uma abordagem da prova do Lema de Ladyzhenskaya - Solonnikov / Ítalo Bruno Mendes Duarte, Jossean Leal da Rocha; orientador, Gilberlandio Jesus Dias. Macapá, 2012.
53. f

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

1. Matemática. 2. Matemática – Funções de análise real. I. Rocha, Jossean Leal da. II. Dias, Gilberlandio Jesus. (orient.). III. Fundação Universidade Federal do Amapá. IV. Título.

CDD. 22.ed. 515

Agradecimentos

Primeiramente à Deus, pois ele nos proporcionou esta etapa de tamanha importância em nossas vidas. Ele está acima de todas as coisas e nos ama mais do que nós mesmos, sem sua glória jamais estaríamos aqui.

Às nossas famílias pela presença, força, dedicação, companheirismo. Enfim, faltam palavras para caracterizar o quão são importantes para o nosso sucesso. Agradecer aos pais Maria Rita Mendes Duarte, Jorge Ribeiro da Rocha e Solange Maria Leal da Rocha pela confiança, paciência e colaboração durante todos esses anos. Principalmente pela educação nos ensinada, de fundamental importância e pelo trabalho duro que nos manteve na universidade, que por nós é muito valorizado. Aos irmãos Bárbara Mendes Duarte, Bianca Mendes Duarte, Joiceane Carla Leal da Rocha e Lucas Leal da Rocha que entenderam nossa ausência e nos incentivaram. Amamos vocês!

A nossa instituição de ensino, que sempre esteve de portas abertas, nos forneceu um ensino de qualidade e teve comprometimento com nossa formação. A coordenação do curso de Matemática, pois sempre que precisávamos estava pronta para nos atender.

Aos professores do Colegiado de Matemática, mesmo aos que não nos ministraram aula, por todos os ensinamentos, que contribuíram para nossa formação acadêmica. Principalmente aos professores Guzmán Eulálio Isla Chamilco e José Walter Cardenás Sotil, que estiveram presente boa parte do curso nos auxiliando, tirando dúvidas e apoiando.

Em especial aos professores Márcio Aldo Lobato Bahia e Steve Wanderson Calheiros de Araújo que para nós são mais do que professores, são sinceros amigos. Muito obrigado por todos os ensinamentos e principalmente por ter nos dado a oportunidade de participar do projeto CSTM(Ciclo de Seminários em Tópicos de Matemática) que foi de fundamental importância para o nosso amadurecimento matemático.

Ao nosso orientador, professor Gilberlandio de Jesus Dias, não tivemos o prazer de assistir suas aulas na graduação, porém substituiu o professor Steve na frente do CSTM e nos ensinou muito durante esse tempo. Tempo necessário para sabermos a competência matemática, responsabilidade e dedicação que tem. Obrigado por toda paciência, colaboração, ensino e conselhos para a realização deste trabalho.

Poderíamos preencher várias folhas de nomes de amigos que contribuíram para o êxito deste trabalho. Porém isto seria inconveniente neste caso. Alguns nomes serão citados a seguir. Aos que o nome não estiver, nosso muito obrigado.

Aos amigos de curso que nos privilegiaram com sua companhia durante esses anos. Nosso sincero MUITO OBRIGADO! Em particular, as amigas Lorena Souza da Silva e Meyce Pereira Rocha pelos conselhos, alegrias e pela amizade que será para toda vida.

Aos amigos do projeto CSTM que sempre estiveram com a gente resolvendo exercícios, tirando dúvidas e nos alegrando. Em especial aos amigos Bruno Rafael Mendes Duarte, Deniel Corrêia e Fábio Campos Dias pela grande amizade.

Aos amigos que a vida nos trouxe, pois mesmo na nossa ausência estiveram torcendo pelo nosso sucesso. E sempre nos deram entusiasmo pra continuarmos essa caminhada. Muito obrigado Adrian Ruan, Adrielson Lobato, Amanda Fontinele, Anderson Lobato, Andrei Ramon, Antônia Soares, Antônio Braga, Breno Vidal, Bruno Fernando, Clara Aurora, Carlos Alberto, Dyerlane Oliveira, Édesio Júnior, Élida Viana, Ellen Dias, Gleicyane Cordeiro, Graça Duarte, Henrique Silveira, Heverton Machado, José Nilson, Klingerly Fontinele, Leonardo Fontinele, Lindomar Cunha, Lucas Fontinele, Magna Lúcia, Renan Daniel, Ricardo Brito, Rosani Cordeiro, Sebastião Serão e Vanessa Farias. Em especial à Kamilla Fontinele Camarão que esteve sempre presente e disposta a nos ajudar desde o início desta jornada.

Ao amigo Ramom Vasconcelos Silva(em memória), pela amizade conselheira e fiel, pelo homem alegre e cheio de fé. Obrigado por tudo grande amigo. Descanse na Paz de Deus!

Resumo

Neste trabalho estudamos a demonstração, apresentada por F. Silva em [13], de um lema devido à Ladyzhenskaya e Solonnikov [10]. Este lema tem grande relevância na resolução de problemas de escoamento estacionário de fluidos em canais. Ele trata do crescimento de uma função $f(t)$ (quando $t \to \infty$) controlada por uma função de sua derivada.

Buscamos fazer as contas, omissas, das demonstrações presentes no paper [13] e apresentar versões diferentes das demonstrações, bem como corrigir alguns erros nas demonstrações do paper.

Palavras-chave: Análise Real, Lema de Ladyzhenskaya e Solonnikov, Crescimento de Funções.

Abstract

We study the demonstration, presented by F. Silva [13], of a lemma due Ladyzhenskaya and Solonnikov [10]. This lemma has great relevance to resolution of steady fluid flow problem in channels. It treat of the growth of a function $f(t)$ (where $t \to \infty$) controlled by a function of its derivative.

We investigate the demonstrations in the paper [13] and we present different versions of the demonstrations, and to correct some errors in the demonstrations of the paper.

Keywords: Real Analysis, Ladyzhenskaya and Solonnikov's Lemma, Growth of Functions.

Sumário

INTRODUÇÃO

O estudo da monotonicidade de uma função real é muito empolgante, haja vista como nos surpreendemos com os poderosos teoremas de Análise Real concernetes à relação entre derivada e monotonicidade. Este Trabalho de Conclusão de Curso aborda um pouco sobre o crescimento de uma função real à partir de informações sobre sua derivada.

Pretendemos caminhar com resultados um pouco mais avançados do que os clássicos presentes nos livros de Análise, lembrados acima.

Começamos pensando numa função real derivável; veremos no Capítulo 3 que as hipóteses $f' > 0$ e $f' \geq c > 0$ para alguma constante c, carregam em si diferenças, referentes ao crescimento de f, que tanto podem levar f à explodir no infinito (isto é, $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$), quanto à permitir que f seja limitada.

O estudo central deste trabalho localiza-se numa generalização das hipóteses acima, onde em vez de comparar f' com uma constante c, compara-se com uma função suave, não negativa e estritamente crescente aplicada em $(f(t), t)$, ou seja, $f'(t) \geq g\,(f(t), t)$, para g suave, não negativa e estritamente crescente.

Este trabalho, de forma suscinta, se propõe a estudar a prova, apresentada por F. Silva em [13], de um engenhoso resultado devido à O. Ladyzhenskaya e V. Solonnikov, que aqui será denominado Lema de Ladyzhenskay-Solonnikov (LLS). Este lema é um tipo de generalização do caso descrito acima; ele trata essencialmente do crescimento de uma função e, como comentado em [13], ele é de certa forma um Lema de Gronwall do tipo reverso (O professor Gilberlandio pretende orientar ainda mais um trabalho sobre o LLS, onde pretende estudar esta situação e fazer uma aplicação do LLS).

O LLS é uma generalização de uma idéia utilizada no estudo dos efeitos de *entrada e saída* no escoamento estacionário de um fluido incompressível num canal cilíndrico finito, sob uma vazão pequena (ver [5]). O argumento dessa idéia aparentemente surgiu no contexto da teoria de elasticidade linear, na prova do princípio de Saint-Venant (veja [6] e [16]) e, posteriormente, foi também aplicado por vários autores ao estudo de problemas lineares de tipo elíptico e hiperbólico (veja p. 735 de [10]).

A aplicação do LLS constitui um método de obtenção de solução, para problemas em canais, via tomada do limite de soluções aproximadas em domínios limitados, o ponto crucial do método é a obtenção de estimativas para as soluções de forma que se permite tomar o limite das soluções para domínios fixos e só então tomar o limite dos domínios. O lema também tem aplicação na obtenção de unicidade e comportamento assintótico de soluções.

O LLS tem sido usado amplamente pelo Professor Gilberlandio no estudo de escoamentos estacionários incompressíveis obedecendo a uma lei de potência. Em [2], o professor usou o lema para estudar o escoamento em canais com seções transversais limitadas; também já está sendo escrito um paper similar para seções transversais ilimitadas.

O ponto relevante deste lema, para a Graduação, é que as ferramentas utilizadas para a sua prova consiste, quase que em sua totalidade, de teoria de Análise Real. Assim fica estampada e escancarada a grande importância dos fundamentos desta disciplina para a formação do Matemático.

Este trabalho se propós a estudar a demonstração do LLS apresentada pelo professor Fábio em seu paper [13]. Tivemos grande sucesso neste intúito, pois tanto o autor do paper quanto os revisores deixaram passar alguns erros e interpretações duvidosas de entes matemáticos clássicos, que tornaram possível escrever este texto impondo-lhe não somente a importância informativa como também, e principalmente, importância matemática. O principal legado deste trabalho para os alunos de graduação é que eles sempre devem aferir os resultados e demonstrações que lhe sejam apresentados, seja qual for a origem; esta é uma virtude do orientador deste trabalho, haja visto que em sua Dissertação de Mestrado ele detectou um erro (veja [1] p. 57) na prova de um grande teorema da teoria de Regularidade de Equações Diferenciais Parciais Não Lineares, devido à R. DiPerna e P. Lions [3], trabalho este que contribuiu para o P. Lions ganhar a medalha Field.

Sobre a organização estrutural deste trabalho, em primeiro lugar optamos por produzir um texto forte, onde omitimos a apresentação das demonstrações dos resultados clássicos presentes nos cursos de graduação; pode-se notar ao ler este trabalho que as demonstrações, em sua grande parte, são genuínas (ou nossa ou do orientador), salvo as demonstrações originais do LLS. Quanto à distribuição dos capítulos: No Primeiro Capítulo apresentamos alguns resultados básicos para o desenvolvimento do trabalho; no Segundo Capítulo trazemos alguns casos particulares do LLS utilizados em alguns artigos recentes; no Terceiro Capítulo apresentamos o LLS e verificamos que os resultados do capítulo anterior são casos particulares; por fim, no Quarto e último capítulo estudamos a demonstração presente em [13].

Capítulo 1

RESULTADOS AUXILIARES

Neste capítulo iremos apresentar os principais resultados de Análise e de Equações Diferenciais de forma sucinta. Apresentaremos somente os resultados que serão de uso necessário neste trabalho. Também exibiremos definições que julgamos não serem muito relevadas em um curso de Análise de graduação. O restante é desnecessário ser apresentado neste capítulo, pois acreditamos que o leitor já deve ter um certo estudo básico de Análise na Reta como definições de sequências, limites, aberto, fechado, compacto, ponto de acumulação, derivadas, funcões de classe C^1, continuidade, funções Lipschitzianas e integral. Bem como suas principais propriedades. Para maiores informações indicamos [11] e [12]. Porém, todo livro de Análise Real contém o conteúdo necessário para a leitura deste trabalho.

1.1 Supremo e Ínfimo

Nesta seção iremos apresentar as definições de supremo e ínfimo, que serão de fundamental importância no capítulo 4. Estas definições serão apresentadas de uma forma geral, porém o único corpo ordenado que será tratado neste trabalho será o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais.

Definição 1 . (i) Um subconjunto X de um corpo ordenado K chama-se *limitado superiormente* quando existe $b \in K$ tal que $x \leq b$, para todo $x \in X$. Em outras palavras, tem-se $X \subset (-\infty, b]$. Cada $b \in K$ com esta propriedade chama-se uma cota superior de X.
(ii) Um subconjunto X de um corpo ordenado K chama-se *limitado inferiormente* quando existe $a \in K$ tal que $x \in X$ implica $a \leq x$. Um elemento $a \in K$ com esta propriedade chama-se uma cota inferior de X. Tem-se então $X \subset [a, \infty)$.
(iii) Um subconjunto X de um corpo ordenado K chama-se *limitado* quando

é limitado superiormente e inferiormente, isto é, quando existem a, $b \in K$ tais que $X \subset [a, b]$.

Definição 2 . Sejam K um corpo ordenado e $X \subset K$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in K$ chama-se *supremo* do subconjunto X quando b é a menor das cotas superiores de X em K. Escreve-se $b = \sup X$.

Assim, para que $b \in K$ seja supremo de um conjunto $X \subset K$, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas condições abaixo:

1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;
2. Se $c \in K$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$.

A condição 1 diz que b é cota superior de X, enquanto 2 afirma que qualquer outra cota superior de X deve ser maior do que ou igual a b.

Observações: 1. A condição 2 pode ser reformulada assim: "Dado $c < b$ em K, existe $x \in X$ tal que $c < x$". Com efeito, isto diz que nenhum elemento de K, menor do que b, pode ser cota superior de X.
2. O supremo de um conjunto, quando existe é único. Com efeito, se dois elementos b e b' em K cumprem as condições 1 e 2 acima, deve-se ter $b \leq b'$ e $b' \leq b$, ou seja $b = b'$.

Definição 3 . Sejam K um corpo ordenado e $X \subset K$ um subconjunto limitado inferiormente. Um elemento $a \in K$ chama-se *ínfimo* do subconjunto X quando b é a maior das cotas inferiores de X em K. Escreve-se $a = \inf X$.

Assim, para que $a \in K$ seja o ínfimo de $Y \subset K$, é necessário e suficiente que as condições abaixo sejam satisfeitas:

1. Para todo $y \in Y$ tem-se $a \leq y$;
2. Se $c \in K$ é tal que $c \leq y$ para todo $y \in Y$, então $c \leq a$.

A condição 1 diz que a é cota inferior de X, enquanto 2 afirma que qualquer outra cota inferior de X deve ser menor do que ou igual a a.

Observações: 1. A condição 2 pode ser reformulada assim: "Dado $c \in K$ com $a < c$, existe $y \in Y$ tal que $y < c$". Com efeito, isto diz que nenhum elemento de K, maior do que a, pode ser cota inferior de X.
2. Como no caso do supremo, o ínfimo de um conjunto, quando existe, é único.
3. Se $X \subset K$ possuir um elemento máximo, este será o seu supremo, se X possuir um elemento mínimo ele será seu ínfimo.
4. Dada uma função limitada $f : X \to \mathbb{R}$, definimos

$$\sup f = \sup \{f(x); x \in X\} \ \ e \ \ \inf f = \inf \{f(x); x \in X\}.$$

O teorema abaixo é ainda válido para o caso de limite superior e limite inferior de sequências, que trataremos logo a seguir. Será usado no capítulo 4 e sua demonstração pode ser encontrada no capítulo 10 de [11].

Teorema 1 . Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções limitadas. Para todo $c \in \mathbb{R}$ são limitadas as funções $f + g, c.f : X \to \mathbb{R}$. Além disso,

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g; \inf(f + g) \geq \inf f + \inf g.$$

Quando $c \geq 0$ tem-se $\sup(c \cdot f) = c \cdot \sup f$ e $\inf(c \cdot f) = c \cdot \inf f$. Caso $c < 0$, tem-se $\sup(c \cdot f) = c \cdot \inf f$ e $\inf(c \cdot f) = c \cdot \sup f$.

Observação: Pode-se ter efetivamente $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$ basta tomar $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ e $g(x) = -x$. Neste caso, também temos $\inf(f + g) > \inf f + \inf g$.

1.2 Valores de Aderência de Uma Sequência

Nesta seção apresentaremos a definição de valores de aderência de uma sequência e alguns dos seus principais resutados. Veremos que essa definição é uma generalização do limite para uma sequência limitada que não converge.

Definição 4 . Um número real a é dito *valor de aderência* de uma sequência (x_n) quando a é limite de alguma subsequência de (x_n).

Para um melhor entendimento da definição acima vejamos o seguinte teorema. Ele nos dá uma condição necessária e suficiente para que um número real seja valor de aderência de uma sequência. Sua demonstração pode ser encontrada no capítulo 4 de [12].

Teorema 2 . A fim de que $a \in \mathbb{R}$ seja limite de uma subsequência de (x_n) é necessário e suficiente que, para todo $\epsilon > 0$, exista uma infinidade de índices n tais que $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

Observação: Como um subconjunto de $\mathbb{N}$ é infinito se, e somente se, é ilimitado, então o Teorema 2 nos diz que $a \in \mathbb{R}$ é valor de aderência de (x_n) se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ e todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ e $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Isto é, $a \in \mathbb{R}$ é valor de aderência de (x_n) se, e somente se, todo intervalo de centro no ponto a contém *termos x_n com índices arbitrariamente grandes.* Por outro lado, $\lim x_n = a$ significa que qualquer intervalo de centro a contém *todos os termos x_n com índices suficientemente grandes.*

Exemplos: 1. É claro que se $\lim x_n = a$ então a é um valor de aderência da sequência (x_n). Além disso, a é o único valor de aderência de (x_n).
2. A sequência $(0, 1, 0, 1, 0, 1, ...)$ tem 0 e 1 como seus valores de aderência.
3. A sequência $(1, 2, 3, 4, 5, ...)$ não possui valores de aderência.

Seja (x_n) uma sequência de números reais limitada e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha \leq x_n \leq \beta$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere o conjunto

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}.$$

Temos $[\alpha, \beta] \supset X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n \supset ...$, pela definição de X_n. Com isso, pondo $a_n = \inf X_n$ e $b_n = \sup X_n$, pela inclusão temos

$$\alpha \leq \inf X_1 \leq ... \leq \inf X_n \leq ... \leq \sup X_n \leq ... \leq \sup X_1 \leq \beta.$$

Isto é,

$$\alpha \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1 \leq \beta.$$

Isto prova que as sequências (a_n) e (b_n) são monótonas e limitadas. Logo existem os seguintes limites:

$$a = \lim a_n = \sup a_n = \sup_n \inf X_n.$$

$$b = \lim b_n = \inf b_n = \inf_n \sup X_n.$$

Definição 5 . O número real a acima é chamado de *limite inferior* da sequência limitada (x_n) e denotado por $\liminf x_n$. Analogamente, chamamos o número real b acima de *limite superior* da sequência (x_n) e o denotamos por $\limsup x_n$.

Observações: 1. Evidentemente temos $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.
2. A construção feita acima nos permite afirmar que o conjunto dos valores de aderência de uma sequência limitada é não-vazio.
3. Os principais resultados sobre valores de aderência e suas demonstrações estão no capítulo 4 de [12]. Com eles é possível afirmar que entre os valores de aderência de uma sequência limitada existe um que é o menor de todos e outro que é o maior de todos, e que a sequência é convergente se, e somente se, possui um único valor de aderência.
4. O maior e o menor valor de aderência são generalizações do limite para o caso de sequências limitadas que podem não ser convergentes.

O próximo teorema será útil para o entendimento do capítulo 4. A demonstração dele e de seu corolário podem ser encontradas no capítulo 4 de [12].

Teorema 3 . Se $c < \liminf x_n$ então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1 \Rightarrow c < x_n$. Analogamente, se $\limsup x_n < d$ então existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < d$ para todo $n > n_2$.

Corolário 1 . Dada uma sequência limitada (x_n), sejam a e b números reais com as seguintes propriedades:
(i) se $c < a$ então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1 \Rightarrow c < x_n$;
(ii) se $b < d$ então existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_2 \Rightarrow x_n < d$.
Nestas condições, $a \leq \liminf x_n$ e $b \leq \limsup x_n$.

1.3 Valores de Aderência de Uma Função

Nesta seção temos a definição de valores de aderência de uma função e alguns resultados principais. Esta definição será muito usada no capítulo 4. Neste item sempre consideraremos um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e um ponto de acumulação a de X.

Definição 6 . Considere o conjunto

$$V_\delta = \{x \in X; 0 < |x - a| < \delta\} = (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Diremos que f é *limitada numa vizinhança* de a quando existir algum $\delta > 0$, tal que $f|V_\delta$ é limitada, isto é, tem-se $|f(x)| \leq k$, para todo $x \in V_\delta$ com $k \in \mathbb{R}$.

Definição 7 . Um número real c chama-se um *valor de aderência* de f no ponto a quando existe uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$. Indicamos por $VA(f; a)$ o conjunto dos valores de aderência de f no ponto a.

Exemplo: Para a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1$ se é racional e $f(x) = 1/x$ se x é irracional, temos $VA(f; 0) = \{1\}$.

O corolário do teorema seguinte serve para justificar a definição de limite superior e limite inferior que veremos a seguir. As demonstrações podem ser encontradas no capítulo 6 de [12].

Teorema 4 . Um número real c é valor de aderência de f no ponto a se, e somente se, para todo $\delta > 0$ tem-se $c \in \overline{f(V_\delta)}$.

Corolário 2 . O conjunto dos valores de aderência de f no ponto a é fechado. Se f é limitada numa vizinhança de a então esse conjunto é compacto e não-vazio.

Definição 8 . Seja f limitada numa vizinhança do ponto a.
(i) Chamaremos de *limite superior* de f no ponto a ao maior valor de aderência de f no ponto a. Escrevemos

$$\limsup_{x \to a} f(x) = L$$

para exprimir que L é o limite superior de f no ponto a.
(ii) Chamaremos de *limite inferior* de f no ponto a ao menor valor de aderência de f no ponto a. Escrevemos

$$\liminf_{x \to a} f(x) = l$$

para exprimir que l é o limite inferior de f no ponto a.

Observações: 1. Essa definição tem sentido pois se f é limitada numa vizinhança de a, pelo Corolário 2 temos $VA(f; a)$ compacto e não-vazio. Logo possui um maior e um menor valor de aderência.
2. As definições de limite superior e limite inferior podem se extendidas, com modificações adequadas, para o caso em que $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Por exemplo, $c \in VA(f, +\infty)$ significa que $c = \lim f(x_n)$, com $\lim x_n = +\infty$. Todas as proposições acima ainda são válidas para estes casos. Vale observar ainda que f é "limitada numa vizinhança de $+\infty(-\infty)$"quando existem $A > 0$ e $k > 0$ tais que $x \in X, x > A(x < -A) \Rightarrow |f(x)| \leq k$.

Como no caso de sequências, o teorema a seguir ilustra as principais propriedades de limite inferior e superior. Este teorema será bastante usado no capítulo 4. Sua demosntração é feita usando a versão para sequências.

Teorema 5 . Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$. se f, g são limitadas numa vizinhança do ponto a, então

$$\limsup_{x \to a} (f + g)(x) \leq \limsup_{x \to a} f(x) + \limsup_{x \to a} g(x),$$

$$\liminf_{x \to a} (f + g)(x) \geq \liminf_{x \to a} f(x) + \liminf_{x \to a} g(x).$$

Temos ainda

$$\limsup_{x\to a}[-f(x)] = -\liminf_{x\to a} f(x) \ e \ \liminf_{x\to a}[-f(x)] = -\limsup_{x\to a} f(x).$$

Além disso, se $f, g \geq 0$ então

$$\limsup_{x\to a}(f\cdot g)(x) \leq \left(\limsup_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\limsup_{x\to a} g(x)\right),$$

$$\liminf_{x\to a}(f\cdot g)(x) \geq \left(\liminf_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\liminf_{x\to a} g(x)\right).$$

Observação: É útil e óbvio que se X é um conjunto limitado então existe uma sequência de pontos em X que coverge para o supremo e outra que converge para o ínfimo deste conjunto. Em particular, se X é compacto então esses valores pertencem ao conjunto X.

1.4 Teoremas Clássicos do Cálculo

Começaremos apresentando alguns resultados de limites de função que serão usados em alguns pontos deste trabalho. São propriedades importantes de limites. Suas demonstrações podem ser encontradas no capítulo 6 de [11].

Teorema 6 . Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f,\ g : X \to \mathbb{R}$, e a ponto de acumulação de X. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$ onde $L < M$ então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x)$.

Corolário 3 . Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, com $x \neq a$ então $L \leq M$, onde $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$.

Teorema 7 . Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, e a ponto de acumulação de X. Para que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, é necessário e suficiente que se tenha $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$ para toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$, com $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Teorema 8 . Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função monótona limitada, a ponto de acumulação à direita de X e b ponto de acumulação à esquerda de X. Existem os limites laterais

$$L = \lim_{x\to a^+} f(x) \quad M = \lim_{x\to b^-} f(x)$$

A seguir temos o Teorema do Valor Intermediário, um importante teorema de Análise real. Muito utilizado na matemática. Este será o único resultado sobre continuidade apresentado nesta seção pois será usado no capítulo 4. Sua demonstração pode ser encontrada no capítulo 7 de [11].

Teorema 9 .(Teorema do Valor Intermediário). Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

$\square$

Agora veremos a definição de derivada, visto que tal definição será utilizada no capítulo 4.

Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X$. O quociente

$$q(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

tem sentido para $x \neq a$, logo define uma função $q : X - \{a\} \to \mathbb{R}$, cujo valor $q(x)$ é a inclinação da secante (reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ no gráfico de f) em relação ao eixo x.

Se imaginarmos x como o tempo e $f(x)$ como a abcissa, no instante x, de um ponto móvel que se desloca sobre o eixo x, então $q(x)$ é a velocidade média desse ponto no intervalo de tempo decorrido entre os instantes a e x.

De um modo geral, o quociente $q(x)$ é a relação entre a variação de $f(x)$ e a variação de x a partir do ponto $x = a$.

No caso em que a é um ponto de acumulação de X é natural considerar $\lim_{x \to a} q(x)$. As interpretações deste limite, nos contextos acima, são respectivamente a inclinação da tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, a velocidade instantânea do móvel no instante $x = a$ ou, em geral, a "taxa de variação" da função f no ponto a. Esse limite é um dos elementos mais importantes da Matemática e suas aplicações.

Definição 9 *:* (i) Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de X, com $a \in X$. A *derivada* da função f no ponto a é, quando existe, o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

(ii) Uma função f será dita *suave* quando $f \in C^1(\mathbb{R})$, isto é, quando f' é contínua em $\mathbb{R}$.

Abaixo temos um dos principais resultados de análise na reta, sendo fundamental para muitas aplicações da matemática. Este teorema é muito utilizado neste trabalho. Sua demonstração pode ser encontrada no capítulo 8 de [11].

Teorema 10 .(Teorema do Valor Médio). Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}.$$

Os corolários abaixo são aplicações imediatas do teorema do valor médio. Também serão usados neste trabalho, principalmente no capítulo 4.

Corolário 4 . A fim de que a função derivável $f : I \to \mathbb{R}$ seja monótona não-decrescente no intervalo I é necessário e suficiente que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é uma bijeção crescente de I sobre um intervalo J e sua inversa $g = f^{-1} : J \to I$ é derivável, com $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, para todo $y = f(x) \in J$.

Corolário 5 . Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em X, com f' contínua no ponto a. Se (x_n) e (y_n) são sequências em X com $x_n \neq y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tais que $\lim x_n = \lim y_n = a$. Então

$$f'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

Observação: Com isso, é claro que se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, com X ilimitado superiormente, então

$$\lim_{t\to\infty} f'(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n},$$

onde $x_n \neq y_n$ e $x_n, y_n \to \infty$ (vale resultado análogo para $-\infty$). Isto será usado no capítulo 3.

Abaixo temos o Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema de Mudança de Variável, dois fundamentais teoremas para cálculos com integrais. Serão bastante usados no capítulo 4. Suas demonstrações podem ser encontradas no capítulo 11 de [11].

Teorema 11 .(Teorema Fundamental do Cálculo). Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo I. As seguintes afirmações a respeito de uma função $F : I \to \mathbb{R}$ são equivalentes:

1. F é uma integral indefinida de f, isto é, existe $a \in I$ tal que $F(x) = F(a) + \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, para todo $x \in I$.

2. F é uma primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Observações: 1. O Teorema acima nos diz que toda função contínua possui uma primitiva. Mais precisamente: se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integravel então $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, é derivável em todo ponto $x_0 \in [a, b]$ no qual f seja contínua, e tem-se $F'(x_0) = f(x_0)$. Nesse ponto também é derivável a função $G : [a, b] \to \mathbb{R}$, dada por $G(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)dt$. Tem-se $G'(x_0) = -f(x_0)$. Com efeito, $F(x) + G(x) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt = c \in \mathbb{R}$, logo $F'(x_0) + G'(x_0) = 0$.
2. O Teorema nos diz ainda que se $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 (isto é, tem derivada contínua) então $F(x) = F(a) + \displaystyle\int_a^x F'(t)dt$. Em particular, $F(b) = F(a) + \displaystyle\int_a^b F'(t)dt$, para todo $x \in [a, b]$. Isto reduz o cálculo da integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ à procura de uma primitiva de f. Se $F' = f$ então $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Teorema 12 .(Mudança de variável). Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ com derivada contínua e $g([c, d]) \subset f([a, b])$. Então

$$\int_{g(c)}^{g(b)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt.$$

1.5 Equações Diferenciais

Por fim, nesta seção apresentaremos a definição de solução de uma equação diferencial e a definição de uma equação diferencial. Também apresentaremos um resultado cuja demonstração pode ser encontrada em [15]. Esses conceitos e esse resultado serão usados no capítulo 3.

Definição: Uma função diferenciável $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ chama-se *solução* da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1.1}$$

no intervalo, não-degenerado, I se:

(i) o gráfico de φ em I, isto é, $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$ está contido em um subconjunto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e

(ii) $\dfrac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$, para todo $t \in I$. Se t é um ponto extremo do intervalo, a derivada é a derivada lateral respectiva.

A equação (1.1) chama-se *equação diferencial ordinária de primeira ordem* e é denotada, muitas vezes, por

$$x' = f(t, x)\,.$$

Proposição 1 *(Proposição 4, p.15, [15]).* Seja f contínua e Lipschitziana em $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}^n$. Então, para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma única solução de (1.1) em $I = [a, b]$.

Capítulo 2

ALGUNS RESULTADOS PRELIMINARES

Começaremos com algumas proposições que tratam da limitação ou do comportamento no infinito de uma função quando ela é "controlada" pela sua derivada.

Proposição 2 *(Lema VI.2.1, [4]).* Seja $y \in C^1(\mathbb{R}_+)$ uma função não negativa satisfazendo a inequação, para todo $t > 0$,

$$ay(t) \leq b + y'(t)\,, \tag{2.1}$$

onde $a > 0$ e $b \geq 0$. Então, se

$$\liminf_{t\to\infty} y(t)e^{-at} = 0\,, \tag{2.2}$$

temos $y(t)$ uniformemente limitada e

$$\sup_{t\geq 0} y(t) \leq \frac{b}{a}\,. \tag{2.3}$$

Prova: Observe que

$$-\frac{d}{dt}(y(t)e^{-at}) = -(y'(t)e^{-at} - ay(t)e^{-at}) = e^{-at}(ay(t) - y'(t)).$$

Daí, de (2.1) temos

$$-\frac{d}{dt}(y(t)e^{-at}) = e^{-at}(ay(t) - y'(t)) \leq be^{-at}. \tag{2.4}$$

Integrando (2.4) em $[t, t_1]$ vem

$$-\int_t^{t_1} \frac{d}{dt}(y(t)e^{-at}) \leq b\int_t^{t_1} e^{-at} \Rightarrow -[y(t_1)e^{-at_1} - y(t)e^{-at}] \leq -\frac{b}{a}[e^{-at_1} - e^{-at}]$$

$$\Rightarrow y(t)e^{-at} - y(t_1)e^{-at_1} \leq \frac{b}{a}[e^{-at} - e^{-at_1}].$$

Tomando limite inferior de $t_1 \to \infty$ nesta última inequação obtemos

$$\Rightarrow y(t)e^{-at} - \liminf_{t_1\to\infty} y(t_1)e^{-at_1} \leq \frac{b}{a}[e^{-at} - \liminf_{t_1\to\infty} e^{-at_1}] = \frac{b}{a}e^{-at},$$

e devido à (2.2) vem

$$y(t)e^{-at} \leq \frac{b}{a}e^{-at}.$$

Isto é,

$$y(t) \leq \frac{b}{a}.$$

Logo y é uniformemente limitada e,

$$\sup_{t\geq 0} y(t) \leq \sup_{t\geq 0} \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

O que prova (2.3)

$\square$

Observação: Note que a hipótese $b \geq 0$ é necessária para a veracidade de (2.2).

O próximo resultado é um tipo de recíproca. No sentido de que na proposição anterior tinhamos y controlada por y', agora teremos o contrário, de um certo modo y' controlada por y.

Proposição 3 *(Lema VI.2.2, [4]).* Seja $\beta \leq \infty$ e seja y uma função real não negativa, contínua em $[0, \beta)$ tal que

$$\begin{aligned} & y \in C^1(0,\beta) \\ & \lim_{t\to\beta} y(t) = 0\,. \end{aligned}$$

Então, se y satisfaz a inequação diferencial-integral

$$y'(t) + a\int_t^\beta y(s)\,ds \leq by(t)\ , \tag{2.5}$$

para todo $t \in (0, \beta)$, com $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$, então

$$y(t) \leq ky(0)e^{-\sigma t}\ , \tag{2.6}$$

para todo $t \in (0, \beta)$, onde

$$k = \frac{\sqrt{b^2 + 4a}}{\sigma} \quad , \quad \sigma = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b^2 + 4a} - b\right) .$$

Prova: Façamos a mudança

$$\psi(t) = y(t)e^{-bt}, \forall t \in (0, \beta)$$

Daí,

$$\psi'(t) = y'(t)e^{-bt} - by(t)e^{-bt} = (y'(t) - by(t))e^{-bt}. \tag{2.7}$$

De (2.7) e (2.5) obtemos

$$\psi'(t) + \left(a \int_t^\beta y(s)ds\right) e^{-bt} = \left((y'(t) - by(t)) + a \int_t^\beta y(s)ds\right) e^{-bt} \leq 0.$$

Isto é,

$$\psi'(t) + a \int_t^\beta \psi(s)e^{bs}e^{-bt}ds \leq 0$$

$$\Rightarrow G(t) = \psi'(t) + a \int_t^\beta e^{-b(t-s)}\psi(s)ds \leq 0, \forall t \in (0, \beta). \tag{2.8}$$

Façamos agora, para algum $\delta > 0$(a ser determindo),

$$F(t) = \psi(t) + \delta \int_t^\beta e^{-b(t-s)}\psi(s)ds, \delta > 0, \quad \forall t \in (0, \beta).$$

Derivando F com relação a t, pelo Teorema Fundamenta do Cálculo, temos

$$F'(t) = \psi'(t) - b\delta \int_t^\beta e^{-b(t-s)}\psi(s)ds - \delta e^{-bt}e^{bt}\psi(t)$$

$$= \psi'(t) - b\delta \int_t^\beta e^{-b(t-s)}\psi(s)ds - \delta\psi(t).$$

Logo,

$$F'(t) + \delta F(t) = \psi'(t) - b\delta \int_t^\beta e^{-b(t-s)}\psi(s)ds + \delta^2 \int_t^\beta e^{-b(t-s)}\psi(s)ds =$$

$$\psi'(t) + (\delta^2 - b\delta) \int_t^\beta e^{-b(t-s)}\psi(s)ds =$$

$$\psi'(t) + a \int_t^\beta e^{-b(t-s)}\psi(s)ds + (\delta^2 - b\delta - a) \int_t^\beta e^{-b(t-s)}\psi(s)ds.$$

Isto é,

$$F'(t) + \delta F(t) = G(t) + (\delta^2 - b\delta - a)\int_t^\beta e^{-b(t-s)}\psi(s)ds. \tag{2.9}$$

De (2.8) e (2.9) vem

$$F'(t) + \delta F(t) \leq 0, \forall t \in (0, \beta), \tag{2.10}$$

desde que δ seja a única raíz positiva da equação $\delta^2 - b\delta - a = 0$, ou seja, $2\delta = b + \sqrt{b^2 + 4a}$. Integrando (2.10) de 0 a $t < \beta$ vem

$$\int_0^t \frac{F'(t)}{F(t)}dt \leq \int_0^t (-\delta)dt \Rightarrow \ln(F(t)) - \ln(F(0)) \leq -\delta t$$

$$\Rightarrow ln\left(\frac{F(t)}{F(0)}\right) \leq -\delta t \Rightarrow F(t) \leq F(0)e^{-\delta t},$$

logo pela definição de F e de ψ temos

$$y(t)e^{-bt} + \delta\int_t^\beta e^{-b(t-s)}\psi(s)ds \leq F(0)e^{-\delta t}$$

$$\Rightarrow y(t) + \delta\int_t^\beta y(s)ds \leq F(0)e^{-(\delta-b)t}, \quad \forall t \in (0, \beta). \tag{2.11}$$

Agora vamos estimar $F(0)$ em termos de $y(0)$. Primeiro tomemos $\sigma_1 = 2\delta - b$. Daí,

$$-\frac{d}{dt}\left(e^{-\delta t}\int_t^\beta y(s)ds\right) = e^{-\delta t}\left(y(t) + \delta\int_t^\beta y(s)ds\right) \leq e^{-\delta t}F(0)e^{-(\delta-b)t}$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dt}\left(e^{-\delta t}\int_t^\beta y(s)ds\right) \leq F(0)e^{-\sigma_1 t}, \quad \forall t \in (0, \beta). \tag{2.12}$$

Integrando (2.12) de 0 a β temos

$$-\int_0^\beta \frac{d}{dt}\left(e^{-\delta t}\int_t^\beta y(s)ds\right)dt \leq \int_0^\beta F(0)e^{-\sigma_1 t}dt$$

$$\Rightarrow -e^{-\delta\beta}\int_\beta^\beta y(s)ds + e^{-\delta\cdot 0}\int_0^\beta y(s)ds \leq F(0)\frac{-e^{-\sigma_1\beta} + e^{-\sigma_1\cdot 0}}{\sigma_1}$$

$$\Rightarrow \int_0^\beta y(s)ds \leq F(0)\frac{1 - e^{-\sigma_1\beta}}{\sigma_1}. \tag{2.13}$$

Como $F(0) = y(0) + \delta \int_0^\beta y(s)ds$, de (2.13) temos

$$\int_0^\beta y(s)ds \leq \left(y(0) + \delta \int_0^\beta y(s)ds\right) \left(\frac{1 - e^{-\sigma_1 \beta}}{\sigma_1}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^\beta y(s)ds \left(1 - \frac{\delta(1 - e^{-\sigma_1 \beta})}{\sigma_1}\right) \leq y(0) \left(\frac{1 - e^{-\sigma_1 \beta}}{\sigma_1}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^\beta y(s)ds \left(\frac{\sigma_1 - \delta(1 - e^{-\sigma_1 \beta})}{\sigma_1}\right) \leq y(0) \left(\frac{1 - e^{-\sigma_1 \beta}}{\sigma_1}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^\beta y(s)ds \leq y(0) \frac{1 - e^{-\sigma_1 \beta}}{\sigma_1 - \delta(1 - e^{-\sigma_1 \beta})}. \tag{2.14}$$

Assim, (2.14) nos dá

$$F(0) = y(0) + \delta \int_0^\beta y(s)ds \leq y(0) + \delta y(0) \frac{1 - e^{-\sigma_1 \beta}}{\sigma_1 - \delta(1 - e^{-\sigma_1 \beta})}$$

$$\Rightarrow F(0) \leq y(0) \left(\frac{\sigma_1 - \delta(1 - e^{-\sigma_1 \beta}) + \delta(1 - e^{-\sigma_1 \beta})}{\sigma_1 - \delta(1 - e^{-\sigma_1 \beta})}\right)$$

$$\Rightarrow F(0) \leq y(0) \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \delta(1 - e^{-\sigma_1 \beta})}\right). \tag{2.15}$$

Observemos ainda que

$$\sigma_1 - \delta(1 - e^{-\sigma_1 \beta}) = \sigma_1 - \delta + \delta e^{-\sigma_1 \beta} = 2\delta - b - \delta + \delta e^{-\sigma_1 \beta} \geq 2\delta - b - \delta = \delta - b.$$

Logo em (2.15) temos

$$F(0) \leq y(0) \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \delta(1 - e^{-\sigma_1 \beta})}\right) \leq y(0) \cdot \frac{\sigma_1}{\delta - b}.$$

Fazendo ainda

$$\sigma = \delta - b = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 + 4a}\right) - b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b^2 + 4a} - b\right),$$

obtemos

$$F(0) \leq y(0) \frac{\sigma_1}{\sigma}, \quad \text{onde} \quad \sigma = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b^2 + 4a} - b\right).$$

O que nos dá um estimativa de $F(0)$ em termos de $y(0)$, como desevajámos. Substituindo essa estimativa em (2.11) temos

$$y(t) \leq y(t) + \delta \int_0^\beta y(s)ds \leq F(0) e^{-(\delta - b)t} \leq \frac{y(0)\sigma_1}{\sigma} e^{-(\delta - b)t}.$$

Isto é,

$$y(t) \leq \frac{y(0)\sigma_1}{\sigma} e^{-\sigma t}, \quad \forall t \in (0, \beta).$$

Fazendo $k = \dfrac{\sigma_1}{\sigma} = \dfrac{\sqrt{b^2 + 4a}}{\sigma}$, temos

$$y(t) \leq k y(0) e^{-\sigma t}, \quad \forall t \in (0, \beta),$$

onde $k = \dfrac{\sqrt{b^2 + 4a}}{\sigma}$ e $\sigma = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b^2 + 4a} - b\right)$. Isto prova (2.6).

□

Observação:

1. Note que se $b < 0$, (2.5) implica, imediatamente, (2.6) com $k = 1$ e $\sigma = -b$.

2. Esta proposição foi provado por Horgan e Wheeler em 1978 (veja [5]).

Antes da próxima proposição, vejamos uma importante inequação, chamada *Inequação de Young*. Esta equação será apresentada da forma mais simples e neste trabalho servirá de lema para a proposição seguinte. Sua demonstração pode ser encontrada no capítulo 2 de [4].

Lema 1 . Sejam $a, b > 0$ e $1 < p, p' < \infty$, com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'}$. Então

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Proposição 4 *(Lema XI.4.2, [4]).* Seja $y \in C^1(\mathbb{R}_+)$ uma função não negativa com primeira derivada também não negativa. Suponhamos que para todo $t > 0$

$$a y(t) \leq a_1 y'(t) + a_2 \left[y'(t)\right]^{3/2} + b\,, \tag{2.16}$$

onde a é uma constante positiva, enquanto a_1 , a_2 , e b são constantes não negativas. Então, se

$$\liminf_{t \to \infty} t^{-3} y(t) = 0\,,$$

temos

$$y(t) \leq 2\frac{b+1}{a}\,, \quad \text{para todo } t > 0\,. \tag{2.17}$$

Prova: Vamos separar a demonstração em dois casos.
1º caso: Se $a_1 = a_2 = 0$.
Esse caso é trivial pois de (2.16) teremos que $ay(t) \leq b < 2(b+1)$, para todo $t > 0$, que nos dá o resultado desejado.
2º caso: Se $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$.
Usando a Inequação de Young em $a_1 y'(t)$ e 1, com $p = \dfrac{3}{2}$ e $p' = 3$ temos

$$1 \cdot a_1 y'(t) \leq \frac{2}{3} a_1^{\frac{3}{2}} (y'(t))^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \leq c(a_1)(y'(t))^{\frac{3}{2}} + 1,$$

com $c = c(a_1) = \dfrac{2}{3} a_1^{\frac{3}{2}}$. Daí,

$$a_1 y'(t) \leq c(y'(t))^{\frac{3}{2}} + 1, \quad \forall t > 0. \tag{2.18}$$

Usando (2.18) em (2.16) temos

$$ay(t) \leq a_1 y'(t) + a_2 (y'(t))^{\frac{3}{2}} + b \leq (c + a_2)(y'(t))^{\frac{3}{2}} + (b+1).$$

Fazendo $d = c + a_2 = \dfrac{2}{3} a_1^{\frac{3}{2}} + a_2 > 0$ (pois $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$) e $b + 1 = b_1$ obtemos

$$ay(t) \leq d(y'(t))^{\frac{3}{2}} + b_1, \quad \forall t > 0. \tag{2.19}$$

Supondo (2.17) não válida, podemos obter $t_0 > 0$ tal que

$$y(t_0) > 2\frac{b+1}{a} = 2\frac{b_1}{a}.$$

Desde que $y' \geq 0$ (isto é, y é não-decrescente), temos

$$y(t) > 2\frac{b_1}{a} > 0, \quad \forall t \geq t_0. \tag{2.20}$$

Com isso, de (2.20) e (2.19) temos

$$ay(t) \leq d(y'(t))^{\frac{3}{2}} + b_1 < d(y'(t))^{\frac{3}{2}} + \frac{ay(t)}{2}$$

$$\Rightarrow ay(t) < 2d(y'(t))^{\frac{3}{2}} \Rightarrow a^{\frac{2}{3}} (y(t))^{\frac{2}{3}} < (2d)^{\frac{2}{3}} y'(t).$$

Como $d > 0$ e $y(t) > 0$ para todo $t \geq t_0$, então

$$\frac{y'(t)}{(y(t))^{\frac{2}{3}}} > \left(\frac{a}{2d}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \forall t \geq t_0. \tag{2.21}$$

Integrando (2.21) de t a t_1 com $t_1 > t \geq t_0 > 0$ temos

$$\int_t^{t_1} \frac{y'(s)}{(y(s))^{\frac{2}{3}}} ds > \int_t^{t_1} \left(\frac{a}{2d}\right)^{\frac{2}{3}} dt. \tag{2.22}$$

Fazendo a mudança de variável $u = y(s)$ e escrevendo $A = \left(\frac{a}{2d}\right)^{\frac{2}{3}} > 0$ em (2.22), temos

$$\int_{y(t)}^{y(t_1)} \frac{du}{u^{\frac{2}{3}}} > \int_t^{t_1} A dt = A(t_1 - t)$$

$$\Rightarrow 3(y(t_1))^{\frac{1}{3}} - 3(y(t))^{\frac{1}{3}} > A(t_1 - t) \Rightarrow \frac{(y(t_1))^{\frac{1}{3}} - (y(t))^{\frac{1}{3}}}{t_1} > \frac{A}{3}\left(1 - \frac{t}{t_1}\right).$$

Logo

$$\left(\frac{y(t_1)}{t_1^3}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{y(t)}{t_1^3}\right)^{\frac{1}{3}} > \frac{A}{3}\left(1 - \frac{t}{t_1}\right). \tag{2.23}$$

Como t é fixo, tomando limite inferior de $t_1 \to \infty$ em (2.23) temos

$$\liminf_{t_1 \to \infty} \left(\frac{y(t_1)}{t_1^3}\right)^{\frac{1}{3}} \geq \frac{A}{3} > 0.$$

Isto é,

$$\liminf_{t_1 \to \infty} \frac{y(t_1)}{t_1^3} > 0.$$

O que contraria nossa hipótese de $\liminf\limits_{t \to \infty} t^{-3} y(t) = 0$. Assim,

$$y(t) \leq 2\frac{b+1}{a}, \quad \forall t > 0.$$

O que prova (2.17).

$\square$

Observação: Esta proposição foi provado por Horgan e Wheeler em 1978 (veja [5]).

Capítulo 3

SOBRE O LEMA DE LADYZHENSKAYA-SOLONNIKOV

3.1 Um pouco Sobre Crescimento de Funções

Antes de apresentarmos o Lema de Ladyzhenskaya-Solonnikov, resultado principal deste trabalho, analisaremos as diferença das seguintes hipóteses, concernentes à positividade da derivada de uma função: (i) $f'(t) > 0, \ \ \forall t \geq t_0$; (ii) $f'(t) \geq \alpha > 0, \ \ \forall t \geq t_0$;
onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, com $t_0, \alpha \in \mathbb{R}$.

Em ambos os casos, trata-se de uma função estritamente crescente. Porém veremos no primeiro caso que se f for limitada então sua função derivada tende a zero no infinito. No segundo caso, veremos que f explode no infinito. Observe que o segundo caso é o primeiro com mais uma condição. Concernentes às hipóteses (i) e (ii), como comentado acima.

Vejamos alguns resultados:

Teorema 13 . Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, com $f'(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $f'(t) \geq \alpha > 0$, para todo $t \geq t_0 \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \infty.$$

Além disso,

$$f(t) \geq f(t_0) + \alpha(t - t_0), \forall t \geq t_0, \tag{3.1}$$

em outros termos, f cresce para o infinito com velocidade no máximo linear.
Prova: Dado $t > t_0$, pelo teorema do valor médio, existe $c \in (t_0, t)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}. \tag{3.2}$$

Como $f'(t) \geq \alpha$, para todo $t > t_0$, então (3.2) nos dá

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \geq \alpha, \quad \forall t > t_0$$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(t_0) + \alpha(t - t_0), \quad \forall t > t_0. \tag{3.3}$$

Observe ainda que (3.1) é óbvia para $t = t_0$, pois

$$f(t_0) = f(t_0) + \alpha(t_0 - t_0). \tag{3.4}$$

Com isso, (3.3) e (3.4) provam (3.1). Isto é,

$$f(t) \geq f(t_0) + \alpha(t - t_0), \forall t \geq t_0.$$

Como t_0 é fixo, tomando limite de $t \to \infty$, temos

$$\lim_{t\to\infty} (f(t_0) + \alpha(t - t_0)) = \infty,$$

isto é,

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty.$$

O que prova o teorema.

$\square$

Observação: Antes do próximo teorema vejamos a validez do seguinte resultado de análise real:
Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 então

$$\lim_{t\to\infty} f'(t) = \lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n},$$

onde $x_n < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com $\lim x_n = \lim y_n = \infty$.
Com efeito, como f é de classe C^1, pelo teorema do valor médio para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $s_n \in (x_n, y_n)$ tal que

$$f'(s_n) = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

Daí, é fácil ver que $\lim s_n = \infty$. Logo

$$\lim f'(s_n) = \lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

Isto é,

$$\lim_{t\to\infty} f'(t) = \lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

Pois f é de classe C^1. Isto prova o resultado.

Teorema 14 . Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 com $f'(t) > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $|f(t)| \leq k$, para todo $t \geq t_0 \in \mathbb{R}$ então

$$\lim_{t\to\infty} f'(t) = 0.$$

Prova: Como f é monótona, pois $f' > 0$, e limitada então sabemos que existe o limite $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = L \in \mathbb{R}$. Por outro lado, temos

$$\lim_{t\to\infty} f'(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n},$$

com $x_n < y_n$ e $\lim x_n = \lim y_n = \infty$. Em particular, para $x_n = n$ e $y_n = n+1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\lim_{t\to\infty} f'(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} [f(n+1) - f(n)]. \tag{3.5}$$

É claro que $\lim f(n+1) = L$ e $\lim f(n) = L$. Daí, de (3.5) temos

$$\lim_{t\to\infty} f'(t) = \lim_{n\to\infty} [f(n+1) - f(n)] = L - L = 0.$$

O que prova o teorema.

□

Observação: A recíproca dos dois teoremas acima é falsa. Com efeito. Considere $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ onde $f(t) = \ln t$, para todo $t \in \mathbb{R}_+^*$. Temos:

(i) $f' > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) = 0$. Porém f é ilimitada superiormente.

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \infty$, $f'(t) = \dfrac{1}{t} > 0$. Porém, não existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(t) \geq c > 0$, para todo $t \geq t_0 \in \mathbb{R}$, pois $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) = 0$.

Estes dois teoremas são motivações para o Lema de Ladyzhenskaya-Solonnikov, que será apresentado na próxima seção. Pois a partir de informações da função derivada, conseguimos obter informações da função, e vice-versa. Porém o Lema de Ladyzhenskaya-Solonnikov é um caso bem mais geral.

3.2 O Lema de Ladyzhenskaya-Solonnikov

Nesta seção apresentaremos o principal resultado deste trabalho que é o Lema de Ladyzhenskaya-Solonnikov.

Lema de Ladyzhenskaya-Solonnikov (LLS)
Sejam z, $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções suaves, não negativas, não decrescentes e não identicamente nulas satisfazendo, no intervalo $[0, T]$, as inequações

$$\begin{aligned} &z(t) \leq \Psi(z'(t)) + (1-\delta)\varphi(t), \\ &\varphi(t) \geq \delta^{-1}\Psi(\varphi'(t)), \end{aligned} \tag{3.6}$$

para algum $\delta \in (0, 1)$, onde $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave e estritamente crescente, tal que $\Psi(0) = 0$ e $\Psi(\tau) \to \infty$, quando $\tau \to \infty$.

1. Se $z(T) \leq \varphi(T)$ temos

$$z(t) \leq \varphi(t)\,,\ \forall\, t \in [0, T]. \tag{3.7}$$

2. Suponha que as desigualdades de (3.6) sejam válidas para todo $t \geq 0$. Então, $z(t) \leq \varphi(t), \forall t \geq 0$ se
(i)

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{z(t)}{\varphi(t)} < 1,$$

(ii) ou se $z(t)$ tem crescimento de ordem inferior ao das soluções positivas da equação $\widetilde{z}(t) = \delta^{-1}\Psi(\widetilde{z}'(t))$.

3. As funções $z(t)$, não identicamente nulas, satisfazendo à desigualdade

$$z(t) \leq \delta^{-1}\Psi\left(z'(t)\right) \quad \forall\, t \geq 0 \tag{3.8}$$

crescem indefinidamente com t, isto é, $\lim_{t\to\infty} z(t) = \infty$. Além disso, se

$\delta^{-1}\Psi(\tau) \leq c\tau^m$, com $m > 1$ e $\tau \geq \tau_1$ (para algum $\tau_1 > 0$), então

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-\frac{m}{m-1}} z(t) > 0\,;$$

se, contudo, $\delta^{-1}\Psi(\tau) \leq c\tau$, para $\tau \geq \tau_1$, então

$$\liminf_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t/c} z(t) > 0\,.$$

A prova deste teorema será feita, compassadamente, no próximo capítulo, pois em alguns pontos discordamos da demonstração apresentada em [13], e até mesmo detectamos alguns equívocos nela, uma vez que a prova original do paper [10] de Ladyzhenskaya-Solonnikov não é muito elucidativa (em alguns pontos, como veremos) faremos algumas observações e apresentaremos demonstrações "alternativas".

Quanto ao Item 1, tanto a demonstração original quanto à demonstração do Fábio (essencialmente as mesmas) estão de fácil compreensão.

Quanto ao Item 2 temos muito o que tratar, e para isto sentimos a necessidade de transcrever *ipscrit*, do paper [10], o lema e sua demonstração:

"**LEMMA 2.3.** Assume that the nondecreasing, nonnegative smooth function $z(t)$ and $\varphi(t)$, not identically equal to zero, satisfy on the segement $[0, T]$ the inequalities

$$z(t) \leq \Psi(z'(t)) + (1-\delta_1)\varphi(t),\ \delta_1 \in (0,1) \qquad (I)$$

and

$$\varphi(t) \geq \delta_1^{-1}\Psi(\varphi'(t)), \qquad (II)$$

where $\Psi(\tau)$ is a monotonically increasing function, equal to zero for $\tau = 0$ and equal to infinity for $\tau = \infty$. In this case, if

$$z(T) \leq \varphi(T), \qquad (III)$$

then

$$z(t) \leq \varphi(t), \forall t \in [0, T]. \qquad (IV)$$

Assume that the iniqualities (I) and (II) are satisfied for $\forall t \geq 0$. Then

(IV) holds for $\forall t \geq 0$ if

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{z(t)}{\varphi(t)} < 1,$$

or if $z(t)$ has anorder of growth for $t \to \infty$, less than the order of growth of the positive solutions of the equation

$$\widetilde{z}(t) = \delta_1^{-1}\varphi(\widetilde{z}'(t)). \qquad (V)$$

The nonidentically zero nennegative functions $z(t)$, satisfying the homogeneous inequality

$$z(t) \leq \delta_1^{-1}\Psi(z'(t)), t \geq 0, \qquad (VI)$$

increase unboudedly for $t \to \infty$; if $\delta_1^{-1}\Psi(\tau) \leq c_0\tau^m, m > 1$, for $\tau > \tau_1$, then

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-m/(m-1)}z(t) > 0; \qquad (VII)$$

if, however, $\delta_1^{-1}\Psi(\tau) \leq c_0\tau$ for $\tau \geq \tau_1$, then

$$\liminf_{t\to\infty} z(t)\exp\left(-\frac{t}{c_0}\right) > 0. \qquad (VIII)$$

Proof: We assume that $\exists t_0 \in [0,T]$ for which $z(t_0) > \varphi \geq 0$. Then, by virtue of (I) and (II), we have

$$\Psi(z'(t_0)) \geq z(t_0) - (1-\delta_1)\varphi(t_0) > \delta_1\varphi(t_0) \geq \Psi(\varphi'(t_0)),$$

and, therefore, $z'(t_0) > \varphi(t_0)$. From which it is clear that $z(t) > \varphi(t)$ for $\forall t \in [t_0, T]$. But this contradicts (III). If, however, (I) and (II) hold for $\forall t \geq 0$, then the assumtion on the existence of such a t_0 leads to $z(t) > \varphi(t) > 0$ and $z(t) \leq \delta_1^{-1}\Psi(z'(t))$ for $t \geq t_1 \geq t_0$. But this contradicts the conditions which we have imposed on the behavior of $z(t)$ for $t \to \infty$. If $z(t)$ is subjected to the inequality (VI) and if for some $t_0 \geq 0$, $z(t_0) \equiv z_0 > 0$, then $z'(t) \geq \Psi^{-1}(\delta_1 z_0) \equiv \alpha_0 > 0$, and, therefore, $z(t) \geq z_0 + \alpha_0(t-t_0)$ for $\forall t \geq t_0$. Then, since $z'(t) \geq \Psi^{-1}(\delta_1 z(t)) \geq \Psi^{-1}(\delta_1 z_0 + \delta_1\alpha_0(t-t_0)) \longrightarrow \infty$ for $t \to \infty$, we have $z'(t) \geq \tau_1$ starting with some t_1 and, consequently, for $t \geq t_1$ we shall have the inequality $z(t) \leq c_0(z'(t))^m$. Integrating this iniquality, we obtain the statements (VII) e $(VIII)$."

No Item 2(ii) temos a hipótese:

$(*)$ $z(t)$ tem crescimento de ordem inferior ao das soluções positivas da equação $\widetilde{z}(t) = \delta^{-1}\Psi(\widetilde{z}'(t))$.

A demonstração no paper [13] "parece" interpretar esta hipótese da seguinte forma:

$(**)$ $z(t) \leq \widetilde{z}(t)$ para t suficientemente grande.

Todavia, em se tratando de ordem de crescimento de funções, a interpretação mais comum é:

$(***)$ $z'(t) \leq \widetilde{z}'(t)$ para t suficientemente grande.

Com efeito, por exemplo a função $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ é crescente em $(0, \infty)$, logo tem crescimento positivo $\left(f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\right)$ e é sempre menor que a função $g \equiv 0$ que tem crescimento zero. Entretanto a demonstração original, descrita acima, não deixa explícita o uso da condição $z'(t) \leq \widetilde{z}'(t)$ para t suficientemente grande, pois ela conclui o resultado imediatamente das desigualdades $z(t) > \varphi(t) > 0$ e $z(t) \leq \delta_1^{-1}\Psi\left(z'(t)\right)$ para $t \geq t_1 \geq t_0$. Apresentaremos, no Capítulo 4, duas demonstrações, fazendo uso da contra-positiva do lema que formularemos logo abaixo, entretanto, devido a complexidade da segunda, presente no paper [13], somos induzidos a pensar que foi feito uso da interpretação $(**)$. Após o lema temos uma discursão sobre uma possível equivalência entre $(**)$ e $(***)$.

Começamos observando que temos uma solução da EDO presente em $(*)$ para cada condição inicial especificada, isto é, para todo $(t_0, z(t_0)) \in \mathbb{R}^2$, o sistema

$$\begin{cases} \widetilde{z}'(t) = \Psi^{-1}\left(\delta\, \widetilde{z}(t)\right) \\ \widetilde{z}(t_0) = z(t_0) \end{cases} \tag{3.9}$$

possui uma única solução definida em um certo interval I contendo t_0. De fato, como Ψ é estritamente crescente e suave ψ^{-1} é derivável em $\mathbb{R}$, pois $\dfrac{d}{dy}\Psi^{-1}(y) = \dfrac{1}{\frac{d}{dx}\Psi(x)}$ desde que $\Psi' > 0$, daí Ψ^{-1} é localmente Lipschitz e portanto, pela Proposição 1, existe e é única a solução do problema acima.

Diante do exposto acima descrevemos a hipótese $(*)$ como, $\widetilde{z}'(t) \geq z'(t)$, para todo $t \geq t_0$, onde $\widetilde{z}$ é a única solução de (3.9).

Agora formularemos o lema que terá sua contra-positiva usada nas demonstrações do item 2(ii), no Capítulo IV (este lema pode ser encontrado nos livros clássicos de Análise Real).

Lema 2 . Seja f uma função real derivável em $[t_0, \infty)$ com $f(t_0) = 0$. Se $f'(t) \geq 0$ para todo $t \geq t_0$, então $f(t) \geq 0$ para todo $t \geq t_0$.

Prova: Suponhamos por absurdo que existe $t_1 > t_0$ tal que $f(t_1) < 0$, daí, pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_2 \in (t_0, t_1)$ tal que

$$0 > f(t_1) = f(t_1) - f(t_0) = f'(t_2)(t_1 - t_0) \geq 0\,,$$

contradição.

$\square$

Observação: Como comentado anteriormente, a demonstração do item 2(ii) em [13], parece usar a hipótese $(*)$ como $\widetilde{z}(t) \geq z(t)$, para todo $t \geq t_0$, onde $\widetilde{z}$ é a única solução de (3.9). Note que se a recíproca do Lema 2 fosse verdadeira (é trivial que não) teríamos a equivalência entre $(**)$ e $(***)$. Entretanto poderíamos pensar numa equivalência não para t suficientemente grande, mas sim para uma vizinhança de t_0, em outras palavras: *Questão*($\mathbf{Q}$): Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que se, para f como no lema anterior, $f(t) \geq 0$ para todo $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon_0)$, então $f'(t) \geq 0$ para todo $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon_0)$? A resposta é não, porém somos tentados pela percepção geométrica que talvez com mais hipótese sobre a função f (por exemplo, $z \in C^\infty$, visto que $z \in C^\infty$ implica $\widetilde{z} \in C^\infty$, pelo Teorema 1, p. 38 de [15], que não colocamos entre os resultados auxiliares devido a necessidade de um compêndio de notações, definições e resultados necessários para introduzí-lo. Porém, não temos esta hipótese no nosso caso) tenhamos uma resposta positiva para ($\mathbf{Q}$). É fácil ver que ($\mathbf{Q}$) é equivalente à f oscilar infinitamente "próximo"de t_0, e como oscilação nos leva a pensar em derivadas ilimitadas adicionamos à ($\mathbf{Q}$) a hipótese de f' limitada próximo de t_0, porém isto não basta, como contra-exemplo temos $f(t) = t^3 \left(\operatorname{sen} \dfrac{1}{t} \right)^2$, $t_0 = 0$.

3.3 Casos Particulares do Lema de Ladyzhenskaya - Solonnikov

Nesta seção verificaremos que duas das proposições do capítulo anterior, são consequências diretas do LSS ou seja, apicaremos o LSS para provar tais proposições.
Prova: (Proposição (3)). Temos dois casos:
(i) Se $y = 0$ então o resultado é trivial.
(ii) Se $y \neq 0$, sejam

$$\Psi(t) = \frac{t}{a}\ e\ \varphi(t) = 2\frac{b+1}{a}, \quad \forall t \geq 0.$$

temos:
(a) φ é suave, não-decrescente, não identicamente nula e $\varphi' = 0$.
(b) Ψ é estritamente crescente, suave e $\Psi(0) = 0, \Psi(t) \to \infty, quando t \to \infty$.
E mais de de (2.1) temos, para todo $t \geq 0$ e $\delta = 1/2$

$$y(t) \leq \frac{y'(t)}{a} + \frac{b}{a} \leq \frac{y'(t)}{a} + \frac{b+1}{a}$$

$$\varphi(t) > 0$$

Isto é, para todo $t \geq 0$

$$y(t) \leq \Psi(y'(t)) + (1-\delta)\varphi(t)$$

$$\varphi(t) \geq \delta^{-1}\Psi(\varphi'(t)) = 0$$

Assim temos as hipóteses (3.6) do LSS.
Agora suponhamos que (2.3) não vale, daí existe $t_1 \geq 0$ tal que $y(t_1) > \frac{b}{a}$.
Daí para $t \geq t_1$ temos

$$\delta^{-1}\Psi(t) = \delta^{-1}\frac{t}{a} = \frac{2t}{a}.$$

Logo o item 3 do LLS nos dá

$$\liminf_{t\to\infty} e^{-at/2}y(t) > 0 \Rightarrow e^{1/2}\liminf_{t\to\infty} e^{-at}y(t) > 0$$

$$\Rightarrow \liminf_{t\to\infty} e^{-at}y(t) > 0$$

O que contraria (2.2). Isto prova (2.3).

□

Prova: (Proposição (1)) Temos dois casos:
(i) Para $y = 0$ o caso é trivial
(ii) Para $y \neq 0$, sejam

$$\Psi(t) = \frac{a_1 t}{a} + \frac{a_2 t^{3/2}}{a}\ e\ \varphi(t) = 2\frac{b+1}{a}, \forall t > 0.$$

Daí, é óbvio que:
(a) φ é suave, não-decrescente, não identicamente nula e $\varphi' = 0$.

(b) Ψ é estritamente crescente, suave e $\Psi(0) = 0, \Psi(t) \to \infty, t \to \infty$.
Logo, de (2.16) temos, para todo $t > 0$ e $\delta = 1/2$

$$y(t) \leq \frac{a_1 y'(t)}{a} + \frac{a_2(y'(t))^{3/2}}{a} + \frac{b}{a} \leq \frac{a_1 y'(t)}{a} + \frac{a_2(y'(t))^{3/2}}{a} + \frac{b+1}{a}$$

$$\varphi(t) > 0$$

Isto é, para todo $t > 0$

$$y(t) \leq \Psi(y'(t)) + (1-\delta)\varphi(t)$$

$$\varphi(t) > \delta^{-1}\Psi(\varphi'(t)) = 0,$$

E assim, como antes, temos (3.6) do LSS.
Suponhamos que (2.17) não vale, daí existe $t_1 > 0$ tal que $y(t_1) > 2\dfrac{b+1}{a}$. E assim para $t \geq 1 > 0$ temos

$$\delta^{-1}\Psi(t) = 2\left(\frac{a_1 t}{a} + \frac{a_2 t^{3/2}}{a}\right) \leq 2\left(\frac{a_1 + a_2}{a}\right) t^{3/2}.$$

Logo, para $m = 3/2 > 1$, o item 3 do LLS nos dá

$$\liminf_{t\to\infty} t^{\frac{-3/2}{3/2-1}} y(t) > 0 \Rightarrow \liminf_{t\to\infty} t^{-3} y(t) > 0$$

O que contraria as hipóteses. Isto prova (2.17).

$\square$

Capítulo 4

LEMA DE LADYZHENSKAYA - SOLONNIKOV: PROVA

4.1 Prova do item 1 do LLS

Provaremos por contradição. Suponhamos que (3.7) não vale, então existe $t_0 \in [0, T]$ tal que

$$\varphi(t_0) < z(t_0). \tag{4.1}$$

Daí, de (3.6_1) e (4.1) temos

$$\varphi(t_0) < z(t_0) \leq \Psi(z'(t_0)) + (1 - \delta)\varphi(t_0).$$

e assim obtemos

$$\delta\varphi(t_0) < \Psi(z'(t_0)). \tag{4.2}$$

Logo de (3.6_2) e (4.2) vem

$$\Psi(\varphi'(t_0)) \leq \delta\varphi(t_0) < \Psi(z'(t_0))$$

Como Ψ é estritamente crescente, temos

$$\varphi'(t_0) < z'(t_0). \tag{4.3}$$

Afirmação 1:

$$\varphi(t) \leq z(t), \quad \forall t \in (t_0, T). \tag{4.4}$$

Provemos também por contradição. Se (4.4) não vale, então existe $t_1 \in (t_0, T)$ com $\varphi(t_1) > z(t_1)$. Logo o conjunto $A = \{s > t_0; \varphi(s) > z(s)\}$ é não-vazio e limitado inferiormente por t_0. Daí existe $t_2 := \inf A$. De imediato temos $t_2 > t_0$, pois $\varphi(t_0) < z(t_0)$. Agora para $t \in (t_0, t_2)$ temos

$$\varphi(t) \leq z(t), \quad \forall t \in (t_0, t_2). \tag{4.5}$$

Devido a definição de t_2. Usando (4.5) e o fato de φ, z serem contínuas temos

$$\varphi(t_2) = \lim_{t \to t_2^-} \varphi(t) \leq \lim_{t \to t_2^-} z(t) = z(t_2). \tag{4.6}$$

Por outro lado, sendo $t_2 = \inf A$ então existe uma sequência (s_n) em A com $\lim s_n = t_2$. Ora, desde que $s_n \in A, \forall n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\varphi(s_n) > z(s_n), \forall n \in \mathbb{N},$$

que por continuidade implica

$$\varphi(t_2) = \lim \varphi(s_n) \geq \lim z(s_n) = z(t_2). \tag{4.7}$$

De (4.6) e (4.7) temos

$$\varphi(t_2) = z(t_2). \tag{4.8}$$

Observe agora que de (3.6_1) e (4.5), para todo $t \in (t_0, t_2)$, temos

$$\varphi(t) \leq z(t) \leq \Psi(z'(t)) + (1 - \delta)\varphi(t),$$

o que implica

$$\delta\varphi(t) \leq \Psi(z'(t)). \tag{4.9}$$

Agora de (3.6_2) e (4.9) vem

$$\Psi(\varphi'(t)) \leq \delta\varphi(t) \leq \Psi(z'(t)).$$

Como Ψ é estritamente crescente, temos

$$\varphi'(t) \leq z'(t), \forall t \in (t_0, t_2).$$

Isto é,

$$(z - \varphi)'(t) \geq 0, \forall t \in (t_0, t_2).$$

Assim $z - \varphi$ é não-decrescente em (t_0, t_2), que por continuidade implica $z - \varphi$ não-decrescente em $[t_0, t_2]$. Logo, devido à (4.8),

$$0 < z(t_0) - \varphi(t_0) \leq z(t_2) - \varphi(t_2) = 0.$$

Uma contradição, portanto provamos a afirmação 1. Logo por continuidade

$$\varphi(T) = \lim_{t \to T^-} \varphi(t) \leq \lim_{t \to T^-} z(t) = z(T).$$

Isto é,
$$\varphi(T) \leq z(T). \tag{4.10}$$
Afirmação 2: $\varphi(T) < z(T)$.
Com efeito, observe que por (3.6_1) e (4.4) temos para todo $t \in (t_0, T)$
$$\varphi(t) \leq z(t) \leq \Psi(z'(t)) + (1-\delta)\varphi(t).$$
Isto é,
$$\delta\varphi(t) \leq \Psi(z'(t)). \tag{4.11}$$
Logo de (3.6_2) e (4.11) vem
$$\Psi(\varphi'(t)) \leq \delta\varphi(t) \leq \Psi(z'(t)).$$
Como Ψ é estritamente crescente então
$$\varphi'(t) \leq z'(t), \quad \forall t \in (t_0, T).$$
Isto é,
$$(z-\varphi)'(t) \geq 0, \forall t \in (t_0, T).$$
Logo $z - \varphi$ é não-decrescente em (t_0, T). O que por continuidade implica $z - \varphi$ não-decrescente em $[t_0, T]$. Assim, se $\varphi(T) = z(T)$ então
$$0 < z(t_0) - \varphi(t_0) \leq z(T) - \varphi(T) = 0.$$
Uma contradição, que prova a afirmação 2.
A afirmação 2 contraria a hipótese de 1. Assim provamos a validade de (3.7).

$\square$

4.2 Prova do item 2 do LLS

Prova do item (i)

Para a primeira parte deste item procederemos como no item anterior, ou seja, suponhamos que existe $t_0 \geq 0$ tal que
$$z(t_0) > \varphi(t_0), \tag{4.12}$$
disto obtemos
$$z(t) > \varphi(t), \quad \forall t \geq t_0. \tag{4.13}$$

De fato, se existir $T \geq t_0$ tal que $z(T) \leq \varphi(T)$, temos pela primeira parte que $z(t) \leq \varphi(t), \forall t \in [0,T]$. Em particular, para $t_0 \in [0,T]$ tem-se $z(t_0) \leq \varphi(t_0)$, o que contraria (4.12). Logo (4.13) é válida. Isto é, $z(t) > \varphi(t), \quad \forall t \geq t_0$. Logo

$$\frac{z(t)}{\varphi(t)} > 1, \forall t \geq t_0,$$

o que implica

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{z(t)}{\varphi(t)} \geq 1.$$

Isto contraria a primeira hipótese de 2. Logo, temos $z(t) \leq \varphi(t), \forall t \geq 0$.

Prova do item (ii)

Apresentaremos, em consequência do Lema 2, duas demonstrações distintas.

Prova devido à Ladyzhenskaya-Solonnikov (Versão do Professor Gilberlandio J. Dias)

Se existir $t_0 \geq 0$ tal que $z(t_0) > \varphi(t_0)$, então

$$z(t) > \varphi(t), \quad \forall t \geq t_0. \tag{4.14}$$

De fato, se existir $T \geq t_0$ tal que $z(T) \leq \varphi(T)$, temos pela primeira parte já provada que $z(t) \leq \varphi(t), \forall t \in [0,T]$. Em particular, para $t_0 \in [0,T]$ tem-se $z(t_0) \leq \varphi(t_0)$, uma contradição. Logo (4.14) é válida. Daí, por (4.14), (3.6_1) e (3.6_2) temos

$$z(t) < \delta^{-1}\Psi(z'(t)), \quad \forall t \geq t_0.$$

Agora tomando $\widetilde{z}(s) = \delta^{-1}\Psi(\widetilde{z}'(s))$ tal que $\widetilde{z}(t) = z(t)$, obtemos

$$\delta^{-1}\Psi(\widetilde{z}'(t)) = \widetilde{z}(t) = z(t) < \delta^{-1}\Psi(z'(t))$$

Como Ψ é estritamente crescente temos

$$\widetilde{z}'(t) < z'(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Uma contradição, pois se $z(t)$ tem crescimento de ordem inferior ao das soluções positivas da equação $\widetilde{z}(t) = \delta^{-1}\varphi(\widetilde{z}'(t))$ então $z'(t) \leq \widetilde{z}'(t), \forall t \geq t_0$. Esta contradição prova que $z(t) \geq \varphi(t), \forall t \geq 0$.

Prova devido ao Fábio

A prova apresentada pelo Fábio é muito mais trabalhosa e complexa. Para começar introduzimos o seguinte lema.

Lema 3 . Seja $\widetilde{z}$ solução de (3.9). Se existir $t_1 \in [0,\infty) \cap D(\widetilde{z})$ tal que $z(t_1) \geq \widetilde{z}(t_1)$ e

$$\begin{array}{l} \widetilde{z}(t) < \delta^{-1}\Psi\left(z'(t)\right) \\ \widetilde{z}(t) = \delta^{-1}\Psi\left(\widetilde{z}'(t)\right) \ , \end{array} \tag{4.15}$$

para todo $t \in [0,\infty) \cap D(\widetilde{z})$. Então $z(t) > \widetilde{z}(t)$, para todo $t \in (0,\infty) \cap D(\widetilde{z})$.

Prova: Suponhamos que a tese do lema não valha, isto é, existe $t_0 > t_1$ tal que $z(t_0) \leq \widetilde{z}(t_0)$. Tomemos a seguir, $t_2 = \inf\{t \in [t_1,\infty) \cap D(\widetilde{z})\ ;\ z(t) \leq \widetilde{z}(t)\}$. Primeiro, notemos que $t_2 \in D(\widetilde{z})$, pois $D(\widetilde{z})$ é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $t_2 \in [t, t_0] \subset D(\widetilde{z})$.

Notemos que $z(t_2) = \widetilde{z}(t_2)$, pois da definição de t_2 e da continuidade de z e $\widetilde{z}$ temos $z(t_2) \leq \widetilde{z}(t_2)$, daí se $t_1 = t_2$, da hipótese temos $z(t_2) \geq \widetilde{z}(t_2)$, e assim segue $z(t_2) = \widetilde{z}(t_2)$; enquanto, se $t_2 > t_1$, temos $z(t) > \widetilde{z}(t)$, para todo $t \in (t_1, t_2)$ e por continuidade $z(t_2) \geq \widetilde{z}(t_2)$, e como antes $z(t_2) = \widetilde{z}(t_2)$.

Agora, usando (4.15) obtemos

$$\delta^{-1}\Psi\left(\widetilde{z}'(t_2)\right) = \widetilde{z}(t_2) = z(t_2) < \delta^{-1}\Psi\left(z'(t_2)\right) \ .$$

Daí, pela monotonicidade de Ψ obtemos $z'(t_2) > \widetilde{z}'(t_2)$, mas isto implica $(z - \widetilde{z})'(t_2) > 0$, e assim, $z - \widetilde{z}$ é estritamente crescente em t_2, daí existe $\sigma > 0$ tal que $z - \widetilde{z}$ é estritamente crescente em $(t_2, t_2+\sigma)$, como $z(t_2) = \widetilde{z}(t_2)$, temos $z(t) > \widetilde{z}(t)$, para todo $t \in (t_2, t_2 + \sigma)$, mas pela definição de ínfimo existe $t_3 \in (t_2, t_2 + \sigma)$ tal que $z(t_3) \leq \widetilde{z}(t_3)$ e temos uma contradição. Assim provamos o lema.

$\square$

Observação: No Paper [13], o lema acima está como *Claim 2* na p. 709, e há um erro despresível em sua demonstração, pois em vez de $z'(t_2) > \widetilde{z}'(t_2)$, devido à monotonicidade de Ψ, ele traz $z'(t_2) < \widetilde{z}'(t_2)$, mas como vimos acima o desenvolvimento da demonstração é trivial.

Prova do item

Consideremos o conjunto

$$A = \{t \geq 0\,;\, z(t) \leq \varphi(t)\} \ .$$

Temos duas situações a analizar

- Caso $A = \emptyset$: Neste caso temos $z(t) > \varphi(t)$, para todo $t \geq 0$. Usando (3.6) obtemos

$$z(t) \leq \Psi\left(z'(t)\right) + (1-\delta)\varphi(t) < \Psi\left(z'(t)\right) + (1-\delta)z(t)\,,$$

para todo $t \geq 0$. Daí

$$z(t) < \delta^{-1}\Psi\left(z'(t)\right) \ , \quad \forall t \geq 0 \tag{4.16}$$

Tomando $\widetilde{z}_0(t)$ dada por (3.9), temos

$$\begin{cases} \widetilde{z}_0(t) = \delta^{-1}\Psi\left(\widetilde{z}_0'(t)\right) \\ \widetilde{z}(0) = z(0)\,, \end{cases} \tag{4.17}$$

$z(0) \geq \widetilde{z}_0(0)$ e (4.15) segue de (4.16) e (4.17), daí o Lema 3 nos fornece

$$z(t) \geq \widetilde{z}_0(t)\,, \quad \forall t \in [0, \infty) \cap D\left(\widetilde{z}_0\right) \,,$$

o que contraria a hipótese segundo o lema (2) , $\forall t \in [t_0, \infty) \cap D\left(\widetilde{z}_0\right)$, para algum $t_0 \in [0, \infty) \cap D\left(\widetilde{z}_0\right)$.

- Caso $A \neq \emptyset$: Tomemos

$$t_\infty = \sup\left\{t \geq 0;\ z(t) \leq \varphi(t)\right\} \,.$$

Mostraremos que $t_\infty = \infty$. Para isto observemos primeiro que $t_\infty > 0$. Caso contrário, teríamos $z(t) > \varphi(t)$, para todo $t > 0$ e isto implicaria (4.16) para $t > 0$; assim, dado $s > 0$, tomando $\widetilde{z}_s$ solução de (3.9) obtemos do Lema 3 $z(t) > \widetilde{z}_s(t)$, para todo $t \in [s, \infty) \cap D\left(\widetilde{z}_s\right)$, o que é uma contradição, como acima.

Suponhamos agora $0 < t_\infty < \infty$ e tomemos $s > t_\infty$, daí $z(s) > \varphi(s)$ e assim

$$z(t) < \delta^{-1}\Psi\left(z'(t)\right) \ , \quad \forall t > s \,.$$

Tomando, novamente, $\widetilde{z}_s$ solução de (3.9), mais uma vez pelo Lema 3 obtemos $z(t) > \widetilde{z}_s(t)$, para todo $t \in [s, \infty) \cap D\left(\widetilde{z}_s\right)$, nova contradição.

Assim temos $t_\infty = \infty$, isto é, $z(t) \leq \varphi(t)$, para todo $t \geq 0$.

□

4.3 Prova do item 3 do LLS

(i) Para a primeira parte temos z não identicamente nula satisfazendo (3.8). Como Ψ é estritamente crescente em $[0, \infty)$ temos Ψ injetiva nesse intervalo, pois se $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ com $x_1 \neq x_2$, digamos $x_1 > x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$, ou seja, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por outro lado, o fato de $\Psi(0) = 0$, $\Psi(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$ e o Teorema do Valor Intermediário implicam que Ψ é sobrejetiva em $[0, \infty)$. Com isso, Ψ é uma bijeção de $[0, \infty)$ sobre $[0, \infty)$. Logo existe Ψ^{-1} que também é estritamente crescente em $[0, \infty)$. Daí, desde que (3.8) é válida para todo $t \geq 0$, temos

$$\Psi^{-1}(\delta z(t)) \leq z'(t), \forall t \geq 0. \tag{4.18}$$

Observe agora que existe $t_0 \in [0, \infty)$ tal que $z(t_0) > 0$, pois z é não identicamente nula. Daí usando (4.18) em t_0 vem

$$z'(t_0) \geq \Psi^{-1}(\delta z(t_0)) > 0,$$

pois $\delta^{-1} z(t_0) > 0$. Façamos $\alpha_0 = \Psi^{-1}(\delta z(t_0))$. Daí,

$$z'(t_0) \geq \alpha_0 \tag{4.19}$$

Com isso, afirmamos que

$$z(t) \geq z(t_0) + \alpha_0(t - t_0), \forall t \geq t_0. \tag{4.20}$$

Vamos apresentar uma prova de (4.20), totalmente diferente da prova (um tanto confusa) presente em [13], p. 709.

Como Ψ^{-1} é estritamente crescente e z é não decrescente, do Teorema do Valor Médio segue para algum $t_1 \in (t_0, t)$,

$$z(t) - z(t_0) = z'(t_1)(t - t_0) \geq \Psi^{-1}\left(\delta z(t_1)\right)(t - t_0) \geq \alpha_0(t - t_0)\,,$$

assim temos (4.20), como queríamos demonstrar.

Como (4.20) é válida e

$$\lim_{t \to \infty} z(t_0) + \alpha_0(t - t_0) = \infty,$$

pois t_0 *e* α_0 são fixos e $\alpha_0 > 0$. Temos,

$$\lim_{t \to \infty} z(t) = \infty.$$

(ii) Para a segunda parte temos, além de (3.6_1) e (3.6_2), que

$$\delta^{-1}\Psi(\tau) \leq c\tau^m, \tag{4.21}$$

com $m > 1$, para $\tau \geq \tau_1$ (para algum $\tau_1 > 0$). Pela equação (4.20) e (3.8), podemos obter $r > t_0$ tal que

$$z'(t) \geq \Psi^{-1}(\delta z(t)) \geq \Psi^{-1}(\delta z(t_0) + \delta\alpha_0(t - t_0)),$$

isto para todo $t > r > t_0$, pois Ψ é estritamente crescente. Por outro lado,

$$\delta z(t_0) + \delta\alpha_0(t - t_0) > 0, \quad \forall t > r > t_0.$$

Daí, para todo $t > r > t_0$ vale

$$z'(t) \geq \Psi^{-1}(\delta z(t_0) + \delta\alpha_0(t - t_0)) \geq \tau_1 \tag{4.22}$$

para algum $\tau_1 > 0$. Logo para $\tau = z'(t)$ em (4.21) temos

$$\delta^{-1}\Psi(z'(t)) \leq c(z'(t))^m, \forall t > r > t_0. \tag{4.23}$$

Assim, por (3.8) e (4.23) obtemos

$$z(t) \leq \delta^{-1}\Psi(z'(t)) \leq c(z'(t))^m, \forall t > r > t_0.$$

Isto é, para todo $t > r > t_0$

$$z(t) \leq c(z'(t))^m \tag{4.24}$$

Provemos agora que em (4.24) temos estritamente positivo, isto é, c¿0.
De fato, se fosse $c \leq 0$ então (4.23) nos daria

$$\delta^{-1}\Psi(z'(t)) \leq c(z'(t))^m \leq 0,$$

pois $z'(t) > 0$, para $t > t_0$. Logo $\Psi(z'(t)) \leq 0 = \Psi(0), \forall t > r > t_0$.
O que por (4.22) contraria o fato de Ψ ser estritamente crescente. Logo $c > 0$.
Observe ainda que $z(t) \geq z(t_0) > 0, \forall t > t_0$. Assim, de (4.24) vem para todo $t > r > t_0$

$$z(t) \leq c(z'(t))^m \Rightarrow (z(t))^{1/m} \leq c^{1/m} z'(t) \Rightarrow c^{-1/m} \leq \frac{z'(t)}{(z(t))^{1/m}}.$$

Integrando esta última desigualdade no intervalo $[r, t]$, temos

$$\int_r^t c^{-1/m} ds \leq \int_r^t \frac{z'(s)}{(z(s))^{1/m}} ds. \tag{4.25}$$

Fazendo a mudança de variável $u = z(s)$ no segundo membro de (4.25), vem

$$\int_r^t c^{-1/m} ds \leq \int_{z(r)}^{z(t)} u^{-1/m} du.$$

Integrando acima obtemos, para todo $t > r > t_0$

$$c^{-1/m}(t - r) \leq \left(\frac{m}{m-1}\right)\left((z(t))^{(m-1)/m} - (z(r))^{(m-1)/m}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m-1}{m}\right) c^{-1/m}(t-r) + (z(r))^{(m-1)/m} \leq (z(t))^{(m-1)/m}$$

$$\Rightarrow t\left[\left(\frac{(m-1)(c^{-1/m})}{m}\right)\left(1-\frac{r}{t}\right) + \frac{1}{t}(z(r))^{(m-1)/m}\right] \leq (z(t))^{(m-1)/m}.$$

Isto é,

$$t^{m/(m-1)}K(t) \leq z(t), \forall t > r > t_0,$$

onde

$$K(t) = \left[\left(\frac{(m-1)(c^{-1/m})}{m}\right)\left(1-\frac{r}{t}\right) + \frac{1}{t}(z(r))^{(m-1)/m}\right]^{m/(m-1)}$$

para todo $t > r > t_0$. Daí,

$$K(t) \leq t^{-m/(m-1)}z(t), \forall t > r > t_0$$

Logo tomando $\liminf$ com $t \to \infty$ nesta última desigualdade, vem

$$\liminf_{t\to\infty} K(t) \leq \liminf_{t\to\infty}[t^{-m/(m-1)}z(t)].$$

Como r é um número real fixo, é fácil perceber que

$$\liminf_{t\to\infty} K(t) = \left(\frac{(m-1)(c^{-1/m})}{m}\right)^{m/(m-1)}.$$

Com isso, temos

$$\left(\frac{m-1}{m}c^{-1/m}\right)^{m/(m-1)} \leq \liminf_{t\to\infty} t^{-m/(m-1)}z(t).$$

Isto é,

$$\left(\frac{m-1}{m}\right)^{m/(m-1)} c^{-1/(m-1)} \leq \liminf_{t\to\infty} t^{-m/(m-1)}z(t). \tag{4.26}$$

Como $c > 0$ e $m > 1$ então

$$c^{-1/(m-1)} > 0 \ e \ \left(\frac{m-1}{m}\right)^{m/(m-1)} > 0. \tag{4.27}$$

Daí, por (4.26) e (4.27) temos

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-m/(m-1)}z(t) > 0.$$

Para a parte final deste item, suponhamos que além de (3.8), temos

$$\delta^{-1}\Psi(\tau) \leq c\tau, \tag{4.28}$$

para $\tau \geq \tau_1$(para algum $\tau_1 > 0$). Pela equação (4.20) e (3.8), podemos obter $r > t_0$ tal que

$$z'(t) \geq \Psi^{-1}(\delta z(t)) \geq \Psi^{-1}(\delta z(t_0) + \delta\alpha_0(t - t_0)),$$

isto para todo $t > r > t_0$, pois Ψ é estritamente crescente. Por outro lado,

$$\delta z(t_0) + \delta\alpha_0(t - t_0) > 0, \ \ \forall t > r > t_0.$$

Daí, para todo $t > r > t_0$ vale

$$z'(t) \geq \Psi^{-1}(\delta z(t_0) + \delta\alpha_0(t - t_0)) \geq \tau_1 \tag{4.29}$$

para algum $\tau_1 > 0$. Logo para $\tau = z'(t)$ em (4.28) temos

$$\delta^{-1}\Psi(z'(t)) \leq cz'(t), \forall t > r > t_0 \tag{4.30}$$

Assim, por (3.8) e (4.30) obtemos

$$z(t) \leq \delta^{-1}\Psi(z'(t)) \leq cz'(t), \forall t > r > t_0.$$

Isto é, para todo $t > r > t_0$

$$z(t) \leq cz'(t) \tag{4.31}$$

Como anteriormente temos $c > 0$ e $z(t) > 0$ para todo $t > t_0$ Assim, de (4.31), temos para todo $t > r > t_0$

$$c^{-1} \leq \frac{z'(t)}{z(t)}, \ \ \forall t > r > t_0.$$

Integrando esta última desigualdade no intervalo $[r, t]$, temos

$$\int_r^t c^{-1} ds \leq \int_r^t \frac{z^{'}(s)}{z(s)} ds. \tag{4.32}$$

Fazendo a mudança $u = z(s)$ no segundo membro de (4.32), temos

$$\int_r^t c^{-1} dt \leq \int_{z(r)}^{z(t)} \frac{du}{u}.$$

Logo, $c^{-1}(t-r) \leq ln(z(t)) - ln(z(r))$;
e por propriedade de logaritmos obtemos

$$c^{-1}(t-r) \leq ln\left(\frac{z(t)}{z(r)}\right).$$

Aplicando a sua inversa exp temos

$$exp(c^{-1}(t-r)) \leq exp\left(ln\left(\frac{z(t)}{z(r)}\right)\right)$$

$$\Rightarrow exp\left(\frac{1}{c}(t-r)\right) \leq \frac{z(t)}{z(r)}$$

$$\Rightarrow exp\left(\frac{t}{c} - \frac{r}{c}\right) \leq \frac{z(t)}{z(r)}.$$

Por propriedades de exponencial

$$exp\left(\frac{t}{c}\right) \cdot exp\left(\frac{-r}{c}\right) \leq \frac{z(t)}{z(r)}$$

$$\Rightarrow z(r)exp\left(\frac{-r}{c}\right) \leq z(t)\frac{1}{exp\left(\frac{t}{c}\right)}.$$

Isto é,

$$z(r)e^{-r/c} \leq z(t)e^{-t/c}.$$

Como o primeiro membro desta desigualdade é uma constante positiva. Então tomando $\liminf$ de $t \to \infty$ tem-se

$$0 < z(r)e^{-r/c} \leq \liminf_{t\to\infty} z(t)e^{-t/c}.$$

O que prova 3.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Dias, G. J., Estabilidade Fraca do Sistema de Equações de Vlasov-Maxwell, Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp-2002, http://cutter.unicamp.br/document/?code=vtls000247035.

[2] Dias, G. J., Santos, M. M., Steady Flow for Shear Thickening Fluids with Arbitrary fluxes, Journal of Differential Equations, 252, 3873-3898, 2012.

[3] DiPerna, R. and Lions, P., Global Weak Solutions of Vlasov-Maxwell Systems, Comm. Pure and Appl. Math. XLII (1989) 729-757;

[4] Galdi, G. P., An Introduction to the Mathematical Theory o f the Navier-Stokes Equations, Vol. I e II, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[5] Horgan, C. O., Wheeler, L. T., Spatial Decay Estimates for the Navier-Stokes Equations with Application to the Problem of Entry Flow, SIAM J. Appl. Math., 35(1):97-116, 1978.

[6] Knowles, J. K., On Saint-Venant's Principle in the Two-Dimensional Linear Theory of Elastcicity, Arch. Ration. Mech. Anal., 21, 1-22, 1966.

[7] Ladyzhenskaya, O. A., On Some New Equations Describing Dynamics of Incompressible Fluids and on Global Solvability of Boundary Value Pro-blems to these Equations, Trudy Steklov's Math. Institute, 102, 85-104, 1967.

[8] Ladyzhenskaya, O. A., On Some Modifications of the Navier-Stokes Equations for Large Gradients of Velocity, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), 7, 126-154, 1968.

[9] Ladyzhenskaya, O. A., The Mathematical Theory of Viscous Incompres-sible Flow, Gordon and Breach, 2nd ed., 1969.

[10] Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., Determination of the Solutions of Boundary Value Problems for Steady-State Stokes and Navier-Stokes Equations in Domains Having an Unbounded Dirichlet Integral, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI), 96 (1980) 117-160 (English Transl.: J. Soviet Math., 21, 1983, 728-761).

[11] Lima, E. L., Análise Real, Vol. 1, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 11ª ed., 2011.

[12] Lima, E. L., Curso de Análise, Vol. 1, Projeto Euclides, IMPA, 12ª ed., 2007.

[13] Silva, F.V., On a Lemma Due to Ladyzhenskaya and Solonnikov and Some Applications, Nonlinear Analysis, 64, 706-725, 2006.

[14] Solonnikov, V.A., Pileckas, K.I., Certain Spaces of Solenoidal Vectores and the Solvability of the Boundary Problem for the Navier-Stokes System of Equations in Domains with Noncompact Boundaries, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI), 73(1977)136-151 (English Transl.: J. Soviet Math., 34, 1986, 2101-2111).

[15] Sotomayor, J., Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Projeto Euclides-IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[16] Toupin, R. A., Saint-Venant's Principle, Arch. Ration. Mech. Anal., 18, 83-96, 1965.