UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Michael Machado de Moraes

Adineube Monteiro da Silva

# FUNCIONAIS LINEARES E OPERADORES ADJUNTOS, UNITÁRIOS E NORMAIS

MACAPÁ-AP
2013

Michael Machado de Moraes
Adineube Monteiro da Silva

# FUNCIONAIS LINEARES E OPERADORES ADJUNTOS, UNITÁRIOS E NORMAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Matemática como requisito para obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sob a orientação do professor Kelmem da Cruz Barroso.

Orientador

Kelmem da Cruz Barroso

MACAPÁ-AP
2013

# FUNCIONAIS LINEARES E OPERADORES ADJUNTOS, UNITÁRIOS E NORMAIS

**por**

**MORAES, Michael Machado de**
**SILVA, Adineube Monteiro da**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Amapá, Campus Marco Zero, aprovado pela comissão de professores:

KdCB
Prof. Me. Kelmem da Cruz Barroso
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Almeidaleal
Profª. Drª. Simone de Almeida Delphim Leal
Colegiado de Matemática, UNIFAP

Elifaleth Rego Sabino
Profª. Me. Elifaleth Rego Sabino
Colegiado de Matemática, UNIFAP

**MACAPÁ-AP**
**05 de novembro de 2013**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**
**Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá**

512.5
M828 Moraes, Michael Machado de.

Funcionais lineares e operadores adjuntos, unitários e normais/ Michael Machado de Moraes, Adineube Monteiro da Silva -- Macapá, 2013.
53.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Kelmem da Cruz Barroso

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Álgebra linear. 3. Funcionais lineares. 4. Operadores adjuntos. 5. Teorema Espectral I. Silva, Adineube Monteiro da. II. Barroso, Kelmem da Cruz, orient. III. Fundação Universidade Federal do Amapá. IV. Título.

*Com Deus no coração, sonhar é mais que realidade.*

# Agradecimentos

Antes de mais nada, agradecemos ao nosso Deus, por todas as vezes que falou conosco e nos deu forças para chegar até aqui, sem o qual certamente não teríamos conseguido. Embora possa parecer algo comum o enaltecimento dos pais pelo cumprimento de uma etapa importante na vida dos filhos, é impossível não atribuir a eles: Pastor Milson Vieira de Moraes, Antônio Carvalho da Silva, Pastora Iracilda Machado de Moraes e Francisca Marques Monteiro, todos os méritos que nos permitiram ingressar, cursar e graduar em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Amapá. E sem dúvidas, devido aos seus exemplos de amor, dedicação e honradez que foi possível cumprir um dos processos mais relevantes em nossa formação, destacamos também suas valiosas contribuições em orações, nas quais estivemos sempre presentes, estamos certos que isso foi de fundamental importância para nosso sucesso, por estas e por tantas outras razões é que expressamos nossa sincera gratidão e nosso muito obrigado.

"Em particular agradeço ao senhor Remon Viana Rodrigues e a seus filhos Ramon Felipe e Renan Felipe, que me hospedaram em sua residência durante esses anos, obrigado por tudo!. Agradeço a minha namorada Thalita Kessia Holanda do Nascimento, pelo apoio e por "estar ao meu lado". Ao senhor Genivaldo Pereira de Sousa, assim como meu pai, exemplo de homem justo e honesto, obrigado por sua ajuda pelos conselhos e por se preocupar comigo, agradeço a meus amigos, Edilson Sousa, Bruno Rafael, Alex Leal, Fábio Silva, Michel Costa e a meu irmão Michel Machado de Moraes. Dentre todos, mais um vez ressalto meus agradecimentos a meu Pai, que sempre esteve pronto a me ajudar e me ensinou como devo seguir, desejo que Deus me faça ser como ele. Agradeço a professora Simone de Almeida Delphim Leal, coordenadora do projeto integrando a Amazônia, no qual participei como aluno de iniciação cientifica, as pesquisas e trabalhos que realizamos muito contribuiu para meu aperfeiçoamento acadêmico. Agradeço ao professor Gilberlândio de Jesus Dias, que assistia nossas apresentações e incentivava sempre a continuarmos estudando. A todos meu muito obrigado que Deus abençoe vocês sete vezes mais em tudo que fizerem." [MORAES, M.M]

"Por outro lado gostaria de agradecer Maria de Nazaré Gama Monteiro e Amiraldo Gama Monteiro, que em várias etapas da minha vida, especificamente durante a graduação desempenharam um papel muito importante para minha formação em meio tantas dificuldades, e tendo em vista isto, sinto-me honrado de ter compartilhado e vivenciado alguns momentos com estas pessoas que embora sejam minha avó e tio, também foram e até hoje são pessoas amigas sobretudo especiais para eu, pois quando mais precisei eles sempre estavam a disposição para me ajudar, a exemplo disso, posso citar a ajuda de custo e o espaço que essas pessoas cederam para que eu pudesse residir e me instalar em suas residências durante alguns anos de curso. Agradeço também a meus amigos Jeslly Costa e Jhon Lenon. Devo agradecer ao meu melhor amigo, aquele a quem se deve delegar a causa primeira de todas as coisas. A ele, todos os meus agradecimentos entre outros diversos fatores, pelo fornecimento de faculdades como, o raciocínio lógico, o discernimento e o juízo de valor, que foram os principais recursos que me conduziram a conclusão deste curso. Obrigado pai!" [SILVA, A.M]

A todos os colegas que participaram de forma construtiva e agradável durante esses anos de curso. Se fossemos citar todos os nomes, certamente iriam ocupar boa parte desta seção e ainda assim estaríamos esquecendo alguns, já que não temos como listar todos, iremos destacar a participação de nossos amigos e irmãos que Deus nos deu nessa jornada, são eles: Alex Leal, Bruno Rafael, Erlan Moreira, Jair de Jesus, Jerson Mendes, Jó da Costa, Raimundo Filho e Tiago Gouveia. Com estes vivemos vários momentos incríveis, dentre os quais evidenciamos o grupo de estudo que construímos, e o grupo "#PensaNumNúmero?(2)" no facebook, que foi fruto dessa amizade onde desenvolvemos nossas incontáveis conversas, que descontraíram um ambiente por vezes tenso.

Agradecemos a todos os professores do Colegiado de matemática com os quais pudemos desenvolver novas habilidades que nos será útil no decorrer de nossas vidas profissionais daqui pra frente, entres eles destacamos os professores, Gilberlândio de Jesus Dias, Simone de Almeida Delphim Leal, Marcio Aldo Lobato Bahia, Guzmán Isla Chamilco, José Walter Sótil Cardenas, Vânia Fatima Lemes de Miranda, Elizabeth Gomes Sousa, Marcel Lucas Nascimento, Elifaleth Rego Sabino, e logicamente a nosso orientador Kelmem da Cruz Barroso. Para finalizar, a todos os nossos amigos familiares e professores. MUITO OBRIGADO, QUE DEUS SEJA COM CADA UM DE VOCÊS!

# Lista de Símbolos

| | |
|---|---|
| $K$ | Corpo; |
| $\alpha$, $\beta$, $\lambda$ | Escalar qualquer; |
| $V$ | Espaço vetorial |
| $V^*$ | Conjunto dos funcionais lineares sobre $V$; |
| $B$ | Base; |
| $W^\perp$ | Complemento ortogonal de $W$; |
| $T$ | Transformação Linear; |
| $T^*$ | Adjunto de $T$; |
| $T^{-1}$ | Inversa de $T$ |
| $L(V,V)$ | Conjunto das Transformações Lineares sobre $V$; |
| $\overline{\lambda}$ | Conjugado de $\lambda$; |
| $\overline{[T]}^t$ | Matriz Transposta conjugada de $T$; |
| $[T]_B$ | Matriz da transformação em relação a base $B$; |
| $\langle\ ,\ \rangle$ | Protuto interno; |
| $Id$ | Transformação Identidade; |
| $dim_K V$ | Dimensão do espaço vetorial $V$ sobre o corpo; $K$ |
| $NucT$ | Núcleo da Transformação; |
| $\circ$ | Composta; |
| $\forall$ | Para todo; |
| $\in$ | Pertence; |
| $\Rightarrow$ | Então; |
| $\Leftarrow$ | Reciproca; |
| $\Leftrightarrow$ | Se, e somente se; |
| $\mathbb{R}$ | Conjunto dos números reais; |
| $\mathbb{C}$ | Conjunto dos números complexos; |
| $\mathbb{M}_{m\times n}$ | Conjunto das matrizes $m \times n$; |
| $\mathbb{M}_n$ | Matriz quadrada $n \times n$. |

# Sumário

# Resumo

Este trabalho incide na exibição de uma versão algébrica de um dos resultados mais relevantes no âmbito da Álgebra Linear. Onde serão introduzidos os conceitos de Funcionais Lineares e Operadores Adjuntos. Diante disso, verificaremos como os mesmos estão relacionados com a existência de uma base ortonormal formada por autovetores de um dado operador, tal resultado é conhecido como Teorema espectral, iremos discutir sua importância tanto no caso de dimensão finita como infinita [7]. Por fim será apresentado a demonstração do Teorema em questão para espaços de dimensão finita usando os resultados obtidos.

**Palavras-chave:** Álgebra Linear, Funcionais Lineares, Espaços com Produto Interno, Operadores Adjuntos, Teorema Espectral.

# Abstract

This work aims to present an algebraic version of one of the most important results in the field of Linear Algebra, in which the concepts of Linear Funcionals and Adjoint Operadors will be introduced. Given this, we will see how they are related to the existence of an orthonormal basis consisting of eigenvectors of an operator. This result is known as the Spectral Theorem. We will discuss its importance in the case of finite and infinite dimension [7]. Finally, the Teorem will be proved for finite-dimensional spaces using the results previously obtained.

**Keywords:** Linear Algebra, Linear Functionals, inner Product Spaces, Adjoint Operators, Spectral Theorem.

# INTRODUÇÃO

Na Álgebra Linear ensina-se o teorema espectral para operadores auto-adjuntos, mas devido aos objetivos específicos da disciplina e a limitação do tempo, pouco se fala da sua importância. O objetivo deste trabalho é ilustrar o importante Teorema Espectral no caso de operadores auto-adjuntos definidos em espaços de dimensão finita e incentivar o estudo para o caso da dimensão infinita [3], que por sua vez vai ampliar a gama de exemplos práticos, bem como motivar os estudos futuros de tópicos avançados, como por exemplo a questão da compacidade de conjuntos e operadores, espaços de Hilbert, dentre outros.

Para tanto vamos desenvolver parte da teoria da Álgebra Linear, ou seja, falaremos dos Funcionais Lineares e Adjuntos, Operadores Auto - Adjuntos, Operadores Unitários e Operadores Normais, sempre trabalhando em espaços com produto interno, tudo isso para demonstrarmos o Teorema Espectral que é um dos nossos objetivos.

A primeira parte deste trabalho trata dos Funcionais Lineares sobre um espaço com produto interno e de sua relação com o produto interno. O resultado fundamental é que todo Funcional Linear $f$ sobre um espaço de dimensão finita com produto interno pode ser escrito como produto interno e um único vetor $w$, tal que

$$f(v) = \langle w, v \rangle$$

para um certo $w$ fixo em $V$. Usaremos esse resultado para mostrar a existência do "Adjunto" de um Operador Linear $T$ sobre $V$, sendo este um operador $T^*$ tal que,

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$$

para todo $u$ e $v$ em $V$. Através do uso de uma base ortonormal, mostraremos que esta operação de conjugação sobre Operadores Lineares (passando de $T$ a $T^*$) é identificada como a transposta conjugada de uma matriz. Vamos explorar superficialmente a analogia entre a operação de conjugação e a conjugação sobre números complexos. Também destacaremos os elementos que compõem e definem um Operador Auto-Adjunto, estes são importantes, não só porque nos fornecem uma espécie de parte real e imaginária de um operador linear arbitrário, mas também pela seguinte razão, operadores auto-adjuntos possuem muitas propriedades especiais. Por exemplo, para operadores deste tipo, existe uma base ortonormal formada por autovetores.

Num segundo momento vamos considerar o conceito de um isomorfismo entre dois espaços com produto interno e baseado nisso apresentaremos os Operadores Unitários e Normais, tudo isso para mostrarmos o seguinte problema: Se $T$ é um operador linear sobre um espaço $V$ de dimensão finita com produto interno, sob quais condições $V$ possui uma base ortonormal formada por vetores característicos de $T$? Em outras palavras, quando é que existe uma base ortonormal $B$ de $V$, tal que a matriz de $T$ em relação a $B$ seja diagonal? Esse é o nosso principal desafio nesse trabalho.

# Capítulo 1

# FUNCIONAIS LINEARES E OPERADORES ADJUNTOS

Neste capítulo vamos estudar os Operadores Adjuntos, tais operadores são importantes, não apenas pelas propriedades interessantes que eles possuem, mas também por serem os que mais aparecem em aplicações práticas, e assim sendo, merecem um estudo um pouco mais apurado. Por exemplo os operadores auto-adjuntos que serão aqui também apresentados, aparecem naturalmente em problemas que envolvem simetria, e em outras situações como em mecânica quântica, onde estão normalmente associados a considerações sobre energia do sistema [6].

## 1.1 Funcionais Lineares e Adjuntos

Seja $V$ um $K$-espaço vetorial com produto interno e $w \in V$. Podemos a partir de $w$, definir um funcional linear em $V^*$ da seguinte forma

$$\begin{array}{rl} f_w : & V \to K \\ & u \mapsto f_w(u) = \langle u, w \rangle, \forall u \in V. \end{array}$$

Vamos mostrar que $f_w$ é linear. Considere $u_1$, $u_2 \in V$ e $\lambda \in K$, assim, temos que $(\lambda u_1 + u_2) \in V$ (pois $V$ é uma espaço vetorial) logo

$$f_w(\lambda u_1 + u_2) = \langle (\lambda u_1 + u_2), w \rangle$$

o que implica pelas propriedades de produto interno que

$$\langle (\lambda u_1 + u_2), w \rangle = \lambda \langle u_1, w \rangle + \langle u_2, w \rangle$$

portanto

$$f_w(\lambda u_1 + u_2) = \lambda f_w(u_1) + f_w(u_2)$$

o que mostra a linearidade de $f_w$.
Agora será que vale a reciproca da definição acima?, ou seja, se dado um funcional linear $f \in V^*$, existe um vetor $w \in V$ tal que $f = f_w$?. Vamos apresentar um resultado que responde de forma positiva a essa pergunta.
Considere $V$ um $K$ - espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ e $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base ortonormal de $V$ (Isto é garantido pelo Teorema 13, no apêndice A).
Considere o elemento

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V \tag{1.1}$$

e calculemos $f_w$ como definida acima em um vetor $v_j$ da base de $B$, ou seja,

$$f_w(v_j) = \langle v_j, w \rangle = \left\langle v_j, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\rangle$$

donde tem-se:

$$\left\langle v_j, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\rangle = \langle v_j, (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) \rangle \tag{1.2}$$

$$= \langle v_j, \alpha_1 v_1 \rangle + \langle v_j, \alpha_2 v_2 \rangle + ... + \langle v_j, \alpha_n v_n \rangle$$

pelas propriedades de produto interno temos

$$\langle v_j, \alpha_1 v_1 \rangle + \langle v_j, \alpha_2 v_2 \rangle + ... + \langle v_j, \alpha_n v_n \rangle = \overline{\langle \alpha_1 v_1, v_j \rangle} + \overline{\langle \alpha_2 v_2, v_j \rangle} + ... + \overline{\langle \alpha_n v_n, v_j \rangle}$$

o que implica em

$$\overline{\alpha_1}\overline{\langle v_1, v_j \rangle} + \overline{\alpha_2}\overline{\langle v_2, v_j \rangle} + ... + \overline{\alpha_n}\overline{\langle v_n, v_j \rangle} =$$

$$= \overline{\alpha_1} \langle v_j, v_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle v_j, v_2 \rangle + \overline{\alpha_n} \langle v_j, v_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \langle v_j, v_i \rangle \tag{1.3}$$

daí por (1.2) e (1.3), temos

$$\left\langle v_j, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \langle v_j, v_i \rangle$$

como os vetores pertencem a base $B$, então eles são ortonormais, logo, para $i = j$ o produto interno é 1, e para $i \neq j$ o produto interno é 0. Portanto

$$\left\langle v_j, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \langle v_j, v_i \rangle = \overline{\alpha_j}$$

assim sendo, temos

$$f_w(v_j) = \overline{\alpha_j} \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = \overline{f_w(v_j)} \tag{1.4}$$

logo temos por (1.1) e (1.4) que

$$w = \sum_{j=1}^{n} \overline{f_w(v_j)} v_j. \tag{1.5}$$

**Proposição 1** *Seja $V$ um $K$ - espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita $n \geq 1$. Se $f \in V^*$, então existe um único $w \in V$ tal que $f_w(u) = \langle u, w \rangle$ para todo $u \in V$.*

**Demonstração:**
Pelo Teorema 13 no apêndice A, temos que em todo espaço vetorial $V$ de dimensão finita $n \geq 1$ existe uma base $\{v_1, .., v_n\}$ ortonormal. Além disso podemos tomar $w$ em $V$ como na equação (1.5). A partir desses resultados vamos mostrar que $f = f_w$, isto é, que

$$f(u) = f_w(u) = \langle u, w \rangle, \forall u \in V.$$

De fato, considere $v_k \in V$, com $1 \leq k \leq n$, tem-se

$$f_w(v_k) = \langle v_k, w \rangle = \left\langle v_k, \sum_{j=1}^{n} \overline{f(v_j)} v_j \right\rangle. \tag{1.6}$$

Usando argumentos semelhantes aos usados anteriormente para encontrarmos $w$, temos que a equação (1.6) é equivalente a

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{\overline{f(v_j)}} \langle v_k, v_j \rangle = f(v_k) \Rightarrow f_w(v_k) = f(v_k), \ \forall v \in V.$$

Uma vez que estamos trabalhando com uma base ortonormal. Portanto como $f_w(v_k)$ e $f(v_k)$ coincidem nos elementos da base, temos pela Proposição 2 no apêndice A, que $f = f_w$, como desejado .
Vamos mostrar agora a unicidade. Para isso, consideremos $w_1$ e $w_2$ pertecentes a $V$ um $K$ - espaço vetorial como nas condições da proposição, daí pela primeira parte da demonstração temos que

$$f = f_{w_1} = f_{w_2}$$

isto é,

$$f(u) = \langle u, w_1 \rangle \ e \ f(u) = \langle v, w_2 \rangle \ \forall \ u \in \ V$$

o que implica

$$\langle u, w_1 \rangle = \langle u, w_2 \rangle \Rightarrow \langle u, w_1 \rangle - \langle u, w_2 \rangle = 0$$

onde obtemos pelas propriedades de produto interno que

$$\langle u, w_1 \rangle - \langle u, w_2 \rangle = \langle u, (w_1 - w_2) \rangle .$$

Sem perda de generalidade podemos tomar $(w_1 - w_2) = u$ uma vez que a proporsição vale para todo $u \in V$, então

$$\langle (w_1 - w_2), (w_1 - w_2) \rangle = ||(w_1 - w_2)||^2 = 0 \Leftrightarrow w_1 - w_2 = 0$$

portanto $w_1 = w_2$ o que demonstra a unicidade.

$\square$

No exemplo abaixo mostraremos que existe funcional linear sobre espaços de dimensão finita $V$ que não pode ser definido a partir de um produto interno.

**Exemplo 1.** Considere $V = P(\mathbb{C})$ o espaço dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$. Com produto interno definido por:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)\overline{q(t)}dt, \ \forall p, q \in V.$$

Considere o elemento $z_0$ em $\mathbb{C}$ fixo e $\phi \in V^*$, definid0 da seguinte forma

$$\phi(p) = p(z_0), \forall\ p \in V.$$

Mostraremos que não existe $q_0 \in V$ tal que

$$\phi(p) = \langle p, q_0 \rangle, \forall\ p \in V.$$

Suponhamos por absurdo que a hipótese acima seja falsa, isto é, que exista um $q_0 \in V$, tal que

$$\phi(p) = \langle p, q_0 \rangle$$

daí,

$$\phi(p) = p(z_0) = \int_0^1 p(t)\overline{q_0(t)}dt, \ \forall\ p, q \in V. \tag{1.7}$$

Seja $r \in V$ o polinômio dado por $r(t) = t - z_0$. Sendo assim, temos

$$(r.p)(z_0) = r(z_0).p(z_0) = 0.p(z_0), \ \forall q \in V$$

pelo que definido, temos

$$\phi(r.p) = r(z_0).p(z_0) = 0 \tag{1.8}$$

aplicando a equação (1.8) em (1.7) obtemos

$$\phi(r.p)(t) = \int_0^1 (r.p)(t)\overline{q_0(t)}dt, \ \forall \ p \ \in \ V. \tag{1.9}$$

Em particular a equação acima vale para o polinômio $p = \overline{r}.q_0$. Daí substituindo $p = \overline{r}.q_0$ em (1.9) teremos que

$$0 = \int_0^1 (r\overline{r}q_0)(t)\overline{q_0(t)}dt \ = \ \int_0^1 (r\overline{r})(t)(q_0\overline{q_0})(t)dt \ = \ \int_0^1 |r(t)|^2 \, |q_0(t)|^2 \, dt.$$

Como $r(t)$ e $q(t)$ são polinômios contínuos em $V$ e $|r(t)|^2 \, |q_0(t)|^2 \geq 0$, temos $|r(t)|^2 \, |q_0(t)|^2 = 0$ em $[0, 1]$.
Observe que $r(t)$ se anula somente em $z_0$, logo concluimos que

$$|q_0(t)|^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ q_0(t) = 0. \ \forall \ t \ \in \ [0, 1] \, .$$

Portanto, $\phi$ seria funcional identicamente nulo, o que é uma contradição pois

$$\phi(p) = p(z_0) \ \neq \ 0.$$

Logo, o funcional $\phi$ não pode ser definido a partir de um produto interno.

□

Vejamos um teorema que é a principal consequência da Proposição 1.

**Teorema 1** *Seja $V$ um $K$ - espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita. Se $T \in L(V, V)$, então existe um único operador $T^* \in L(V, V)$, tal que*

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle \, \forall u, v \in V.$$

**Demonstração:**
Seja $v \in V$, vamos definir um operador $T^*(v) \in V$ para isto, considere o seguinte funcional linear

$$\begin{aligned} f_w : \ & V \to K \\ & u \mapsto f(u) = \langle T(u), v \rangle \, . \end{aligned}$$

Afirmação 1: O funcional é linear.
De fato, sejam $u_1$, $u_2 \in V$ e $\lambda \in K$, segue das propriedades de produto interno que

$$\begin{aligned} f(\lambda u_1 + u_2) &= \langle T(\lambda u_1 + u_2), v\rangle \\ &= \langle T(\lambda u_1) + T(u_2), v\rangle \\ &= \langle \lambda T(u_1) + T(u_2), v\rangle \\ &= \langle \lambda T(u_1), v\rangle + \langle T(u_2), v\rangle \\ &= \lambda \langle T(u_1), v\rangle + \langle T(u_2), v\rangle \\ &= \lambda f(u_1) + f(u_2). \end{aligned}$$

Provando assim a linearidade do funcional.
Pela Proposição 1, sabemos que existe um único $w \in V$ tal que $f(u) = \langle u, w\rangle$ para todo $u \in V$, a partir dessa propriedade e do funcional definido acima podemos afirma que

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, w\rangle, \forall\ u \ \in\ V. \tag{1.10}$$

Como $w$ é determinado de modo único por $v$, definimos

$$T^*(v) = w \tag{1.11}$$

das equações (1.10) e (1.11), temos

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, w\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle.$$

Nos resta mostrar que $T^*$ construido nas hipóteses anteriores é linear. De fato, sejam $u_1, u_2 \in V$ e $\lambda \in K$, segue das propriedades de produto interno que

$$\begin{aligned} \langle u, T^*(v_1 + \lambda v_2)\rangle &= \langle T(u), v_1 + \lambda v_2\rangle \\ &= \langle T(u), v_1\rangle + \overline{\langle T(u), \lambda v_2\rangle} \\ &= \langle T(u), v_1\rangle + \overline{\langle \lambda v_2, T(u)\rangle} \\ &= \langle T(u), v_1\rangle + \overline{\lambda\langle v_2, T(u)\rangle} \\ &= \langle T(u), v_1\rangle + \overline{\lambda}\, \langle T(u), v_2\rangle \\ &= \langle u, T^*(v_1)\rangle + \overline{\lambda}\, \langle u, T^*(v_2)\rangle \end{aligned}$$

daí temos que,

$$\langle u, T^*(v_1 + \lambda v_2)\rangle - \langle u, T^*(v_1) + \lambda T^*(v_2)\rangle = 0$$

$$\Rightarrow\ \langle u,\ T^*(v_1 + \lambda v_2) - (T^*(v_1) + \lambda T^*(v_2))\rangle = 0.$$

Sem perda de generalidade podemos tomar

$$u = [T^*(v_1 + \lambda v_2) - (T^*(v_1) + \lambda T^*(v_2))]$$

uma vez que as igualdade acima valem para todos os elementos de $V$. Logo

$$\langle u, u\rangle = ||u|\,|^2 = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

o que nos dá,

$$T^*(v_1 + \lambda v_2) - (T^*(v_1) + \lambda T^*(v_2)) = 0.$$

Portanto,

$$T^*(v_1 + \lambda v_2) \;=\; T^*(v_1) + \lambda T^*(v_2)$$

Logo $T^*$ é linear. Obtem-se a unicidade do fato de termos definido

$$T^*(v) = w$$

já que $w$ é determinado de modo único por $v$, então $T^*(v)$ é único também.

□

**Definição 1** *Seja $T \in L(V, V)$, onde $V$ é um $K$ - espaço vetorial com produto interno. Dizemos que $T$ possui um adjunto se existir um operador linear $T^* \in L(V, V)$ tal que*

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle$$

*para todos $u$ , $v \in V$. Diremos neste caso, que $T^*$ é o adjunto de $T$.*

Apresentaremos a seguir exemplos de operadores lineares $T$ em espaços de dimesão finita que podem ou não admitir adjuntos.

**Exemplo 2.** Considere $V$ o espaço vetorial das funções polinomiais sobre o corpo dos números complexos, com produto interno dado por,

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)\overline{q(t)}dt,\ \forall p, q \in V. \tag{1.12}$$

Nosso objetivo é exibir um operador linear em $V$, que admite adjunto. Para tanto, fixemos um polinômio $f \in V$ e consideremos o operador, dado por,

$$\begin{array}{rlll} T_f : & V & \rightarrow & V \\ & p & \mapsto & fp \;= T_f(p),\ \forall\ p\ \in V. \end{array}$$

**i)** Mostraremos inicialmente que $T$ é um operador linear.
Para tanto considere $p, q \in\ V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, segue que,

$$(\lambda p + q) \in V$$

assim temos

$$T_f(\lambda p + q) \in V$$

que por sua vez implica em

$$\begin{aligned}
T_f(\lambda p + q) &= f(\lambda p + q) \\
&= f\lambda p + fq \\
&= \lambda f p + fq \\
&= \lambda T_f(p) + T_f(q)
\end{aligned}$$

logo

$$T_f(\lambda p + q) = \lambda T_f(p) + T_f(q)$$

o que mostra a linearidade de $T_f$.

**ii)** Vamos agora provar que o operador $T_f$ possui um adjunto.
De fato;
Considere os polinômios $p(t), q(t) \in V$ e o produto interno definido na equação (1.12), isto é,

$$\langle T_f(p), q\rangle = \langle f(t)p(t), q(t)\rangle = \int_0^1 f(t)p(t)\overline{q(t)}dt, \forall p, q \in V$$

usando as propriedades de produto interno,

$$\int_0^1 f(t)p(t)\overline{q(t)}dt = \int_0^1 p(t)\overline{\overline{f(t)}q(t)}dt = \left\langle p(t), \overline{f(t)}q(t)\right\rangle$$

mostrando que

$$\langle T_f(p), q\rangle = \left\langle p(t), \overline{f(t)}q(t)\right\rangle$$

como esta igualdade é valida para todo $p(t), q(t) \in V$, temos que

$$\begin{aligned}
T^*_{\overline{f}} :\ & V \to V \\
& q \mapsto \overline{f}q = T^*_{\overline{f}}(q),\ \forall q \in V
\end{aligned}$$

que é o operador adjunto de $T_f$.

□

**Exemplo 3.** Considere o seguinte operador dado por

$$\begin{aligned}
D :\ & V \to V \\
& p \mapsto D(p) = p'(t),\ \forall q \in V.
\end{aligned}$$

Este é operador derivação definido sobre o corpo dos $\mathbb{C}$.

**i)** Vamos mostrar que $D$ é um operador linear.
Sejam $p(t)$ e $q(t)$ polinômios quaisquer de $V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, onde $(\lambda p+q)(t) \in V$, logo pelas propriedades de derivada tem-se

$$\begin{aligned} D(\lambda p+q)(t) &= (\lambda p+q)'(t) \\ &= (\lambda p)'(t)+q'(t) \\ &= 0.p+\lambda P'(t)+q'(t) \ . \\ &= \lambda p'(t)+q'(t) \\ &= \lambda D(p)+D(q) \end{aligned}$$

Portanto, $D$ é um operador linear.

**ii)** Mostremos agora que o operador $D$ não admite adjunto.
Consideremos $V$ um $\mathbb{C}$ - espaço vetorial das funções polinomiais sobre o corpo dos complexos com produto interno dado por,

$$\langle D(p),q\rangle = \int_0^1 p'(t)\overline{q(t)}dt,\ \forall p,q \ \in \ V \tag{1.13}$$

e pelo teorema fundamental do cálculo, temos também que,

$$(p\overline{q}(1)-(p\overline{q})(0) = \int_0^1 (p\overline{q})'(t)dt = \int_0^1 p'(t)\overline{q(t)}dt + \int_0^1 p(t)\overline{q'(t)}dt,\ \forall p,q \in V. \tag{1.14}$$

Observe que

$$\left\langle p, D(\overline{q(t)})\right\rangle = \int_0^1 p(t)\overline{q'(t)}dt \tag{1.15}$$

substituindo (1.13) e (1.15) em (1.14), temos

$$\langle D(p),q\rangle = (p\overline{q})(1)-(p\overline{q})(0)-\langle p, D(\overline{q})\rangle \ \forall \ p,q \ \in \ V. \tag{1.16}$$

Consideremos $q_0 \in V$ de forma que $q_0(0) \neq q_0(1)$ e suponha que existe um polinômio $q_1 \in V$ tal que

$$\langle D(p),q_0\rangle = \langle p,q_1\rangle\,,\forall p \in V \tag{1.17}$$

apartir das equações (1.16) e (1.17), obtemos

$$\langle p,q_1\rangle = \langle D(p),q_0\rangle = (p\overline{q_0})(1)-(p\overline{q_0})(0)-\langle p, D(\overline{q_0})\rangle \ \forall p \in V.$$

Logo,

$$\langle p, q_1 \rangle + \langle p, D(\overline{q_0}) \rangle = (p\overline{q_0})(1) - (p\overline{q_0})(0)$$

o que implica,

$$(p\overline{q_0})(1) - (p\overline{q_0})(0) = \langle p, D(\overline{q_0}) + q_1 \rangle \,, \ \forall p \in V. \tag{1.18}$$

Considere

$$r(t) = t^2 - t.$$

Assim

$$\phi(rp) = 0 = \langle rp, D(\overline{q_0}) + q_1 \rangle \,, \forall p \in V$$

$$\Rightarrow 0 = \int_0^1 rp(\overline{D(q_0) + q_1}), \forall p \in V$$

em particular para

$$p = \overline{r}(D(\overline{q_0}) + q_1)$$

temos

$$0 = \int_0^1 r\overline{r}(D(\overline{q_0}) + q_1)(\overline{D(q_0) + q_1}) = \int_0^1 |r|^2 |D(\overline{q_0}) + q_1|^2$$

daí

$$r.(D(\overline{q_0} + q_1)) = 0$$

segue que

$$D(\overline{q_0}) + (q_1) = 0.$$

Logo $\phi(p)$ é o funcional identicamente nulo por (1.18).

$\square$

**Teorema 2** *Seja $V$ um $K$ - espaço vetorial com produto interno. Sejam $T$, $S$ $\in L(V, V)$ operadores lineares que admitem adjuntos $T^*$ e $S^*$, respectivamente e $\lambda \in K$. Então*

*a) $T + S$ admite adjunto e $(T + S)^* = T^* + S^*$;*

*b) $\lambda T$ admite adjunto e $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$;*

*c) $T \circ S$ admite adjunto e $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$;*

*d) $T^*$ admite adjunto e $(T^*)^* = T$.*

**Demonstração:**

**a)** Sejam $u$, $v \in V$, daí temos

$$\langle (T+S)(u), v\rangle = \langle T(u)+S(u), v\rangle = \langle T(u), v\rangle + \langle S(u), v\rangle .$$

Pelo fato dos operadores $T$ e $S$ admitirem adjuntos temos apartir da igualdade anterior que,

$$\langle u, T^*(v)\rangle + \langle u, S^*(v)\rangle = \langle u, (T^*+S^*)(v)\rangle .$$

Com isso concluimos que,

$$\langle (T+S)(u), v\rangle = \langle u, (T^*+S^*)(v)\rangle ,$$

ou seja, $(T^*+S^*)(v)$ é adjunto de $(T+S)(u)$, além disso sabemos que tais equações são válidas para todos $u$ e $v \in V$, isto significa que $(T+S)(u)$ admite adjunto, logo podemos afirmar que $(T+S)^*(v)$ é seu adjunto, mas temos pelo Teorema 1 que o adjunto de um operador é único, portanto

$$(T^*+S^*)(v) = (T+S)^*(v).$$

**b)** Sejam $T, S \in L(V,V)$, $u, v \in V$, e $\lambda \in K$, daí

$$\langle \lambda T(u), v\rangle = \lambda \langle T(u), v\rangle$$

como os operadores $T$ e $S$ admitem adjuntos temos apartir da igualdade anterior que

$$\lambda \langle u, T^*(v)\rangle = \lambda\overline{\langle T^*(v), u\rangle} = \overline{\left\langle \overline{\lambda} T^*(v), u\right\rangle}$$

logo,

$$\overline{\overline{\left\langle u, \overline{\lambda} T^*(v)\right\rangle}} = \left\langle u, \overline{\lambda} T^*(v)\right\rangle = \left\langle u, (\overline{\lambda} T^*)(v)\right\rangle$$

com argumento análogo ao usado na demonstração do item a), temos que

$$(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*.$$

**c)** Sejam $u, v \in V$, segue que

$$\langle (T \circ S)(u), v\rangle = \langle T(S(u)), v\rangle$$

como os operadores $T$ e $S$ admitem adjuntos tem-se da igualdade anterior que

$$\langle S(u), T^*(v)\rangle = \langle u, S^*(T^*(v))\rangle = \langle u, (S^* \circ T^*)(v)\rangle .$$

Daí $(S^* \circ T^*)(v)$ é adjunto de $(T \circ S)(u)$, sendo assim, com argumento análogo ao usado na demonstração do item a), concluimos que

$$(T \circ S)^* = S^* \circ T^*.$$

**d)** Para mostrarmos esse item, considere $v$ e $u \in V$, sabemos que o operador $T$, admite adjunto, segue

$$\langle T^*(u), v\rangle = \overline{\langle v, T^*(u)\rangle} = \overline{\langle T(v), u\rangle} = \langle u, T(v)\rangle$$

portanto, pela definição de adjunto temos,

$$(T^*)^* = T.$$

$\square$

**Teorema 3** *Seja $V$ um $K$ - espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita. Sejam $B = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base ortonormal de $V$ e $T \in L(V, V)$. Se $[T]_B = (a_{ij})_{ij}$, então $a_{ij} = \langle T(v_j), v_i\rangle$, para cada $i, j = 1, 2, ..., n$.*

**Demonstração:**
Considere uma base ortonormal $B = \{v_1, ..., v_n\}$ de $V$, por hipótese temos que

$$[T]_B = (a_{ij})_{ij},$$

ou seja,

$$\begin{array}{ccccccccccc} T(v_1) & = & a_{11}v_1 & + & a_{21}v_2 & + & ... & + & a_{n1}v_n & = & \sum_{i=1}^{n} a_{i1}v_i \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ T(v_j) & = & a_{1j}v_1 & + & a_{2j}v_2 & + & ... & + & a_{nj}v_n & = & \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i \end{array}$$

logo podemos concluir que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i, \ \forall\ 1 \leq j \leq n. \tag{1.19}$$

Além disso como $B$ é uma base ortonormal temos do Corolário 2 no apêndice A, que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle\, v_i, \ \forall v \in V. \tag{1.20}$$

Em particular podemos tomar $v = T(v_j)$ uma vez que a equação (1.20) é válida para todo $v \in V$, segue;

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(v_j), v_i \rangle \, v_i, \ \forall\ 1 \leq j \leq\in V. \tag{1.21}$$

Logo das equações (1.19) e (1.21), tem-se

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{n} \langle T(v_j), v_i \rangle \, v_i,$$

observe que pela Proposição 2 temos que a combinação linear dos elementos da base é única, logo

$$a_{ij} = \langle T(v_j), v_i \rangle \, .$$

□

**Teorema 4** *Seja $V$ um $K$ - espaço vetorial com produto interno de dimensão finita, e seja $T \in L(V,V)$. Em relação a qualquer base ortonormal de $V$, a matriz $T^*$ é igual a transposta conjugada da matriz $T$, isto é,*

$$[T^*] = \overline{[T]}^t.$$

**Demonstração:**
Para mostrar este teorema, vamos considerar $B = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base ortonormal de $V$, considere também $[T]_B$ e $[T^*]_B$ as matrizes dos operadores $T$ e $T^*$, respectivamente em relação a base $B$. Temos do Teorema 3, que

$$a_{ij} = \langle T(v_j), v_i \rangle \text{ e } c_{ij} = \langle T^*(v_j), v_i \rangle,$$

para todos $i, j = 1, 2, ..., n$. Daí aplicando a definição de adjunto e as propriedades de produto interno, obtemos

$$c_{ij} = \langle T^*(v_j), v_i \rangle = \overline{\langle v_i, T^*(v_j) \rangle} = \overline{\langle T(v_i), v_j \rangle} = \overline{a_{ji}}$$

$$c_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

portanto, a matriz $T^*$ é igual a transposta conjugada da matriz $T$.

□

## 1.2 Operadores Auto-Adjuntos

Um operador auto-adjunto é um operador linear em um espaço vetorial com produto interno que é o adjunto de sí mesmo. Como já vimos no Teorema 4, no caso de dimensão finita a matriz que representa esse operador é igual a sua transposta conjugada.

**Definição 2** *Seja $T$ pertencente ao espaço dual de $V$, onde $V$ é um $K$ - espaço vetorial com produto interno. Dizemos que $T$ é auto-adjunto se $T$ admite adjunto $T^*$, e mais $T^* = T$.*

*i) Usamos o termo* **hermitiano** *no caso em que o corpo é o conjunto dos complexos, isto é, $K = \mathbb{C}$;*

*ii) No caso que $K = \mathbb{R}$, usamos o termo* **simétrico**.

**Teorema 5** *Sejam $V$ um $K$ - espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(V, V)$. As seguintes afirmações são equivalente:*

*a) $T$ é auto-adjunto;*

*b) $\overline{[T]}_B^t = [T]_B$ para toda base ortonormal $B$ de $V$;*

*c) Existe uma base ortonormal $B$ de $V$ tal que $\overline{[T]}_B^t = [T]_B$.*

**Demonstração:**
Vamos assumir o item $(a)$ como sendo verdade, para mostrarmos $(b)$.
Considere $B$ uma base ortonormal de $V$, sabemos pelo Teorema 4 que,

$$[T^*]_B = \overline{[T]}_B^t$$

e temos pela parte $(a)$ que $T$ é um operador auto-adjuntos, ou seja,

$$[T^*]_B = [T]_B$$

logo

$$\overline{[T]}_B^t = [T]_B$$

como desejado.
Observe que a prova do item $(b)$ em $(c)$ imediatamente.

Considere $(c)$ verdadeira e mostraremos $(a)$.
Note novamente que pelo Teorema 4, temos que

$$[T^*]_B = \overline{[T]}^t_B,$$

por hipótese temos que

$$\overline{[T]}^t_B = [T]_B\,,$$

o que nos dá

$$[T^*]_B = [T]_B\,.$$

Portanto, $T$ é auto-adjunto.

□

**Corolário 1** *Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita e $B$ uma base ortonormal de $V$. Se $T \in L(V,V)$ for um operador linear auto-adjunto e se $[T]_B = (a_{ij})_{i,j}$ então $a_{ij} = \overline{a_{ij}}, \forall i,j = 1,2,...,n$. Em particular, os elementos da diagonal de $[T]_B$ são números reais.*

**Demonstração:**
De fato, pois se $T$ é auto-adjunto e $[T]_B = (a_{ij})$ então

$$[T] = [T^*] = \overline{[T]}^t \Rightarrow a_{ij} = \overline{a_{ij}}$$

com isso tem-se que os elementos da diagonal são reais.

□

**Exemplo 4.** Considere o espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ definido com o produto interno usual e $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ uma transformação linear dada da seguinte forma

$$T(z,w) = (2z + (1-i)w, (1-i)z + 3w),\ \forall z,w \in \mathbb{C}.$$

sem perda de generalidade, podemos tomar a base canônica $B = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{C}^2$, aplicando a transformação $T$, temos

$$\begin{cases} T(1,0) &= (2,1-i) &= 2(1,0) + (1-i)(0,1) \\ T(0,1) &= (1+i,3) &= (1+i)(1,0) + 3(0,1) \end{cases}$$

daí, tem-se

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix} = \overline{[T]}^t_B = [T^*]_B$$

assim mostra-se, que $T$ é um operador auto-adjunto.

$\square$

**Lema 1** *Sejam $V$ um $\mathbb{C}$-espaço vetorial com produto interno e $T \in L(V,V)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*a)* $T = 0$;

*b)* $\langle T(u), u\rangle = 0,\ \forall u \in V$;

*c)* $\langle T(u), v\rangle = 0,\ \forall u, v \in V$.

**Demonstração:**
Vejamos primeiramente a equivalência $(a)$ em $(b)$. Por hipótese temos que $T$ é transformação nula, então

$$\langle T(u), u\rangle = \langle 0, u\rangle = 0.$$

Agora assumiremos $(b)$ para mostrar $(c)$. Sejam $u, v \ \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, e consideremos

$$w = (\alpha u + \beta v) \in V$$

logo

$$0 = \langle T(w), w\rangle = \langle T(\alpha u + \beta v), \alpha u + \beta v\rangle$$

usando o fato do operador $T$ ser linear e as propriedades de produto interno tem-se

$$\langle \alpha T(u) + \beta T(v), \alpha u + \beta v\rangle = \langle \alpha T(u), \alpha u + \beta v\rangle + \langle \alpha T(v), \alpha u + \beta v\rangle$$

o que implica

$$\langle \alpha T(u), \alpha u\rangle + \langle \alpha T(u), \beta v\rangle + \langle \beta T(v), \alpha u\rangle + \langle \beta T(v), \beta v\rangle,$$

aplicando novamente as propriedades de produto interno, temos

$$|\alpha|^2 \langle T(u), u\rangle + \alpha\overline{\beta} \langle T(u), v\rangle + \beta\overline{\alpha} \langle T(v), u\rangle + |\beta|^2 \langle T(v), v\rangle \tag{1.22}$$

usando a hipótese temos que,

$$\langle T(u), u\rangle = \langle T(v), v\rangle = 0 \tag{1.23}$$

logo das equações (1.22) e (1.23) concluimos que

$$\langle T(w), w\rangle = \alpha\overline{\beta} \langle T(u), v\rangle + \beta\overline{\alpha} \langle T(v), u\rangle = 0. \tag{1.24}$$

Lembrando que a equação (1.24) é válida para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, com isso podemos tomar:

i) $\alpha = \beta = 1$, substituindo na equação (1.24) vamos ter

$$\langle T(v), u\rangle + \langle T(u), v\rangle = 0.$$

ii) $\alpha = i$ e $\beta = 1$, substituindo na equação (1.24) temos

$$-i\,\langle T(v), u\rangle + i\,\langle T(u), v\rangle = 0$$

de onde obtem-se

$$\begin{cases} \langle T(v), u\rangle & + \quad \langle T(u), v\rangle = 0 \\ -i\,\langle T(v), u\rangle & + \quad i\,\langle T(u), v\rangle = 0 \end{cases}$$

para resolver o sistema, basta multiplicar a segunda equação por $i$ e somar com a primeira que encontraremos,

$$\langle T(u), v\rangle = 0$$

o que conclui a demonstração.

Supondo $(c)$ verdadeira para mostrar $(a)$. Por hipótese temos

$$\langle T(u), v\rangle = 0,\ \forall u, v \in\ V,$$

sendo assim, podemos escolher $v = T(u)$, e teremos

$$\langle T(u), T(u)\rangle = ||T(u)||^2 = 0 \Leftrightarrow T(u) = 0, \forall u \in\ V.$$

Portanto,

$$T(u) = 0,\ \forall u \in V.$$

$\square$

**Observação 3.** A aplicacão do item $(b)$ em $(c)$ não é verdadeira se considerarmos espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Como nos mostra o seguinte exemplo.

**Exemplo 5.** Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação Linear dada por

$$T(x, y) = (-y, x)$$

note que se considerarmos o produto interno usual, teremos:

$$\langle T(x, y), (x, y)\rangle = \langle(-y, x), (x, y)\rangle = -yx + xy = 0$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Por outro lado considere $(z, w) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$(z, w) \neq (x, y)$$

com isso temos que

$$\langle T(x, y), (z, w)\rangle = (-y, x), (z, w)\rangle = -yz + xw \neq 0$$

pois $y \neq z$ ou $x \neq w$, assim o Lema 1 falha nesse caso.

$\square$

**Teorema 6** *Sejam $V$ um $\mathbb{C}$-espaço vetorial com produto interno e $T \in L(V, V)$. Então $T$ é um operador hermitiano se, e somente se*

$$\langle T(v), v\rangle \in \mathbb{R}, \ \forall v \in V.$$

**Demonstração:**
Por hipótese $T$ é um operador hermitiano então $T = T^*$, logo para todo $v \in V$, temos

$$\langle T(v), v\rangle = \langle v, T^*(v)\rangle = \langle v, T(v)\rangle = \overline{\langle T(v), v\rangle}$$

isso nos dá

$$\langle T(v), v\rangle = \overline{\langle T(v), v\rangle},$$

logo tem-se que $\langle T(v), v\rangle \in \mathbb{R}$, como desejado.

Reciprocamente, note que por hipótese temos $\langle T(v), v\rangle \in \mathbb{R}, \ \forall v \in V$, assim, seguem das propriedades de produto interno e da definição de adjunto que

$$\langle T(v), v\rangle = \overline{\langle T(v), v\rangle}$$
$$= \overline{\langle v, T^*(v)\rangle} = \langle T^*(v), v\rangle .$$

A partir das equações anteriores temos que

$$\langle T(v), v\rangle - \langle T^*(v), v\rangle = \langle T(v) - T^*(v), v\rangle = \langle (T - T^*)(v), v\rangle = 0.$$

Usando o Lema 1, obtemos

$$T - T^* = 0 \quad \Rightarrow \quad T = T^*.$$

O que conclui a demonstração.

$\square$

# Capítulo 2

# OPERADORES UNITÁRIOS E NORMAIS

Sob o ponto de vista geral da Matemática, os operadores Unitários são os isomofismos das estruturas dos espaços vetoriais com produto interno, ou seja, são as simetrias dessas estruturas [2]. Por outro lado os operadores unitários são aqueles para os quais se pode obter as matrizes mais simples, depois dos auto-adjuntos. Estudaremos ainda o tipo mais geral de operador num espaço vetorial de dimensão finita, munido de produto interno, para os quais vale um resultado muito importante, os operadores normais são precisamente aqueles que admitem um base ortonormal formada por autovetores.

## 2.1 Operadores Unitários

Seja $T$ um operador linear em um espaço vetorial $V$ de dimensão finita com produto interno, se

$$T^* = T^{-1} \;\Rightarrow\; T \circ T^* = T^* \circ T = Id,$$

então $T$ se diz ortogonal ou unitário, conforme o corpo básico seja real ou complexo.
Importante lembrarmos que um isomorfismo de um espaço com produto interno em outro espaço é uma aplicação bijetora que preserva as três operações básicas de um espaço com produto interno: Adição vetorial, multiplicação por escalar e produto interno. Assim, as aplicações que serão aqui exibidas (ortogonais ou unitárias) podem também ser caracterizadas como isomorfismo de $V$ em si mesmo [5].

**Definição 3** *Sejam $V$ um $K$-espaço vetorial com produto interno e $T$ um* *operador linear sobre $V$. Dizemos que $T$ é Operador Unitário se for um isomorfismo de espaços com produto interno.*

**Observação 4.** Se $T_1$ e $T_2$, são operadores unitários sobre uma $K$-espaço vetorial $V$, então,

**i)** $T_1 \circ T_2$ é também unitária;

**ii)** $T^{-1}$ é unitária.

Isto pode ser verificado em [1] na página 225.

**Teorema 7** *Considere $T \in L(V, V)$, onde $V$ é um $K$-espaço vetorial com produto interno. Então $T$ é unitário se, e somente se, o adjunto $T^*$ existir e*

$$T^* \circ T = T \circ T^* = Id.$$

**Demonstração:**
Por hipótese temos que $T$ é unitário, então $T$ é invertível, usando as propriedades de produto interno, temos

$$\langle T(u), v \rangle = \left\langle T(u), (T \circ T^{-1})(v) \right\rangle = \left\langle u, T^{-1}(v) \right\rangle, \tag{2.1}$$

pois $T$ preserva o produto interno (Ver Definição 25). Da equação anterior concluimos que

$$\langle T(u), v \rangle = \left\langle u, T^{-1}(v) \right\rangle \ \forall u, v \ \in V,$$

ou seja, $T^{-1}$ é o a adjunto de $T$. Portanto

$$T^* \circ T = T \circ T^* = Id.$$

Reciprocamente temos que $T$ admite adjunto, de tal forma que

$$T^* \circ T = T \circ T^* = Id$$

logo $T$ é invertível e $T^{-1}$ é seu adjunto, isto é,

$$T^{-1} = T^*.$$

Nos resta mostrar que $T$ preserva o produto interno. De fato, basta usarmos o adjunto de $T$, daí,

$$\begin{aligned} \langle T(u), T(v) \rangle &= \langle u, (T^* \circ T)(v) \rangle \\ &= \langle u, Id(v) \rangle = \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

portanto,

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

para todo $u$ e $v$ em $V$.

$\square$

**Exemplo 6.** Considere $V = \mathbb{M}_{(n\times 1)}(\mathbb{C})$, o espaço das matrizes coluna sobre o corpo dos números complexos, com produto interno dado por,

$$\langle M, N\rangle = N^*M = \overline{N}^t M,\ \forall M, N \in V.$$

Considere também $A \in \mathbb{M}'_{(n\times n)}(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes quadradas sobre o corpo dos números complexos. Definimos o operador linear $S$ como segue,

$$\begin{array}{rcccccl} S & : & V & \to & V & & \\ & & M & \to & S(M) & = & AM,\ \forall\ M \in V. \end{array}$$

Sob essas codições, temos

$$\langle S(M), S(N)\rangle = \langle AM, AN\rangle = \overline{(AN)}^t(AM) = \overline{N}^t\overline{A}^t AM.$$

Observe que se $\overline{A}^t A = Id_n$ teremos que

$$\langle S(M), S(N)\rangle = \overline{N}^t M = \langle M, N\rangle\,.$$

Assim $S$ preserva o produto interno, agora iremos mostrar que $S$ é um isomorfismo. Afirmamos que $S$ é injetor.
Sabemos que uma transformação linear $S$ é injetora, se e somente se, o

$$NucS = \{0\}.$$

Suponha por absurdo que $S$ não seja injetor, daí existe $u \neq 0$ em $V$, tal que

$$S(u) = 0$$

então

$$\langle S(u), S(u)\rangle = \langle 0, 0\rangle = 0.$$

Por outro lado, temos pelas propriedades de produto interno que

$$\langle u, u\rangle > 0$$

mas, $S$ preserva o produto interno, daí

$$\langle S(u), S(u)\rangle = \langle u, u\rangle \Rightarrow 0 > 0$$

contradição, portanto $S$ é injetor.
Para mostrar a sobrejetividade de $S$, considere $X \in V$ então existe $Y \in V$ tal que

$$S(Y) = X.$$

De fato, note que

$$Y = A^{-1}X$$

Assim concluimos que $S$ é um isomorfismo, logo é unitária, isto se, e somente se,

$$\overline{A}^t A = Id_n.$$

Além disso, dado uma base $B$ ortonormal de $V$, temos que

$$[S]_B = A.$$

De fato, sem perda de generalidade considere $B$ a base canônica de $V$, isto é,

$$B = \{M_1 = (1, 0, ..., 0), M_2 = (0, 1, ..., 0), ..., M_n = (0, 0, ..., 1)\}$$

Onde os $M_i's$ são matrizes colunas de $V$. Vamos encontrar a matriz de $S$ em relação a esta base.

$$S(M_1) = AM_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix},$$

$$S(M_2) = AM_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ a_{n2} \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$S(M_n) = AM_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Assim temos que,

$$[S]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$[S]_B = A.$$

$\square$

**Observação 5.** Se $K = \mathbb{R}$, então o adjunto de $T$ é a matriz transposta de $T$, isto é, $[T^*] = [T]^t$. Isso decorre diretamente do Teorema 4.

**Definição 4** *Seja $A \in \mathbb{M}_n(K)$. Dizemos que $A$ é unitária se*

$$A\overline{A}^t = \overline{A}^t A = Id_n.$$

*Quando $K = \mathbb{R}$, também dizemos que $A$ é ortogonal.*

**Exemplo 7.** Vamos generalisar quando uma matriz $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ é ortogonal. Para isso consideremos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$$

uma matriz ortogonal. Do Teorema 7, e da Definição 4, temos que $A$ é ortogonal se, e somente se,

$$A^* = A^t = A^{-1},$$

usando as propriedades de determinante, obtemos

$$\begin{aligned} 1 = det(Id_2) &= det(A^{-1}A) \\ &= detA^{-1}detA \\ &= detA^t detA = (detA)^2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$detA = \pm 1$$

como $A^t = A^{-1}$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

assim obtemos, $a = d, \ b = -c$, o que implica em

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ e } \ a^2 + b^2 = 1 \text{ (se } detA = 1)$$

ou

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ e } \ a^2 + b^2 = 1 \text{ (se } detA = -1)$$

concluimos que $A$ é ortogonal se, e somente se,

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ ou } \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \ \text{ com } a^2 + b^2 = 1.$$

$\square$

## 2.2 Operadores Normais

Nesta seção caracterizaremos todas as transformações lineares de um espaço vetorial (Real ou Complexo) $V$, para as quais existe uma base ortonormal $B$ formada por autovetores de $T$, em relação à qual a matriz da transformação é diagonal [1]. Vamos iniciar, usando o que já foi estudado anteriormente. Considere $V$ um $K$-espaço vetorial com produto interno e $T \in L(V, V)$ um operador linear. Suponhamos que

$$B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

seja uma base ortonormal formada por autovetores de $V$ o que nos dá a seguinte propriedade

$$T(v_i) = \alpha_i v_i, \text{ com } \alpha_i' s \in K \text{ e } i = 1, 2, ..., n,$$

ou seja, associamos cada elemento da transformação, como a multiplicação de um escalar por algum elemento da base ortonormal de vetores característicos. Isto nos diz simplesmente que a matriz de $T$ em relação a base ordenada $B$ é a matriz diagonal, noutros termos, $[T]_B$ tem os elementos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, na diagonal principal e zero nas outras posições.

E como já mostramos no Teorema 4, o operador adjunto $T^* = \overline{[T]}_B^t$, ou seja, nesse caso vamos ter que $[T^*]_B$ tem os elementos $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n$ na diagonal principal e zero nas demais posições.

• Se $V$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial com produto interno, então os escalares $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n$ são evidentemente reais, ou seja

$$T = T^*$$

em outras palavras, se $V$ é um espaço real de dimensão finita com produto interno e $T$ é um operador linear para o qual existe uma base ortonormal de vetores característicos então $T$ é um auto-adjunto.

• Se $V$ é um $\mathbb{C}$-espaço com produto interno, então os escalares $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n$ não são necessariamente reais, logo $T$ não será necessariamente auto-adjunto. Mas $T$ deve satisfazer

$$[T]_B[T^*]_B = [T^*]_B[T]. \tag{2.2}$$

De fato, pois duas matrizes diagonais quaisquer comutam e como $T$ e $T^*$ são ambas diagonais em relação a base $B$ temos que a equação (2.2) é verdadeira. E como $T$ comuta com $T^*$ temos que

$$T \circ T^* = T^* \circ T.$$

Isso nos induz a perguntar, se este fato é condição suficiente para implicar na existência de uma base ortonormal com vetores característico? Isto é, a recíproca do que foi mostrado anteriormente é também verdadeira?. Veremos adiante algumas definições e proposições que respondem de forma positiva a esta pergunta.

**Definição 5** *Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e $T$ um operador linear sobre $V$. Dizemos que $T$ é normal se existir $T^*$ e,*

$$T \circ T^* = T^* \circ T.$$

**Observação 6.** Todo operador auto-adjunto é normal, assim como os operadores unitários.

De fato, seja $T$ um operador auto-adjunto, então $T = T^*$ daí,

$$T \circ T^* = T^* \circ T.$$

Portanto, $T$ é um operador normal.

Por outro lado se $T$ é um operador unitário então

$$T \circ T^* = T^* \circ T = Id$$

logo $T$ é um operador normal.

**Observação 7.** Todo múltiplo escalar de um operador normal é normal.

Para mostrar isto considere $T$ um operador normal e $\lambda \in K$, usando o Teorema 2 para os operadores lineares $T$ e $T^*$, temos

$$(\alpha T)^* \circ (\alpha T) = (\overline{\alpha} T^*) \circ (\alpha T) = \overline{\alpha}\alpha (T^* \circ T)$$

como $T$ é um operador normal, da equação anterior, tem-se,

$$\alpha\overline{\alpha}(T \circ T^*) = (\alpha T) \circ (\overline{\alpha} T^*) = (\alpha T) \circ (\alpha T)^*.$$

Portanto,

$$(\alpha T)^* \circ (\alpha T) = (\alpha T) \circ (\alpha T)^*.$$

**Teorema 8** *Sejam $V$ um $K$-espaço vetorial de com produto interno e $T$ um operador linear normal sobre $V$. Então,*

*a)* $||T(v)|| = ||T^*(v)||, \forall v \in V$;

*b) Se $T(v) = \alpha v$ para $\alpha \in K$ e $v \in V$, então $T^*(v) = \overline{\alpha} v$;*

*c) Se $T(v_1) = \alpha_1 v_1$ e $T(v_2) = \alpha_2 v_2$, para $v_1$ e $v_2 \in V$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, com $\alpha_1 \neq \alpha_2$, então $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.*

**Demonstração:**

**a)** Seja $T \in L(V, V)$ e $v \in V$. Observe que

$$||T(v)||^2 = \langle T(v), T(v) \rangle \,, \tag{2.3}$$

e da definição de adjunto, temos,

$$\langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, T^*(T(v)) \rangle = \langle v, T(T^*(v)) \rangle$$

pois $T$ é um operador normal, e mais, a equação anterior é equivalente á

$$\overline{\langle T(T^*(v)), v \rangle} = \langle T(T^*(v)), v \rangle = \langle T^*(v), T^*(v) \rangle \,,$$

isto se justifica porque $\langle T(v), T(v) \rangle$ é real (decorre diretamente das propriedades de produto interno). Como sabemos,

$$\langle T^*(v), T^*(v) \rangle = ||T^*(v)||^2 \tag{2.4}$$

assim, das equações (2.3) e (2.4),

$$||T(v)||^2 = ||T^*(v)||^2 \;\Rightarrow\; ||T(v)|| = ||T^*(v)||.$$

**b)** Lembrando que $Id(\alpha v) = \alpha v$, pois $Id(v)$ é o operador identidade. Como

$$T(v) = \alpha v \text{ implicando que } T(v) = Id(\alpha v)$$

o que nos dá

$$T(v) - Id(\alpha v) = 0 \Rightarrow ||T(v) - Id(\alpha v)|| = 0$$

por outro lado, tem-se da parte **(a)** e do Teorema 2, que

$$||T(v) - Id(\alpha v)|| = ||T^*(v) - Id^*(\alpha v)||$$

então

$$||T^*(v) - Id^*(\alpha v)|| = 0 \;\Leftrightarrow\; T^*(v) - Id^*(\alpha v) = 0$$

como sabemos, $Id^*(\alpha v) = \overline{\alpha} v$, logo

$$T^*(v) - \overline{\alpha} v = 0 \;\Rightarrow\; T^*(v) = \overline{\alpha} v.$$

**c)** Para mostrar esse item, basta observar que

$$\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T^*(v_2) \rangle .$$

Por hipótese, temos que $T(v_2) = \alpha_2 v_2$, e por **b)** temos

$$T^*(v_2) = \overline{\alpha_2} v_2$$

sendo assim

$$\langle v_1, T^*(v_2) \rangle = \langle v_1, \overline{\alpha_2} v_2 \rangle = \overline{\langle \overline{\alpha_2} v_2, v_1 \rangle} = \alpha_2 \langle v_1, v_2 \rangle .$$

então,

$$\langle T(v_1), v_2 \rangle = \alpha_2 \langle v_1, v_2 \rangle . \tag{2.5}$$

Por outro lado, como $T(v_1) = \alpha_1 v_1$, então

$$\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle \alpha_1 v_1, v_2 \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_2 \rangle , \tag{2.6}$$

logo das equações (2.5) e (2.6), vem que

$$\alpha_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \alpha_2 \langle v_1, v_2 \rangle \;\Rightarrow\; \alpha_1 \langle v_1, v_2 \rangle - \alpha_2 \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

daí

$$\alpha_1 \langle v_1, v_2 \rangle - \alpha_2 \langle v_1, v_2 \rangle = (\alpha_1 - \alpha_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

Como $\alpha_1 \neq \alpha_2$ entao

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

□

## 2.3 Teorema Espectral

**Teorema 9** *Seja $V$ um $K$- espaço vetorial com produto interno de dimensão finita. Se $T$ é um operador linear auto-adjunto sobre $V$, então $T$ possui um autovetor.*

**Demonstração:**
Estamos interessados em mostrar que, $p_T(\lambda)$ tem raizes e estas por sua vez serão autovalores de $T$. Vamos separar esta demonstração em dois casos.

**Caso 1.** Considerar $K = \mathbb{C}$, ou seja, o corpo é o conjuntos dos números complexos. Sendo assim, o resultado segue diretamente pelo Teorema 11 no Apêndice A, isto é, existe uma raiz para o polinômio característico de $T$, como desejado.

**Caso 2.** Seja $K = \mathbb{R}$, isto é, o corpo é o conjunto dos números reais. Considere $V$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, $T$ um operador linear auto-adjunto e $B$ uma base ortonormal de $V$. Vamos chamar de $A$, a matriz do operador $T$ em relação a base $B$,

$$A = [T]_B. \tag{2.7}$$

Como $T$ é auto-adjunto, temos pelo Teorema 4 que,

$$A = [T]_B = [T^*]_B = \overline{[T]}_B^t = \overline{A}^t$$

logo $A$ é uma matriz simétrica pois,

$$A = \overline{A}^t.$$

Considere o operador $S \in L(M_{n\times 1}, M_{n\times 1})$ sobre o corpo dos números complexos, como definido no Exemplo 6, onde

$$S(M) = AM, \ \forall M \in M_{n\times 1}$$

além disso, observe que o operador $S$ é auto-adjunto, pois,

$$S^*(M) = \overline{A}^t M = AM = S(M).$$

Como o operador auto-adjunto $S$ está sobre os complexos, então pelo Teorema 11 o polinômio

$$p_S(\lambda) = det[\lambda Id_n - [S]]$$

possui uma raiz, considere $\lambda$ como sendo a raiz deste polinômio. Por outro lado temos que $\lambda$ também é raiz do polinômio

$$p(\lambda) = det[\lambda Id_n - A]_B$$

pois foi mostrado no Exemplo 6, que

$$[S]_B = A \ \Rightarrow \ p_S(\lambda) = p(\lambda)$$

segue por (2.7) que

$$p(\lambda) = p_T(\lambda),$$

logo

$$p_S(\lambda) = p_T(\lambda).$$

Assim sendo, temos que $\lambda$ é uma raiz do polinômio caracteristico de $T$.

Vamos mostrar que $\lambda$ é real. Para tanto, seja $v \neq 0$ o autovetor associado a $\lambda$, logo

$$\langle S(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \langle v, v\rangle .$$

Por outro lado,

$$\langle S(v), v\rangle = \langle v, S^*(v)\rangle = \langle v, S(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda} \langle v, v\rangle$$

assim,

$$\lambda \langle v, v\rangle = \overline{\lambda} \langle v, v\rangle \;\Rightarrow\; (\lambda - \overline{\lambda}) \langle v, v\rangle$$

como $v \neq 0$, temos que $\lambda - \overline{\lambda} = 0$, então $\lambda = \overline{\lambda}$, portanto $\lambda \in \mathbb{R}$, logo é um autovalor de $T$.

□

**Definição 6** *Seja $T : V \to V$ um operador linear onde $V$ é um $K$-espaço vetorial e seja $W \subseteq V$ um subespaço de $V$. Dizemos que $W$ é um subespaço $T$-invariante de $V$ se $T(w) \in W$ para todo $w \in W$.*

**Lema 2** *Seja $V$ um $K$-espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita com $T \in L(V, V)$. Se $W$ é um subespaço $T$-invariante de $V$, então $W^\perp$ é $T^*$-invariante.*

**Demonstração:**
Considere $w \in W^\perp$ e $v \in W$, vamos mostrar que $T^*(w) \in W^\perp$, ou seja,

$$\langle v, T^*(w)\rangle = 0, \;\forall v \in W.$$

De fato, como $W$ é $T$-invariante, então $T(v) \in W$, e portanto

$$\langle T(v), w\rangle = 0.$$

Por outro lado observe que

$$\langle v, T^*(w)\rangle = \langle T(v), w\rangle = 0.$$

Portanto, $T^*(w) \in W^\perp$.

□

**Teorema 10 (Espectral)** *Seja $V$ um $K$-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, e seja $T$ um operador linear auto-adjunto sobre $V$. Então existe uma base ortonormal de $V$ cujo os vetores são autovetores de $T$.*

**Demonstração:**
Seja $V$ um $K$-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e $T$ um operador auto-adjunto. Provaremos o resultado por indução sobre a dimensão de $V$.

• Se $dim_K V = 1$, então pelo Teorema 9, temos que $T$ possui um vetor característivo $v_1$, logo

$$\left\{ \frac{v_1}{||v_1||} \right\}$$

é uma base ortonormal, como desejado.

• Suponha que $n > 1$ e que o resultado seja válido para todo espaço vetorial de dimensão $n-1$. Seja $W$ o subespaço unidimensional gerado pelo vetor $v_1$. A afirmação de que $v_1$ é um vetor característico de $T$ significa que $W$ é $T$-invariate, pois

$$T(v) = \lambda v \;\Rightarrow\; T(v) \in W, \;\forall v \in W.$$

Com isto, pelo Lema 2 temos que $W^{\perp}$ é $T^*$-invariante, mas $T$ é um operador auto-adjunto, ou seja $T = T^*$, logo $W^{\perp}$ é $T$-invariante. Pelo Corolário 3 no Apêndice A, temos

$$dim_K V = dim_K W + dim_K W^{\perp}$$

o que implica dimensão de $W^{\perp} = n - 1$, então pela hipótese de indução, temos que $W^{\perp}$ possui uma base ortonormal

$$B' = \{v_2, ..., v_n\}$$

formada por autovetores, assim o conjunto

$$B = \left\{ \frac{v_1}{||v_1||}, v_2, v_3, ..., v_n \right\}$$

gera o espaço vetorial $V$, e é LI. Portanto é uma base ortonormal de $V$ formada por autovetores.

□

# Apêndice A

# DEFINIÇÕES BÁSICAS

## A.1 Espaços Vetoriais

**Teorema 11 (Fundamental da Álgebra)** *Todo polonômio com coeficientes em $\mathbb{C}$ possui raízes complexas.*

**Definição 7 (Corpo)** *Um conjunto não vazio $K$ é um corpo se em $K$ pudermos definir duas operações, denotadas por $+$ (adição) e $.$ (multiplicação), estas devem satisfazer as seguintes propriedades:*

**Operação de Adição**

*(A1)* $a + b = b + a$, $\forall a, b \in K$ *(Comutativa);*

*(A2)* $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall a, b, c \in K$ *(Associativa);*

*(A3) Existe um elemento em $K$, denotado por $0$ e chamado de elemento neutro da adição, que satisfaz*

$$0 + a = a + 0, \ \forall a \in K$$

*(A4) Para cada $a \in K$ existe um elemento em $K$, denotado por $(-a)$ e chamado de oposto de $a$ (ou inverso aditivo de $a$) tal que*

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

**Operação de Multiplicação**

*(M1)* $a.b = b.a$, $\forall a, b \in K$ *(Comutativa);*

*(M2)* $a.(b.c) = (a.b).c$, $\forall a, b, c \in K$ *(Associativa);*

*(M3) Existe um elemento em $K$, denotado por $1$ e chamado de elemento neutro da multiplicação, que satisfaz*

$$1.a = a.1, \ \forall a \in K$$

*(M4) Para cada elememto não nulo $a \in K$ existe um elemento em $K$, denotado por $a^{-1}$ e chamado de inverso multiplicativo de $a$ tal que*

$$a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$$

*(AM) $(a+b).c = a.c + b.c, \ \forall a, b, c \ \in \ K$ (Distributiva);*

**Definição 8 (Espaço Vetorial)** *Um conjunto não vazio $V$ é um espaço vetorial sobre $K$ (um corpo) se em seus elementos, denominados vetores estiverem definidas as seguintes operações:*

**Aditiva:** A cada par $u, v$ de vetores de $V$ corresponde um vetor $u + v \in V$, chamado de soma de $u$ e $v$ de modo que:

(A1) $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V$ (propriedade comutativa)

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in V$ (propriedade associativa)

(A3) Existe em $V$ um vetor, demominado vetor nulo e denotado por $0$, tal que $0 + v = v + 0 = v, \forall v \in V$;

(A4) Para cada vetor $v \in V$, existe um vetor em $V$, denotado por $-v$, tal que $v + (-v) = (-v) + v = 0$

**Multiplicativa:** A cada par $\alpha \in K$ e $v \in V$, corresponde um vetor $\alpha.v \in V$, denominamos produto por escalar de $\alpha$ por $v$ de modo que:

(M1) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v), \ \forall \alpha, \beta \in K$ e $v \in V$ (propriedade associativa);

(M2) $1.v = v.1 = v \ \forall v \in V$ (onde $1$ é o elemento identidade de $K$);

(M3) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \ \forall \alpha \in K$ e $v \in V$;

(M4) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v, \ \forall \alpha, \beta \in K$ e $v \in V$.

**Definição 9** *Seja $V$ um espaço vetorial sobre $K$.*

(1) Um vetor $v \in V$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$, tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

(2) Seja $B$ um subconjunto de $V$. Diremos que $B$ é conjunto gerador de $V$ (ou que $B$ gera $V$) se todo elemento de $V$ for uma combinação linear de um número finito de elementos de $B$.

**Definição 10** *Seja $V$ um espaço vetorial sobre $K$ e $B$ um subconjunto de $V$.*

(a) Dizemos que $B$ é linearmente independente (LI) se $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$, para $v_i \in B$ e $\alpha_i \in K$, onde $i = 1, 2, ..., n$, implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

(b) O conjunto $B$ é chamado linearmente dependente (LD) se não for linearmente independente.

**Definição 11 (Base)** *Seja $V$ um espaço vetorial sobre um corpo $K$. Dizemos que um subconjunto $B$ de $V$ é um base de $V$ se*

(i) $B$ for um conjunto gerador de $V$ e

(b) $B$ for linearmente independente.

**Definição 12** *Seja $V$ um espaço vetorial sobre $K$. Se $V$ admite uma base finita, então chamamos de dimensão de $V$ o número de elementos de tal base. Caso contrario dizemos que a dimensão de $V$ é infinita.*

**Proposição 2** *Seja $V$ um $K$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e seja $B \subseteq V$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*(a) $B$ é uma base de $V$;*

*(b) Cada elemento de $V$ se escreve de maneira única como combinação linear de elementos de $B$.*

**Definição 13** *Seja $V$ um espaço vetorial sobre um corpo $K$. Um subconjunto $W$ de $V$ é um subespaço vetorial de $V$ se a restrinção das operações de $V$ a $W$ torna esse conjunto um $K$-espaço vetorial.*

## A.2 Transformações Lineares

**Definição 14** *Seja $U$ e $V$ espaços vetoriais sobre um corpo $K$. Uma função $T : U \to V$ é uma transformação linear se*

*(i)* $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$, *para todos* $u_1, u_2 \in U$, *e*

*(ii)* $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, *para todo* $\lambda \in K$ *e todo* $u \in V$.

**Definição 15** *Sejam $U$ e $V$ dois espaços vetoriais sobre um corpo $K$ e $T : U \to V$ uma transformação linear.*

*(a) O conjunto $\{u \in U : T(u) = 0\}$ é chamado de núcleo de $T$ e será denotado por $NucT$.*

*(b) O conjunto $\{v \in V : \exists u \in U \text{ com } T(u) = v\}$ é chamado de imagem de $T$ e será denotado por $ImT$.*

**Definição 16 (Isomorfismo)** *Sejam $U$ e $V$ dois espaços vetoriais sobre $K$.*

*(i) Considere $T : U \to V$ uma transformação linear. Se $T$ for bijetora então dizemos que ela é um isomorfismo;*

*(ii) Se existir um isomorfismo $T : U \to V$, então dizemos que $U$ e $V$ são espaços vetoriais isomorfos e indicamos $U \cong V$.*

**Proposição 3** *A inversa de uma transformação linear bijetora é também linear.*

**Definição 17** *Seja $U$ e $V$ dois espaços vetoriais sobre o corpo $K$. Seja $B$ e $B'$ as base de $U$ e $V$ respectivamente. Para cada transformação linear $T : U \to V$, existe uma matriz $A$ de ordem $m \times n$ sobre o corpo $K$, a matriz de $T$ em relação a $B$ e $B'$, é*

$$[T(v)]_{B'} = A[v]_B$$

*esta é chamada de matriz da transformação linear $T$ com relação às base $B$ e $B'$ e é denotada por $[T]_{B,B'}$. No caso em que os espaços $U$ e $V$ e as base $B$ e $B'$ sejam iguais, denotamos por $[T]_B$.*

**Proposição 4** *Sejam $V$ e $W$ dois espaços vetoriais sobre $K$ com dimensões $n$ e $m$, respectivamente. Dadas bases $B$ e $C$ de $V$ e $W$, respectivamente e uma matriz $M$ em $\mathbb{M}_{m\times n}(K)$, então existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que*

$$[T]_{B,C} = M.$$

**Teorema 12** *Sejam* $T : U \to V$ *e* $E : V \to W$ *duas transformações lineares onde* $U$, $V$ *e* $W$ *são espaços vetoriais de dimensão* $n$, $m$ *e* $r$, *respectivamente. Fixe bases* $B$, $B'$ *e* $B''$ *para* $U$, $V$ *e* $W$ *respectivamente. Então*

$$[T \circ E]_{B,B''} = [T]_{B',B''}.[E]_{B,B'}$$

**Definição 18** *Seja* $V$ *um* $K$*-espaço vetorial. Um funcional linear em* $V$ *é um transformação linear*

$$f : V \to K.$$

## A.3 Autovalores e Autovetores

**Definição 19** *Uma transformação linear* $T : V \to V$ *é chamada de operador linear, onde* $V$ *é um espaço vetorial sobre um corpo* $K$.

**Definição 20** *Seja* $T : V \to V$ *um operador linear.*

(i) Um **autovalor** de $T$ é um elemento $\lambda \in K$ tal que existe um vetor não nulo $v \in V$ com

$$T(v) = \lambda v.$$

(ii) Se $\lambda$ é um autovalor de $T$, então todo vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ é chamado de **autovetor** de $T$ associado a $\lambda$. Denotaremos por $Aut_T(\lambda)$ o subespaço de $V$ gerado por todos os autovetores associados a $\lambda$.

(iii) Suponha que $dim_K V = n < \infty$. Dizemos que $T$ é **diagonalizável** se existir um base $B$ tal que $[T]_B$ é diagonal (Todos os elementos são iguais a zero, exceto os da diagonal principal), o que é equivalente a dizer que existe uma base formada por autovetores de $T$.

**Definição 21** *Sejam* $V$ *um* $K$*-espaço vetorial de dimensão finita e* $T \in L(V, V)$ *um operador linear e* $C$ *uma base de* $V$. *Chamamos o polinômio*

$$det[xId - [T]]_C$$

*de* **polinômio característico** *de* $T$ *e o denotamos por* $p_T(x)$, *isto é*

$$p_T(x) = det[xId - [T]]_C$$

*Onde os autovalores de* $T$, *caso exista, serão as raizes de seu polinômio característico.*

## A.4 Espaços com Produto Interno

**Definição 22** *Seja $V$ um $K$-espaço vetorial, onde $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Um produto interno sobre $V$ é um função*

$$\langle \ , \ \rangle : V \times V \to K$$

*que satisfaz as seguintes propriedades:*

(P1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ , $\forall u, v, w \in V$;

(P2) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda \langle u, v\rangle$ , $\forall \lambda \in K$, $\forall u, v \in V$;

(P3) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$, $\forall u, v \in V$

(P4) $\langle u, u\rangle > 0$, se $u \neq 0$.

**Observação:** As propriedades seguintes decorrem facilmente das propriedades (P1) ,(P3) e (P2), (P3).

(P5) $\langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$ , $\forall v, u, w \in V$

(P6) $\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\lambda} \langle u, v\rangle$ , $\forall \lambda \in K, v, u \in V$

**Definição 23** *Seja $V$ um $K$-espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \ , \ \rangle$. Para cada $v \in V$, chamamos de norma de $v$ ao número real dado por*

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

**Observação:** Seja $V$ um espaço vetorial com produto interno. Segue diretamente das defições anteriores que,

(N1) $||u|| \geq 0$, $\forall u \in V$ e $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

(N2) $||\alpha u|| = |\alpha| ||u||$, $\forall \alpha \in K$ e $\forall u \in V$.

**Definição 24** *Seja $V$ um espaço vetorial sobre $K$ com produto interno $\langle \ , \ \rangle$ e sejam $u, v \in V$.*

(O1) Dizemos que $u$ e $v$ são ortogonais se

$$\langle u, v\rangle = 0.$$

(O2) Um subconjunto $A$ de $V$ é chamado ortogonal se os seus elementos são ortogonais dois a dois;

(O3) Dizemos que $A$ é um conjunto ortonormal se for um conjunto ortogonal e se $||u|| = 1, \ \forall u \in A$.

**Teorema 13** *Todo espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ com produto interno possui uma base ortonormal.*

**Corolário 2** *Seja $V$ um $K$-espaço vetorial com produto interno e $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base ortonormal de $V$. Então para $v \in V$, temos*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle \, v_i$$

**Definição 25** *Sejam $V$ e $W$ dois $K$-espaços vetoriais com produto interno. Dizemos que uma transformação $T \in L(V, W)$ é uma transformação que preserva o produto interno se*

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

*para todos $u, v \in V$. Um isomorfismo entre espaço com produto interno é um isomorfismo que preserva o produto interno.*

**Definição 26** *Seja $V$ um espaço vetorial com produto interno, e seja $S \subseteq V$ um subconjunto de $V$. Chamamos de ortogonal a $S$ (ou complemento ortogonal de $S$) ao conjunto*

$$S^{\perp} = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0, \ \forall u \in S\}.$$

**Corolário 3** *Seja $V$ um $K$-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja $W$ um subespaço de $V$. Então*

$$dim_K V = dim_K W + dim_K W^{\perp}.$$

# CONCLUSÃO

Neste trabalho optamos por apresentar os conceitos de Funcionais e Operadores Lineares, pois julgamos de extrema importancia, uma vez que em nossa graduação o curso de Álgebra Linear não chega até esse nível, centramos nesse ponto, justamente para despertar o interesse de nossos colegas acerca do tema, para conseguir este objetivo, decidimos mostrar a partir do que foi visto em sala de aula, que aqueles conceitos sobre álgebra linear, podem ser estendidos a algo bem mais além, um exemplo disso foi o resultado que provamos, onde mostramos condições necessárias e suficientes para se ter num espaço vetorial $V$ uma base ortonormal formada por autovetores. Isto nos diz simplesmente, que encontramos uma base para um dado espaço vetorial $V$, onde a matriz da transformação é diagonal, e a norma de cada elemento dessa base é unitária, ou seja, mostramos a base mais simples (depois da canônica), e essa por sua vez possui várias propriedades que a destaca das demais, já que ela é formada por autovetores. Além disso, concluímos que todos os elementos (vetores) do espaço vetorial $V$, podem ser escritos como uma combinação linear de vetores característicos.

Finalizamos este, deixando uma questão em aberto, que pode ser entendida como um segundo passo deste trabalho. Os resultados que mostramos podem ser ampliados a um espaço de dimensão infinita, então quais serão as novas condições para que o ocorrido aqui, também seja valido para esse novo espaço, ou seja, como os conceitos de Funcionais e Operadores Lineares, estão relacionados a existência de uma base formada por vetores caracteristicos em um espaço vetorial de dimensão infinita.

# Referências Bibliográficas


[1] HOFFMAN, KENNETH, *Álgebra Linear*/ Kenneth Hoffman e Ray Kunze; traduzido por Adalberto P. Bergamasco. Livos Técnicos e Cientfícos, Rio de Janeiro , 1976.

[2] LIMA, ELON LAGES, *Álgebra Linear*/ Elon Lages Lima, (Coleção matemática universitária) 7ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[3] COELHO, FLÁVIO ULHOA, *Um Curso de Álgebra Linear*/ Flávio Ulhoa Coelho, Mary Lilian Lourenço, 2ª ed. São Paulo: EDUSP,2007.

[4] CARVALHO, JOÃO PITOMBEIRA DE, *Introdução à Ágebra Linear* por João Pitombeira de Carvalho, Rio de janeiro, PUC-RJ, 1971.

[5] LIPSCHUTZ, SEYMOUR, *Linear Algebra: Teoria e Problemas* (Coleção Schaum)/ Seymour Lipschutz ; tradução Alfredo Alves de Farias com a colaboração de Eliana Farias e Soares - 3ª ed. - São Paulo: Makron Books,1994.

[6] BOLDRINI, JOSÉ LUÍZ, *Álgebra Linear*/ José Luiz Boldrini, Sueli I. Rodrigues Costa, Hery G. Wetzler, 3ª ed. São Paulo - HARBRA, 1980.

[7] RODNEY, JOSUÉ BIEZUNER, *Notas de Aula: Álgebra Linear II*/ Rodney Josué Biezuner, Minas Gerais, UFMG, 2006.