UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA ELEMENTAR

MACAPÁ-AP
2013

LEANDRO LOBATO NUNES
SIDNEY RIBEIRO COSTA

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA ELEMENTAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente do Curso de Licenciatura em Matemática - UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção da Graduação em Licenciatura em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra Elementar
Orientador: ***Prof. Espec. João Socorro Pinheiro Ferreira.***

MACAPÁ-AP
2013

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA ELEMENTAR

por
COSTA, Sidney Ribeiro; NUNES, Leandro Lobato

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para obtenção do título de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Banca Examinadora

Orientador: Prof. *Espec.* João Socorro Pinheiro Ferreira.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Membro: Prof. *Dr.* Erasmo Senger.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Membro: Prof. *Espec.* Steve Wanderson Calheiros de Araújo.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Avaliado em: 25 de Janeiro de 2013.

MACAPÁ-AP
2013

Aos nossos pais, familiares, esposas e amigos, que tem sido a grande razão e incentivo da nossa caminhada profissional.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar à Deus por ter nos dado força para chegarmos até aqui, segundo aos nossos pais, a razão de nós vivermos, aqueles que nos apóiam, incentivam e nos erguem nos momentos que mais precisamos.

A todos os professores que contribuíram com nossa formação através da troca de conhecimentos e disposição em nos ajudar quando necessário.

Em especial, ao Prof. Espec. João Socorro Pinheiro Ferreira pela orientação prestada que contribuiu de maneira significativa para a realização deste trabalho.

Aos colegas de turma, que contribuíram ao nosso amadurecimento pessoal e profissional.

Finalmente, a todos aqueles que, de forma anônima, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

Os analfabetos do próximo século não são aqueles que não sabem ler ou escrever, mas aqueles que se recusam a aprender, reaprender e voltar a aprender.”
(Alvin Toffler)

RESUMO

Os problemas referentes ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral tem motivado diversos trabalhos de pesquisa na área da Matemática. Em várias partes do mundo é comum encontrar altos índices de reprovação nesta disciplina. A reprovação é, em grande parte, fruto do baixo conhecimento de matemática por parte dos calouros. Sendo assim, pretendemos desenvolver nesta monografia a primeira parte de um programa de Cálculo Diferencial e Integral, contendo dois capítulos: um sobre Sistemas Numéricos e outro sobre Plano Cartesiano, adequado a estudantes que acabam de ingressar na Universidade, e que buscam os cursos de graduação em Ciências Exatas. A partir deste estudo de Álgebra Elementar o aluno passará a ter um melhor entendimento e uma visão mais aprofundada a respeito do conjunto dos números reais, tendo em vista as propriedades, teoremas e demonstrações apresentadas acerca dos sistemas numéricos. Portanto, este trabalho de conclusão de curso servirá como uma apostila de Introdução à Álgebra Elementar fornecendo a base teórica necessária sobre o conjunto dos números reais, de forma que o acadêmico de exatas obtenha êxito no curso das disciplinas de Cálculo, ministradas durante a sua graduação.

Palavras-chave: Apostila. Álgebra Elementar. Pré-Cálculo. Números Reais. Cálculo Diferencial e Integral.

ABSTRACT

The problems regarding the teaching of Differential and Integral Calculation have been motivating several research works in the area of the Mathematics. In several parts of the world it is common to find high disapproval indexes in this discipline. The disapproval is, largely, fruit of the low mathematics knowledge on the part of the freshmen. Being like this, we intended to develop in this monograph the first part of a program of Differential and Integral Calculation, containing two chapters: one on Numeric Systems and another on Cartesian Plan, appropriate to students that has just entered the University, and that you/they look for the degree courses in Exact sciences. Starting from this study of the Elementary Algebra the student will start to have a better understanding and a vision more deepened regarding the group of the real numbers, tends in view the properties, theorems and demonstrations presented concerning the numeric systems. Therefore, this work of course conclusion will serve as a study aid of Introduction to the Elementary Algebra supplying the necessary theoretical base on the group of the real numbers, so that the academic of exact obtains success in the course of the disciplines of Calculation, supplied during her graduation.

Keyword: Study aid. Elementary Algebra. Pré-Calculation. Real Numbers. Differential and Integral Calculation.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

1 INTRODUÇÃO

O homem já utilizou marcas em paredes de cavernas, gravetos e até ossos de animais para representar quantidades. A ideia de número acompanha a humanidade desde a antiguidade. Demorou muito até se chegar à escrita numérica utilizada hoje. Várias civilizações antigas, como os Babilônios, Egípcios, Romanos, Chineses e Maias, criaram diferentes sistemas de numeração. O sistema de números que utilizamos deriva do sistema dos Hindus, divulgado na Europa pelos Árabes, daí o nome sistema Hindu-Arábico. Até ser padronizado, por volta de 1450, após a invenção da imprensa, ele sofreu várias modificações.

O estudo dos sistemas numéricos (suas aplicações, suas propriedades, seu contexto histórico...) constituem uma fatia significativa no ensino de matemática do ensino regular (fundamental e médio), principalmente no que diz respeito à resolução de problemas. A sua compreensão implica em maior aprimoramento das ferramentas que são utilizadas e na continuidade dos conteúdos que são ministrados. Para isso é necessário ressaltar sempre que a Matemática não surge com um homem de loucos pensamentos, e sim, da necessidade do mesmo ao tentar entender problemas da natureza, e da vivência social. É preciso incentivar o aluno a desenvolver uma reflexão de como surgiram os números, os primeiros processos de contagem e, sua utilização, e sua ligação com o desenvolvimento da história do homem.

Diante da importância do contexto apresentado, os problemas referentes ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral tem motivado diversos trabalhos de pesquisa na área da Matemática. Em várias partes do mundo é comum encontrar altos índices de reprovação nesta disciplina. A reprovação é, em grande parte, fruto do baixo conhecimento de matemática por parte dos calouros. Tal disciplina possibilita ao aluno rever conceitos importantes de matemática básica, assim como aprofundá-los.

Com frequência, os estudantes apresentam grandes dificuldades no entendimento das operações elementares com números racionais, na teoria elementar de polinômios e nos conceitos básicos de geometria. Ocorrem também situações em que o estudante, apesar de ter um conhecimento razoável dos pré-requisitos, não os domina no nível exigido em uma disciplina de Cálculo. Essas deficiências se agravam pelo fato de os alunos demonstrarem muita dependência do acompanhamento do professor para desenvolver seu estudo e dirigir seu raciocínio.

Sendo assim, pretendemos desenvolver nesta monografia a primeira parte de um programa de Cálculo Diferencial e Integral adequado a estudantes que acabam de ingressar na Universidade, e que buscam os cursos de graduação em Engenharia, Matemática, Física, Química, Arquitetura, Economia, Administração e outros. Considerando que o aluno vem estudando a Matemática há vários anos, no ensino fundamental e médio, podemos admitir que esteja de posse de noções já bem desenvolvidas sobre os números. Sem desfazer dessa experiência prévia, que será de vital importância, este trabalho de conclusão de curso será composto de dois capítulos a saber: Capítulo 2- Sistemas Numéricos e Capítulo 3- Plano Cartesiano, sendo que cada um deles será composto de quatro seções. O Capítulo 2 é composto das seguintes seções: 2.1 Revisão sucinta dos sistemas numéricos, 2.2 Operações com números reais, 2.3 Ordenação dos números reais. Desigualdades, 2.4 Símbolos usados nesta monografia e, o Capítulo 3: 3.1 Intervalos reais, 3.2 Valor absoluto, 3.3 Segmentos orientados na reta, 3.4 Coordenadas cartesianas no plano.

Nas seções há algumas demonstrações de teoremas deixadas a cargo do leitor, bem como ao final de cada seção há exercícios resolvidos e propostos, visando a revisão e a fixação dos conteúdos.

A questão que se coloca então é a utilização desta monografia como ferramenta de suporte necessária à formação dos estudantes que ingressam nas Universidades nos cursos de Ciências Exatas.

Capítulo 2

SISTEMAS NUMÉRICOS

2.1 Revisão sucinta dos sistemas númericos

Considerando que o leitor vem estudando a Matemática há vários anos, podemos admitir que esteja de posse de noções já bem desenvolvidas sobre os números. Sem desfazer dessa experiência prévia, que será de vital importância, vamos passar em revista alguns aspectos do assunto.

Os principais sistemas numéricos de que cuida a Matemática são os seguintes:
$\mathbb{N}$ = sistema dos números naturais
$\mathbb{Z}$ = sistema dos números inteiros
$\mathbb{Q}$ = sistema dos números racionais
$\mathbb{R}$ = sistema dos números reais
$\mathbb{C}$ = sistema dos números complexos.

Procuraremos deixar clara a distinção entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, dos quais o último é o que mais nos interessará. Nada diremos aqui sobre o conjunto $\mathbb{C}$ porque não lidaremos nesta monografia com os números complexos, embora possam eles ocasionalmente aparecer.

Para indicar que x é um número real, poderemos escrever simbolicamente: $x \in \mathbb{R}$. O símbolo $\in$ representa a relação de pertinência (relação entre um conjunto e os seus elementos). Quando escrevemos $n \in \mathbb{Z}$, queremos dizer que n é elemento do conjunto $\mathbb{Z}$, isto é, n é um número inteiro. Analogamente, $a, b \in \mathbb{N}$ significa que a e b pertencem ao conjunto $\mathbb{N}$, isto é, são números naturais. O símbolo $\notin$ é usado para negar a pertinência. Por exemplo $x \notin \mathbb{Q}$ quer dizer que x não é um número racional.

Os números naturais - São os elementos do conjunto:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Nesse conjunto, cada elemento tem um sucessor; por isso, não existe um último elemento. O número 0 não é sucessor de nenhum número natural, ele é o primeiro elemento do conjunto $\mathbb{N}$. Em $\mathbb{N}$ são definidas as duas operações fundamentais de adição $(+)$ e de multiplicação $(\times$ ou $\cdot)$. Quaisquer que sejam a, $b \in \mathbb{N}$, a soma $a + b$ e o produto $a \cdot b$ (ou ab ou $a \times b$) são números naturais.

Os números inteiros - Formam o conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Os números $1, 2, 3, 4, \ldots$ dizem-se inteiros positivos e os números $-1, -2, -3, -4, \ldots$ são os inteiros negativos. A soma $a + b$ e o produto ab de dois inteiros são números inteiros. No conjunto $\mathbb{Z}$, além da adição e da multiplicação, é definida a subtração $(-)$, pois a diferença $a - b$ de dois números inteiros é sempre um inteiro. Observe-se que essa operação não é definida sobre o conjunto $\mathbb{N}$; dados, por exemplo, os números naturais 3 e 7, a diferença $3 - 7$ não existe em $\mathbb{N}$. Se considerarmos 3 e 7 como números inteiros, a diferença $3 - 7$ existirá em $\mathbb{Z}$, pois será o inteiro -4.

Outra operação bem conhecida é a divisão; para indicar o quociente de a por b escrevemos $a \div b$ ou $\dfrac{a}{b}$ (para comodidade de escrita, também podemos escrever a/b). A divisão não é definida sobre o conjunto $\mathbb{Z}$. Podemos, por exemplo dividir 28 por 7 (quociente é o inteiro 4), mas não podemos dividir 18 por 5 (o quociente não existe no conjunto $\mathbb{Z}$). O estudo da divisão em $\mathbb{Z}$ conduz a vários conceitos muito importantes, tais como os de número primo, de fatorização, de máximo divisor comum de dois ou mais números, e outros. Supomos que tais conceitos são do domínio do leitor.

O quociente de dois inteiros m e n, sendo $n \neq 0$, quando não é um inteiro, é o que chamamos de fração ou número fracionário. São exemplos de frações:

$$\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{11}{5}, \frac{18}{-7}, \frac{-117}{-41}, \frac{18}{59}.$$

Juntando ao conjunto $\mathbb{Z}$ todas as frações, obtemos o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

Os números racionais - Podemos dizer que racionais são todos os números que podem representar-se na forma de quociente $\frac{m}{n}$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. Note-se que os inteiros são particulares números racionais.

Um número racional pode apresentar-se sob várias formas distintas, por exemplo, o número $\frac{4}{6}$ é o mesmo número $\frac{2}{3}$. Temos também:

$$\frac{10}{14} = \frac{25}{35} = \frac{-15}{-21} = \frac{5}{7}.$$

Em geral, dois números racionais $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ são iguais (isto é, são o mesmo número) se e somente se $mq = np$. Portanto, se $\frac{m}{n}$ é qualquer número racional e se r é um inteiro diferente de zero, temos:

$$\frac{mr}{nr} = \frac{m}{n}.$$

Assim, se p e q são inteiros que admitem um divisor comum r, e se $p = mr$ e $q = nr$, então podemos escrever:

$$\frac{p}{q} = \frac{mr}{nr} = \frac{m}{n}.$$

Desse modo, podemos simplificar a expressão do número racional; a maior simplificação possível será obtida quando dividirmos os dois termos da fração $\frac{p}{q}$ pelo seu máximo divisor comum e, neste caso, chegaremos à expressão mais simples (ou forma irredutível) do número racional $\frac{p}{q}$. Por exemplo, a expressão mais simples do número racional $\frac{30}{18}$ é $\frac{5}{3}$, obtida ao dividirmos 30 e 18 pelo seu máximo divisor comum, que é 6. Observe-se que se $\frac{m}{n}$ é um número racional em forma irredutível, então m e n são inteiros primos entre si.

Cada número inteiro n identifica-se com o número racional (irredutível) $\frac{n}{1}$.

No conjunto $\mathbb{Q}$ são definidas as quatro operações: adição, multiplicação, subtração e divisão (exceto a divisão por zero). Essas operações são chamadas operações racionais. Se m, n, p, q são números inteiros, sendo $n \neq 0$ e $q \neq 0$, as ditas operações são efetuadas, como sabemos, por meio das seguintes regras:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + pn}{nq}, \qquad \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq},$$
$$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - pn}{nq}, \qquad \frac{m}{n} \div \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}.$$

Representação geométrica - Os números racionais podem ser representados geometricamente. Recordemos o problema da medição dos segmentos de reta. Sejam a e b dois segmentos de reta, e suponhamos que exista um segmento c que seja submúltiplo comum de a e b, isto é, tal que $a = mc$, $b = nc$, onde m e n são números inteiros positivos. A figura (2.1) abaixo ilustra o caso em que $a = 5c$ e $b = 3c$.

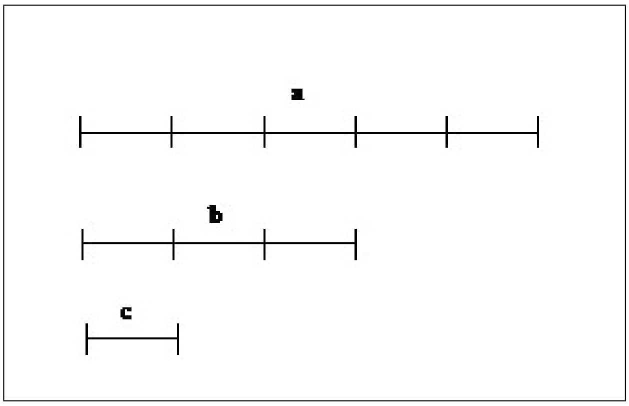


Figura 2.1 *Medição de segmentos de reta*

Os segmentos a e b dizem-se então comensuráveis, e a razão a/b desses segmentos é o número racional m/n. Escreve-se:

$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, ou ainda: $a = \frac{m}{n}b$.

Se escolhermos b como unidade de comprimento, o número m/n será a medida de a. No exemplo da figura, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{3},$$

Isto é, a é igual a $\frac{5}{3}$ de b.

Quando b é submúltiplo de a, isto é, $a = pb$, a razão a/b é o número inteiro p, e temos um caso particular da situação acima descrita.

Dado um segmento de reta b, escolhido como unidade, e dado um número racional positivo m/n (m e n inteiros positivos), podemos facilmente construir um segmento a cuja medida seja esse número. Para isso, basta dividir b em n partes iguais e construir o segmento a que seja igual a m vezes a n-ésima parte de b, quer dizer:

$$a = m(\frac{1}{n}b).$$

É claro então que $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Podemos, agora, representar geometricamente os números racionais por pontos de uma reta $X'X$, que desenharemos em posição horizontal, conforme a figura (2.2):

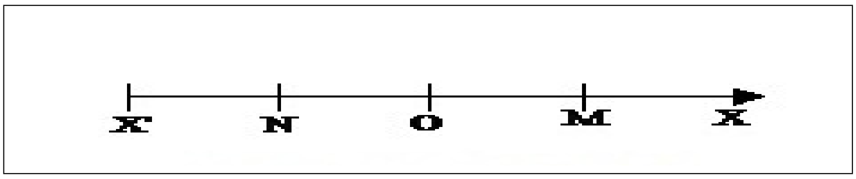


Figura 2.2 *Reta $X'X$.*

Escolhamos como positivo o sentido da esquerda para a direita (indicado por uma seta), fixemos um ponto O ao qual chamaremos origem, e adotemos uma unidade de comprimento arbitrária (por exemplo, o centímetro). Dado um número racional positivo x, podemos representá-lo pelo ponto M da reta, situado à direita da origem, tal que o segmento OM tenha por medida o número x. O número negativo $-x$ será representado pelo ponto N da reta, situado à esquerda da origem, tal que o segmento ON tenha por medida o número x. Desse modo, os números x e $-x$ tem por imagens na reta dois pontos M e N simétricos em relação à origem; por esse motivo, x e $-x$ dizem-se números simétricos. O número zero é representado pela origem O.

Os números irracionais - Na representação que descrevemos, a cada número racional corresponde um ponto bem determinado da reta. Como existe uma infinidade de números racionais, a representação de todos eles exige uma infinidade de pontos da reta. Não está fora de propósito conjeturar que todos os pontos da reta sejam empregados nessa representação, isto é, que todo ponto da reta seja imagem de um número racional. Entretanto, um estudo cuidadoso da questão mostra que tal conjetura é falsa e que existe pontos da reta que não são imagens de números racionais. Essa afirmação precisa ficar bem clara. Vamos considerar um exemplo histórico. Tomemos o quadrado cujo lado é a unidade de comprimento e chamemos d a medida da sua diagonal, conforme figura(2.3). De acordo com o teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

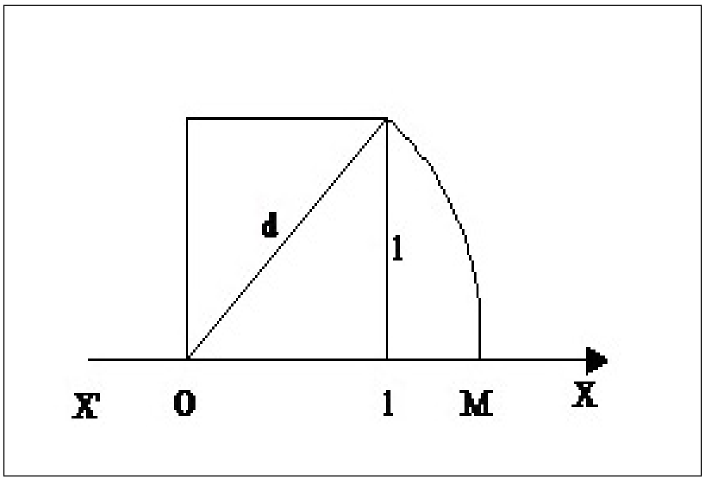


Figura 2.3 *Representação gráfica da* $\sqrt{2}$.

O número positivo cujo quadrado é 2, é por definição a raiz quadrada de 2, e se indica pelo símbolo $\sqrt{2}$. Portanto, $d = \sqrt{2}$. Consideremos na reta $X'X$, à direita da origem, o ponto M tal que o segmento OM seja congruente à diagonal do dito quadrado. Esse ponto M é, de acordo com a representação descrita, a imagem do número $\sqrt{2}$. Ora, acontece que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Vamos provar esta afirmação com base no conhecimento resultado de Aritmética segundo o qual um número inteiro é par se o seu quadrado é par. Se $\sqrt{2}$ fosse racional, poderíamos escrever $\sqrt{2} = m/n$, onde m e n são inteiros não nulos que podemos supor primos entre si. Teríamos então:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2, \qquad \text{onde} \qquad m^2 = 2n^2.$$

Nessas condições, m^2 é par e, em consequência, m também é par, isto é, $m = 2p$, onde p é um inteiro. Segue que $4p^2 = 2n^2$, onde $n^2 = 2p^2$. Então n^2 é par, logo n é também par. Chegamos assim ao seguinte absurdo: os números inteiros m e n são simultaneamente pares e primos entre si!. Desse modo, temos que admitir que $\sqrt{2}$ não é racional.

Mostra o exemplo apresentado (e outros exemplos que podem ser propostos) que na reta existem pontos que não são imagens de números racionais. Tais pontos representam os chamados números irracionais, dos quais $\sqrt{2}$ é um exemplo (parece ter sido o primeiro exemplo histórico). Existem muitos números irracionais: se, por exemplo, p é um número natural que não é o quadrado de outro número natural, então $\sqrt{p}$ é um número irracional. Assim, são irracionais os números $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{27}$, etc.

Os números irracionais não são somente as raízes quadradas a que nos referimos. Podemos considerar raízes cúbicas, quartas, quintas, etc. Se a é um número positivo, chamamos raiz n-ésima de a, e indicamos por $\sqrt[n]{a}$ ao número positivo b tal que $b^n = a$. Se p é um número natural que não seja a n-ésima potência de outro número natural, pode demonstrar-se que $\sqrt[n]{p}$ não é número racional. Este resultado nos fornece muitos exemplos de números irracionais, tais como:

$$\sqrt[3]{7},\ \sqrt[3]{12},\ \sqrt[4]{11},\ \sqrt[5]{2},\ \sqrt[7]{20},\ \text{etc.}$$

Embora o problema da extração de raízes seja fonte de muitos exemplos de números irracionais, não deve o leitor pensar que todos os irracionais tem origem nesse problema. Já dissemos que, do ponto de vista geométrico, os números racionais resultam da comparação de dois segmentos de reta comensuráveis. Nessa ordem de ideias, os irracionais resultam da comparação de dois segmentos incomensuráveis (isto é, que não admitem um submúltiplo comum). A diagonal e o lado de um quadrado constituem o primeiro exemplo conhecido de um par de segmentos incomensuráveis; a razão entre a diagonal e o lado é o número $\sqrt{2}$. A razão entre o lado de um triângulo equilátero e o raio do círculo circunscrito ao triângulo é o número $\sqrt{3}$. Um dos mais famosos exemplos é dado pelo comprimento C de uma circunferência e pelo diâmetro $D = 2R$ da mesma; a razão C/D é o número π (pi):

$$\frac{C}{D} = \frac{C}{2R} = \pi, \qquad \text{onde} \qquad C = 2\pi R.$$

O número π é conhecido desde a antiguidade, mas a sua irracionalidade só foi demonstrada no século XVIII. Em muitos casos, pode ser um problema difícil o que consiste em descobrir se dado número é racional ou irracional.

Os números reais - Voltemos a falar da representação geométrica dos números. Seja M um ponto qualquer da reta $X'X$; temos duas alternativas: ou o segmento OM e o segmento unidade são comensuráveis, ou são incomensuráveis. No primeiro caso, a medida de OM é um número racional; no segundo, é um irracional. Em qualquer caso, o ponto M é a imagem de um número (racional ou irracional).

Reunindo aos números racionais os irracionais, obtemos o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Pelo que acabamos de dizer, conclui-se que os números reais se correspondem biunivocamente com os pontos da linha reta, isto é, a cada número real x corresponde um ponto P da reta, e, vice-versa, a cada ponto P da reta corresponde um número real x. Diremos que o número x é a coordenada (também chamada abscissa) do ponto P. Através da correspondência $P \rightleftharpoons x$, costumamos identificar o número x com o ponto P que lhe corresponde ($P = x$) e usar linguagem geométrica no tratamento de questões númericas. Nessas condições, diremos frequentemente "o ponto x"em vez de "o número x", e também nos referimos ao conjunto de $\mathbb{R}$ dos números reais como sendo "a reta real".

Insistamos, mais uma vez, na observação de que a passagem dos números racionais aos reais se faz por meio da introdução dos irracionais. A representação dos números racionais por pontos da reta não utiliza todos os pontos desta; os pontos que não representam números racionais são utilizados para representar os irracionais. Em outros termos, o conjunto

$\mathbb{Q}$ apresenta lacunas ou falhas; os números irracionais são introduzidos para preencher tais lacunas. O conjunto $\mathbb{R}$ é constituído a partir de $\mathbb{Q}$ por um processo de completamento, de modo que em $\mathbb{R}$ não existam lacunas. Costumamos dizer que $\mathbb{R}$ é um conjunto contínuo, enquanto $\mathbb{Q}$ não tem esta propriedade.

A correspondência biunívoca entre os pontos da reta e os números reais é o fundamento da Geometria Analítica, a qual, graças à introdução das coordenadas, reduz os problemas geométricos a problemas numéricos. Para a resolução destes últimos, a Álgebra desempenha papel fundamental. Na História da Matemática, é considerado fundador da Geometria Analítica o notável pensador francês René Descartes (1596-1650). Na verdade, a ideia de coordenada era conhecida antes de Descartes, mas foi ele quem sistematizou o emprego das coordenadas, recomendando-o como método para a resolução de problemas geométricos.

Representação decimal dos números reais - Consideremos inicialmente um número racional m/n, onde m e n são inteiros, sendo n positivo. Se n é potência de 10, m/n diz-se uma fração decimal, e esta pode ser representada sob a forma de número decimal (com emprego da vírgula). Eis alguns exemplos:

$$\frac{31}{10} = 3,1 \qquad \frac{217}{1000} = \frac{217}{10^3} = 0,217$$

$$\frac{5047}{100} = \frac{5047}{10^2} = 50,47 \qquad \frac{3}{10^4} = 0,0003$$

Se o denominador n não é potência de 10, mas contém somente os fatores primos 2 e 5, podemos facilmente transformar a fração m/n em outra equivalente, cujo denominador seja potência de 10. É o que mostra os seguintes exemplos:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{20} &= \frac{3}{2^2 \times 5} &&= \frac{3 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{15}{10^2} = 0,15 \\
\frac{171}{50} &= \frac{171}{2 \times 5^2} &&= \frac{2 \times 171}{2^2 \times 5^2} = \frac{342}{10^2} = 3,42 \\
\frac{1843}{250} &= \frac{1843}{2 \times 5^3} &&= \frac{2^2 \times 1843}{2^3 \times 5^3} = \frac{7372}{10^3} = 7,372.
\end{aligned}$$

Se o denominador n contém algum fator primo distinto de 2 e de 5, é impossível transformar a fração m/n em outra equivalente tendo por denominador uma potência de 10. Mas, por um processo conhecido, é ainda possível representar a fração m/n por um número decimal, o qual é neste caso periódico, isto é, há um grupo de algarismos que se repete indefinidamente na mesma ordem (esse grupo de algarismos é o período). A representação decimal do número racional m/n é obtida na prática mediante a divisão de m por n. Seguem alguns exemplos:

$\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ (o período é 3)

$\frac{230}{33} = 6,969696\ldots$ (período é 96)

$\frac{15}{7} = 2,142857142857\ldots$ (período é 142857)

$\frac{375}{14} = 26,7857142857142\ldots$ (período é 857142)

$\frac{2749}{30} = 91,6333\ldots$ (período é 3)

Observe-se que se o denominador contém somente fatores primos distintos de 2 e de 5, o período se inicia logo após a vírgula (é o caso dos exemplos 1/3, 230/33, 15/7). Se o denominador contém fatores primos distintos de 2 e 5, juntamente com algum destes dois fatores, aparece uma parte não periódica imediatamente após a vírgula, e só depois dela é que se inicia o período (é o que ocorre nos exemplos 375/14 e 2749/30).

As frações decimais m/n (onde n é potência de 10) podem também representar-se em forma de números decimais periódicos; existem mesmo duas maneiras de obter tal representação, conforme queiramos adotar o período 0 ou o período 9. Eis alguns exemplos:

$$
\begin{aligned}
3,1 = 3,1000\ldots &= 3,0999\ldots \\
0,217 = 0,217000\ldots &= 0,216999\ldots \\
0,0003 = 0,0003000\ldots &= 0,0002999\ldots
\end{aligned}
$$

Concluímos que todo número racional é representável sob a forma de número decimal periódico. Vice-versa, todo número decimal periódico é racional, e o leitor certamente é capaz de encontrar uma sua representação na forma m/n. Como exercício, tomemos o número decimal periódico:

$$p = 0,237237237\ldots$$

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por 10^3, obtemos:

$$1000p = 237,237237237\ldots$$

ou ainda

$$1000p = 237 + 0,237237\ldots$$

ou seja:

$$1000p = 237 + p$$

Segue que:

$999p = 237$, onde $p = \dfrac{237}{999} = \dfrac{79}{333}$.

O processo acima aplica-se a todo número decimal periódico no qual o périodo se inicia imediatamente após a vírgula. Assim, conforme facilmente se comprova, temos:

$0,131313\ldots = \dfrac{13}{99}$, $\qquad 0,7777\ldots = \dfrac{7}{9}$

$0,126126126\ldots = \dfrac{126}{999} = \dfrac{14}{111}$

$$0,018018018\ldots = \frac{18}{999} = \frac{2}{111}$$

$$3,292929\ldots = 3 + 0,292929\ldots = 3 + \frac{29}{99} = \frac{326}{99}$$

$$11,362362362\ldots = 11 + 0,362362362\ldots = 11 + \frac{362}{999} = \frac{11351}{999}$$

Tomemos agora um caso em que o período não se inicia logo após a vírgula. Seja, por exemplo, o número periódico:

$$p = 2,3414141\ldots$$

Podemos escrever:

$$p = 2,3 + 0,0414141\ldots = 2,3 + \frac{1}{10}\cdot 0,414141\ldots$$
$$p = \frac{23}{10} + \frac{1}{10}\cdot\frac{41}{99} = \frac{99\times 23 + 41}{990} = \frac{2318}{990}.$$

Eis outro exemplo:

$$\begin{aligned}
19,4372222\ldots &= 19,437 + 0,0002222\ldots = \\
= 19,437 + \frac{1}{1000}\cdot 0,2222\ldots &= \frac{19437}{1000} + \frac{1}{1000}\cdot\frac{2}{9} = \\
= \frac{9\times 19437 + 2}{9000} &= \frac{174935}{9000}.
\end{aligned}$$

Podemos agora considerar números decimais infinitos não periódicos. Tais números não podem ser racionais, portanto, são irracionais. Eis alguns exemplos:

$$0,303303330333303333\ldots$$

$$7,100110001110000111100000\ldots$$

Se um número é irracional, a sua representação decimal é necessariamente infinita não periódica. Os irracionais $\sqrt{2}$ e π representam-se assim:

$$\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$$

$$\pi = 3,14159265358979\ldots$$

Onde as reticências indicam apenas a existência de uma infinidade de algarismos após a vírgula, mas sem que haja periodicidade.

Valores aproximados - Para calcular, na prática, com os números irracionais, usamos sempre os seus valores aproximados racionais. Por exemplo, quando adotamos para o número $\sqrt{2}$ o valor $1,414$, estamos usando um valor aproximado racional de $\sqrt{2}$. Da mesma maneira, $3,1416$ é um valor racional aproximado de π. Podemos ter valores aproximados por falta ou por excesso, conforme sejam menores ou maiores que o número que aproximam. Temos, por exemplo:

$$3,1415 < \pi < 3,1416$$

Nessas condições, $3,1415$ é um valor aproximado de π por falta, e $3,1416$ é um valor aproximado de π por excesso. Observando que a diferença entre esses dois valores aproximados é $0,0001$, podemos garantir que:

$\pi - 3,1415 < 0,0001$ e $3,1416 - \pi < 0,0001$.

Concluímos que o erro cometido quando se adota para π qualquer dos dois valores aproximados referidos é menor que $0,0001$.

Por exemplo, se o raio de uma circunferência tem exatamente 100 metros, o comprimento desta circunferência mede 200π metros. Observamos que:

$200 \times 3,1415 = 628,30$ e $200 \times 3,1416 = 628,32$.

Concluímos que o comprimento da circunferência está entre $628,30m$ e $628,32m$. Se adotarmos qualquer desses dois números como medida do dito comprimento, estaremos cometendo um erro inferior a $0,02m$.

2.1.1 Exercícios Resolvidos

1. (Retirado de [2], 1977, p.45-A) Quais das seguintes proposições são verdadeiras?

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$(V) b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$(V) c) $0 \in \mathbb{Q}$(V)

d) $517 \in \mathbb{Q}$(V) e)$0,474747\ldots \in \mathbb{Q}$(V) f)$\{\frac{4}{7}, \frac{11}{3}\} \subset \mathbb{Q}$(V)

g) $1 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$(F) h) $\dfrac{2}{7} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$(V) i) $\dfrac{14}{2} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$(F)

j) $\dfrac{21}{14}$ é irredutível(F) k) $\dfrac{121}{147} < \dfrac{131}{150}$(V) l)$r \in \mathbb{Q} \Rightarrow -r \in \mathbb{Q}$(V)

2. (Retirado de [1], 2005, p.21) Determine a geratriz $\dfrac{a}{b}$ das seguintes decimais períodicas:

a) $0,333\ldots$

$0,333\ldots = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

b) $0,1666\ldots$

$0,1666\ldots = 0,1 + 0,0666\ldots = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} \times 0,666\ldots = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} \times \dfrac{6}{9} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{30} = \dfrac{3+2}{30} = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$

c) $0,242424\ldots$

$0,242424\ldots = \dfrac{24}{99} = \dfrac{8}{33}$

d) $0,125777\ldots$

$0,125777\ldots = 0,125 + 0,000777\ldots = \dfrac{125}{1000} + \dfrac{1}{1000} \times 0,777\ldots = \dfrac{125}{1000} + \dfrac{1}{1000} \times \dfrac{7}{9} = \dfrac{1125+7}{9000} = \dfrac{1132}{9000} = \dfrac{283}{2250}$

3. (Retirado de [2], 1977, p.48-A) Provar que se a, b, c, d são racionais, p é primo positivo e $a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p}$, então $a = c$ e $b = d$.

Demonstração 2.1.1.

$$a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p} \Leftrightarrow (b-d)\sqrt{p} = c - a$$

Como $c - a$ é racional, a última igualdade só subsiste quando $(b-d)\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, isto é, se $b - d = 0$. Neste caso, $c - a = 0$, provando a tese.

2.1.2 Exercícios Propostos

1. Representar na forma de fração $\dfrac{m}{n}$ irredutível cada um dos números decimais periódicos seguintes:

a) $0,135135135\ldots$

b) $-4,191919\ldots$

c) $2,003333333\ldots$

d) $0,132787878\ldots$

e) $1,10200020002000\ldots$

2. Determinar, na forma irredutível $\dfrac{m}{n}$, o valor de cada uma das expressões numéricas abaixo:

a) $\dfrac{1}{0,363636\ldots} \div \dfrac{3}{2,333\ldots + 1,666\ldots}$

b) $(2,333\ldots) \times (0,857142857142\ldots)$

c) $\dfrac{3 - 1,474747\ldots}{0,32161616\ldots} + 1,04555\ldots$

3. Examinar cada um dos números abaixo e dizer se é racional ou irracional:

a) $34,275275275\ldots$

b) $-0,1379232323\ldots$

c) $3,01001000100001\ldots$

d) $1,12301230012300012300000123\ldots$

e) $7,2340000\ldots$

f) $\dfrac{2}{3} + 1,363636\ldots$

4. Demonstre que são irracionais os números $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{3}$.

   Sugestão: Inspirar-se na prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ dada no texto.

5. Provar que se a é racional e b é irracional, então $a + b$ é irracional.

Observação 2.1.1. *: De acordo com esse resultado, são números irracionais:* $1+\sqrt{2}$, $\frac{5}{7}+\sqrt[3]{5}$, $\pi-\frac{1}{2}$, $\pi+10^{-3}$, *etc.*

6. Demonstrar que se $a \neq 0$ é racional e b é irracional, então o produto ab é irracional.

Observação 2.1.2. *: segue que são irracionais:* $2\sqrt{3}$, 10π, $\frac{3\pi}{2}$, $-5\sqrt[4]{3}$, *etc.*

7. Mostrar, por meio de exemplos, que a soma ou o produto de dois números irracionais pode ser racional ou irracional.

8. Examinar os números abaixo e dizer, em cada caso, se o número é racional ou irracional:

a) $1,434343\ldots+3,561561561\ldots$

b) $20\sqrt{3}$

c) $3,12222\ldots+\sqrt{12}$

d) $\dfrac{\pi}{2,423333\ldots}$

e) $\sqrt{2}+\sqrt{8}$

f) $(5+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})$

g) $(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})$

h) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

i) $\sqrt{\pi}$

j) $(5,9999\ldots)(2,1111\ldots)(3,121212\ldots)$

k) $0,7777\ldots-0,61611611161111\ldots$

2.2 Operações com os números reais

No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais são definidas duas operações fundamentais: a adição que a cada par (a,b) de números associa a sua soma $a+b$, e a multiplicação, que a cada par de números (a,b) associa o seu produto $a.b$ (o qual também se indica por $a\times b$ ou simplesmente por ab).

Propriedades 2.2.1. *Recordemos as propriedades básicas dessas operações:*

1) Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$*, tem-se:*

$$a + b = b + a.$$

Tal propriedade chama-se comutatividade da adição; ela exprime que a soma não depende da ordem das parcelas.

2) Quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$*, tem-se:*

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

É a associatividade da adição; a soma não depende do modo como se agrupam as paralelas.

3) Existe um número $0 \in \mathbb{R}$ *que é neutro relativamente à adição, isto é:*

$$a + 0 = a.$$

Qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$*. Tal número chama-se zero.*

4) Para cada $a \in \mathbb{R}$*, existe um número* $-a \in \mathbb{R}$ *tal que:*

$$a + (-a) = 0.$$

O número $-a$ *diz-se simétrico de* a*.*

5) Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$*, tem-se:*

$$ab = ba.$$

Trata-se da comutatividade da multiplicação.

6) Quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$*, tem-se:*

$$(ab)c = a(bc).$$

É a associatividade da multiplicação.

7) Existe um número $1 \in \mathbb{R}$ *que é neutro relativamente à multiplicação, isto é:*

$$a.1 = a$$

Qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$*. Tal número diz-se unidade.*

8) Para cada número real $a \neq 0$*, existe um número* $a^{-1} \in \mathbb{R}$ *tal que:*

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

O número a^{-1} *chama-se inverso de* a*.*

9) Quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$*, tem-se:*

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Esta propriedade se chama distributividade da multiplicação ralativamente à adição.

As propriedades acima descritas podem ser consideradas as mais simples de que gozam as duas operações fundamentais com os números reais. Não deve o leitor preocupar-se com demonstrá-las; a atividade mais conveniente que pode assumir em face dessas propriedades consiste em aceitá-las sem prova, isto é, como axiomas ou postulados. A partir desses axiomas, muitas propriedades podem ser obtidas como consequências lógicas (ou teoremas), isto é, podem ser deduzidas. Vamos demonstrar, a seguir, vários desses teoremas.

Unicidade do zero: só existe um elemento neutro relativamente à adição. Com efeito, se 0 e $0^{'}$ fossem neutros, teríamos:

$0^{'} + 0 = 0^{'}$ e $0 + 0^{'} = 0$.

$0^{'} + 0 = 0 + 0^{'}$, em virtude da comutatividade. Resultaria, pois: $0^{'} = 0$.

Com análogo argumento se demonstra a unicidade da unidade.

Unicidade do simétrico: para cada $a \in \mathbb{R}$ existe um único elemento $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$. De fato, se existissem dois elementos $b, c \in \mathbb{R}$, tais que $a + b = 0$ e $a + c = 0$, resultaria:

$c = c+0 = c+(a+b) = (c+a)+b = (a+c)+b = 0+b = b+0 = b$, isto é, seria $c = b$. Portanto, o simétrico de a é único; designá-lo sempre por $-a$.

Unicidade do inverso multiplicativo: para cada número real $a \neq 0$ existe um único elemento $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$. De fato, se existissem dois elementos $b, c \in \mathbb{R}$ tais que: $a \cdot b = 1$ e $a \cdot c = 1$, resultaria:

$$c = c \cdot 1 = c \cdot (a \cdot b) = (c \cdot a) \cdot b = (a \cdot c) \cdot b = 1 \cdot b = b.$$

Concluímos que $c = b$. Logo, só existe um único número real a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = 1$, denominado inverso multiplicativo.

Lei do cancelamento para adição: se $a+b = a+c$, então $b = c$. Com efeito, suponhamos que seja $a + b = a + c$. Somando a ambos os membros o simétrico de a, resulta:

$$\begin{aligned} -a + (a+b) &= -a + (a+c), \\ ou(-a+a)+b &= (-a+a)+c. \end{aligned}$$

Mas, $-a + a = a + (-a) = 0$. Portanto: $0 + b = 0 + c$, ou, finalmente, por ser 0 elemento neutro: $b = c$, como queríamos provar.

Lei do cancelamento para a multiplicação: se $a \neq 0$ e $ab = ac$, então $b = c$. De fato, por ser $a \neq 0$, existe o inverso a^{-1}. Multiplicando ambos os membros da igualdade $ab = ac$ por a^{-1} e usando alguns dos axiomas apresentados, podemos escrever sucessivamente:

$$\begin{aligned} a^{-1}(ab) &= a^{-1}(ac), (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c, \\ (aa^{-1})b &= (aa^{-1})c, 1b = 1c, b = c. \end{aligned}$$

Outra propriedade importante é a seguinte: qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, tem-se $a0 = 0$. Para demonstrá-la partamos da igualdade $0 + 0 = 0$. Multiplicando ambos os membros por a, resulta: $a(0 + 0) = a0$, ou ainda, por ser 0 neutro: $a(0+0) = a0+0$. Por outro lado, usando a distributividade, temos: $a(0 + 0) = a0 + a0$. Concluímos que:

$$a0 + a0 = a0 + 0,$$

onde, após cancelamento: $a0 = 0$, como queríamos provar.

Lei do anulamento do produto: se $a \neq 0$ e $ab = 0$, então $b = 0$. Com efeito, se $a \neq 0$ existe a^{-1} e, por força dos axiomas descritos temos sucessivamente: $ab = 0$, $a^{-1}(ab) = a^{-1}0$, $(a^{-1}a)b = a^{-1}0$, $(aa^{-1})b = a^{-1}0$, $1b = a^{-1}0$, $b = a^{-1}0$. Mas, já provamos que $a^{-1}0 = 0$. Portanto, b=0.

Os dois últimos resultados acima permitem-nos afirmar que um produto de números reais é nulo se e somente de um dos fatores é nulo.

Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$a(-b) = (-a)b = -(ab).$$

De fato, podemos escrever: $ab + a(-b) = a[b + (-b)] = a0 = 0$. Logo, o número $a(-b)$ é o simétrico de ab, isto é: $a(-b) = -(ab)$. Prova-se, analogamente, que $(-a)b = -(ab)$.

Qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$-(-a) = a.$$

Com efeito, a igualdade $-a + a = a + (-a) = 0$ nos diz justamente que a é o simétrico de $-a$, ou seja:

$$a = -(-a).$$

Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(-a)(-b) = ab.$$

Usando os dois resultados precedentes, resulta:

$$(-a)(-b) = -[a(-b)] = -[-(ab)] = ab.$$

Subtração - é a operação inversa da adição. Dados os números reais a e b, a subtração tem por objetivo achar o número x tal que $x + b = a$. Ora, somando a ambos os membros desta equação o número $-b$, resulta:

$$(x + b) + (-b) = a + (-b),$$

onde

$$x + [b + (-b)] = a + (-b)$$

ou

$$x + 0 = a + (-b)$$

ou finalmente:

$$x = a + (-b).$$

Vemos assim, que o problema da subtração tem sempre solução única em $\mathbb{R}$. O número $x = a + (-b)$ diz-se diferença entre a e b e representa-se habitualmente por $a - b$.

Portanto: $a - b = a + (-b)$.

Observe-se que $a(b - c) = ab - ac$, quaisquer que sejam os números reais a, b, c. De fato, podemos escrever:

$$\begin{aligned} a(b - c) = a[b + (-c)] &= ab + a(-c) = \\ = ab + [-(ac)] &= ab - ac. \end{aligned}$$

Divisão - é a operação inversa da multiplicação. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, a divisão tem por objetivo achar o número y tal que $yb = a$. Se $b \neq 0$, existe o inverso b^{-1}, multiplicando ambos os membros da equação $yb = a$ por b^{-1}, obtemos:

$(yb)b^{-1} = ab^{-1}$ ou $y(bb^{-1}) = ab^{-1}$, onde $y1 = ab^{-1}$ ou finalmente: $y = ab^{-1}$. O número $y = ab^{-1}$ diz-se quociente de a por b, e representa-se por $a \div b$ ou $\dfrac{a}{b}$ ou ainda a/b.

Portanto: $a \div b = \dfrac{a}{b} = ab^{-1}$.

Note-se que o quociente a/b só é definido se $b \neq 0$. Se $b = 0$, o produto yb será igual a 0 para todo y, como já sabemos; neste caso, a igualdade $yb = a$ será impossível se for $a \neq 0$, e será verificada para todo $y \in \mathbb{R}$ se for $a = 0$.

Façamos agora alguns comentários úteis sobre a associatividade e a comutatividade.

Para somar três números a, b, c podemos agrupá-los de dois modos: $(a + b) + c$ ou $a + (b + c)$.

O axioma 2 afirma que a soma é a mesma nos dois casos. Esta afirmação se estende a somas de mais de três números. Por exemplo, para somar os números a, b, c, d, e, podemos agrupá-los de diversas maneiras: $\{[(a + b) + c] + d\} + e$, $[(a + b) + (c + d)] + e$, $[a + (b + c)] + (d + e)$, etc.

Pode demonstrar-se que a soma é a mesma, qualquer que seja o modo de agrupar as parcelas. Tal soma pode, sem ambiguidade, representar-se pela expressão:

$$a + b + c + d + e,$$

na qual não aperecem parênteses. Observação análoga pode ser feita para a multiplicação; a expressão $abcde$ indica um produto bem determinado, independente da maneira como se agrupam os fatores.

As leis comutativas $a + b = b + a$ e $ab = ba$ estendem-se também a somas e produtos de vários números. Por exemplo:

$$a + b + c + d = b + d + c + a.$$

Em resumo, em uma soma ou produto de vários números, podemos agrupá-los de modo arbitrário, bem como mudar à vontade a ordem em que aparecem.

2.2.1 Exercícios Resolvidos

1. Prove as seguintes unicidades:

a) Se $x + \theta = x$ para $x \in \mathbb{R}^*$ então $\theta = 0$.

Demonstração 2.2.1. *Do axioma:*

$x + 0 = x$

$x + 0 \cdot x = x$

$x \cdot (1 + 0) = x$

$x \cdot 1 = x$

$\therefore x = x$

Então, $x + \theta = x$.

$x + \theta x = x$

$x \cdot (1 + \theta) = 1x$

$1 + \theta = 1$

$\theta = 0$ *c.q.d*

b) Se $x \cdot U = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$ então $U = 1$.

Demonstração 2.2.2. $x \cdot U = x$ $(\div x)$

$1 \cdot U = 1$

$\therefore U = 1$ *c.q.d*

c) Se $x + y = 0$ então $y = -x$.

Demonstração 2.2.3. $x+y = 0$*; somando-se* $-x$ *em ambos os membros da igualdade, temos:* $-x + x + y = -x + 0$

$\therefore y = -x$ *c.q.d*

d) Se $x \cdot y = 1$ então $y = x^{-1}$.

Demonstração 2.2.4. $x \cdot y = 1$*; multiplicando-se* x^{-1} *em ambos os membros da igualdade, temos:*

$x^{-1} \cdot x \cdot y = x^{-1} \cdot 1$

$1 \cdot y = x^{-1}$

$\therefore y = x^{-1}$ *c.q.d*

2. Considerem-se quatro números racionais a, b, c, d, tais que b e d sejam positivos e não sejam quadrados perfeitos. Nessas condições, $a+\sqrt{b}$ e $c+\sqrt{d}$ são números irracionais. Demonstre-se que $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ se e somente se $a=c$ e $b=d$.

   Demonstração 2.2.5. *É claro que se $a=c$ e $b=d$ tem-se $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$. Provemos a recíproca. Suponhamos que seja:*

   $$a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}.$$

   Segue que $(a-c)+\sqrt{b}=\sqrt{d}$,

   ou, elevando ao quadrado:

   $$(a-c)^2+b+2(a-c)\sqrt{b}=d,$$

   onde: $2(a-c)\sqrt{b}=d-b-(a-c)^2$.

   Como o segundo membro desta última igualdade é racional, o primeiro membro deve sê-lo também; logo, $a-c=0$, onde $a=c$. Resulta então que $\sqrt{b}=\sqrt{d}$, onde $b=d$.

3. Demonstrar que a soma S_2 dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos é:

   $$S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

   Demonstração 2.2.6. *Consideremos a identidade:*

   $$(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1,$$

   e façamos k sucessivamente igual a $0,1,2,\ldots,n$:

   $$\begin{aligned}1^3 &= 0^3+3\cdot 0^2+3\cdot 0+1\\ 2^3 &= 1^3+3\cdot 1^2+3\cdot 1+1\\ 3^3 &= 2^3+3\cdot 2^2+3\cdot 2+1\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^3 &= (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ (n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

Somando em colunas, e cancelando termos, resulta:

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + \ldots + n) + (n+1),$$

ou seja:

$$(n+1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + n + 1.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} 3S_2 &= (n+1)^3 - 3S_1 - (n+1) = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1) \\ 3S_2 &= \frac{1}{2}(n+1)[2(n+1)^2 - 3n - 2] = \frac{1}{2}(n+1)(2n^2 + n) \\ S_2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

2.2.2 Exercícios Propostos

1. Provar as propriedades abaixo:

a) $-0 = 0$ b) $1^{-1} = 1$

c) Se $a \neq 0$, então $(a^{-1})^{-1} = a$

d) $-(a+b) = -a - b$ e) $-(a-b) = b - a$

f) $(a-b) - c = a - (b+c)$ g) $a - (b-c) = a + c - b$

h) Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

i) Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$, então $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{bc}$.

j) Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$, então $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{ac}{b}$.

k) Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$.

l) Se $c \neq 0$, então $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$ e $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c}$.

m) Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$, então $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$.

n) Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$, tem-se:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

e

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

o) Se b, c, d são diferentes de 0, então:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

2. Verificar as identidades seguintes:

a) $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

b) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

c) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

d) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

e) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

f) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

3. Verificar as igualdades seguintes:

a) $(1+\sqrt{2})^4 = 17 + 12\sqrt{2}$

b) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3 = 9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}$

4. Demonstrar que $(ab)^2 = a^2b^2$. Generalizar para o expoente p (inteiro positivo), bem como para o caso de n fatores ($n > 2$). Depende este resultado da comutatividade da multiplicação? E da associatividade?

5. Verificar a seguinte identidade:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2.$$

Observação 2.2.1. *: Esta identidade indica que o produto da soma de dois quadrados pela soma de dois quadrados é ainda uma soma de dois quadrados.*

6. Generalizar o exercício anterior, mostrando que o produto de n fatores ($n > 2$), cada um das quais é uma soma de dois quadrados, é ainda uma soma de dois quadrados. Como aplicação, escrever como soma de dois quadrados o produto.

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2).$$

7. Consideremos a sequência de n números reais

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

O elemento genérico dessa sequência é o número a_i, onde o símbolo i é um índice que descreve o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Para indicar a soma dos n números da dita sequência, podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

O símbolo $\sum$ é a letra grega sigma (maiúscula). Temos, pois, por definição:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Da mesma forma, temos:

$$a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_{p+k} = \sum_{i=p}^{p+k} a_i = \sum_{j=0}^{k} a_{p+j}$$

Como exercícios, verifiquem-se os seguintes resultados:

a) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$

b) $\sum_{i=1}^{p} b_i + \sum_{i=p+1}^{n} b_i = \sum_{j=1}^{n} b_i$

c) $\sum_{i=1}^{n} k a_i = k \sum_{i=1}^{n} a_1$

d) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

e) $\sum_{j=9}^{13} j = 55$

f) $\sum_{k=0}^{4} (3k^2 + 5) = 115$

g) $\sum_{k=1}^{n} (5k^2 - 3k + 7) = 5 \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3 \sum_{k=1}^{n} k + 7n$

h) $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i b_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_i b_j\right)$

i) $\sum_{1 \leq i < j \leq 3} (a_i a_j) = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3$

8. Dizemos que os números:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

estão em progressão aritmética quando a diferença $a_{i+1} - a_i$ entre dois consecutivos quaisquer dentre eles é constante. Essa constante que representamos por r, chama-se razão da progressão. Por exemplo, os números:

$$3, 7, 11, 15, 19, 23 \ldots$$

estão em progressão aritmética de razão $r = 4$. Supondo que:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

seja uma progressão aritmética de razão r, demonstre o leitor as seguintes afirmações:

a) $a_n = a_1 + r(n-1)$, e de modo mais geral: $a_k = a_j + r(k-j)$.

b) se $j + k = m + n$, então $a_j + a_k = a_m + a_n$.

c) $\sum_{j=1}^{n} .a_j = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n) = \dfrac{n}{2}\left[2a_1 + r(n-1)\right]$

9. Os números inteiros positivos $1, 2, 3, \ldots$ estão em progressão aritmética. O mesmo ocorre com os números pares $2, 4, 6, \ldots$ e com os ímpares $1, 3, 5, \ldots$. Demonstrem-se as seguintes asserções:

a) a soma S_1 dos n primeiros números positivos é:

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) a soma dos n primeiros números pares é $n(n+1)$.

c) a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

d) $\sum_{i=11}^{50} i = 1220$

e) $\sum_{k=7}^{15}(2k-1) = 189$

10. Demonstrar que a soma S_3 dos cubos dos n primeiros números inteiros positivos é:

$$S_3 = S_1^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Sugestão - Partir da identidade:

$$(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1,$$

e proceder como no exercício anterior.

11. Verificar as seguintes igualdades:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 99^2 + 100^2 = 338350$

b) $37^2 + 38^2 + 39^2 + \ldots + 82^2 + 83^2 = 177848$

c) $14^3 + 15^3 + 16^3 + \ldots + 40^3 + 41^3 = 733040$

d) $\sum_{k=1}^{20}(k^2 - 8k + 3) = 1250$

12. Dizemos que estão em progressão geométrica os números:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

(todos distintos de 0) quando o quociente $\dfrac{a_{i+1}}{a_i}$ de dois consecutivos quaisquer dentre eles é constante. Essa constante, que representamos por q, diz-se razão da progressão. Por exemplo, os números:

$$7, 21, 63, 189, \ldots$$

estão em progressão geométrica de razão $q = 3$. Admitindo que os números:

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$$

estejam em progressão geométrica de razão q, demonstrem-se os seguintes resultados:

a) $a_n = a_1 q^{n-1}$ e, de modo mais geral, $a_k = a_j q^{k-j}$

b) se $j + k = m + n$, então $a_j \cdot a_k = a_m \cdot a_n$

c) o produto dos n primeiros termos da progressão é:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

d) a soma dos n primeiros termos da progressão é:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

2.3 Ordenação dos números reais. Desigualdades

Temos feito referências ocasionais à desigualdade entre números reais. Dissemos, por exemplo, que o número π é menor que $3,1416$, e maior que $3,1415$. Se a e b são dois números reais distintos, sabemos que um deles é menor que o outro; representando-os por pontos de uma reta horizontal, o número menor é o que corresponde ao ponto situado mais à esquerda. Para exprimir tal ideia, diremos que no conjunto $\mathbb{R}$ existe uma ordenação. Vamos agora estudar com mais cuidado a relação de ordem entre os números reais. Para isso, introduziremos a noção fundamental de números positivos.

Propriedades 2.3.1. *Admitimos que no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais existe um subconjunto P, formado pelos chamados números positivos, o qual possui as três seguintes propriedades:*

1. *se $a, b \in P$, então $a + b \in P$.*
2. *se $a, b \in P$, então $ab \in P$.*
3. *se $x \in \mathbb{R}$, então $x \in P$, ou $x = 0$, ou $-x \in P$, verificando-se uma, e uma só, das três alternativas.*

Essas propriedades, que aceitamos sem demonstração, dizem-se axiomas de positividade. Os dois primeiros afirmam simplesmente que a soma e o produto dos números positivos são números positivos. O terceiro é chamado axioma da tricotomia.

Diremos que o número $x \in \mathbb{R}$ é negativo se e somente se o seu simétrico $-x$ for positivo. Portanto, dado um número real $x \neq 0$, podemos afirmar, por força do axioma da tricotomia, que x é positivo ou x é negativo.

Passemos a uma definição que é da maior importância. Sejam a e b dois números reais distintos. Diremos que a é maior que b, e escrevemos $a > b$, se e somente se $a - b \in P$. Se for $a > b$, também diremos que b é menor que a, e escrevemos $b < a$.

Em resumo, escrever $a > b$ equivale a escrever $b < a$, e isso significa que a diferença $a - b$ é um número positivo.

A relação entre dois números reais a e b expressa pelo símbolo $>$ (ou pelo símbolo $<$) diz-se uma desigualdade.

Quaisquer que sejam $a,b \in \mathbb{R}$, verifica-se uma só, das três alternativas $a > b$ ou $a = b$ ou $a < b$. Com efeito, conforme o axioma da tricotomia, devemos ter: $a - b \in P$, ou $a - b = 0$, ou $-(a - b) = b - a \in P$.

Observe-se que um número real a é positivo se e somente se $a > 0$. A prova dessa afirmação decorre imediatamente da igualdade $a - 0 = a$. Deixamos os detalhes ao cuidado do leitor. Demonstra-se também, sem dificuldade, que a é negativo se e só se $a < 0$.

Propriedades 2.3.2. *No estudo do Cálculo Diferencial e Integral, as desigualdades desempenham relevante papel. Por isso, é essencial que o leitor adquira familiaridade com elas. O manejo das desigualdades baseia-se em algumas propriedades das quais as mais úteis são as que passamos a descrever.*

1. *Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$.*
2. *Se $a > b$, então $a + c > b + c$ qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$.*
3. *Se $a > b$ e $c > 0$, então $ac > bc$.*
4. *Se $a > b$ e $c < 0$, então $ac < bc$.*
5. *Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$.*

A propriedade 1 é a transitividade da desigualdade. A demonstração é simples: se $a > b$ e $b > c$, então $a-b \in P$ e $b-c \in P$; pelo primeiro axioma de positividade, devemos ter: $(a-b)+(b-c) \in P$, ou após simplificação: $a-c \in P$. Portanto, $a > c$.

A propriedade 2 pode ser enunciada, em linguagem corrente, dizendo que uma desigualdade não se altera quando somamos a ambos os seus membros um mesmo número. Suponhamos $a > b$, isto é, $a-b \in P$, e seja c um número real qualquer. Podemos escrever:

$$(a+c)-(b+c) = a+c-b-c = a-b > 0.$$

Portanto, $a+c > b+c$.

Uma consequência muito útil dessa propriedade é a seguinte: em uma desigualdade, podemos transpor qualquer termo de um membro para o outro, desde que troquemos o seu sinal. Consideremos, por exemplo, a desigualdade:

$$a+b > c.$$

Somando a ambos os membros o simétrico de b, resulta:

$(a+b)+(-b) > c+(-b)$,

ou $a+(b+(-b)) > c-b$,

ou, ainda $a+0 > c-b$,

onde, finalmente: $a > c-b$.

Observe-se que o termo b foi transferido do primeiro para o segundo membro da desigualdade.

A propriedade 3 acima descrita nos diz que uma desigualdade não se altera quando multiplicamos ambos os seus membros por um número positivo. A demonstração é trivial: suponhamos $a > b$ e $c > 0$; conforme o segundo axioma de positividade, o produto dos números positivos $a-b$ e c deve ser positivo, isto é,:

$(a-b)c > 0$, ou seja, $ac-bc > 0$.

Segue que $ac > bc$.

A propriedade 4 afirma que uma desigualdade muda de sentido quando multiplicamos ambos os seus membros por um número negativo.

Se $a > b$ e $c < 0$, consideremos os números positivos: $a - b$ e $-c$. Usando o segundo axioma de positividade, resulta:

$(a - b)(-c) > 0$, onde $a(-c) - b(-c) > 0$, ou ainda: $-ac + bc > 0$, isto é: $ac < bc$.

A propriedade 5 nos permite somar membro a membro desigualdades de mesmo sentido. Deixamos a sua demonstração como exercício.

Nos enunciados das propriedades 1 a 5 acima estudadas, demos preeminência ao símbolo $>$. Considerando a equivalência entre as desigualdades $a > b$ e $b < a$, podemos evidentemente reenunciar as ditas propriedades da maneira que segue.

1'. Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.

2'. Se $a < b$, então $a + c < b + c$ qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$.

3'. Se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$.

4'. Se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$.

5'. Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$.

Se $a < b$ e $b < c$, costumamos escrever $a < b < c$, e dizemos que b está entre a e c. Analogamente, se $a > b$ e $b > c$, escrevemos $a > b > c$, e é claro que também neste caso b está entre a e c.

Se $a < b$ e $b > c$, ou se $a > b$ e $b < c$, nada podemos afirmar com relação a a e c (tanto pode ser $a < c$, como $a > c$, ou ainda $a = c$); em tais casos, não se usa escrever $a < b > c$ ou $a > b < c$. Em outras palavras, somente costumamos encadear desigualdades quando elas tem o mesmo sentido. Podemos, por exemplo, escrever:

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots,$$

ou

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \dots$$

Para exprimir que $a > b$ ou $a = b$, escrevemos condensamente $a \geq b$, e lemos: a é maior que ou igual a b. Analogamente, para indicar que $c < d$ ou $c = d$, escrevemos $c \leq d$ e lemos: c é menor que ou igual a d.

As propriedades 1 a 5 permanecem válidas quando em seus enunciados substituímos adequadamente os símbolos $>$ e $<$ respectivamente por $\geq$ e $\leq$. De modo preciso, temos:

1. Se $a \geq b$ e $b \geq c$, então $a \geq c$.
2. Se $a \geq b$, então $a + c \geq b + c$ qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$.
3. Se $a \geq b$ e $c > 0$, então $ac \geq bc$.
4. Se $a \geq b$ e $c < 0$, então $ac \leq bc$.
5. Se $a \geq b$ e $c \geq d$, então $a + c \geq b + d$.

Observação análoga pode ser feita a respeito das propriedades $1'$ a $5'$.

Inequações - Além das desigualdades numéricas, tais como:

$3 < 5$, $1 + \sqrt{2} > 2$, $\sqrt{2} + \sqrt{5} < 2 + \sqrt{3}$, encontramos frequentemente desigualdades nas quais comparece uma variável (ou incógnita) x; eis alguns exemplos: $2x + 3 > 5$, $7x - 5 < 3x + 7$, $x^2 \leq 4$. Tais desigualdades costumam ser chamadas inequações.

Consideremos, por exemplo, a inequação:

$$7x - 5 < 3x + 7.$$

Substituindo x por $2,8$, obtemos:

$7 \times 2,8 - 5 < 3 \times 2,8 + 7$ ou $14,6 < 15,4$, que é uma desigualdade numérica verdadeira. Dizemos então que o número $x = 2,8$ satisfaz à inequação, ou verifica a inequação. Pode o leitor verificar que o número $x = 3,1$ não satisfaz a mesma inequação.

O conjunto dos números $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a uma inequação é a solução desta. Resolver a inequação é determinar a sua solução.

Exemplo 2.3.1. *Resolvamos a inequação:*

$$7x - 5 < 3x + 7.$$

Por transposição de termos, podemos escrevê-la na forma equivalente:

$7x - 3x < 7 + 5$

ou seja: $4x < 12$.

Multiplicando esta última desigualdade pelo número positivo $\frac{1}{4}$, obtemos: $x < 3$. Portanto, a solução da inequação proposta é o conjunto de todos os números reais menores que 3.

2.3.1 Exercícios Resolvidos

1. Provar que o produto de dois números negativos é positivo.

   Demonstração 2.3.1. *Com efeito, se a e b são negativos, então os seus siméticos $-a$ e $-b$ são positivos; portanto, o produto $(-a)(-b)$, que é igual ao produto ab, é positivo.*

2. Provar que o produto de um número positivo por um negativo é negativo.

   Demonstração 2.3.2. *Sejam $a > 0$ e $b < 0$. Então, $-b > 0$. Pelo segundo axioma de positividade, o produto $a.(-b)$, que é igual a $-(ab)$ é positivo. Segue que ab é negativo.*

3. Mostrar que o número 1 é positivo.

   Demonstração 2.3.3. *Sabemos que $1 \neq 0$. Pelo axioma da tricotomia, deve ser $1 < 0$ ou $1 > 0$. Se fosse $1 < 0$, seria $-1 > 0$ e resultaria $1 = 1.1 = (-1)(-1) > 0$, contra a hipótese. Logo, só pode ser $1 > 0$.*

4. Provar que a média aritmética de dois números reais distintos a e b é um número compreendido entre eles.

   Demonstração 2.3.4. *Admitimos, para fixar ideias, que seja $a < b$; somando a a ambos os membros, resulta: $a+a < a+b$, onde $2a < a+b$.*

   Retomando a desigualdade $a < b$ e somando b a ambos os membros, obtemos:

   $a + b < b + b$, onde $a + b < 2b$.

Encadeando as duas desigualdades obtidas, temos:

$2a < a + b < 2b$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$*, chegamos ao resultado final:*

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

5. Demonstrar que $x^2 \geq 0$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

   Demonstração 2.3.5. *De acordo com a axioma da tricotomia, se* $x \in \mathbb{R}$*, é verdadeira uma, e uma só, das três alternativas:*

   $x > 0,\ x < 0,\ x = 0.$

   Se $x > 0$*, então* $x^2 = x.x > 0$ *em virtude do segundo axioma de positividade. Se* $x < 0$*, então* $-x > 0$ *e temos:* $x^2 = xx = (-x)(-x) > 0$ *por força do mesmo axioma. Se* $x = 0$*, temos* $x^2 = 0.0 = 0$*. Portanto, em todos os casos,* $x^2 \geq 0$*.*

6. Demonstrar que se a e b são números positivos, então $a^2 < b^2$ se e somente se $a < b$.

   Demonstração 2.3.6. *Suponhamos* $a > 0$*,* $b > 0$ *e* $a < b$*. Multiplicando a última desigualdade sucessivamente por* a *e por* b*, obtemos:*

   $a^2 < ab$ *e* $ab < b^2$*.*

   Por transitividade, resulta: $a^2 < b^2$*.*

   Vejamos a recípocra: sejam $a > 0$*,* $b > 0$ *e admitimos* $a^2 < b^2$*. Nessas condições, tem que ser* $a < b$*, pois se fosse* $a = b$*, seria* $a^2 = b^2$*, e se fosse* $a > b$*, resultaria, de acordo com a parte já provada,* $a^2 > b^2$*.*

   Como exercício, podemos provar a recíproca com base em outro argumento: admitimos que seja $a > 0$*,* $b > 0$ *e* $a^2 < b^2$*. Está última desigualdade equivale a* $a^2 - b^2 < 0$*, ou ainda a* $(a + b)(a - b) < 0$*.*

   Como o produto $(a+b)(a-b)$ *é negativo e o seu primeiro fator é positivo (porque* a *e* b *são positivos), segue que o segundo fator é negativo, isto é:*

   $a - b < 0$*, ou seja,* $a < b$*.*

7. Resolver a inequação $\dfrac{x}{x+5} > 4$.

   Podemos escrever a inequação na forma equivalente:
   $\dfrac{x}{x+5} - 4 > 0$, ou ainda, $\dfrac{-3x-20}{x+5} > 0$.
   Esta última pode escrever-se assim: $\dfrac{3x+20}{x+5} < 0$.
   Para que esta desigualdade seja verdadeira temos duas alternativas:
   $a) \begin{cases} 3x+20>0 \\ \\ x+5<0 \end{cases}$ ou

   $b) \begin{cases} 3x+20<0 \\ \\ x+5>0 \end{cases}$

   Para que se cumpra a alternativa a) devemos ter: $x > -\dfrac{20}{3}$ e $x < -5$, ou seja: $-\dfrac{20}{3} < x < -5$. Para o cumprimento da alternativa b), devemos ter: $x < -\dfrac{20}{3}$ e $x > -5$; essas duas desigualdades são incompatíveis, porque $-\dfrac{20}{3} < -5$; assim, a alternativa b) não nos dá soluções da desigualdade proposta. Concluímos que a solução da inequação dada é: $-\dfrac{20}{3} < x < -5$.

8. Resolver a inequação $x^2 - 2x - 15 < 0$.

   Podemos transformar o primeiro membro da desigualdade assim:

   $$\begin{aligned} x^2-2x-15 &= (x^2-2x+1)-15-1=(x-1)^2-16= \\ &= (x-1+4)(x-1-4)=(x+3)(x-5). \end{aligned}$$

   A desigualdade proposta escrever-se-á:

   $$(x+3)(x-5) < 0.$$

Temos duas alternativas a examinar:

$$\begin{cases} x+3<0 \\ \\ x-5>0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x+3>0 \\ \\ x-5<0 \end{cases}$$

A primeira nos leva a: $x < -3$ e $x > 5$, sistema de solução vazia, pois as duas desigualdades são incompatíveis. A segunda alternativa nos conduz a:

$x > -3$ e $x < 5$, ou seja, $-3 < x < 5$, que é a solução da inequação dada.

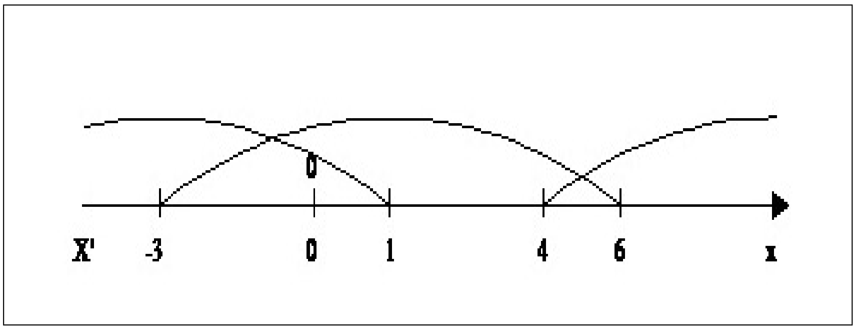
9. Resolver o sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} x^2-5x+4>0 \\ \\ x^2-3x-18<0 \end{cases}$$

Estudando separadamente as duas inequações, por processo análogo ao do exercício precedente, concluímos que a solução da primeira é:

$x < 1$ ou $x > 4$

e a segunda é: $-3 < x < 6$



O conjunto dos números x que satisfazem simultaneamente as duas inequações é a solução do sistema, a saber:

$-3 < x < 1$ ou $4 < x < 6$.

A figura acima auxília muito na visualização dessa solução.

2.3.2 Exercícios propostos

1. Mostrar que se $a > 0$, então $a^{-1} > 0$, e que se $a < 0$, então $a^{-1} < 0$.

2. Demonstrar as proposições seguintes:

a) se $0 < a < b$, então $a^{-1} > b^{-1}$

b) se $a < b < 0$, então $a^{-1} > b^{-1}$

c) se $a < 0 < b$, então $a^{-1} < b^{-1}$

3. Resolver as seguintes inequações:

a) $8x - 14 > 5x + 10$

b) $\frac{3}{2}x - \frac{2}{5} \leq \frac{1}{3}x + \frac{7}{6}$

c) $0,01x + 0,9 < 0,1x$

d) $\frac{x}{a-1} + \frac{x}{a+1} < a, (a > 1)$

4. Resolver as inequações:

a) $\frac{1}{x} > \frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{x} > -\frac{2}{3}$

c) $-0,02 < \frac{3-2x}{4} < 0,02$

d) $\frac{x}{x+5} \leq 0$

e) $\frac{1}{x} > \frac{2}{x-1}$

f) $-\frac{1}{3} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

g) $\frac{x-2}{x-5} < 2$

h) $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} > \frac{7}{4x}$

i) $\frac{-3}{2-t} \geq 0$

j) $\frac{t-1}{t-2} > \frac{t-3}{t-4}$

k) $(y-2)^2 - 4 \geq 0$

l) $\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-1} < 1$

5. Resolver as inequações abaixo:

a) $x^5 - x > 0$

b) $x + \frac{1}{x} > 2$

c) $(x-1)(3-x) > 0$

d) $t^2 - 6t + 9 > 0$

e) $a^2 - 2a + 2 > 0$

f) $4 + 3s - s^2 \leq 0$

g) $x^2 - 4x + 5 \leq 0$

h) $x^2 - 4 \leq 4$

i) $(t + 2)(2t + 1)(3t - 4)(t - 3) > 0$

j) $\dfrac{2 - x}{x^2 + 3x + 2} \geq 0$

k) $\dfrac{2x^2 - x - 10}{3x^2 - 10x - 8} < 0$

6. Resolver os seguintes sistemas de desigualdades:

a) $\begin{cases} 2x - 4 \leq 0 \\ \\ x^2 - 8x + 15 > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 \\ \\ x^2 - 5x < 0 \\ \\ x^2 - 4x - 5 \leq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2 + x - x^2 \geq 0 \\ \\ x^2 - 6x + 6 \leq -2 \end{cases}$

7. Sejam p e q dois números reais tais que $p < q$ e seja

$$y = x^2 - (p + q)x + pq$$

Demonstrar que:

a) $y = 0$ se e somente se $x = p$ ou $x = q$

b) $y > 0$ se e somente se $x < p$ ou $x > p$

c) $y < 0$ se e somente se $p < x < q$

8. Achar os números inteiros que satisfazem às desigualdades seguintes:

a) $\dfrac{2x-4}{x+1} > 6$ b) $\dfrac{x}{x-2} < \dfrac{1}{2}$

9. Supondo que seja $x > 0$, demonstrar que:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

10. Admitindo que x, y, z sejam positivos, provar que:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

11. Mostrar que se x, $y \in \mathbb{R}$, então $x^2 + y^2 = 0$ se e somente se $x = 0$ e $y = 0$.

12. Demonstrar as seguintes proposições:

a) se $0 < x < 1$, então $x > x^2 > x^3 > x^4 > \dots$

b) se $x > 1$, então $x < x^2 < x^3 < x^4 < \dots$

13. Se $x > 0$, chamamos raiz quadrada de x, e indicamos por $\sqrt{x}$, o número positivo y tal que $y^2 = x$. Se a e b são números positivos, a média geométrica de a e b é o número $\sqrt{ab}$. Supondo que seja $0 < a < b$, demonstrar que: $a < \sqrt{ab} < b$.

14. Supondo que a e b sejam números reais positivos e que n seja inteiro positivo, demonstrar a proposição:

    $a^n < b^n$ se e somente se $a < b$.

    Sugestão: O caso $n = 2$ foi estudado entre os exercícios resolvidos; usar indução para estudar o caso geral.

15. Demonstrar as seguintes proposições:

a) se $a \leq b$ e $b < c$, então $a < c$

b) se $a \leq b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$

c) se $a > b$ e $c < d$, então $a - c > b - d$

16. Supondo $x > 0$ e $y > 0$, provar que:

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}.$$

17. Admitindo $a > 0$ e $b > 0$, demonstrar que:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Observação 2.3.1. $\sqrt{a \cdot b} \rightarrow$ *média geometrica,* $\dfrac{2ab}{a+b} \rightarrow$ *média harmônica,* $\dfrac{a+b}{2} \rightarrow$ *média aritmética. Enunciado da Dupla Desigualdade:"A média geométrica é maior ou igual a média harmônica e menor ou igual a média aritmética de dois números reais quaisquer* $(a, b \in \mathbb{R})$ *e* $a \neq b$.*"*

$$MA \leq MG \leq MA$$

18. Se $a > 0$ e se n é inteiro positivo, chamamos raiz n-ésima de a, e indicamos por $\sqrt[n]{a}$, ao número positivo b tal que $b^n = a$. Provar as seguintes proposições:

a) se $0 < x < 1$, então $x < \sqrt{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[4]{x} < \ldots < 1$

b) se $x > 1$, então $x > \sqrt{x} > \sqrt[3]{x} > \sqrt[4]{x} > \ldots > 1$

2.4 Símbolos usados nesta monografia

Antes de passar à descrição dos subconjuntos mais importantes do conjunto $\mathbb{R}$, que são os chamados intervalos reais, façamos uma breve revisão da linguagem dos conjuntos e das notações que usaremos quando for conveniente. A linguagem e o simbolismo dos conjuntos estão atualmente tão incorporados à redação de textos de matemática que chega a tornar-se difícil redigir sem o seu emprego. E, de fato, o uso bem dosado desse simbolismo tem vantagens incontestáveis, pela economia de pensamento e de tempo que propícia. No entanto, a ênfase exagerada que tem sido posta nesse simbolismo tem sido prejudicial ao ensino da matemática, levando pessoas menos avisadas ou menos amadurecidas a confundir erroneamente "Matemática Moderna"com "Teoria dos Conjuntos". Entendemos que "Matemática Moderna"é a matemática que se desenvolve, que se estuda, que se pesquisa na atualidade; é a matemática que se revela útil ao atual estágio de desenvolvimento cultura da humanidade; é a matemática que resolve problemas que o homem precisa resolver. Sob esse aspecto, o Cálculo Diferencial e Integral, embora tenha nascido no século XVII, ainda participa da "Matemática Moderna". Nesta monografia, usaremos com moderação a linguagem dos conjuntos; empregaremos o simbolismo dos conjuntos na medida em que julgarmos isso bom e vantajoso. Não pretendemos dar ao texto feição taquigráfica pelo excesso de símbolos. Será principalmente através do vernáculo que procuraremos transmitir ao leitor conhecimentos de Cálculo. Pensamos que desse modo a leitura será mais amena e a aprendizagem menos árida.

Já estamos empregando, desde as primeiras páginas, o símbolo $\in$, representativo da relação de pertinência, que tem lugar entre um conjunto e os seus elementos. Consideremos, agora, a relação de inclusão entre conjuntos. Se A e B são conjuntos, dizemos que A é subconjunto ou parte de B, ou ainda, que A está contido em B, e escrevemos $A \subset B$, quando todo elemento de A é também elemento de B. Em tal caso, também dizemos que B contém A, e escrevemos $B \supset A$.

A relação de inclusão é reflexiva, anti-simétrica e transitiva, isto é:

1) $A \subset A$, qualquer que seja A,

2) se $A \subset B$ e $B \subset A$, então A=B,

3) se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Em Matemática, somos quase sempre levados a lidar com os subconjuntos de um conjunto fundamental I, chamado universo. Algumas operações podem ser efetuadas com esses subconjuntos. Vamos recordá-las de modo sucinto, para deixar bem fixadas as suas notações. Sejam A e B subconjuntos quaisquer do universo I.

A união de A e B, indicada por $A \cup B$, é o conjunto dos elementos de I que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B. Em símbolos, podemos escrever:

$A \cup B = \{x \in I | x \in A$ ou $x \in B\}$.

A interseção de A e B, indicada por $A \cap B$ é o conjunto dos elementos de I comuns a A e B. Simbolicamente:

$A \cap B = \{x \in I | x \in A$ e $x \in B\}$.

Quando não existe ponto comum aos conjuntos A e B, escrevemos $A \cap B = \phi$, onde o símbolo ϕ indica o conjunto vazio, e dizemos que os conjuntos A e B são disjuntos.

A diferença entre A e B, indicada por $A - B$, é o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B. Em símbolos:

$A - B = \{x \in I | x \in A$ e $x \notin B\}$.

Quando $B \subset A$, a diferença $A - B$ também se diz complemento de B em relação a A. O complemento de um conjunto B relativamente ao universo I diz-se simplismente complemento de B e indica-se por B^c. Portanto:

$B^c = I - B$=$\{x \in I | x \notin B\}$

Verifica-se prontamente que: $A - B = A \cap B^c$.

Propriedades 2.4.1. Das operações com conjuntos - *As operações acima definidas estabelecem no conjunto das partes do universo I uma estrutura algébrica que possui interessantes propriedades. Não sendo nosso objetivo desenvolver aqui o estudo dessa estrutura, limitamo-nos a mencionar algumas de suas principais propriedades:*

1) $A \cup B = B \cup A$ *(comutatividade da união)*

2) $A \cap B = B \cap A$ *(comutatividade da interseção)*

3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(associatividade da união)*

4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(associatividade da interseção)*

5) $A \subset B$ *se e somente se* $A \cup B = B$

6) $A \subset B$ *se e somente se* $A \cap B = A$

7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

É a distribuição da interseção relativamente à união.

8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

É a distributividade da união relativamente à interseção.

9) $A \cup \phi = A$, *qualquer que seja A.*

O conjunto vazio é neutro em relação à união.

10) $A \cap I = A$, *qualquer que seja A.*

O conjunto universo é neutro em relção à interseção.

11) $(A^c)^c = A$

A complementação é uma transformação involutiva.

12) $A \subset B$ *se e somente* $A^c \supset B^c$.

De certo modo, esta propriedade nos diz que quanto "menor"é um subconjunto de I, "maior"é o seu complemento.

13) $\phi^c = I$ *e* $I^c = \phi$

14) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

O complemento da união de dois conjuntos é a interseção dos complementos.

15) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

O complemento da interseção de dois conjuntos é a união dos seus complementos. As propriedades 14 *e* 15 *são conhecidas como leis de De Morgan.*

O símbolo da implicação lógica - Em face da íntima ligação entre a Matemática e a Lógica, é natural que alguns autores de Matemática empreguem em seus escritos símbolos da Lógica. No nosso caso, tendo em vista a já assinalada preocupação de não usar simbolismo em demasia, empregaremos, ocasionalmente, apenas um dos muitos símbolos existentes. Trata-se do símbolo da implicação, que é a seta ($\Rightarrow$).

Quando escrevemos $H \Rightarrow T$, queremos dizer que a hipótese H implica a tese T, isto é, se H é verdadeira, então T é verdadeira. Neste caso, também costumamos dizer que T é condição necessária para que se verifique H, e que H é condição suficiente para que se verifique T.

A recíproca da proposição $H \Rightarrow T$ é a proposição $T \Rightarrow H$. Se esta recíproca é também verdadeira, então T é condição necessária e suficiente para que se verifique H (e, obviamente, H é também condição necessária e suficiente para que se verifique T).

Quando são verdadeiras as duas proposições $H \Rightarrow T$ e $T \Rightarrow H$, escrevemos mais condensadamente $H \Leftrightarrow T$. Neste caso, as afirmações H e T são logicamente equivalentes; H é verdadeira se e somente se T é verdadeira.

Exemplo 2.4.1. *Já mostramos que se o número real x é positivo, então x é maior que 0. Designando por P o conjunto dos reais positivos, podemos enunciar simbolicamente essa proposição assim: $x \in P \Rightarrow x > 0$. A recíproca, também verdadeira, é: $x > 0 \Rightarrow x \in P$. As duas proposições podem reunir-se em um só enunciado, na forma:*

$$x \in P \Leftrightarrow x > 0.$$

Tal enunciado pode ser lido assim: o número x é positivo se e somente se x é maior que 0.

Capítulo 3

PLANO CARTESIANO

3.1 Intervalos reais

Neste trabalho de conclusão de curso, teremos que lidar frequentemente com subconjuntos do conjunto $\mathbb{R}$ (que será, no caso, o universo). Entre tais subconjuntos, merecem especial referência os chamados intervalos reais, que passamos a definir.

Sejam a e b dois números reais distintos e suponhamos, para fixar ideias, que seja $a < b$.

O intervalo aberto de extremos a e b é o conjunto de todos os números reais x compreendidos entre a e b. Tal intervalo será indicado pelo símbolo (a, b). Portanto:

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$.

Observe-se que os extremos a e b não pertencem ao intervalo aberto (a, b).

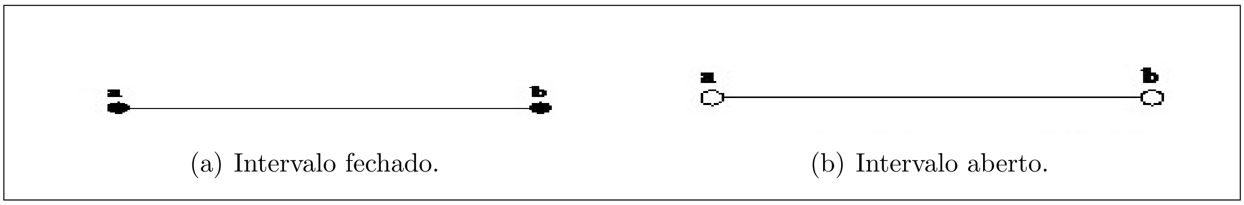
O intervalo fechado de extremos a e b que se representa por $[a, b]$, é o conjunto formado pelos números a e b e por todos os números reais compreendidos entre eles:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$.

As imagens geoméricas dos intervalos acima considerados são segmentos de reta, com as extremidades no caso do intervalo fechado $[a, b]$, e sem elas no caso do intervalo aberto (a, b). A figura (3.1) abaixo ilustra os dois casos.

Podemos considerar intervalos que incluem apenas uma de suas extremidades. Trata-se dos intervalos semi-abertos (ou semi-fechados), ilustrados na figura (3.2) abaixo.

O primeiro é o intervalo $[a, b)$, fechado em a e aberto em b; o segundo



(a) Intervalo fechado. (b) Intervalo aberto.

Figura 3.1 *Intervalos fechado e aberto*

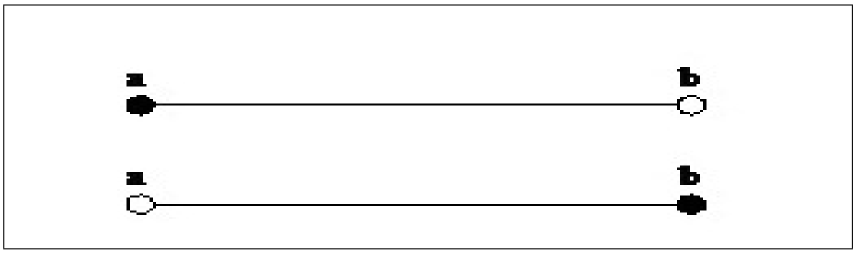


Figura 3.2 *Intervalos semi-abertos.*

é o intervalo $(a, b]$, aberto em a e fechado em b. Tais intervalos podem definir-se da seguinte maneira:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}, (a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}.$$

Além dos quatro tipos de intervalos que acabamos de descrever, aos quais costumamos chamar intervalos limitados, existem outros, ditos intervalos não limitados, cujas imagens geométricas são semi-retas ou a própria reta.

Dado um número real a, ficam determinadas as duas semi-retas fechadas $[a, +\infty)$ e $(-\infty, a]$ e as duas semi-retas abertas $(a, +\infty)$ e$(-\infty, a)$, que são os subconjuntos de $\mathbb{R}$ assim definidos:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}, (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}.$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}, (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}.$$

O símbolo ∞ (infinito), que acima aparece, não é um número. A notação $[a, +\infty)$ apenas sugere que no intervalo considerado existem números arbitrariamente grandes; poderíamos usar em seu lugar a notação $[a, \longrightarrow)$. Analogamente, seria possível usar a notação $(\longleftarrow, a]$ em lugar de $(-\infty, a]$.

O conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais é também considerado um intervalo real; como tal, é indicado por $(-\infty, +\infty)$; trata-se da reta real.

A propriedade que caracteriza um intervalo real I (de qualquer dos tipos acima referidos) é a seguinte: se $x_1, x_2 \in I$ e $x_1 < x < x_2$, então $x \in I$. Em outros termos: se $x_1, x_2 \in I$, então $[x_1, x_2] \subset I$.

Nesta monografia teremos ocasionalmente que considerar uniões, interseções e diferenças de subconjuntos de $\mathbb{R}$, especialmente de intervalos. A representação geométrica desses subconjuntos usualmente nos permite dar solução imediata a tais problemas.

Exemplo 3.1.1. *Dados os intervalos* $A = [-3, 5]$ *e* $B = (2, 8)$*, determinemos* $A \cup B$*,* $A \cap B$*,* $A - B$*,* $B - A$*,* A^c*,* B^c *e* $(A \cup B)^c$*.*

Representando os intervalos A e B na reta real, e destacando-os da reta para melhor visualização, obtemos a seguinte figura (3.3):

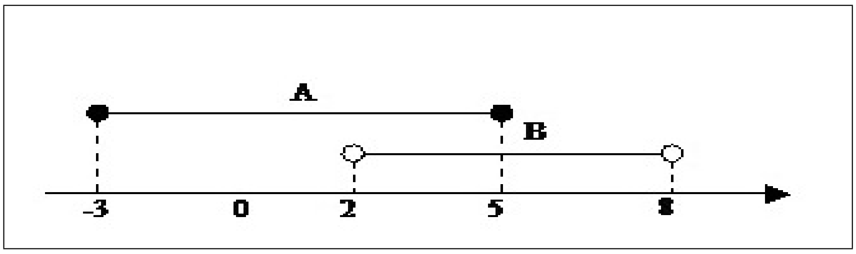


Figura 3.3 *Representação geométrica dos intervalos A e B na reta real.*

Podemos então concluir que:

$A \cup B = [-3, 8)$, $A \cap B = (2, 5]$,

$A - B = [-3, 2]$, $B - A = (5, 8)$

$A^c = (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$, $B^c = (-\infty, 2] \cup [8, +\infty)$

$(A \cup B)^c = (-\infty, -3) \cup [8, +\infty)$.

3.1.1 Exercícios Resolvidos

1. (Ver [2], 1977, p.51-A) Descrever, conforme a notação da teoria dos conjuntos, os seguintes intervalos: $[-1, 3]$, $[0, 2[$, $]-3, 4[$, $]-\infty, 5[$ e $[1, +\infty[$.

   $[-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 3\}$

   $[0, 2[= \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 2\}$

   $]-3, 4[= \{x \in \mathbb{R} | -3 < x < 4\}$

   $]-\infty, 5[= \{x \in \mathbb{R} | x < 5\}$

   $[1, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$

2. (Ver [2], 1977, p.51-A) Determinar os seguintes conjuntos:

a) $[-1,3] \cup [0,4]$=[-1,4] b) $]-2,1] \cup]0,5[=]-2,5[$

c) $[-1,3] \cup [3,5] = [-1,5]$ d) $[-\frac{1}{2}, 0[\cup]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}] =]-\frac{3}{2}, 0[$

3. (Ver [4], 2006, p.86) Considere todos os intervalos da forma $[0, \frac{1}{n}]$, onde $n \in \mathbb{N}$. Existe um número comum a todos estes intervalos? E se forem tomados os intervalos abertos?

   Sim, existe um número comum a todos estes intervalos, mesmo se eles forem tomados como intervalos abertos.

3.1.2 Exercícios Propostos

1. Em cada caso, determinar os conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ e $B - A$:

a) $A = (-\infty, 3)$, $B = [1, +\infty)$

b) $A = [0, 2]$, $B = (2, +\infty)$

c) $A = [0, 2]$, $B = [2, +\infty]$

d) $A = [-3, 0)$, $B = (-1, 2]$

e) $A = (-2, -1]$, $B = [-4, 0)$

f) $A = (-1, 1)$, $B = [2, 5)$

g) $A = [-2, 3)$, $B = (-4, 3]$

h) $(1, +\infty)$, $B = (-\infty, 2]$

2. Determinar o conjunto solução da desigualdade:

$$x^3 - 4x > 0.$$

3. Dados os intervalos $A = [-4, 0)$, $B = (-1, 3)$ e $C = [2, 4)$, verificar que:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. Supondo que $M = (0, 5]$, $N = (3, +\infty)$ e que os complementos sejam tomados em relação a $\mathbb{R}$, verificar que:

a) $(M \cup N)^c = M^c \cap N^c$

b) $(M \cap N)^c = M^c \cup N^c$

5. Resolver a desigualdade $-\dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2}$. Exprimir a solução por meio de intervalos.

6. Determinar o subconjunto de $\mathbb{R}$ ao qual deve pertencer x para que se tenha simultaneamente:

   $x^2 - 3 > 0$ e $x^2 + x - 6 \leq 0$

7. Resolver o sistema de desigualdades:

   $6x^2 - 7x - 5 < 0$ e $3x^2 - 14x + 8 < 0$

8. Mostrar que toda solução da desigualdade:

$$2 + x - x^2 \geq 0,$$

é também solução de:

$$x^2 - 2x - 8 < 0,$$

mas que a recíproca não é verdadeira. Indicar o conjunto de soluções da segunda desigualdade que não são soluções da primeira.

3.2 Valor absoluto

No tratamento de questões de Cálculo Diferencial e de Cálculo Integral, teremos que lidar frequentemente com a noção de valor absoluto de um número real. Por definição, o valor absoluto do número real x, que designaremos por $|x|$, é o próprio número se ele é positivo ou zero, e é o simétrico do número se este é negativo. Em símbolos, podemos definir:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos: $|3| = 3$, $|0| = 0$, $|-1| = -(-1) = 1$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$, $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$, $|\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}| = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$

Propriedades 3.2.1. *do valor absoluto:*

1) $|x| \geq 0$, *qualquer que seja* $x \in \mathbb{R}$.

2) $|x| = 0$ *se e somente se* $x = 0$.

3) $|-x| = |x|$, *qualquer que seja* $x \in \mathbb{R}$.

Com efeito, se $x > 0$, *então* $|x| = x$; *neste caso,* $-x < 0$, *onde* $|-x| = -(-x) = x = |x|$. *Se* $x < 0$, *então* $|x| = -x$; *neste caso,* $-x > 0$, *onde* $|-x| = -x = |x|$. *Se* $x = 0$, *então* $-x = 0$ *e resulta* $|-x| = 0 = |x|$.

4) $-|x| \leq x \leq |x|$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Verifica-se facilmente que se $x > 0$, *então:*

$$-|x| < x = |x|;$$

se $x < 0$, *então:*

$$-|x| = x < |x|;$$

finalmente, se $x = 0$, *então:*

$$-|x| = x = |x|.$$

Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}$ *tem-se:*

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

5) $|x|^2 = x^2$*, qualquer que seja* $x \in \mathbb{R}$*.*

De fato, se $x > 0$*, então* $|x| = x$*; logo,* $|x|^2 = x^2$*. Se* $x < 0$*, então* $|x| = -x$*; portanto,* $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$*. Se* $x = 0$*,* $|x| = 0$ *e é óbvio, então, que* $|x|^2 = x^2 = 0$*.*

6) $|x| = \sqrt{x^2}$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Recordemos que se $a \geq 0$*, então* $\sqrt{a}$ *é, por definição, o número* $b \geq 0$ *tal que* $b^2 = a$*. Assim, lembrando que* $|x| \geq 0$ *e que* $|x|^2 = x^2$*, segue que:* $\sqrt{x^2} = |x|$*.*

7) $|xy| = |x||y|$*.*

A verificação é simples:

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|.$$

8) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$*,* $y \neq 0$*.*

A verificação é análoga à da propriedade anterior.

9) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Desigualdade Triangular).*

Para provar, partamos da igualdade:

$$|x + y|^2 = (x + y)^2.$$

Desenvolvendo o segundo membro:

$$|x + y|^2 = x^2 + y^2 + 2xy = |x|^2 + |y|^2 + 2xy.$$

Lembrando que: $xy \leq |xy| = |x||y|$*, resulta:*

$$|x + y|^2 \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|,$$

ou seja:

$$|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2.$$

Esta desigualdade equivale, como sabemos, a:

$$|x+y| \leq |x|+|y|.$$

Distância na reta real - A noção de valor absoluto encontra aplicação no estudo da distância entre dois pontos da reta real. Sejam A e B dois pontos da reta, de abscissas respectivas a e b. A distância do ponto A ao ponto B, que designaremos por AB, pode ser definida assim:

$$AB = |b-a|$$

Para exemplificar, consideremos na reta os pontos O, A, B, C, D, E, F e suas respectivas abscissas indicadas na figura (3.4) abaixo:

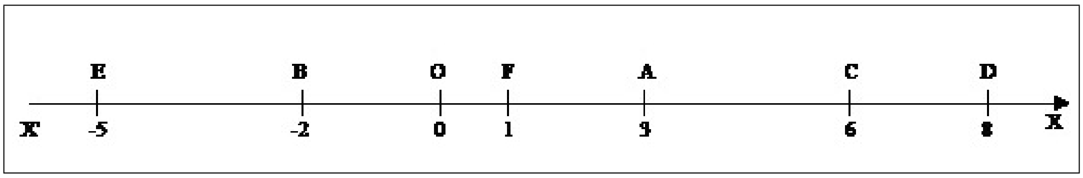


Figura 3.4 *Distâncias na reta real.*

Calculemos algumas distâncias:

$$\begin{aligned} AB &= |b-a| = |-2-3| = |-5| = 5 \\ BC &= |c-b| = |6-(-2)| = |8| = 8 \\ FE &= |e-f| = |-5-1| = |-6| = 6 \\ OD &= |d-o| = |8-0| = |8| = 8 \end{aligned}$$

Se M é o ponto de abscissa x, o valor absoluto do número x é a distância da origem ao ponto M:

$$|x| = |x-0| = OM.$$

Propriedades 3.2.2. *Descrevamos as principais propriedades da distância. Se A, B, C são pontos quaisquer da reta, temos:*

1) $AB \geq 0$ *e* $AB = 0$ *se e somente se* $A = B$*;*

2) $AB = BA$*;*

3) $AB + BC \geq AC$*.*

Deixamos as demonstrações como exercícios. A propriedade $AB = BA$ nos dá a simetria da distância; ela nos permite falar na distância entre os pontos A e B (sem necessidade de referência à ordem desses pontos).

A interpretação do valor absoluto como distância pode, em alguns casos, trazer simplicidade e elegância à resolução de inequações, como mostram os exercícios que seguem.

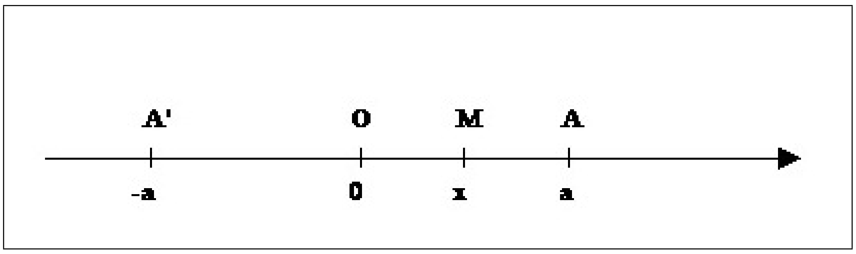
3.2.1 Exercícios Resolvidos

1. Mostrar que se $a > 0$, então:

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

Demonstração 3.2.1. *De fato, a desigualdade* $|x| < a$ *é equivalente a* $x^2 < a^2$ *ou a* $x^2 - a^2 < 0$*, e esta última equivale a:* $-a < x < a$*, como se verifica facilmente.*

Do ponto de vista geométrico, esse resultado é quase óbvio, pois a desigualdade $|x| < a$ *tem por soluções todos e somente os pontos* $M(x)$ *cuja distância à origem é menor que* a*, e tais pontos são evidentemente os que estão situados entre os pontos* $A'(-a)$ *e* $A(a)$*, como ilustra a figura.*



De modo análogo, pode demonstrar-se que se $a > 0$*, então:*

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

2. Mostrar que se $a > 0$, então:

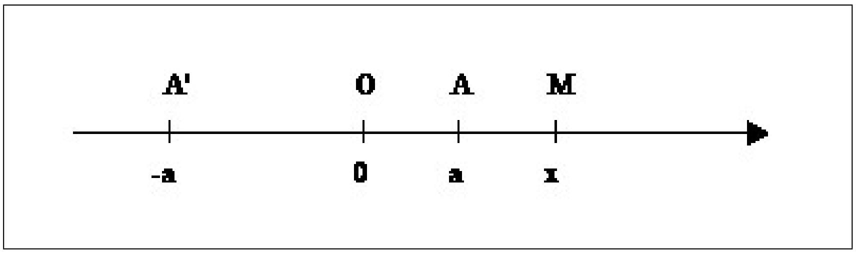
   $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ ou $x > a$.

   Demonstração 3.2.2. *Com efeito, a desigualdade $|x| > a$ equivale a $x^2 > a^2$ ou a $x^2 - a^2 > 0$, cuja solução é $x < -a$ ou $x > a$, como prontamente se verifica.*

   Geometricamente, a desigualdade $|x| > a$ tem por soluções todos e somente os pontos $M(x)$ da reta, cuja distância à origem é maior que a, e esses pontos são evidentemente os que se situam à esquerda de $A'(-a)$ ou à direita de $A(a)$.

   Da mesma forma, prova-se que se $a > 0$, então:

   $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ *ou* $x \geq a$.

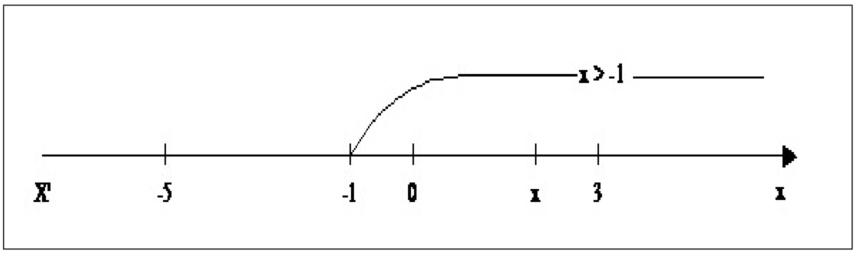


3. Resolver a inequação:

$$|x - 3| < |x + 5|.$$

   Observemos que $|x-3|$ é a distância do ponto x ao ponto 3, e que $|x+5| = |x-(-5)|$ é a distância do ponto x ao ponto -5. A desigualdade nos diz que x deve estar mais próximo de 3 que de -5. Portanto, x deve estar mais próximo de 3 que de -5. Portanto, x deve estar à direita do ponto médio do intervalo $[-5, 3]$, que é o ponto -1. A solução da desigualdade proposta é, pois, $x > -1$. A figura abaixo ilustra a resolução do problema. Podemos resolver a inequação de outro modo.

   Considerando que $|x-3| \geq 0$ e $|x+5| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, concluímos que a desigualdade dada é equivalente à seguinte:



$$|x-3|^2 \ < \ |x+5|^2,$$

ou seja:

$$(x-3)^2 \ < \ (x+5)^2.$$

Desenvolvendo e simplificando:

$$x^2 - 6x + 9 \ < \ x^2 + 10x + 25$$

$$-16 < 16x$$

ou

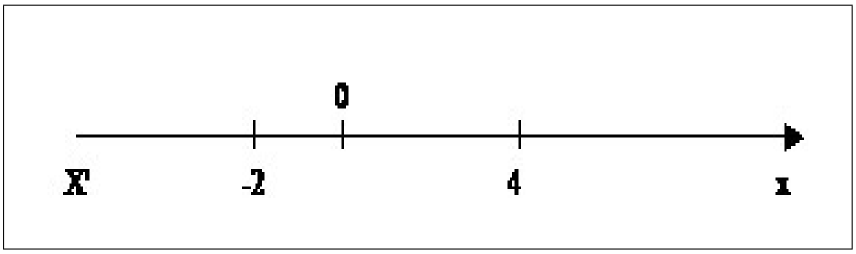
$$16x > -16,$$

onde $x > -1$.

4. Resolver a inequação:

$$|x+2| + |x-4| < 8.$$

Observemos, inicialmente, que $x = -2$ e $x = 4$ são soluções, como se verifica por simples substituição na inequação proposta. Esses dois pontos dividem a reta em duas semi-retas e um segmento, conforme figura abaixo. Vamos procurar as soluções da inequação em cada um desses subconjuntos de $\mathbb{R}$.



a) Suponhamos $x \in (-\infty, -2)$, isto é, $x < -2$; será também $x < 4$. Logo, $x + 2 < 0$ e $x - 4 < 0$, onde resulta que $|x + 2| = -x - 2$ e $|x - 4| = -x + 4$. Substituindo na inequação, obtemos:

   $-x - 2 - x + 4 < 8$, onde $x > -3$.

   Como havíamos suposto $x < -2$, concluímos que são soluções todos os números x tais que $-3 < x < -2$.

b) Admitamos que $x \in (-2, 4)$, isto é, $-2 < x < 4$. Neste caso, $x + 2 > 0$ e $x - 4 < 0$; portanto, $|x + 2| = x + 2$ e $|x - 4| = -x + 4$. Substituindo na inequação:

   $x + 2 - x + 4 < 8$, onde $6 < 8$.

   Como essa desigualdade é verdadeira,concluímos que todo número x tal que $-2 < x < 4$ é solução da inequação dada.

c) Suponhamos, finalmente, que $x \in (4, +\infty)$, ou seja, $x > 4$; será também $x > -2$. Portanto, $x + 2 > 0$ e $x - 4 > 0$, onde resulta que $|x + 2| = x + 2$ e $|x - 4| = x - 4$. Substituindo na inequação:

   $x + 2 + x - 4 < 8$, onde $x < 5$.

   Como tínhamos suposto $x > 4$, concluímos que são soluções todos os números x tais que $4 < x < 5$. Juntando, agora, todas as soluções encontradas, podemos concluir que o conjunto solução da inequação proposta é:

$$(-3, -2) \cup \{-2\} \cup (-2, 4) \cup \{4\} \cup (4, 5)$$

Esse conjunto é obviamente o intervalo $(-3, 5)$. Assim, a solução pedida é $-3 < x < 5$. Geometricamente, este é o conjunto dos pontos x cujas distâncias aos pontos -2 e 4 tem soma menor que 8.

3.2.2 Exercícios Propostos

1. Resolver as equações abaixo:

a) $|x-1| = |x-3|$ b) $|3-x| = |x+3|$

c) $|x-a| = |x-b|$ d) $|2x-1| = |x+1|$

e) $|x-2| = |3-2x|$ f) $\left|\dfrac{3x+8}{2x-3}\right| = 4$

2. Resolver as inequações seguintes:

a) $|x-3| < 2|x+5|$ b) $|3+2x| \leq |4-x|$

c) $|3x-4| < 2$ d) $|2x-5| \geq 3$

e) $\left|\dfrac{5}{2x-1}\right| \geq \left|\dfrac{1}{x-2}\right|$ f) $\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right| < 1$

3. Resolver as equações que seguem:

a) $2x+3 = |4x+5|$ b) $|x| + |x-1| = 1$

c) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$ d) $x + |x-2| = 1 + |x|$

e) $|x+3| + |x-5| = 12$ f) $|x - |x-1|| = 1$

g) $||x-1| - |x+1|| = 1$ h)$x^2 - 3x + 2 = |x^2 - 3x + 2|$

i) $|2x-5| + 4x = |x+1| - 2$ j)$|x+2| + |x-3| = |x-14|$

4. Demonstrar as seguintes proposições:

a) $|x-3| < 1 \Leftrightarrow 6 < x-4 < 8$

b) $|x-1| < 2 \Rightarrow |2x-3| < 5$

c) $|x-4| < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{x-2} < 1$

d) $\delta > 0$ e $|x-a| < \delta \Rightarrow a-\delta < x < a+\delta$

e) $\delta > 0$ e $a-\delta < x < a+\delta \Rightarrow |x-a| < \delta$

5. Resolver as equações abaixo:

a) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ b) $x^2 - 5|x| + 4 = 0$

6. Resolver as inequações seguintes:

a) $-1 \leq |7 - x| < 2$ b) $2 < |x - 4| \leq 3$

c) $1 \leq |3 - 2x| \leq 5$ d) $|2x - 3| > |x + 1|$

7. Resolver as inequações que seguem:

a) $x + 3 > |x|$ b) $|x^2 + x - 1| < 1$

c) $|x + 4| + |x - 1| < 9$ d) $|x + 2| + |x - 4| \leq |x - 9|$

e) $|x - 1| + |x + 3| \geq 6$ f) $7 < |x + 2| + |x - 3| < 9$

8. Resolver os seguintes sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} |x - 4| < 3 \\ |x - 2| \geq 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} |x - 4| \geq |x| \\ |x - 2| < |x| \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4 \leq 3x - 8 \leq 16 \\ |x - 8| > |x - 4| \end{cases}$

d) $\begin{cases} (1 - 2x)(1 - x + x^2) < 0 \\ \dfrac{x + 1}{x^2 - 2} < 0 \end{cases}$

9. Resolver as inequações abaixo:

a) $||x - 5| - 3| < 4$ b) $||x - 1| - 5| < 2$

c) $|x - |x - 1|| > 1$ d) $|x - |x - 1|| < 1$

e) $||x-2|-1| < |x+3|$

f) $\dfrac{2x+3}{x+1} < 5$

g) $\sqrt{1-x^2} < 1+|x|$

h) $\dfrac{|x-2|}{|x|+1} \leq 1$

i) $5 < |x-4| + |x+1| \leq 9$

j) $\sqrt{x^2-6x+10} < |x+2|$

k) $\sqrt{25-x^2} > |x|-1$

l) $|x^2-5x| > x^2-5|x|$

m) $\sqrt{x^2-6x+5} < |x|$

n) $\sqrt{x-x^2} > \dfrac{1}{2} - x$

10. Determinar o conjunto dos números $x \in \mathbb{R}$ que verificam a desigualdade:

$$|x-2|^2 - 4|x-2| + 3 < 0.$$

11. Achar os números inteiros que satisfazem à desigualdade:

$$5 < |x+1| + |x-3| < 10.$$

12. Determinar os números inteiros que verificam simultaneamente as desigualdades:

$|x-4| < 3,$ $\qquad$ $|x-2| \geq 2.$

13. Mostrar que a desigualdade:

$$|x+2| \leq |2x-1| + |x-3|$$

é verdade para todo $x \in \mathbb{R}$.

14. Provar que se $x \in \mathbb{R}$ e se n é inteiro positivo, então $|x^n| = |x|^n$. Nas mesmas condições, se n é par tem-se $|x|^n = x^n$.

Sugestão- Usar o método da indução.

15. Demonstrar que se x e y são reais quaisquer, então:

$$|x-y| \geq ||x| - |y||.$$

3.3 Segmentos orientados na reta

Sejam A e B dois pontos quaisquer da reta $X'X$, referida a um sistema de coordenadas cartesianas no qual, para fixar ideias, transcrevemos como positivo o sentido da esquerda para a direita. Sejam a e b as abcissas respectivas de A e B. Já sabemos que a distância entre esses dois pontos é:

$$AB = BA = |b - a| = |a - b|.$$

Se A e B são pontos distintos, o número $b - a$ pode ser positivo ou negativo. Se $b - a > 0$, temos $b > a$, e isto significa que B está à direita de A, como ilustra a figura (3.5 (a)) abaixo. Se $b - a < 0$, temos $b < a$, e então B está à esquerda de A, como se vê na figura (3.5 (b)) abaixo.

(a) $b > a$ (b) $b < a$

Figura 3.5 $b > a$ e $b < a$.

Definiremos o segmento orientado $\overline{AB}$ da seguinte maneira:

$$\overline{AB} = b - a$$

Se A e B coincidem, então $\overline{AB} = \overline{AA} = 0$. Observe-se que um segmento orientado da reta $X'X$ nada mais é que um número real, mas o conceito de segmento orientado é útil em algumas questões geométricas.

Exemplo 3.3.1. *Consideremos os pontos* $A(3), B(-4), C(6)$, *indicados na figura (3.6) abaixo.*

Podemos escrever:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= -4 - 3 = -7 \\ \overline{CB} &= -4 - 6 = -10 \\ \overline{AC} &= 6 - 3 = 3 \end{aligned}$$

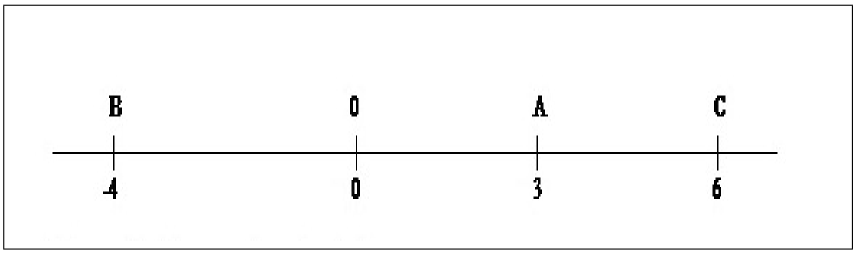


Figura 3.6 *Segmento orientado*

$$\begin{aligned}\overline{CO} &= 0 - 6 = -6\\ \overline{BC} &= 6 + 4 = 10\end{aligned}$$

Notemos que $\overline{AB} + \overline{BA} = (b - a) + (a - b) = 0$, quaisquer que sejam os pontos de A e B. Segue que:

$$\overline{BA} = -\overline{AB}$$

Se A, B e C são pontos quaisquer da reta $X'X$, temos a seguinte igualdade, conhecida como relação de Chasles:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

De fato: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = (b - a) + (c - b) + (a - c) = 0.$

Dessa relação, tiramos:

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= -\overline{CA} - \overline{AB}\\ \text{ou}\overline{BC} &= \overline{AC} - \overline{AB}.\end{aligned}$$

Sejam A e B dois pontos distintos da reta $X'X$ e seja M o ponto genérico da mesma reta, conforme a figura (3.7).

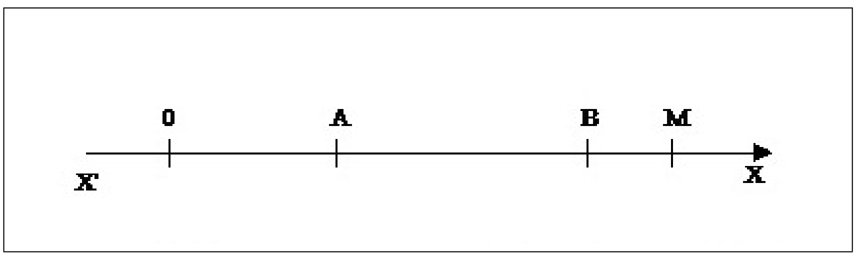


Figura 3.7 *Razão dos pontos A, B e M na reta $X'X$.*

Chamaremos razão simples dos pontos A, B, M, nesta ordem, e designaremos pelo símbolo (ABM), ao número real k assim definido:

$$(ABM) = k = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}.$$

Também diremos que k é a razão segundo a qual o ponto M divide o segmento orientado $\overline{AB}$.

Se as abcissas de A, B e M são, respectivamente, a, b e x, podemos escrever:

$$k = \frac{x - a}{x - b}. \tag{3.1}$$

Quando M está entre A e B, $x - a$ e $x - b$ tem sinais contrários, e então $k < 0$. Em particular, se M é o ponto médio do segmento AB, tem-se $k = -1$. Quando M está em um dos prolongamentos do segmento AB, $x - a$ e $x - b$ tem o mesmo sinal, e então $k > 0$.

Se $M = A$, tem-se $\overline{AM} = 0$ e $\overline{BM} = \overline{BA} \neq 0$; neste caso, $k = 0$. Se $M = B$, tem-se $\overline{AM} = \overline{AB} \neq 0$ e $\overline{BM} = 0$, neste caso, a razão simples k não é definida.

Resolvamos em relação a x a equação (3.1) acima temos:

$$\begin{aligned} x - a &= k(x - b), \\ (1 - k)x &= a - kb, \end{aligned}$$

onde, supondo $k \neq 1$:

$$x = \frac{a - kb}{1 - k}. \tag{3.2}$$

A equação (3.2) nos mostra que a todo número real $k \neq 1$ podemos associar um ponto $M(x)$, e um só, tal que $(ABM) = k$.

Em particular, a abscissa x do ponto médio do segmento AB é:

$$x = \frac{a + b}{2},$$

obtida para $= k - 1$ na equação (3.2).

3.3.1 Exercícios Resolvidos

1. (Retirado de [1], 2005, p.101) Se P corresponde ao número -127, Q corresponde ao número 238 e M corresponde ao número -31, calcule PQ, PM e MQ.

   Temos que:

   $PQ = |238 + 127| = 365$

   $PM = |-31 + 127| = 96$

   $MQ = |238 + 31| = 269$

2. Dados na reta os pontos $A(-3)$, $B(2)$, $C(8)$ e $D(-1)$, cacular as razões simples (ABC), (ABD), (CDA) e (DAB).

   $$(ABC) = k = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{8+3}{8-2} = \frac{11}{6}$$
   $$(CDA) = k = \frac{\overline{CA}}{\overline{DA}} = \frac{-3-8}{-3+1} = \frac{11}{2}$$
   $$(ABD) = k = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{-1+3}{-1-2} = -\frac{2}{3}$$
   $$(DAB) = k = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{2+1}{2+3} = \frac{3}{5}$$

3. Dados na reta os pontos $A(-4)$ e $B(5)$, achar os pontos M, N, P tais que

   $(ABM) = -2$, $(ABN) = 2$, $(ABP) = \dfrac{3}{5}$.

   $$(ABM) = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} \Rightarrow -2 = \frac{M+4}{M-5}$$
   $\Rightarrow -2M + 10 = M + 4$

   $\Rightarrow 3M = 6$

   $M = 2$

   $$(ABN) = \frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} \Rightarrow 2 = \frac{N+4}{N-5}$$
   $\Rightarrow 2N - 10 = N + 4$

$\Rightarrow N = 14$

$(ABP) = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \Rightarrow \dfrac{3}{5} = \dfrac{P+4}{P-5}$

$\Rightarrow 3P - 15 = 5P + 20$

$\Rightarrow 2P = -35 \Rightarrow P = -\dfrac{35}{2}$

3.3.2 Exercícios Propostos

1. Sejam A, B, C, P pontos quaisquer da reta. Provar que:
   $\overline{PA}.\overline{BC} + \overline{PB}.\overline{CA} + \overline{PC}.\overline{AB} = 0.$

2. Dados na reta os três pontos fixos A, B, C e um quarto: ponto quaquer P, provar que
   $\overline{PA}^2.\overline{BC} + \overline{PB}^2.\overline{CA} + \overline{PC}^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0$

3. Se A, B, M e N são pontos da reta, dizemos que por M, N divide harmonicamente o par A, B quando temos:
   $(ABN) = -(ABM)$, ou seja: $\dfrac{\overline{AN}}{\overline{BN}} = -\dfrac{\overline{AM}}{\overline{BM}}$.
   Nessas condições, também dizemos que N é o conjugado harmônico de M em relação a A e B.

   Admitindo que o par M, N divida harmonicamente o par A, B, pede-se:

a) provar que o par A, B também divide harmonicamente o par M, N;

b) demonstrar que $\dfrac{1}{\overline{AM}} + \dfrac{1}{\overline{AN}} = \dfrac{2}{\overline{AB}}$ (o número $\overline{AB}$ diz-se média harmônica dos números $\overline{AM}$ e $\overline{AN}$);

c) provar que se I é o ponto médio de AB, então
   $\overline{IM}.\overline{IN} = \overline{IA}^2$.

4. Dados na reta os pontos $A(-2)$, $B(5)$, e $M\left(\dfrac{29}{3}\right)$, determinar x de maneira que o ponto $N(x)$ seja o conjugado harmônico de M em relação aos pontos A e B.

5. Dados na reta os pontos $A(2)$ e $B(6)$, seja $M(x)$ um ponto qualquer e seja $N(y)$ o conjugado harmônico de M relativamente a A e B. Determinar a relação entre x e y. Qual é o conjugado harmônico do ponto $M(0)$? Qual é o ponto cujo conjugado harmônico é $N(0)$?

6. Sejam A, B, C, D quatro pontos distintos da reta. A razão dupla desses pontos, nessa ordem, é o número $(ABCD)$ assim definido:
$(ABCD) = \dfrac{(ABC)}{(ABD)} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \div \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$.
Provar que: $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$.

7. Tendo em vista a definição de razão dupla dada no exercício anterior, mostrar que se $(ABCD) = k$, então $(ABDC) = \dfrac{1}{k}$ e $(ACBD) = 1-k$.

8. Dados aos pontos $A(3)$, $B(-4)$, $C(5)$ e $D(0)$, calcular as razões duplas $(ABCD)$, $(ABDC)$, $(ACBD)$, $(ACDB)$, $(ADCB)$ e $(ADBC)$.

3.4 Coordenadas cartesianas no plano

A ideia de associar a cada ponto da reta um número real, que é a coordenada (abscissa) do ponto, pode estender-se ao plano e a conjuntos ainda mais amplos. Essa ideia é de suma importância porque é o fundamento do método analítico (ou cartesiano), as propriedades das figuras geométricas são estudadas por meio de relação entre os números que são as coordenadas dos pontos constitutivos de tais figuras.

Consideremos no plano duas retas perpendiculares, uma horizontal $X'X$, outra vertical $Y'Y$, concorrentes no ponto O.

Orientemos a horizontal $X'X$ positivamente da esquerda para a direita, e a vertical $Y'Y$ positivamente de baixo para cima; na figura (3.8) abaixo,os sentidos positivos estão assinalados por setas. Adotemos a mesma unidade de comprimento nas duas retas, e tomemos o ponto O como origem comum. Está assim definido em cada uma das retas $X'X$, $Y'Y$ um sistema de abscissas.

Seja M um ponto qualquer do plano. As paralelas a $Y'Y$ e a $X'X$

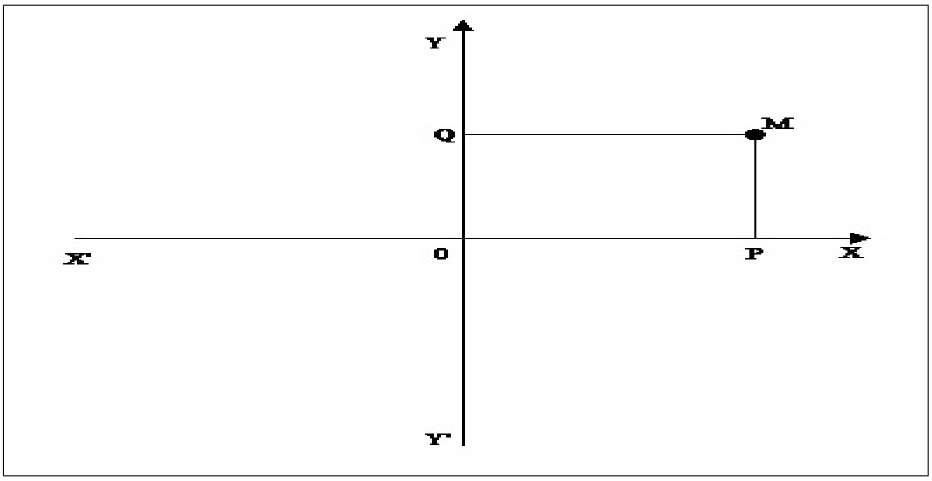


Figura 3.8 *Retas perpendiculares concorrentes no ponto O.*

conduzidas por M encontram $X'X$ e $Y'Y$, respectivamente, nos pontos P e Q. Seja x a abscissa de P em $X'X$, e seja y a abscissa de Q em $Y'Y$. Podemos associar ao ponto M do plano o par (x, y) de números reais.

Vice-versa, dado um par (x, y) de números reais, seja P o ponto de abscissa x na reta $X'X$, e seja Q o ponto de abscissa y na reta $Y'Y$. As paralelas a $Y'Y$ e a $X'X$, conduzidas respectivamente por P e Q, cortam-se em um ponto M do plano, bem determinado. Ao par de números (x, y) façamos corresponder o ponto M.

Estabelecemos, da maneira descrita, uma correspondência biunívoca entre os pontos M do plano e os pares (x, y) de números reais. Os números x, y dizem-se coordenadas (cartesianas) do ponto M. Para distinguir as duas coordenadas x e y, costumamos dizer que x é a abscissa de M e que y é a ordenada de M. Para indicar que um ponto M tem coordenadas x, y, escrevemos $M(x, y)$ ou $M = (x, y)$, com o cuidado de escrever sempre a abscissa em primeiro lugar. Observe-se que se $x \neq y$ os pontos $M = (x, y)$ e $N = (y, x)$ são distintos.

O ponto $O = (0, 0)$ é a origem de coordenadas. A reta $X'X$ é o eixo das abscissas ou eixo dos xx, e todos os seus pontos tem ordenada nula; a reta $Y'Y$ é o eixo das ordenadas ou eixo dos yy, e todos os seus pontos tem abscissa nula. Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, o ponto $P = (x, 0)$ pertence ao eixo dos xx, e qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, o ponto $Q = (0, y)$ pertence ao eixo dos yy.

Os eixos $X'X$ e $Y'Y$, chamados eixos coordenadas, dividem o plano em quatro ângulos retos aos quais chamamos 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes, os quais estão assinalados na figura (3.9) abaixo.

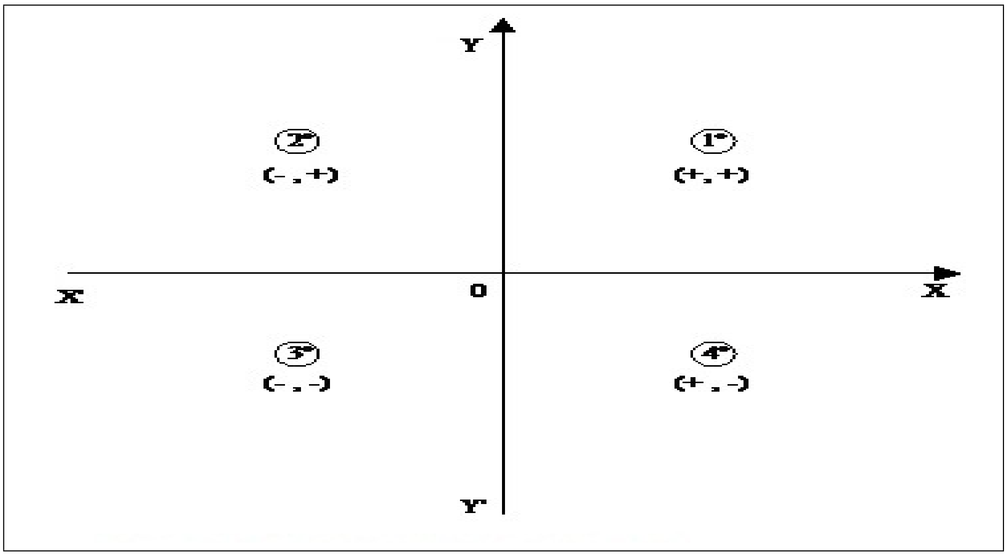


Figura 3.9 *Divisão dos quadrantes.*

Também estão indicados os sinais das coordenadas em cada quadrante.

É essencial que o leitor se familiarize com o sistema de coordenadas cartesianas no plano, e adquira prática não só em marcar na figura o ponto de coordenadas conhecidas, mas também em tirar da figura as coordenadas de um ponto dado. O emprego do papel quadriculado facilita muito esse trabalho. A título de ilustração, aparecem representados na figura (3.10) os seguintes pontos: $O = (0, 0)$, $A = (6, 1)$, $B = (-2, -5)$, $C = (3, 0)$, $D = (0, 4)$, $E = (5, 5)$, $F = (-4, 3)$, $G = (4, -4)$, $H = (-5, -2)$.

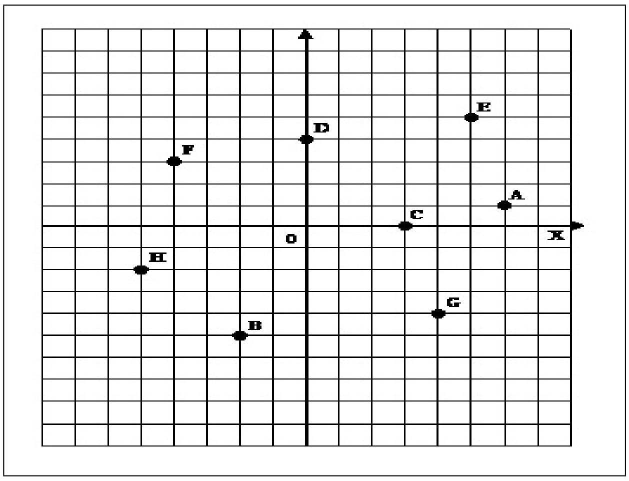


Figura 3.10 *Representação dos pontos no plano cartesiano.*

Distância entre dois pontos do plano - No plano, referido a um sistema de coordenadas cartesianas, sejam $A = (x, y)$ e $B = (x', y')$ dois pontos quaisquer. Por esses pontos tracemos paralelas aos eixos coordenados e determinemos os pontos $A_1 = (x, 0)$, $B_1 = (x', 0)$, $A_2 = (0, y)$ e $B_2 = (0, y')$, como ilustra a figura (3.11) abaixo.

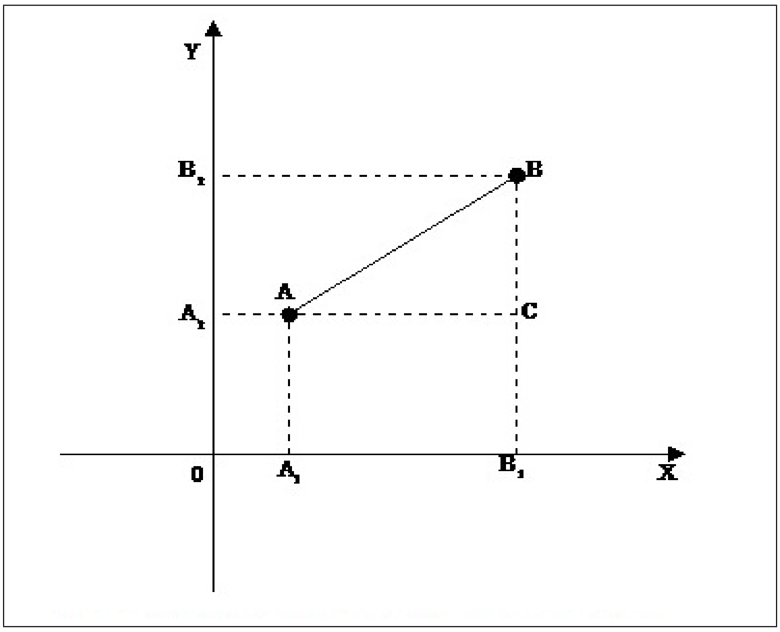


Figura 3.11 *Distância entre dois pontos do plano*

A distância do ponto A ao ponto B é a hipotenusa do triângulo retângulo ABC e, de acordo com o teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2$$

Mas,

$AC = A_1B_1 = |x' - x|$, $\qquad CB = A_2B_2 = |y' - y|$.

Logo:

$$(AB)^2 = |x' - x|^2 + |y' - y|^2$$

ou, de modo equivalente:

$$(AB)^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2.$$

Portanto, a distância do ponto A ao ponto B é:

$$AB = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

Em particular, a distância da origem $O = (0, 0)$ ao ponto $A = (x, y)$ é

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Propriedades 3.4.1. *Deixemos registrado que a distância no plano possui as propriedades já estabelecidas para a distância na reta, a saber:*

1) $AB \geq 0$ *e* $AB = 0 \Leftrightarrow A = B$

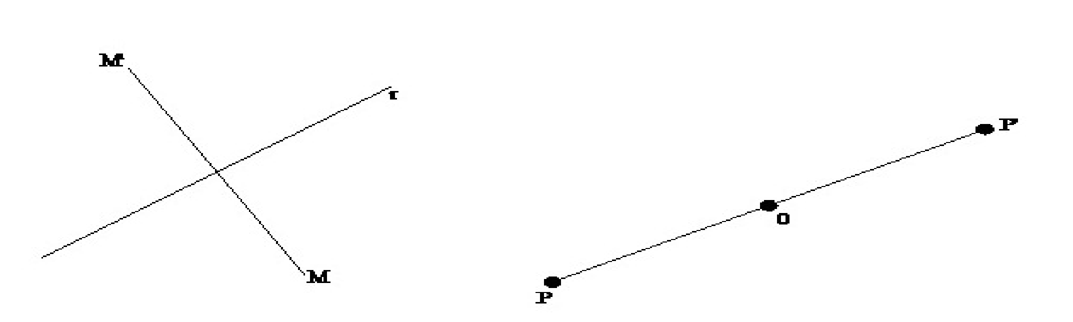
2) $AB = BA$

3) $AB + BC \geq AC$

Exemplo 3.4.1. *Se* $A = (-4, 5)$ *e* $B = (3, -1)$, *a distância* AB *é*

$$AB = \sqrt{(3 + 4)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{85}$$

Simetria - No plano, como se sabe, dois pontos M e M' dizem-se simétricos em relação à reta r quando esta reta é mediatriz do segmento MM', isto é, quando r é perpendicular a MM' no ponto médio de MM'. Nessas condições, também dizemos que cada um dos pontos M, M' é o simétrico do outro relativamente à reta r, conforme a figura (3.12 (a)).



(a) Pontos simétricos em relação a uma reta r

(b) Pontos simétricos em relação a um ponto

Figura 3.12 *(a) Pontos simétricos em relação a uma reta r; (b) Pontos simétricos em relação a um ponto.*

Dois pontos P e P' são simétricos em relação ao ponto O, quando O

é o ponto médio do segmento PP'. Cada um dos pontos P, P' é o simétrico do outro relativamente ao ponto O, como mostra a figura (3.12 (b)) acima.

Consideremos um sistema cartesiano de eixos OX e OY e seja $M = (x, y)$ um ponto qualquer do plano. O simétrico de M em relação ao eixo dos yy é o ponto $M_1 = (-x, y)$. O simétrico de M relativamente ao eixo dos xx é o ponto $M_2 = (x, -y)$. O simétrico de M em relação à origem é $M_3 = (-x, -y)$. Observe-se que M_3 é, ainda, o simétrico de M_2 relativamente ao eixo dos yy, e é também o simétrico de M_1 em relação ao eixo dos xx.

A figura (3.13) mostra claramente que os quatro pontos M, M_1, M_2 e M_3 são os vértices de um retângulo de centro na origem e lados paralelos aos eixos coordenadas.

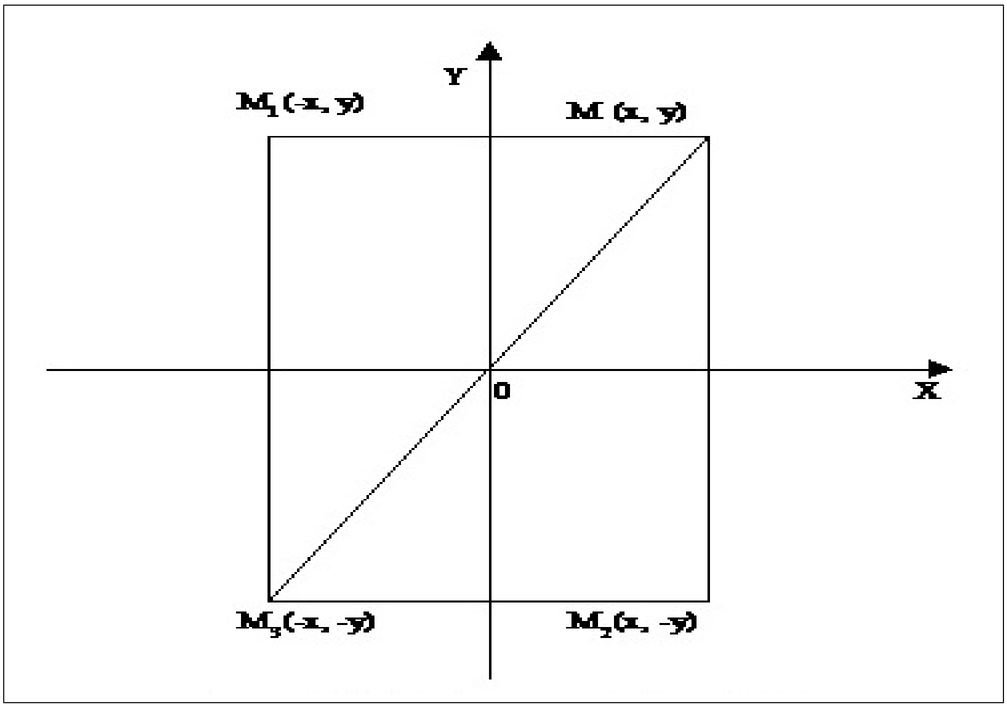


Figura 3.13 *Retângulo M, M_1, M_2, M_3.*

Consideremos, agora, as bissetrizes dos quatro quadrantes; elas formam duas retas OV e OW, perpendiculares entre si. A reta OV contém as bissetrizes do 1º e do 3º quadrantes, e OW contém as do 2º e do 4º quadrantes, como mostra a figura (3.14) abaixo. Seja $A = (x, y)$ o ponto genérico do plano. Pode mostrar-se, por meio de simples considerações de geometria elementar, que o simétrico de A em relação à reta OV é o ponto

$B = (y, x)$, e que o simétrico de A relativamente à reta OW é o ponto $C = (-y, -x)$.

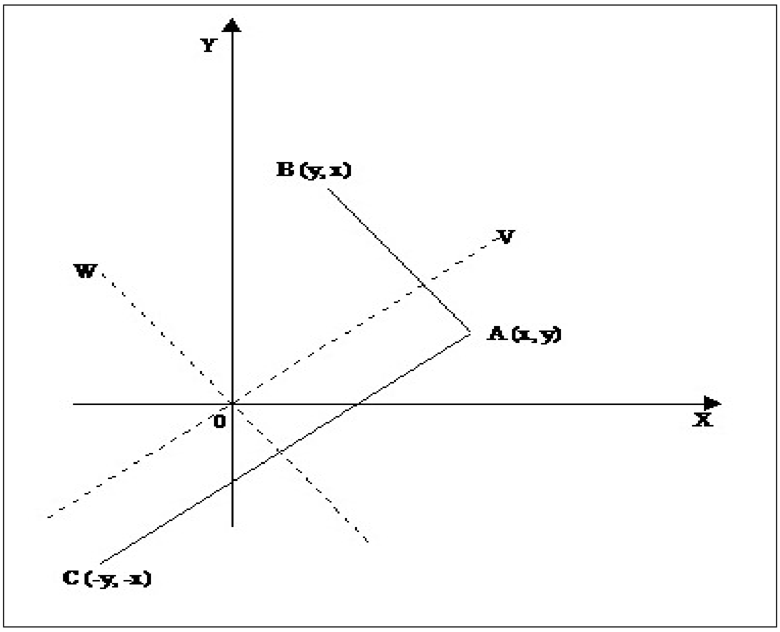


Figura 3.14 *Bissetriz dos quadrantes .*

Exemplo 3.4.2. *O simétrico do ponto* $A = (5, -2)$ *em relação à reta* OV *é o ponto* $B = (-2, 5)$.

Razão simples. Ponto médio de um segmento - Consideremos no plano uma reta genérica r, orientada. Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ dois pontos distintos de r e seja $M = (x, y)$ o ponto de r tal que seja.

$$(ABM) = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = k,$$

onde k é um número real dado.

Determinemos as coordenadas x, y do ponto M. Sejam A_1, B_1, M_1 as projeções de A, B, M sobre o eixo dos xx, como se vê na figura (3.15) abaixo.

De acordo com um conhecido teorema sobre linhas proporcionais, temos:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{A_1M_1}}{\overline{B_1M_1}}.$$

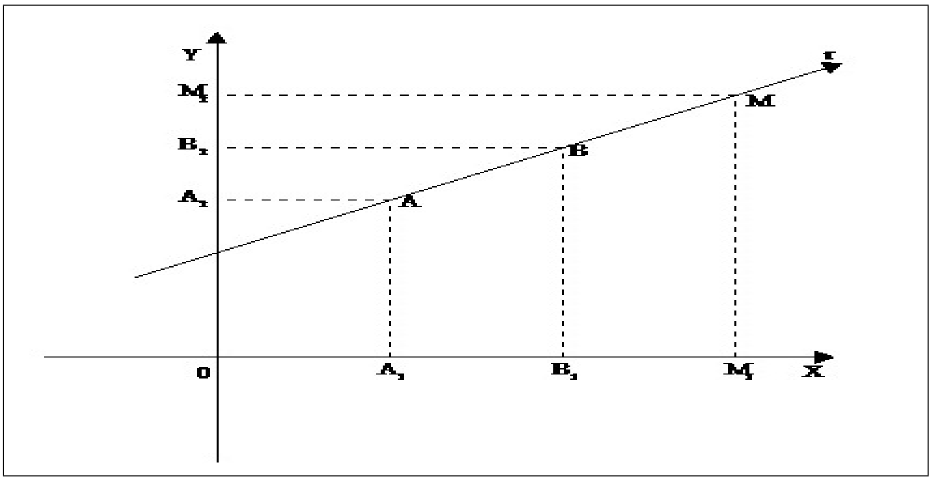


Figura 3.15 *Ponto médio de um segmento de reta orientado.*

Portanto: $k = \dfrac{\overline{A_1M_1}}{\overline{B_1M_1}} = \dfrac{\overline{OM_1} - \overline{OA_1}}{\overline{OM_1} - \overline{OB_1}} = \dfrac{x - x_1}{x - x_2}$. Segue que:

$x - x_1 = k(x - x_2)$, onde: $(1 - k)x = x_1 - kx_2$.

Supondo que seja $k \neq 1$, podemos escrever:

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}.$$

De modo análogo, projetando os pontos A, B, M sobre o eixo dos yy, podemos concluir que:

$$y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}.$$

Quando $k = -1$, M é o ponto médio do segmento AB e suas coordenadas são:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3.4.1 Exercícios Resolvidos

1. (Ver [1], 2005, p.397) Um ponto P pertence ao eixo das abscissas e é equidistante dos pontos $A(-1, 2)$ e $B(1, 4)$. Quais são as coordenadas do ponto P?

   Se P pertence ao eixo das abscissas, então suas coordenadas são a e 0. Como $P(a, 0)$ é equidistante de A e B, devemos ter: $d(P, A) = d(P, B)$. Assim: $\sqrt{(a+1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (0-4)^2} \Rightarrow a^2 + 2a + 1 +$

$4^2 = a^2 + 2a + 1 + 16 \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3$. Logo, o ponto P é $(3, 0)$ e as coordenadas do ponto P são 3 e 0.

2. (Ver [1], 2005, p.397) Demonstre que um triângulo com vértices $A(0, 5)$, $B(3, -2)$ e $C(-3, -2)$ é isósceles e calcule o seu perimetro.

   Demonstração 3.4.1. *Um triângulo é isósceles se dois de seus lados são congruentes. Vamos calcular as medidas de seus lados:*

   $d(A, B) = \sqrt{(3-0)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

   $d(A, C) = \sqrt{(-3-0)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

   $d(B, C) = \sqrt{(-3-3)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{36+0} = \sqrt{36} = 6$

   Como os lados AB e AC são congruentes, então o triângulo ABC é isósceles. O perímetro P do triângulo ABC é a soma das medidas de seus lados. Assim:

   $P = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = \sqrt{58} + \sqrt{58} + 6 = 2\sqrt{58} + 6.$

3. (Ver [1], 2005, p.399) Uma das extremidades de um segmento é o ponto $A(-2, -2)$. Sabendo que M(3,-2) é o ponto médio desse segmento, calcule as coordenadas do ponto $B(x, y)$, que é a outra extremidade do segmento.

   Como $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$, então:

- $3 = \dfrac{-2 + x_B}{2} \Rightarrow -2 + x_B = 6 \Rightarrow x_B = 8$
- $-2 = \dfrac{-2 + y_B}{2} \Rightarrow -2 + y_B = -4 \Rightarrow y_B = -2$

  Logo, $B(8, -2)$.

3.4.2 Exercícios Propostos

1. Calcular o perímetro do triângulo de vértices $A = (3, -2)$, $B = (-1, 2)$ e $C = (4, 3)$.

2. Provar que é isosceles o triângulo de vértices $O = (0, 0)$, $A = (3, 2)$ e $B = (-2, 3)$. Mostrar que esses triângulo é também retângulo em O.

3. Mostrar que os pontos $A = (4, 2)$, $B = (0, -1)$, $C = (-3, 3)$, $D = (1, 6)$ são vértices de um quadrado. Desenhar esse quadrado no papel quadriculado.

4. Achar a relação entre x e y para que o ponto $M = (x, y)$ seja equidistante dos pontos $A = (3, 8)$ e $B = (-4, 0)$.

5. Determinar o ponto $M = (x, y)$ equidistante dos três pontos $A = (7, 2)$, $B = (0, 3)$, $C = (-1, -4)$.

6. Achar o ponto M pertencente ao eixo dos xx e equidistante dos pontos $A = (0, 2)$ e $B = (4, 6)$.

7. Considere-se a circunferência de centro $C = (3, -2)$ que passa pelo ponto $A = (-1, 1)$. Provar que o ponto $M = (-3, -1)$ pertence à região exterior a essa circunferência, e que o ponto $N = (2, 1)$ pertence à região interior a mesma. Calcular x de maneira que o ponto $P = (x, -1)$ pertença à dita circunferência.

8. Estabelecer a relação entre x e y para que o ponto $M = (x, y)$, esteja à distância 2 da origem.

9. Mostrar que é isósceles e retângulo o triângulo de vértices $O = (0, 0)$, $M = (x, y)$ e $N = (y + x, y - x)$.

10. Provar, analiticamente, que em todo triângulo retângulo o ponto médio da hipotenusa é equidistante dos três vértices.

11. Representemos por M_1, M_2, M_3 e M_4, respectivamente, os símetricos do ponto M em relação ao eixo dos xx; ao eixo dos yy, à origem e à reta suporte da bissetriz do 1^o quadrante. Para cada um dos pontos M dados achar M_1, M_2, M_3 e M_4:

a) $M = (6, 3)$

b) $M = (-3, 0)$

c) $M = (\sqrt{2}, 1 - \sqrt{3})$.

12. Um quadrado de lado 6 tem centro na origem e os seus lados são paralelos aos eixos coordenados. Achar as coordenadas dos vértices desse quadrado.

13. Um quadrado de lado 4 tem centro no ponto $C = (4, 3)$ e os seus lados são paralelos aos eixos coordenados. Quais são as coordenadas dos vértices?

14. Em um triângulo ABC, tem-se $A = (7, 3)$ e sabe-se que B é o simétrico de A reativamente à bissetriz do 1º quadrante e C é o simétrico de B em relação ao eixo dos xx. Desenhar o triângulo e calcular o seu perímetro $2p$ e a sua área S.

15. Dados os pontos $A = (3, -8)$ e $B = (-4, 2)$, achar o ponto $M = (x, y)$ da reta AB tal que $(ABM) = -\dfrac{1}{3}$.

16. Em um paraleograma, são dados os vértices $A = (0, -2)$, $B = (-4, 3)$, $C = (6, 6)$. Achar o quarto vértice $D(x, y)$ sabendo que D é oposto a B.

    Sugestão- Lembrar que as diagonais de um paralelogramo cortam-se em um ponto M que é meio de cada uma delas.

17. Sabe-se que as três medianas de um triângulo qualquer ABC concorrem em um ponto G que está situado aos $2/3$ de cada uma delas, a partir do vértice correspondente. Se os vértices do triângulo são $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, mostrar que $G = (x, y)$, onde: $x = \dfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $y = \dfrac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$.

    Observação 3.4.1. *O ponto G diz-se baricentro do triângulo ABC.*

18. Dados os pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (1, 0)$, seja $M = (x, y)$ um ponto do plano tal que:

$\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{3}{2}$.
Provar que as coordenadas x e y do ponto M satisfazem à equação:

$$x^2 + y^2 - \frac{26}{5}x + 1 = 0$$

19. Dados os pontos $A = (3, 2)$ e $B = (7, -2)$, seja $M = (x, y)$ um ponto do plano tal que:

$$(AM)^2 + (BM)^2 = 32.$$

Mostrar que as coordenadas de M verificam a equação:

$$x^2 + y^2 - 10x + 17 = 0.$$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir deste estudo percebeu-se que o aluno terá um melhor entendimento e uma visão mais aprofundada a respeito do conjunto dos números reais, tendo em vista as propriedades, teoremas e demonstrações apresentadas acerca dos sistemas numéricos. Com a monografia muitos dos conteúdos estudados no ensino básico que antes poderiam não ter sentido prático para os estudantes, agora passam a ter uma grande aplicação, como por exemplo, o módulo que pode ser interpretado como distância entre dois pontos e mais adiante aplicado na definição de limite. Os exercícios resolvidos dos capítulos 2 e 3 além de permitirem uma melhor fixação e aprofundamento dos conteúdos, servirão como base para a resolução dos exercícios propostos.

Sendo assim, este trabalho servirá como uma apostila de Pré-Cálculo incentivando e possibilitando que o acadêmico de exatas obtenha êxito no curso das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, ministradas durante a graduação.

Portanto, diante da Álgebra Elementar apresentada neste trabalho de conclusão de curso, sugere-se que esta parte do estudo de Cálculo seja a base de uma próxima pesquisa sobre as funções reais.

APÊNDICE A

Respostas dos Exercícios Propostos do Capítulo 2

2.1 Revisão sucinta dos sistemas númericos

1. a) $\frac{5}{37}$ b) $\frac{-415}{99}$ c) $\frac{601}{300}$

   d) $\frac{2191}{16500}$ e) $\frac{110189}{99990}$

2. a) $\frac{11}{3}$ b) $\frac{2}{1}$ c) $\frac{518317}{89550}$

3. a) racional b) racional c) irracional

   d) irracional e) racional f) racional

7. $(3+\sqrt{5})+(8-\sqrt{5})$ é racional

   $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é irracional

   $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ é racional

   $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$ é irracional

8. a) racional b) irracional c) irracional

   d) irracional e) irracional f) racional

   g) racional h) irracional i) irracional

   j) racional k) irracional

2.2 Operações com os números reais

-Demonstrações

2.3 Ordenação dos números reais. Desigualdades

3. a) $x > 8$ b) $x \leq \dfrac{47}{35}$

c) $x > 10$ d) $x < \dfrac{1}{2}(a^2 - 1)$

4. a) $0 < x < \dfrac{3}{2}$ b) $x < -\dfrac{3}{2}$ ou $x > 0$

c) $1,46 < x < 1,54$ d) $-5 < x \leq 0$

e) $x < -1$ ou $0 < x < 1$ f) $x < -3$ ou $x > 2$

g) $x < 5$ ou $x > 8$ h) $x < 0$

i) $t > 2$ j) $2 < t < 4$

k) $y \leq 0$ ou $y \geq 4$ l) $x < -3$ ou $\dfrac{1-\sqrt{33}}{2} < x < 1$ ou $x > \dfrac{1+\sqrt{33}}{2}$

5. a) $-1 < x < 0$ ou $x > 1$ b) $0 < x < 1$ ou $x > 1$

c) $1 < x < 3$ d) $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 3$

e) $a \in \mathbb{R}$ f) $s \leq -1$ ou $s \geq 4$

g) Não existe x real que verifique a inequação. h) $-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$

i) $t < -2$ ou -$\frac{1}{2} < t < \frac{4}{3}$ ou $t > 3$

j) $x < -2$ ou $-1 < x \leq 2$ h) $-2 < x < -\frac{2}{3}$ ou $\frac{5}{2} < x < 4$

6. a) $x \leq 2$ b) $5 < x \leq 6$

c) $0 < x \leq 3$ d) $x = 2$

8. a) -2 b) -1, 0, 1

APÊNDICE B

Respostas dos Exercícios Propostos do Capítulo 3

3.1 Intervalos reais

1. a) $A \cup B = (-\infty, \infty+)$, $A \cap B = [1, 3)$,

   $A - B = (-\infty, 1)$, $B - A = [3, +\infty)$.

   b) $A \cup B = [0, +\infty)$, $A \cap B = \phi$,

   $A - B = [0, 2]$, $B - A = (2, +\infty)$.

   c) $A \cup B = [0, +\infty)$, $A \cap B = \{2\}$,

   $A - B = [0, 2)$, $B - A = (2, +\infty)$.

   d) $A \cup B = [-3, 2]$, $A \cap B = (-1, 0)$,

   $A - B = [-3, -1]$, $B - A = [0, 2]$.

   e) $A \cup B = [-4, 0)$, $A \cap B = (-2, -1]$,

   $A - B = \phi$, $B - A = [-4, -2] \cup (-1, 0)$.

f) $A \cup B = (-1,1) \cup [2,5)$, $A \cap B = \phi$,

$A - B = (-1,1)$, $B - A = [2,5)$.

g) $A \cup B = (-4,3]$, $A \cap B = [-2,3)$,

$A - B = \phi$, $B - A = (-4,-2)$.

h) $A \cup B = (-\infty,+\infty)$, $A \cap B = (1,2]$,

$A - B = (2,+\infty)$, $B - A = (-\infty,1]$.

2. $(-2,0) \cup (2,+\infty)$

5. $x \in (-\infty,-8) \cup (2,+\infty)$

6. $[-3,-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},2]$

7. $x \in \left(\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$

8. O conjunto solução da primeira inequação é $A = [-1,2]$ e o da segunda e $B = (-2,4)$; tem-se obviamente $A \subset B$. O conjunto das soluções da segunda inequação que não são soluções da primeira é:

$$B - A = (-2,-1) \cup (2,4).$$

3.2 Valor absoluto

1. a)$x = 2$ b)$x = 0$ c)$x = \frac{1}{2}(a+b)$

d)$x = 2$ ou $x = 0$ e)$x = 1$ ou $x = \frac{5}{3}$ f)$x = 4$ ou $x = \frac{4}{11}$

2. a) $x < -13$ ou $x > -\frac{7}{3}$ b) $-7 \leq x \leq \frac{1}{3}$

c) $\dfrac{2}{3} < x < 2$

d) $x \leq 1$ ou $x \geq 4$ e) $x \leq \dfrac{11}{7}$ ou $x \geq 3$ f) $x > \dfrac{5}{2}$

3. a) $x = -1$ ou $x = -\dfrac{4}{3}$ b) $0 \leq x \leq 1$

c) $x < -1$ ou $x \geq 1$

d) $x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = 3$ e)$x = -5$ ou $x = 7$

f)$x = 0$ ou $x \geq 1$ g) $x = -\dfrac{1}{2}$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

h) $x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ i) $x = -\dfrac{8}{3}$

j) $x = -13$ ou $x = 5$

5. a) $x = 3$ ou $x = -3$ b) $x = \pm 1$ ou $x = \pm 4$

6. a) $5 < x < 9$ b) $x \in [1, 2) \cup (6, 7]$ c) $x \in [-1, 1] \cup [2, 4]$

d) $x < \dfrac{2}{3}$ ou $x > 4$

7. a) $x > -\dfrac{3}{2}$ b) $x \in (-2, -1) \cup (0, 1)$ c) $-6 < x < 3$

d) $-7 \leq x \leq 3$ e) $x \leq -4$ ou $x \geq 2$

f) $x \in (-4, -3) \cup (4, 5)$

8. a) $4 \leq x < 7$ b) $1 < x \leq 2$ c) $4 \leq x < 6$

d) $\dfrac{1}{2} < x < \sqrt{2}$

9. a) $-2 < x < 12$ b) $x \in (-6, -2) \cup (4, 8)$ c) $x < 0$

d) $0 < x < 1$ e) $x > -1$ f)$x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$

g) $x \in [-1,0) \cup (0,1]$ h) $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ i) $x \in [-3,1) \cup (4,6]$

j) $x > \dfrac{3}{5}$ k) $x \in (-4,4)$ l) $x \in (-\infty,0) \cup (0,5)$

m) $x \in \left(\frac{5}{6},\ 1\right] \cup [5,+\infty)$ n) $x \in \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}, 1\right]$

10. $(-1,1) \cup (3,5)$

11. $-3, -2, 4$ e 5

12. 5 e 6

3.3 Segmentos orientados na reta

4. $x = 3$.

5. $xy - 4x - 4y + 12 = 0$

   O conjugado harmônico de $M(0)$ é $M(3)$.

   O ponto cujo conjugado harmônico é $N(0)$ é $M(3)$.

8. $(ABCD) = -\dfrac{8}{27}$, $(ABDC) = -\dfrac{27}{8}$, $(ACBD) = \dfrac{35}{27}$,
   $(ACDB) = \dfrac{27}{35}$, $(ADCB) = \dfrac{8}{35}$, $(ADBC) = \dfrac{35}{8}$.

3.4 Coordenadas cartesianas no Plano

1. $4\sqrt{2} + 2\sqrt{26}$

4. $14x + 16y - 57 = 0$

5. $M = (3, -1)$.

6. $M = (6, 0)$

7. $x = 3 \pm 2\sqrt{6}$

8. $x^2 + y^2 = 4$

11.

$$a)\begin{cases} M_1 = (6,-3) \\ M_2 = (-6,3) \\ M_3 = (-6,-3) \\ M_4 = (3,6) \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} M_1 = (-3,0) \\ M_2 = (3,0) \\ M_3 = (3,0) \\ M_4 = (0,-3) \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} M_1 = (\sqrt{2},-1+\sqrt{3}) \\ M_2 = (-\sqrt{2},1-\sqrt{3}) \\ M_3 = (-\sqrt{2},-1+\sqrt{3}) \\ M_4 = (1-\sqrt{3},\sqrt{2}) \end{cases}$$

12. $(3,3)$, $(-3,3)$, $(-3,-3)$ e $(3,-3)$.

13. $(6,5)$, $(2,5)$, $(2,1)$ e $(6,1)$.

14. $2p = 14 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}$, $S = 28$.

15. $M = \left(\frac{5}{4}, -\frac{11}{2}\right)$

16. $D = (10,1)$

BIBLIOGRAFIA

[1] DANTE, L. C. *Matemática:* volume único. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005.

[2] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar 1:* conjuntos e funções. São Paulo: Atual, 1977.

[3] JUDICE, E. D. *Elementos de cálculo:* 1. Parte. Belo Horizonte: PUC MINAS, s.d.

[4] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A matemática do ensino médio:* volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.