



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
CARLOS HENRIQUE OLIVEIRA DA SILVA
SUEIDE MACIEL CHAGAS

Construção Geométrica dos Números Reais

MACAPÁ-AP
2013



Carlos Henrique Oliveira da Silva
Sueide Maciel Chagas

Construção Geométrica dos Números Reais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente do Curso de Licenciatura em Matemática - UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção da Graduação em Licenciatura em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Plana.
Orientador: *Dr. José Walter Cárdenas Sotil.*

MACAPÁ-AP
2013

Construção Geométrica dos Números Reais

por

Carlos Henrique Oliveira da Silva
Sueide Maciel Chagas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Banca Examinadora

Orientador: Prof. *Dr.* José Walter Cárdenas Sotil.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Membro: Prof. *Dr.* Guzmán Eulalio Isla Chamilco.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Membro: Prof. *Esp.* João Socorro Pinheiro Ferreira.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Avaliado em: 12 de Junho de 2013.

MACAPÁ-AP
2013

À minha esposa, e à minha filha,
pois minha família é minha principal fonte de inspiração.
(Carlos Henrique Oliveira da Silva).

À minha Família e amigos pelo
incentivo a realização deste tra-
balho;
(Sueide Maciel Chagas)

Agradecimentos

Sou grato primeiramente a Deus por me conceder a oportunidade de poder ingressar na Universidade Federal do Amapá, e conhecer pessoas incríveis, os quais passei parte de minha vida compartilhando inúmeros momentos que nunca sairão da memória.

À minha esposa Dayane Oliveira que foi meu principal pilar nessa caminhada, pois sem seu apoio e incentivo, não teria conseguido chegar aonde cheguei. À minha filha Júlia Lohanna, pois foi a minha fortaleza nos momentos de dificuldades, pois a cada instante em que eu pensei em desistir, o simples fato de ela existir me fez pular por todas as barreiras e chegar até aqui.

Aos meus pais, Manoel Gomes da Silva e Maria Luiza de Oliveira por cada esforço feito para que eu pudesse alcançar meus objetivos até aqui conquistados, e pelas orações ininterruptas.

Aos meus irmãos Vanderlei Alex Oliveira da Silva, Daiana Taisa Oliveira da Silva e Manoela Sabrina Oliveira da Silva, pois sempre que puderam me ajudaram de forma direta ou indireta.

Aos meus mentores espirituais, Rogério Santos e sua esposa Rosana pela cobertura espiritual, e orações.

A todos os professores do curso pelas contribuições para meu crescimento e aprendizado.

E em especial ao meu orientador Dr. José Walter Cárdenas Sotil pela paciência e dedicação na orientação deste TCC, sua ajuda foi indispensável.

Ao Renato Queiroz, que ajudou bastante na organização da estrutura física deste trabalho.

À minha colega de trabalho Sueide Maciel, por cada esforço feito ao longo da construção desta monografia, pois sem sua ajuda teria sido bem mais difícil obter tal êxito.

Obrigado a todas as pessoas que contribuíram para meu sucesso e para meu crescimento. Sou o resultado da confiança e da força de cada um de vocês.

(Carlos Henrique Oliveira da Silva).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por muitas oportunidades que me concedeu e por estar sempre presente em minha vida, pela saúde, sabedoria, força e pela determinação para realização desse trabalho, sem ele certamente não conseguiria concluí-lo.

Aos meus pais Maria do Socorro Maciel e Josué Martins das Chagas que sempre se preocuparam com a formação do meu caráter, pela confiança e pelas orações, onde o tempo, à distância e as dificuldades não nos separaram.

À minha irmã Suzana Maciel, que sempre esteve ao meu lado incentivando, se esforçando para me ajudar a realizar meus sonhos e por sempre acreditar na minha capacidade.

Aos meus irmãos Ageu pela sua torcida, Suliane pelo seu total apoio e por acreditar no meu potencial, Semeana pela sua sinceridade e Marta pela maneira silenciosa de expressar seus sentimentos.

À minha amiga Milena Nascimento que desde o primeiro momento na universidade faz parte da minha vida, sempre estivemos juntas vivenciando momentos bons e ruins. Muito obrigada amiga, com certeza todas as lembranças guardarei pra sempre!

Aos colegas de faculdade que direta ou indiretamente contribuíram para meu desenvolvimento e pelos grandes momentos de felicidades que me proporcionaram na minha trajetória acadêmica.

Aos meus grandes amigos João Cavalcante, João Batista, Amarildo Maciel, Karlos Alexandre e Lúcia, pelo total apoio, pelo incentivo, e por sempre estarem ao meu lado.

Aos professores, pelo ensinamento e pela contribuição para meu crescimento.

Em especial ao meu orientador Prof. Dr Walter Cárdenas, pela sua disponibilidade, pelas sugestões para realização desse trabalho.

Ao meu colega de trabalho Carlos Henrique e sua esposa Daiane Oliveira por está me acompanhando nessa caminhada e pela sua contribuição.

Enfim, agradeço a todos que me acompanharam nessa trajetória e que de alguma forma contribuíram para que chegasse a esse grande momento!

(Sueide Maciel Chagas).

”O sucesso nasce do querer, da determinação em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis”.

(José de Alencar)

RESUMO

Após uma série de pesquisas e revisões sobre as definições do conjunto dos números reais, fizemos a construção do mesmo geometricamente. E a mesma se dá pela representação geométrica de cada definição dada, de cada propriedade mostrada, ou de cada proposição exposta no mesmo. Definimos primeiro a imagem geométrica da reta real \mathbb{R} , a qual foi designada por \mathfrak{R} , e em seguida uma imagem para os números naturais, onde tal conjunto foi designado por \mathcal{N} , e inicialmente definimos as imagens geométrica dos números zero e um, os quais foram designados por O e I , e consequentemente definindo a unidade na semi-reta real \mathfrak{R}^+ . A partir de então definimos o conjunto dos números naturais \mathbb{N} , através de um processo denominado PROCESSO ELEMENTAR. De forma análoga, definimos também o conjunto das imagens geométrica dos números pertencentes à semi-reta real \mathfrak{R}^- , mas nesse caso o tal processo é utilizado com características diferentes - portanto chegando à definição do conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} . Foi definido no conjunto dos números naturais somente as operações e propriedades da adição e multiplicação, pois o conjunto não nos permite a definição da subtração e divisão em função de alguns fatores que não são coerentes com as características e propriedades de tal conjunto. Logo em seguida foi definida a subtração no conjunto dos números inteiros, e em seguida definimos o conjunto dos números racionais \mathbb{Q} , e nele definimos também a operação e propriedades da divisão, pois esta operação é uma das características principais do conjunto dos racionais. E finalmente foi feita a representação geométrica de cada operação, e suas respectivas propriedades, e uma forma geral de como representar um número Irracional. A ferramenta principal utilizada neste trabalho é o programa computacional Geogebra.

Palavras-chave: Geogebra, Imagem Geométrica, Figuras Geométricas, Conjuntos dos Racionais, Conjuntos dos Irracionais, Conjuntos dos Naturais, Conjunto dos Inteiros.

ABSTRACT

After a lot of research and reviews on the definitions of the set of real numbers, we build the same geometrically. And the same is given by the geometric representation of each definition of each property shown, or each proposition exposed in it. We define a first geometric image of the real line \mathbb{R} , which was designated as \mathfrak{R} , and then an image for the natural numbers where such an assembly has been designated by \mathcal{N} , and initially define the geometrical pictures of the numbers zero and one, which was designated by O and I, and thus setting the unit in semi-real line Re^+ . From then define the set of natural numbers \mathbb{N} , through a process called BASIC PROCESS. Similarly, we also define the set of images of geometric figures belonging to the semi-real line real Re^- but in this case the process is used with different characteristics - thus arriving at the definition of the set of integers \mathbb{Z} . Only operations and properties of addition and multiplication was defined in the set of natural numbers, because the set does not allow the definition of subtraction and division due to some factors that are not consistent with the characteristics and properties of such a set. Soon after the subtraction was defined on the set of integers, and then defines the set of rational numbers \mathbb{Q} , and it also define the operation and properties of the division, this operation is a major feature of all rational. Finally, it was made geometric representation of each operation, and their properties, in general, how to represent a number Irrational. Therefore, the main tool that was used in this work is the computational program Geogebra.

keyword: Geogebra, Geometric Image, Geometrical Pictures, Set of rational numbers, Set of Integers numbers, Set of natural numbers, Set of Irrational numbers.

SUMÁRIO

RESUMO	ix
ABSTRACT	x
LISTA DE FIGURAS	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
2 CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS NATURAIS	3
2.1 A Reta Real	3
2.2 Marcação dos Números Naturais na Reta Real	5
2.3 Representação Geométrica da adição de números naturais . . .	8
2.4 Propriedades da Adição:	10
2.5 Representação geométrica da multiplicação de números naturais	10
3 MARCAÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS NA RETA REAL	12
3.1 Propriedades dos Números Inteiros:	16
3.1.1 Adição:	16
3.1.2 Subtração:	16
3.1.3 Multiplicação:	17
4 MARCAÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS NA RETA REAL	18
4.1 Medição de um segmento OP.	23
4.2 Distribuição dos Números Racionais na Reta Real	27
5 DISTRIBUIÇÃO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS NA RETA REAL	30

6 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA E PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES ALGÉBRICAS EM \mathfrak{R}	33
6.1 Adição	34
6.1.1 Passo a passo de como foi obtido Z	35
6.1.2 Propriedades da Adição	36
6.1.3 Argumento que motivou a construção:	36
6.1.4 Alguns casos particulares da adição:	37
6.2 Subtração	39
6.2.1 Passo a passo do modo como foi obtido Z	39
6.2.2 Argumento que motivou a construção:	40
6.2.3 Alguns casos particulares da subtração:	40
6.3 Multiplicação:	43
6.3.1 Passo a passo de como obtido z :	43
6.3.2 Argumento que motivou a construção	43
6.3.3 Propriedades da Multiplicação:	44
6.4 Divisão	47
6.4.1 Passo a passo de como foi obtido Z :	48
6.4.2 Argumento que motivou a construção:	48
CONSIDERAÇÕES FINAIS	50
BIBLIOGRAFIA	52

LISTA DE FIGURAS

2.1	Reta real \mathfrak{R}	3
2.2	Imagem geométrica da propriedade II	4
2.3	Imagem geométrica da propriedade III	5
2.4	A é a imagem geométrica de 2	6
2.5	B é imagem geométrica de 3.	6
2.6	imagem geométrica de $n + 1$	7
2.7	imagem geométrica de $n + 1$, sem a imagem geométrica de m	8
2.8	imagem geométrica de $m + 3$	9
2.9	processo elementar n vezes	9
2.10	imagem geométrica de XxY , com x somando x (y vezes)	11
3.1	caso $p = 3$, ou seja, $m = n + 3$, ou ainda, $m - n = 3$	13
3.2	P é imagem geométrica de 3, e Q é imagem geométrica de 8.	13
3.3	Q é imagem geométrica de 8, e S é imagem geométrica de 5.	14
3.4	imagem geométrica da subtração	15
3.5	J é imagem geométrica de $4 - 5 = -1$	15
4.1	imagem geométrica de 1, 2 e 3.	19
4.2	R é imagem geométrica de $\frac{1}{3}$	20
4.3	Representação da semelhança de triângulos.	20
4.4	Imagem de P obtido a partir de n vezes o processo elementar.	21
4.5	Construção do ponto S no sentido da esquerda para direita	21
4.6	Construção do ponto S no sentido da direita para a esquerda	22
4.7	Ponto P	23
4.8	Medida com régua do comprimento do ponto p	23
4.9	Sucessivas medidas da unidade com régua	24
4.10	Triângulo OIJ e o ponto R	25
4.11	Pontos A e B na reta real	27
4.12	Os pontos K e P na reta real	27

4.13	Imagem do ponto p	28
4.14	imagem geométrica de $A < R < B$	28
5.1	imagem de $X = \frac{W}{n}$	30
6.1	Reta real e reta r	34
6.2	imagem geométrica da adição de $X + Y$	35
6.3	Imagem geométrica de $Y + X$	36
6.4	imagem geométrica de $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$	36
6.5	imagem geométrica de $Z = Y + 0$	37
6.6	imagem geométrica de $Z = X + Y$	37
6.7	imagem geométrica de $Z = Y + X$	38
6.8	imagem geométrica de $Z = X + Y$	38
6.9	imagem geométrica de $Z = Y + X$	38
6.10	imagem geométrica de $Z = X + Y$	39
6.11	imagem geométrica de $Z = Y + X$	39
6.12	Subtração de X por Y	40
6.13	Subtração de X por Y , com $X < Y$	41
6.14	Subtração de X por Y	41
6.15	Subtração de X por Y , com X e Y negativos	41
6.16	de X por Y , com X negativo e Y positivo	42
6.17	imagem de $Z = X - Y$	42
6.18	imagem de $X = Z + Y$	42
6.19	multiplicação de X por Y	43
6.20	imagem de $Z = X.Y$	45
6.21	imagem de $Z = Y.X$	45
6.22	Imagem de $X.(Y.Z) = S = (X.Y).Z$	45
6.23	Imagem geométrica de $X * (Y + Z)$ marcado a traços contínuos, e a tracejados a imagem geométrica de $X * Y + X * Z$	46
6.24	imagem de $Z = X.Y$, com $X = I$	46
6.25	imagem geométrica de $Z = X.Y$, com X e Y negativos	47
6.26	imagem geométrica de $Z = X.Y$, com X negativo e Y positivo	47
6.27	imagem geométrica de $Z = X.Y$, com $X = 0$	47
6.28	divisão de I por Y	48
6.29	imagem da divisão de $Z = \frac{I}{Y}$, com $0 < Y < I$	49
6.30	imagem de $Z = \frac{I}{Y}$, com $Y \in R^-$	49

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A matemática, desde tempos imemoriais, é a ciência que mais tem contribuído para o desenvolvimento da sociedade. A descoberta dos números foi fator decisivo na formação dessa ciência que sempre está a surpreender seus pesquisadores. À medida que a civilização foi se sofisticando, novas ferramentas foram surgindo auxiliando no desenvolvimento da construção dos números reais.

Quando se fala em números reais, há uma série de fatores que abrangem este contexto. É necessário que se tenha um breve conhecimento de alguns pré-requisitos, nos quais dão as ideias para que se compreenda detalhadamente cada passo dado, até que se chegue a uma definição da construção dos números reais.

Antes de tudo, é indispensável que se tenha noção de espaço. O que seria este espaço? Uma forma bem grosseira de definir é dizendo que é tudo que nos envolve, ou o local onde podemos nos mover, seja qual for a direção. E finalmente, dizer que é onde podemos definir uma posição. E novamente se pergunta o que seria esta posição?

É exatamente aí que entramos nos pontos principais: a reta e o ponto.

Para se entender como são construídos os números reais, precisamos entender primeiro que uma posição é representada através de um ponto, e que esse ponto é uma forma em que utilizamos, seja uma reta no \mathbb{R}^2 , ou seja em \mathbb{R}^3 . Mas o que nos interessa é trabalhar com a reta real \mathbb{R} , a qual se define pelo conjunto infinito, composto por estes pontos.

Uma definição bem sucinta de ponto é dizer que nunca conseguiríamos de forma alguma representar o mesmo em uma folha de papel, pois não

existe uma espessura, nem tamanho que se consiga pôr na ponta de um lápis, por mais afiado que o mesmo esteja. E na mesma ideia, podemos fazer uma breve definição da reta, dizemos que a mesma também não pode ser representada exatamente em uma folha de papel, pois como foi dito anteriormente, a reta é um conjunto de infinitos pontos, e como um ponto não pode ser representado desta forma, conseqüentemente a reta também não pode, por mais longo e perfeito que seja o risco feito com a intenção de representar, pois além de não ter espessura, ela se prolonga de forma indefinida, para ambos os lados.

Os números reais serão construídos a partir dos números racionais através de uma reta, a qual designaremos como a reta dos números reais, e a mesma está dividida em duas semi-retas em que os pontos estão distribuídos em forma de imagens geométricas. Onde será utilizada uma correspondência bijetiva em que a cada imagem geométrica marcada na reta \mathfrak{R} corresponderá a um número real da reta \mathbb{R} .

Existem muitas formas de construir os números reais, e uma delas é trabalhando com imagens geométricas, que podem ser construídas utilizando uma régua e um compasso ou através de uma ferramenta que surgiu há pouco tempo e está sendo muito utilizada na construção de figuras geométricas, esta ferramenta é um programa computacional conhecido por GEOGEBRA.

O que é o GEOGEBRA?

Geogebra é um programa de matemática dinâmico desenvolvido em 2001 por Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de programadores com o objetivo de aprender e ensinar matemática em sala de aula.

O programa permite realizar construção geométrica com a utilização de pontos, retas, segmentos de retas e etc, com o auxílio dessas ferramentas é possível construir os números reais representando-os de forma geométrica.

É a partir dessa ferramenta que construiremos o conjunto dos números reais, representando-o geometricamente. Para isso precisamos antes de tudo, fazer uma breve definição da reta \mathfrak{R} citada anteriormente, pois a mesma servirá de base para a construção, e a mesma será a imagem geométrica na representação da reta real \mathbb{R} .

Capítulo 2

CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS NATURAIS

Para a construção dos números naturais, precisaremos utilizar algumas definições básicas da matemática, tais como a operação da adição, a definição de sucessão, a reta real, os pontos zero e um na reta real. Portanto é dada pré-definições das mesmas antes de tudo, pois sem elas, pouco poderemos trabalhar. Logo após isso, poderemos construir cada conjunto passo a passo.

2.1 A Reta Real

Adotamos \mathfrak{R} a reta escolhida para marcar os pontos nas quais designaremos suas respectivas imagens geométricas. Portanto assumiremos inicialmente dois pontos distintos O e I , os quais foram escolhidos como imagens geométricas dos números 0 (zero) e 1 (um), respectivamente, conforme figura (2.1)



Figura 2.1 *Reta real \mathfrak{R}*

A reta pode ser percorrida em dois sentidos distintos. Observe que

foram marcados apenas dois pontos O e I . sabe-se que o ponto O está representando a origem e I está representando a unidade, tem-se um percurso de O para I , na direção para a direita, o qual será o sentido positivo da reta.

Considerando dois pontos distintos X e Y , escrevemos $X < Y$ se, e somente se, Y estiver à direita de X na reta real, e a relação $<$ terá as mesmas propriedades da relação menor $<$ no conjunto dos números reais.

Quando escrevemos $X = Y$ queremos dizer que X e Y estão representando o mesmo ponto da reta real.

$X \preceq Y$, significa que:

$$X = Y \text{ ou } X < Y$$

A partir das definições dadas, de igualdade $=$, e \preceq "menor ou igual", podemos obter as seguintes propriedades:

I) Reflexiva: $X (\preceq) X, \forall X \in \mathfrak{R}$.

II) Se $X \preceq Y$ e $Y \preceq X \Rightarrow X = Y, \forall X, Y \in \mathfrak{R}$. (Ver figura 2.2)

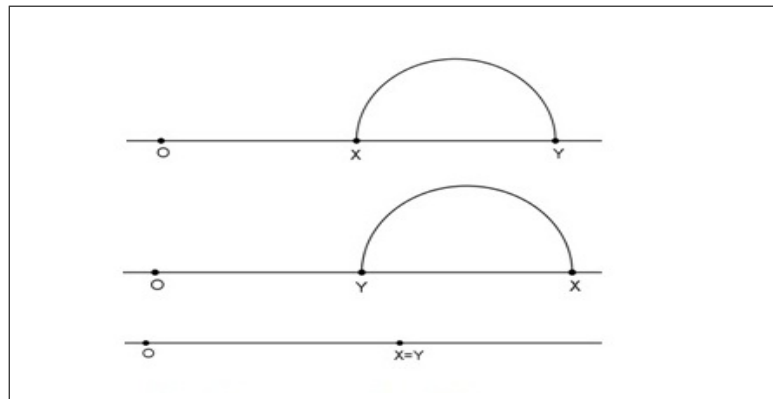


Figura 2.2 Imagem geométrica da propriedade II

III) Transitiva: Se $X \preceq Y \wedge Y \preceq W \Rightarrow X \preceq W, \forall X, Y, W \in \mathfrak{R}$.

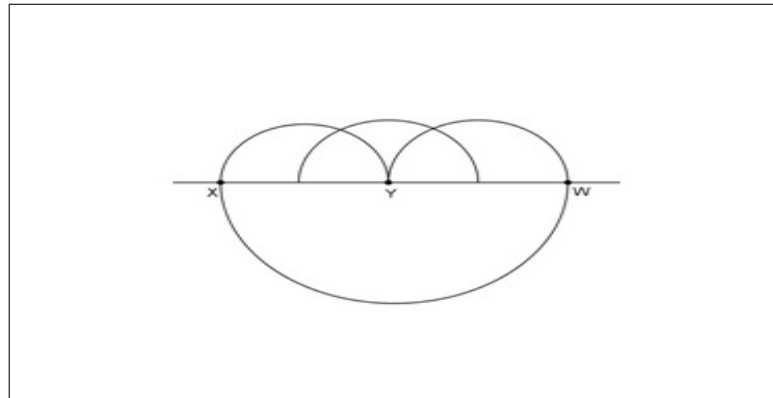


Figura 2.3 *Imagem geométrica da propriedade III*

E conseqüentemente concluímos que, considerando dois pontos de \mathfrak{R} , só uma das afirmativas abaixo pode ser verdadeira:

$$X \prec Y, X = Y, Y \prec X$$

Antes de definirmos o conjunto dos números reais é necessário que se defina a semi-reta real positiva, a qual é denotada por (\mathfrak{R}^+) , que é o conjunto dos pontos X , onde $0 \prec X$. E que a semi-reta real negativa, que é denotada por w), que é o conjunto dos pontos $X \prec 0$, isto é:

$$\mathfrak{R}^+ = \{x \in \mathfrak{R} / 0 < x\}$$

$$\mathfrak{R}^- = \{x \in \mathfrak{R} / 0 > x\}$$

2.2 Marcação dos Números Naturais na Reta Real

Primeiramente, comecemos a marcar os números naturais. Como já foram definidos os número 0 (zero) e o número 1 (um) representados pelas imagens geométricas O e I respectivamente na reta real, marcaremos o número 2, traçando uma semi-circunferência de centro I e com raio igual ao comprimento do segmento OI , o qual corte à reta nos pontos O e A (*ver figura 2.4*); O ponto A é a representação geométrica do número 2.

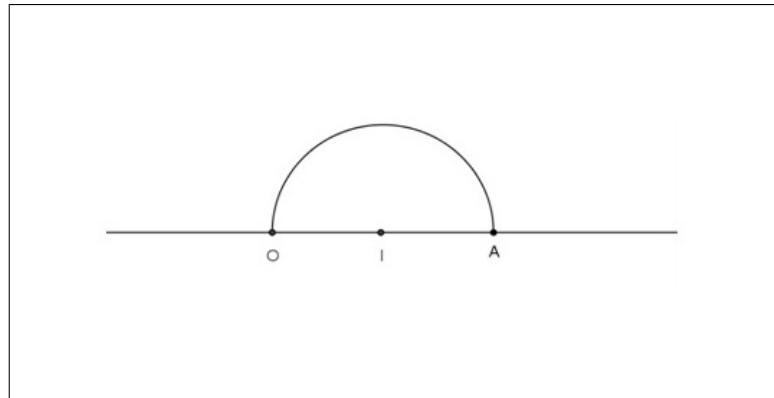


Figura 2.4 A é a imagem geométrica de 2

Repetindo a construção anterior, podemos agora marcar o número 3, tendo como o centro da semi-circunferência o ponto A e usando o mesmo raio (ver figura 2.5).

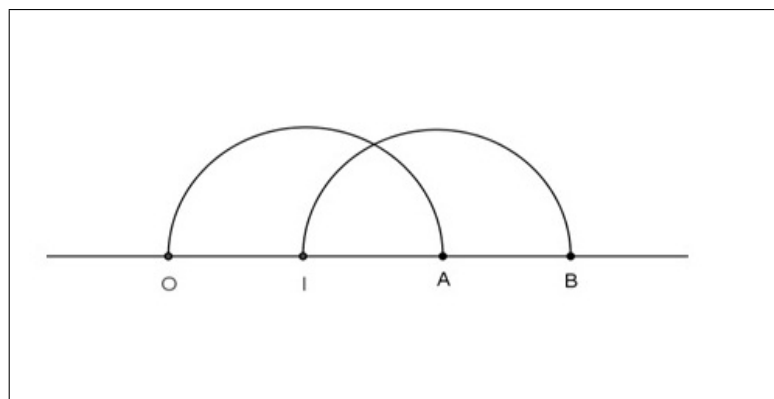


Figura 2.5 B é imagem geométrica de 3.

Ao obtermos o ponto B , imagem geométrica de 3, podemos observar que, se prosseguíssemos indefinidamente com esse processo, iremos marcar um a um os números naturais na reta real.

Observe que em uma linha reta, ainda na marcação dos números naturais, devemos marcar um ponto M para representar a imagem geométrica de m . Marcaremos um ponto N sucessor de M , para representar a imagem geométrica do número natural n . Tal situação nos mostra a seguinte

notação ($n = m + 1$). Pelo o que se ver e o que estudamos anteriormente, o ponto P da reta real é a imagem geométrica do número natural sucessor de n , ou seja, $n + 1$ (ver figura 2.6).

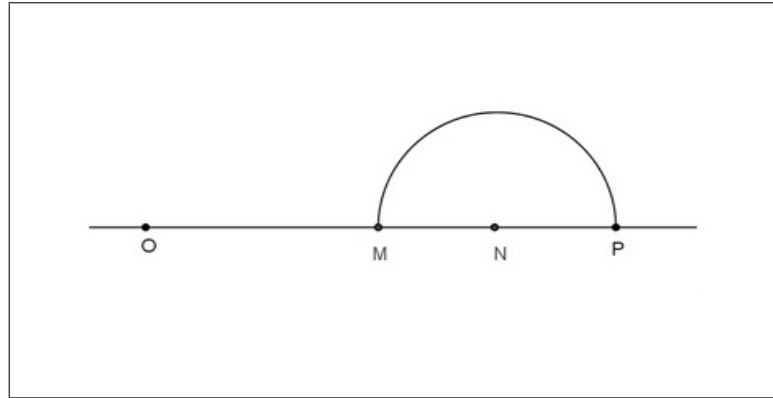


Figura 2.6 *imagem geométrica de $n + 1$.*

Através deste processo gerador dos números naturais, nota-se que:

- I) Todos os números naturais depois do primeiro natural 1 são obtidos através de sucessivas adições da unidade, denominado processo elementar.

Geometricamente falando.

- II) Toda imagem geométrica dos números naturais depois da imagem geométrica I são obtidos através de sucessivas aplicações do processo elementar.

Exemplo 2.2.1. *Seja n um número natural e designaremos por N a imagem geométrica. O objetivo consiste em marcar na reta real o número $n + 1$ utilizando apenas o geogebra e tendo apenas o conhecimento prévio dos pontos O e I . Note-se que, para aplicar o processo elementar, necessita-se do ponto M (imagem geométrica de $(n - 1)$ e que se dispõe agora dos pontos O , I e N .*

No caso anterior, podemos observar que se tinham a disposição os pontos O , I , M e N , mas agora só foram disponibilizados os pontos O , I e N .

Usando um compasso, faz-se a medida do ponto O até I , obtendo então a medida do raio da semi-circunferência que utilizamos para obter o

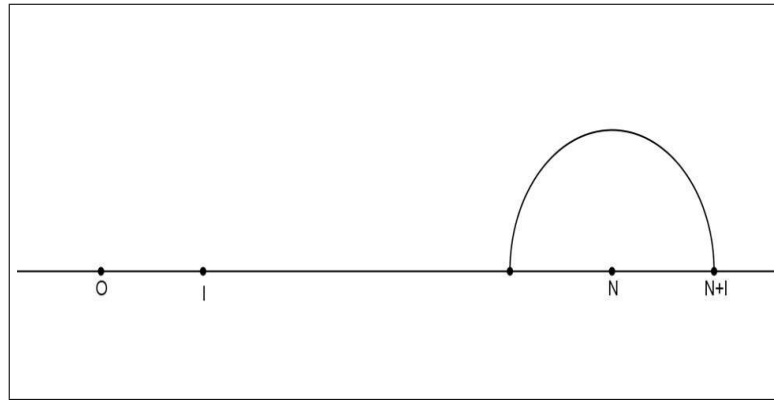


Figura 2.7 *imagem geométrica de $n + 1$, sem a imagem geométrica de m .*

ponto $N + I$, que é a imagem geométrica de $n + 1$, usando o ponto N como centro dessa semi-circunferência. O ponto em que está em interseção com a reta \mathfrak{R}^+ , é sucessor de N , será o ponto $N + I$, ou seja, o ponto $n + 1$.

Designaremos então, \mathcal{N} como sendo a imagem geométrica de \mathbb{N} , a qual gozará das mesmas propriedades dos números naturais.

Podemos definir \mathcal{N} como o conjunto dos pontos X , onde cada elemento de \mathcal{N} , é a imagem geométrica dos elementos de \mathbb{N} . E mais, \mathcal{N} é um subconjunto de \mathfrak{R} , satisfazendo as seguintes propriedades.

- I) $I \in \mathcal{N}$.
- II) Dado $X \in \mathfrak{R}$, X pertence a \mathcal{N} se e somente se, $X = I$ ou pode ser obtido de I por um conjunto finito de aplicações sucessivas do processo elementar.

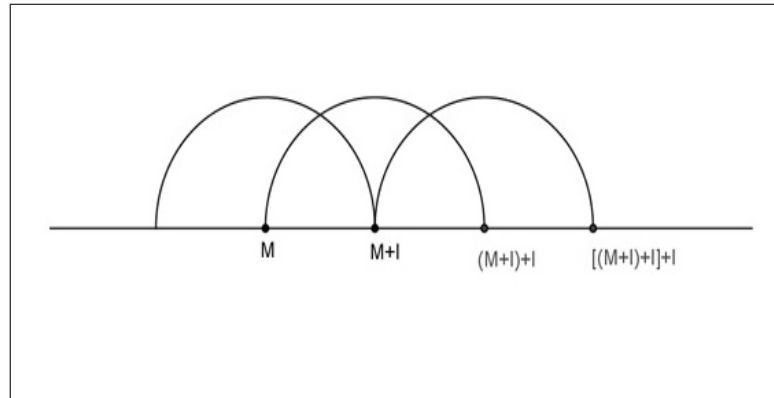
2.3 Representação Geométrica da adição de números naturais

Sejam M e N imagens geométricas dos números m e n , respectivamente. Antes de definir a soma de dois números naturais, observa-se o seguinte caso:

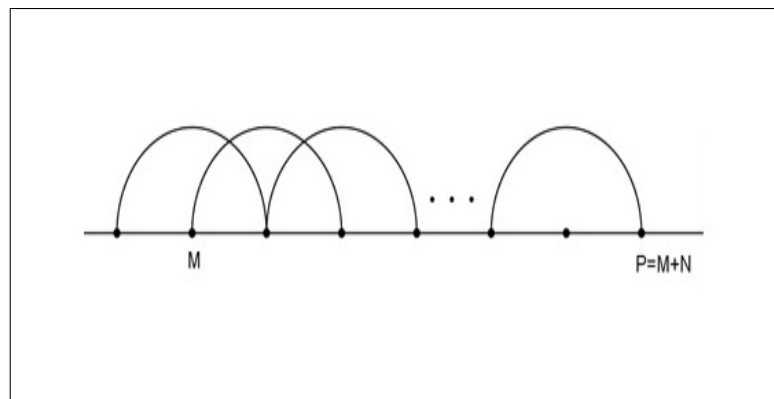
$$m + 3 = \{[(m + 1)1+] + 1\}$$

Conforme a figura abaixo:

Seja M a imagem geométrica do número natural n . Para representar

Figura 2.8 *imagem geométrica de $m + 3$*

geométricamente a soma $n + m$, aplica-se m vezes o processo elementar a partir do ponto M para obter o ponto P (ver figura 2.9).

Figura 2.9 *processo elementar n vezes*

Através da observação do caso anterior, em que foi aplicado o processo elementar n vezes, para se obter o ponto P , que representa a soma $m + n$, podemos afirmar que não somente números naturais têm imagem geométrica, mas a adição de dois números naturais quaisquer, podem também serem representado geometricamente, essa soma S ou seja, uma aplicação de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ em \mathcal{N} , em que a cada par $(M, N) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ associa a um único elemento de \mathcal{N} . Sendo imagem geométrica de n , S a representação geométrica de $m + n$.

E para diferenciar a adição de \mathbb{N} da sua correspondência em \mathcal{N} , usamos o símbolo \oplus .

$$S = m \oplus n$$

2.4 Propriedades da Adição:

A operação \oplus em \mathcal{N} goza das mesmas propriedades $+$ em \mathbb{N} as quais já são conhecidas.

Vejamos:

P1: comutativa em \mathbb{N} :

$$m + n = n + m$$

P2: Associatividade em \mathbb{N} :

$$(m + n) + p = m + (n + p)$$

P3: Elemento Neutro.

$$n + 0 = n$$

Consequentemente em \mathcal{N} :

P1: comutatividade em \mathcal{N} .

$$M \oplus N = N \oplus M$$

P2: Associatividade em \mathbb{N} :

$$(M \oplus N) \oplus P = M \oplus (N \oplus P)$$

P3: Elemento Neutro em \mathcal{N} :

$$N \oplus 0 = N$$

2.5 Representação geométrica da multiplicação de números naturais

A definição da multiplicação em \mathcal{N} , será representado por ” $*$ ” A qual será imagem geométrica de ” \cdot ”, e se define da seguinte forma:

Consideremos X e Y em \mathcal{N} , as imagens geométricas de x e $y \in \mathbb{N}$ multiplicação de x por y . Definimos a representação geométrica da multiplicação com $X * Y = X + X + X + X + X + \dots + X$, onde foi aplicado Y vezes o processo elementar com raio OX . (ver figura 2.10)

A operação ” $*$ ” em \mathcal{N} , goza das mesmas propriedades de ” \cdot ” em \mathbb{N} , as quais também já são conhecidas.

Vejamos em \mathbb{N} :

P1: Comutatividade em \mathbb{N} :

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad \forall x, y \in \mathbb{N}.$$

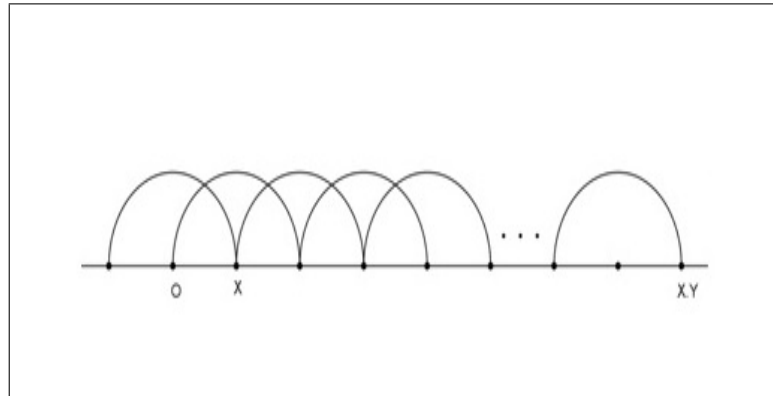


Figura 2.10 imagem geométrica de XxY , com x somando x (y vezes)

P2: Associatividade em \mathbb{N} :

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{N}.$$

P3: Existência do Elemento Neutro em \mathbb{N} :

$$x \cdot 1 = x, \quad \forall x \in \mathbb{N}.$$

P4: Distributividade em \mathbb{N} :

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, a operação ” $*$ ” goza das mesmas propriedades da seguinte forma:

P1: Comutatividade em \mathcal{N} :

$$X * Y = Y * X, \quad \forall x, y \in \mathcal{N}.$$

P2: Associatividade em.

$$(X * Y) * Z = X * (Y * Z), \quad \forall x, y, z \in \mathcal{N}.$$

P3: Existência do Elemento Neutro em \mathcal{N} :

$$X * 1 = X, \quad \forall x \in \mathcal{N}.$$

P4: Distributividade em \mathcal{N} :

$$(X \oplus Y) * Z = (X * Z) \oplus (Y * Z), \quad \forall x, y, z \in \mathcal{N}.$$

Observação 2.5.1. *As propriedades dos números naturais, tanto na adição quanto na multiplicação serão representados de forma geométrica no capítulo 6.*

Capítulo 3

MARCAÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS NA RETA REAL

Como foi visto anteriormente, definimos a operação de adição " \oplus " e multiplicação " \cdot " no conjunto \mathcal{N} . Mas é só a partir da construção dos números inteiros \mathbb{Z} que poderemos definir a subtração de um número natural m por outro natural n .

E será possível entender o porquê de não ser possível definir a subtração nos naturais \mathbb{N} . Mas antes, precisamos saber o que é a subtração em \mathbb{N} :

Dados dois números naturais m e n , pretendemos que a subtração de m por n , denotado por $(m - n)$, seja o único número natural p , tal que $m = n + p$, e que o mesmo represente um único ponto na reta real.

Mas é aí que encontramos a restrição da impossibilidade de se definir a subtração em \mathbb{N} . Pois será que para quaisquer m e $n \in \mathbb{N}$, existirá apenas um $p \in \mathbb{N}$, tal que $m = n + p$? E se caso existir será que esse é único?

Podemos afirmar, por indução, que as perguntas feitas anteriormente têm respostas afirmativas se, e somente se, $m > n$. Para justificar essa afirmação, utilizaremos a representação geométrica da adição dos números naturais, pois já são conhecidas.

Seja N e M a imagem geométrica dos números naturais n e m respectivamente (com $m > n$). A partir do ponto N , aplicamos o processo elementar (com raio OI) repetidamente até atingir o ponto M . O número de vezes que foi aplicado o processo elementar define o natural p que verifica: $m = n + p$, o qual denotamos por $p = m - n$ (ver figura 3.1).

Podemos concluir então, que a afirmativa que fizemos anteriormente,

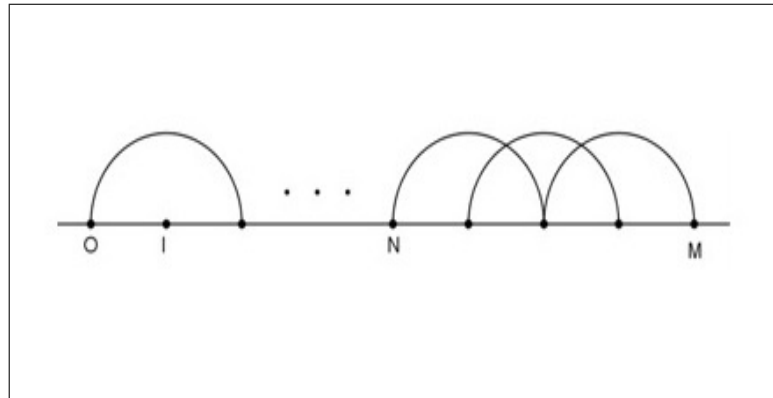


Figura 3.1 caso $p = 3$, ou seja, $m = n + 3$, ou ainda, $m - n = 3$

que a subtração $m - n$ é única em \mathbb{N} , mas com a restrição de que, m deve ser sempre maior que n , ou seja, $m > n$.

Aplicamos esta definição mostrando em um exemplo numérico como obter o resultado da subtração de 8 por 3, ou seja, $(8 - 3)$ onde o resultado é igual a 5 ($8 - 3 = 5$).

Escolhemos P a imagem geométrica de 3, e Q a imagem geométrica de 8.

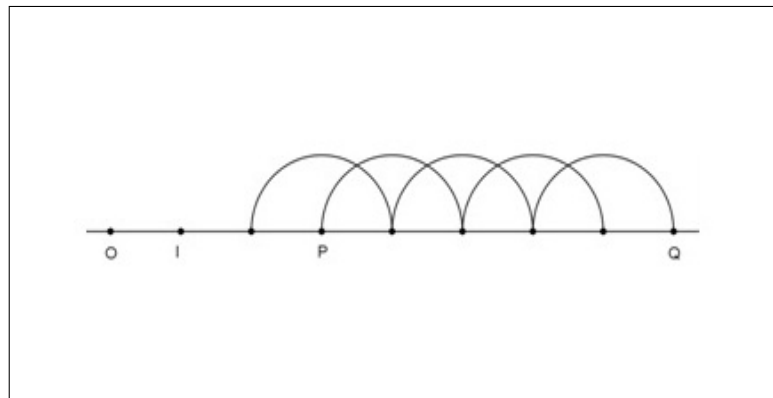


Figura 3.2 P é imagem geométrica de 3, e Q é imagem geométrica de 8.

Podemos notar na Figura 3.2 que foi indicado um sentido no processo elementar, nesse caso, o sentido de P para Q , ou seja, de 3 para 8, sentido esse marcado por uma seta. E podemos notar também que através do processo elementar, a partir de P (imagem geométrica de 8), podemos obter o resultado da subtração.

No mesmo exemplo podemos utilizar o processo elementar, mas no sentido inverso, partindo agora do ponto Q (imagem geométrica de 8), podemos chegar a um ponto S , utilizando o processo elementar (inverso) 3

vezes, obtendo assim o mesmo resultado, pois o S é a imagem geométrica de 5 na reta (ver Figura 3.3).

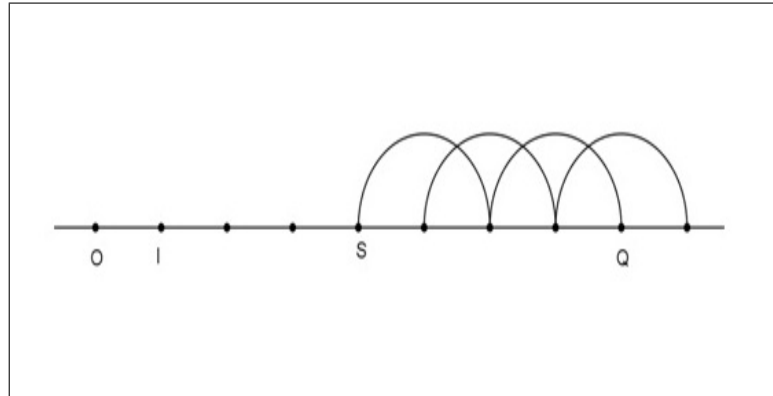


Figura 3.3 Q é imagem geométrica de 8, e S é imagem geométrica de 5.

O exemplo foi representado geometricamente nas duas formas para que pudéssemos nos atentar que, no primeiro caso, o resultado da subtração foi obtido pela quantidade de vezes que o processo elementar foi executado, enquanto que no segundo caso o resultado foi obtido através da imagem geométrica S , como o processo elementar inverso aplicado 3 vezes (a quantidade que se quer subtrair de 8).

Este segundo processo, onde se usa os mesmos passos do processo elementar, porém no sentido inverso, não foi utilizado em vão, pois o mesmo foi mostrado com o intuito de gerar a imagem geométrica dos números inteiros não naturais. Um exemplo simples seria a subtração de m por m , $m \in \mathbb{N}$, onde obtemos o ponto O , que é a imagem geométrica de zero. Já que nesse caso estamos considerando o número zero como pertencente ao conjunto dos números naturais \mathbb{N} , podemos concluir que a subtração de m por n é sempre possível, e única, desde que $M \succcurlyeq N$.

Usando um exemplo numérico, podemos fazer a subtração de 4 por 4, como mostra a figura 3.4, sendo F a imagem geométrica de 4.

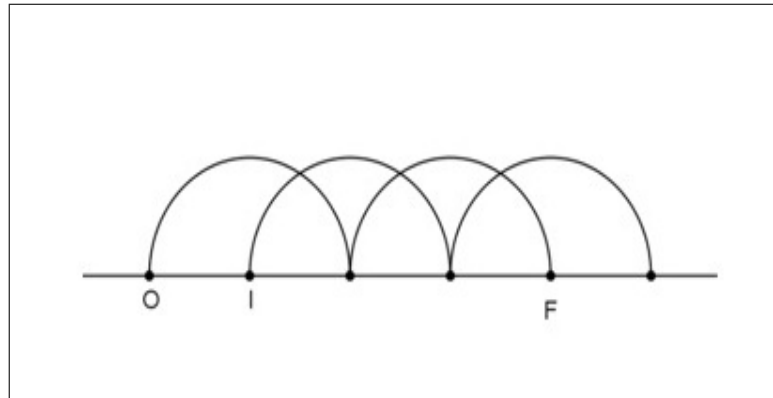


Figura 3.4 *imagem geométrica da subtração*

Utilizando a mesma aplicação anterior, podemos fazer agora a subtração de 4 por 5, a qual nos levará ao ponto J , onde será este a imagem geométrica de -1 .

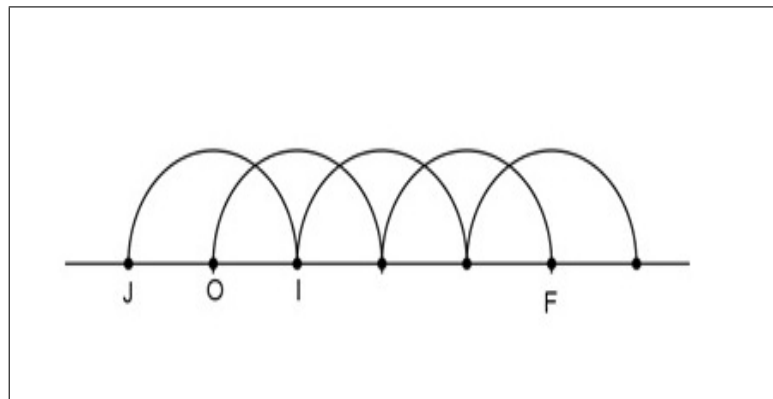


Figura 3.5 J é imagem geométrica de $4 - 5 = -1$

Podemos observar pelas semi-circunferências descritas no processo, e pelo raio que as mesmas possuem, que a distância entre J e O é a mesma entre O e I . Sendo assim, J passa a ter um papel semelhante em R^- , ao que I tem em R^+ .

Quando o conjunto dos naturais estava sendo construído, utilizamos um processo onde o designamos por "processo elementar", e o mesmo era feito no sentido de \mathfrak{R}^+ , ou seja, de O para I . De forma análoga, podemos utilizar este mesmo processo, mas de forma inversa, aplicando-o sucessivas vezes, no sentido de O para J , e este conjunto será designado por $-\mathcal{N}$. A partir de então temos o conjunto Z .

$$Z = -\mathcal{N} \cup \{0\} \cup \mathcal{N}$$

Após termos definido o conjunto dos números inteiros, podemos perceber que é possível agora determinar as operações de adição e multiplicação no conjunto \mathbb{Z} . Conseqüentemente, podemos concluir por indução que as operações definidas até agora, ou seja, a adição, subtração, e multiplicação, têm algumas características geométricas semelhantes.

Já definimos as operações de adição, subtração, e multiplicação, agora nos falta definir a divisão para que se completem as quatro operações elementares dos números reais.

Podemos concluir daqui em diante que este conjunto é onde se encontram todas as imagens geométricas de $m - n$, com $m, n \in \mathbb{N}$, e mais, agora sem restrições, pois, seja m maior que n , seja n maior que m , ou seja m igual a n , todas tem resultado representado por um ponto pertencente a \mathbb{Z} .

Vimos que, o fato de não podermos definir a subtração em \mathbb{N} , nos mostrou que tínhamos a necessidade de criar um novo conjunto, nesse caso \mathbb{Z} , para que pudéssemos definir tal operação. E como estamos com a necessidade de definir a divisão, teremos que novamente criar outro conjunto, o qual designaremos por \mathbb{Q} , que é o conjunto dos números racionais.

3.1 Propriedades dos Números Inteiros:

3.1.1 Adição:

P1: Comutatividade em \mathcal{Z} :

$$M + N = N + M, \quad \forall M, N \in \mathcal{Z}.$$

P2: Associatividade em \mathcal{Z} :

$$M + (N + P) = (M + N) + P \quad \forall M, N \in \mathcal{Z}.$$

P3: Elemento neutro em \mathcal{Z} :

$$M + 0 = M \quad \forall M \in \mathcal{Z}.$$

3.1.2 Subtração:

P1: A ordem dos termos pode alterar o resultado de uma subtração:

$$M - N \neq N - M \quad \forall M, N \in \mathcal{Z} (M \neq N).$$

P2: Números simétricos:

Dois números são ditos simétricos ou opostos quando:

$$M - N = 0.$$

3.1.3 Multiplicação:

P1: Comutatividade em \mathcal{Z} :

$$M * N = N * M, \quad \forall M, N \in \mathcal{Z}.$$

P2: Associatividade em \mathcal{Z} :

$$M * (N * P) = (M * N) * P, \quad \forall M, N \in \mathcal{Z}.$$

P3: Existência do Elemento Neutro em \mathcal{Z} :

$$M * 1 = M, \quad \forall M \in \mathcal{Z}.$$

Capítulo 4

MARCAÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS NA RETA REAL

Antes de iniciarmos a marcação dos números racionais na reta real, precisamos entender melhor o conjunto destes números, e como iremos representá-los.

O conjunto dos números racionais \mathbb{Q} surge para que se possa definir a divisão entre dois números inteiros, ambos distintos de zero.

Quando dividimos um número m por um número n , com $m, n \in \mathbb{Z}$ distintos de zero, obtemos um resultado que pode ou não, ser um número inteiro. Quando o resultado do mesmo não for inteiro, esse resultado nos leva a definição da divisão, a qual ainda não foi dada.

Seja $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, diz-se que o número r divide m por n se, e somente se, $m = nr$.

Sabemos que em certos casos, a divisão de $m \in \mathbb{Z}$ por $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ é um número inteiro. Exemplificando numericamente para melhor compreensão temos: 8 por 4, que tem como resultado 2 (um número inteiro), 15 por 3 que é igual a 5, e outros casos mais. Mas sabemos também que, a divisão de um número $m \in \mathbb{Z}$ e um número $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ pode não ser um número inteiro. Por exemplo, se pretendemos dividir 1 por 2, ou 10 por 4, sabemos que o resultado dessa divisão não será um número inteiro, mas é exato.

Para compreendermos o processo geométrico que será representado a seguir, consideremos m e n números naturais, e pretendemos expressá-lo da forma:

$$\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$$

Primeiro queremos introduzir as imagens geométricas dos números na forma $\frac{1}{n}$, em seguida a apresentação da construção que nos permitirá obter a imagem geométrica de $m \cdot \frac{1}{n}$.

Para dividir o segmento OI em n segmentos com iguais comprimentos, iremos utilizar a representação geométrica $\frac{1}{n}$.

Começemos a descrever um processo geométrico que permite dividir o segmento OI em 3 (três) parte iguais.

Em primeiro lugar iremos marcar na reta real os pontos A (a imagem geométrica de 2) e B (a imagem geométrica de 3). Em seguida (ver figura 4.1).

Traçaremos outra reta r passando pelo ponto O (a origem), e que não coincida com a reta real, na qual serão marcados os pontos I' , A' , e B' , utilizando um compasso (ver Figura 4.1).

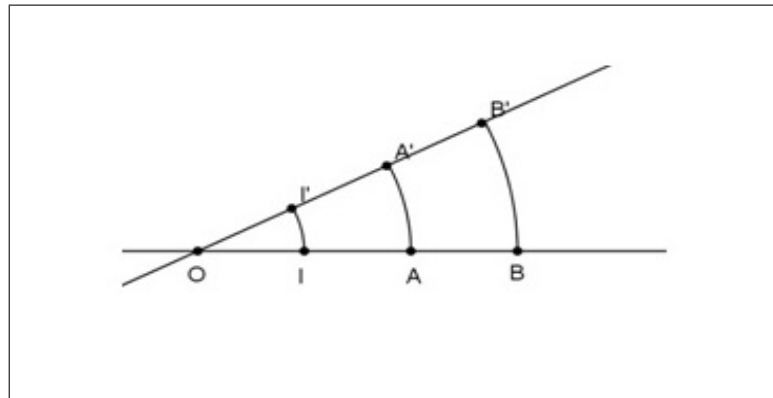


Figura 4.1 *imagem geométrica de 1, 2 e 3.*

Agora, com o auxílio de uma régua, tracemos um segmento IB' . Em seguida, façamos passar por A' uma reta l paralela ao segmento IB' , onde S é o ponto de interseção da reta l com a reta real, e analogamente tracemos por I' outra reta t paralela ao segmento IB' e/ou a reta l , onde R é o ponto de interseção da reta real (ver Figura 4.2).

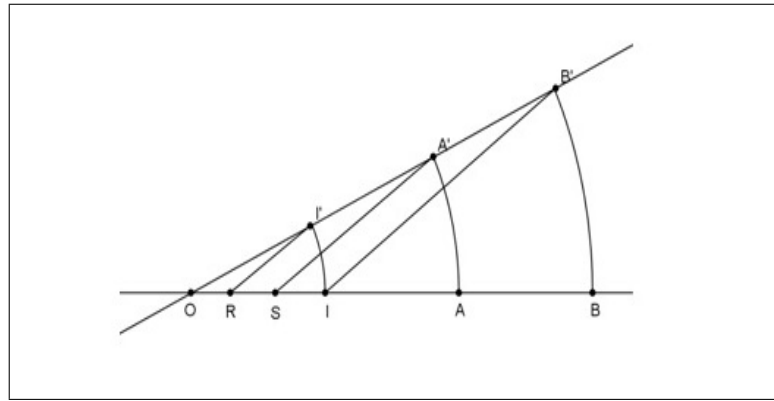


Figura 4.2 R é imagem geométrica de $\frac{1}{3}$.

R é a imagem geométrica de $\frac{1}{3}$, e o que nos garante essa afirmação é o que já é conhecido a respeito de semelhança de triângulos, como mostra a figura 4.3.

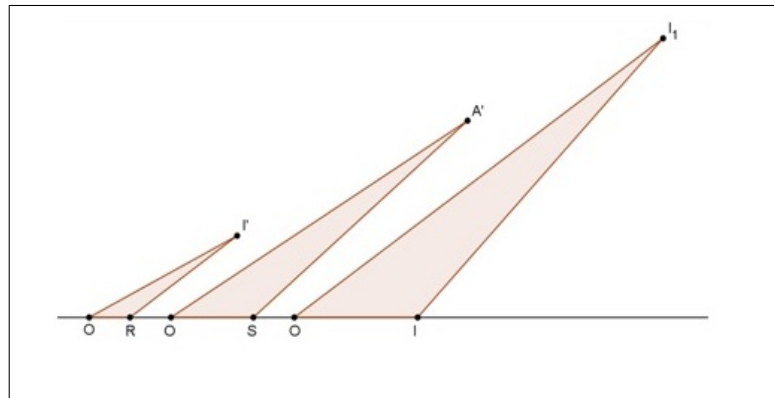


Figura 4.3 Representação da semelhança de triângulos.

Como foi dito anteriormente, os segmentos RI' , SA' , e IB' são paralelos, conseqüentemente os ângulos opostos a eles nos triângulos são iguais (α). E podemos observar que no triângulo II , foi adicionado uma unidade no segmento OI' do triângulo I , formando o segmento OA' , e em seguida no triângulo II , foi adicionado mais uma unidade, formando assim o segmento OB' do triângulo III . Por esses motivos concluímos que, a cada unidade acrescentada na reta r , uma nova reta paralela às demais já traçadas paralelamente ao segmento IB' será traçada, fazendo com que o segmento OI da reta real seja dividida pelo número de unidades acrescentadas a essa reta. Como no exemplo foi marcado $\frac{1}{3}$, poderão ser marcados $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, ou $\frac{1}{20}$. Dessa forma, segundo o mesmo procedimento dado, podendo ir marcando os pontos da forma $\frac{1}{n}$, com n tão grande quanto se queira.

Agora que já sabemos marcar os pontos na forma $\frac{1}{n}$ na reta real, nos resta saber como marcá-los na forma m/n , com $m, n \in \mathbb{N}$.

Primeiramente tracemos uma reta real \mathfrak{R} , e em seguida marquemos os pontos O (origem) e L ($0 < L$) como imagem geométrica de $\frac{1}{n}$. Aplicamos sucessivamente m vezes o processo elementar com raio OR , obtendo o ponto P , representação geométrica de $\frac{m}{n}$ (ver Figura 4.4 e Figura 4.5).

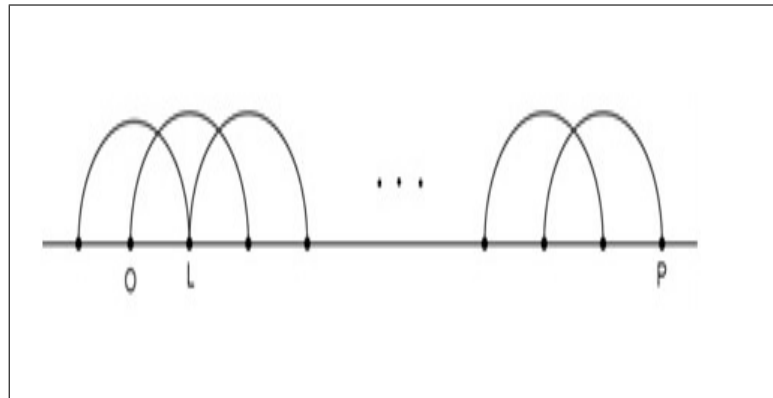


Figura 4.4 Imagem de P obtido a partir de n vezes o processo elementar.

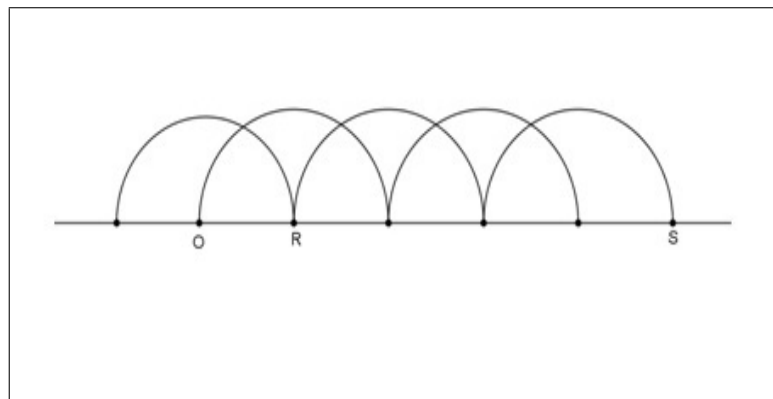


Figura 4.5 Construção do ponto S no sentido da esquerda para direita

Construindo inversamente temos:

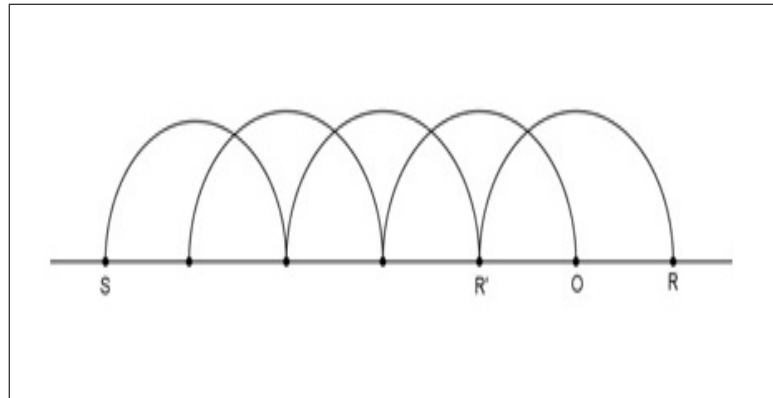


Figura 4.6 Construção do ponto S no sentido da direita para a esquerda

Observe que, caso m seja igual a zero ($m = 0$), a imagem geométrica de $\frac{m}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) é o ponto O .

Para obtermos construções geométricas correspondentes às operações algébricas em \mathbb{Q} , basta mostrar que:

$$\forall p, r \in \mathbb{Z}, \forall q, s \in \mathbb{N} \quad p/q + r/s = (p.s + r.q)/q.s$$

$$\forall p, r \in \mathbb{Z}, \forall q, s \in \mathbb{N} \quad p/q \cdot r/s = (p.r)/q.s$$

$$\forall p, r \in \mathbb{Z}, \forall q, s \in \mathbb{N} \quad (p/q) / (r/s) = p.s/q.r$$

Para obtermos, por exemplo, a imagem geométrica do ponto:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}$$

Basta considerar o natural $n = q.s$ e marcar seguidamente a imagem geométrica de m/n , onde $m = p.r$.

Depois de marcarmos os números naturais, em seguida os números inteiros, chegamos à marcação dos números racionais. Observe que, a cada construção dos conjuntos na reta real foram apresentadas as quatro operações (adição, subtração, multiplicação, e por último a divisão), todas de acordo com a necessidade de cada conjunto. Sendo que as mesmas gozam das seguintes propriedades (comutatividade, associatividade, distributividade, etc.). Com isso poderíamos pensar que chegamos ao nosso objetivo, ou seja, chegar a uma construção geométrica dos números reais e das operações entre elas.

No início deste capítulo, vimos que existe uma correspondência bi-jetiva (dada pela construção geométrica) entre os números e os pontos da reta real. Ora, se a cada número racional se corresponde a um, e só um

ponto X de \mathfrak{R} , falta verificar se, dado um $x \in \mathbb{R}$ existe um, e só um x racional cuja imagem geométrica seja x . Façamos agora, simultaneamente a utilização das propriedades dos números e da sua representação geométrica em um problema simples de medição:

4.1 Medição de um segmento OP .

Começemos a marcar na semi-reta positiva um ponto P :

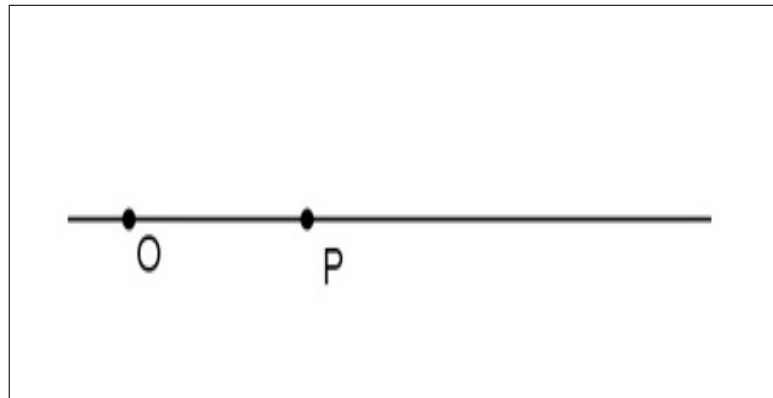


Figura 4.7 *Ponto P*

e procuremos medir o comprimento do segmento OP a "régua ideal":

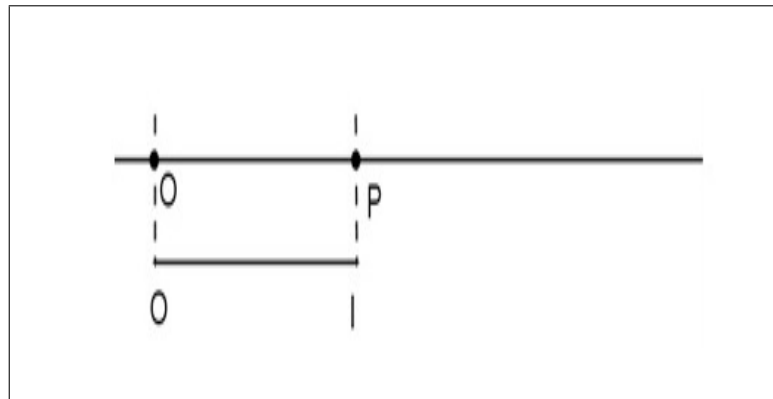


Figura 4.8 *Medida com régua do comprimento do ponto p*

Queremos medir o segmento utilizando uma régua, onde fazemos coincidir o ponto 0 da régua com o ponto O da reta real, e marquemos nesta o ponto I (já marcado anteriormente). Se $P < I$, então não será possível, com esta régua, determinar o comprimento OP . Se I coincidir com P , podemos dizer que o comprimento de OP é 1. Se $I < P$, então deslocamos a reta fazendo desta vez coincidir o ponto O da régua com o ponto I da reta mais uma vez, uma, e uma só das três situações.

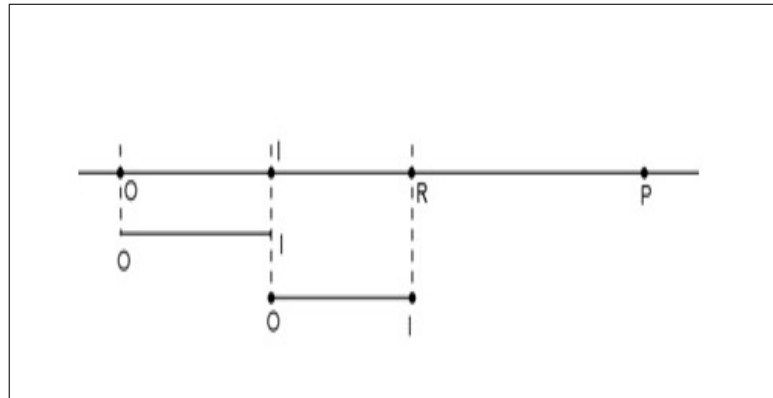


Figura 4.9 *Sucessivas medidas da unidade com régua*

- i) $P < R$, caso em que, com esta régua não podemos medir o comprimento do segmento OP ;
- ii) $P = R$, caso em que o comprimento de OP é 2 (utilizamos a régua duas vezes);
- iii) $P > R$, caso em que temos que repetir o processo, deslocando novamente a régua quantas vezes forem necessária.

Repetindo este processo podemos concluir que: a régua, após n utilizações faz coincidir o ponto I com o ponto P , ou tal não acontece, e ao fim de um determinado número de utilizações, o ponto I da régua ultrapassa o ponto P da reta real.

Neste caso podemos concluir que, com esta régua não é possível medir sempre um comprimento arbitrário OP . Com isso surgirão algumas dificuldades para fazer tal medição.

Para ultrapassarmos tais dificuldades, somos levados a dividir o segmento OI em um número cada vez maior de partes iguais. Se o dividirmos em 3 partes, podemos medir o comprimento do segmento OP , onde P é a imagem geométrica de $1/3$, mas não no caso em que P corresponde a $33/7$ da por exemplo, pois para este caso, não basta dividir o segmento em 3, 4, 5 ou 6 partes, mas se dividirmos em 7, já seria o suficiente para que fosse possível a medição. Basta fazermos 33 utilizações da sub-régua correspondente.

Sendo assim, podemos agora chegar a uma indagação:

Dado um ponto P na semi-reta positiva, existirá alguma divisão do

segmento OI em um número finito de partes iguais, tal que uma destas partes caiba um número finito de vezes no segmento OP ?

Seria a mesma coisa se fizéssemos a mesma pergunta mas de outra forma: Será que todo o ponto $X \in R$ é imagem geométrica de um número racional?

Podemos afirmar que não!

Mas para mostrar que essa afirmativa é verdadeira, vamos utilizar uma consequência do teorema de Pitágoras, para provar que realmente não existe nenhuma divisão do segmento OI em partes iguais, onde satisfaça a condição citada acima, ou seja, vamos mostrar que o comprimento OR pode ser descrito na forma m/n , com m, n sendo números naturais.

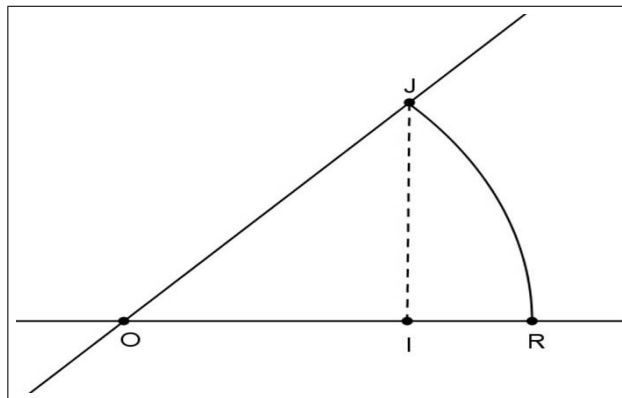


Figura 4.10 *Triângulo OIJ e o ponto R*

Ora, pelo triângulo descrito junto com a reta real, e pelo teorema de Pitágoras já sabemos que:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \quad (4.1)$$

Vamos provar que o segmento OR , ou seja, d não pode ser escrito na forma m/n , com m e n naturais.

Usaremos a demonstração por redução ao absurdo, supondo que pode ser escrito na forma m/n , com m e n naturais, e mais, supondo também, sem perda de generalidade que m e n são números não pares,

considerando que ambos sejam primos entre si, ou seja, não possuam fatores em comum.

Podemos escrever então a equação (4.1), da forma:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

da mesma forma podemos escrever como:

$$m^2 = 2n^2, \text{ com } m \text{ e } n \text{ não pares} \quad (4.2)$$

Sabemos que, o quadrado de um número ímpar é ainda um número ímpar, então temos que m terá que ser um natural par da forma $2k$, onde $m = 2k$. Portando temos que:

$$(2k)^2 = 2n^2$$

Segue que:

$$4k^2 = 2n^2$$

Onde resulta que,

$$n^2 = 2k^2$$

Dessa forma podemos afirmar que n^2 é par, e usando o mesmo argumento que foi usado para m , podemos dizer que n é um número par.

O que nos leva a uma contradição, pois no início nós supomos que m e n eram naturais não pares, e depois de usarmos algumas definições elementares concluimos que m e n são números naturais pares.

E o que concluimos com isso?

Podemos concluir que o comprimento do segmento OR na figura, o qual designamos por " d ", não é um número racional, ou seja, R não é imagem geométrica de um número racional.

4.2 Distribuição dos Números Racionais na Reta Real

É verificado que, dados dois pontos A e B distintos, com a $A < B$, existirá sempre uma infinidade de pontos $R \in \mathbb{Q}$ satisfazendo $A < R < B$ (ver Figura 4.11).

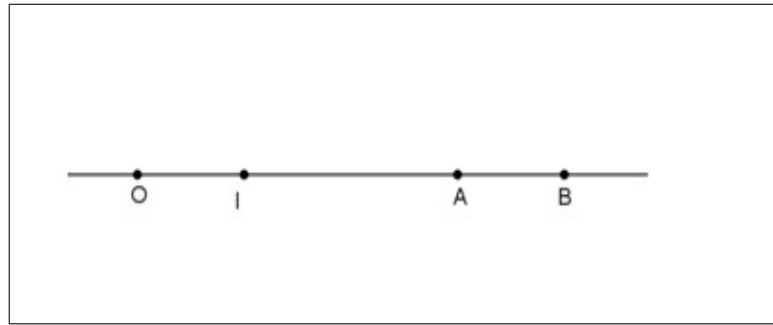


Figura 4.11 Pontos A e B na reta real

Verificam-se as seguintes Proposições:

Proposição 4.2.1. *Se $K \in \mathbb{R}^+$, então existe $R \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < R < K$.*

Demonstração 4.2.1. *Se $I = K$, tem-se, $R = I$.*

Se $K > I$, seja A a imagem geométrica de $\frac{1}{2}$. Aplicamos n vezes o processo elementar com raio OA , obtem-se o ponto R tal que $K < R$. Mas R é a imagem geométrica de $n \cdot \frac{1}{2}$, e portanto um racional (ver Figura 4.12)

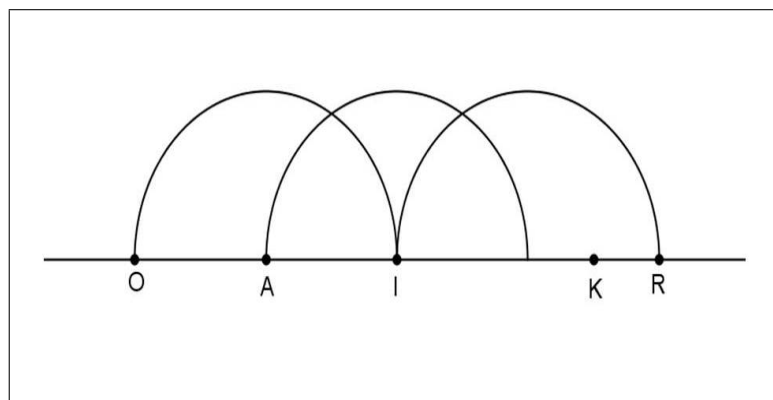


Figura 4.12 Os pontos K e P na reta real

Se $K < I$ dividimos o segmento OI em duas partes, três partes, e assim sucessivamente até n partes, obendo o ponto R , tal que $R < K$.

Como R é a imagem geométrica de $\frac{1}{n}$, temos que R é racional (ver Figura 4.13).

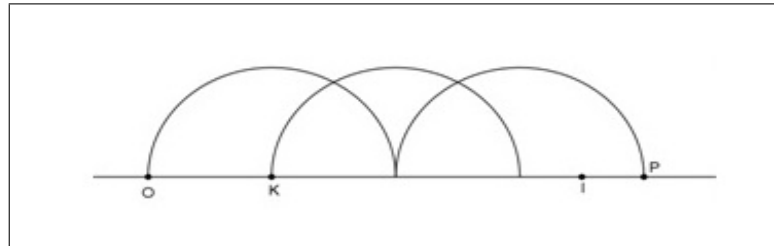


Figura 4.13 Imagem do ponto p

Proposição 4.2.2. *Sejam A e B dois pontos da semi-reta real positiva (com $A < B$). Existe $R \in \mathbb{Q}$ tal que $A < R < B$.*

Demonstração 4.2.2. *Fazendo uma translação do segmento AB , de modo que o ponto A coincida com a origem O , obtem-se o ponto K (translação do ponto B). Logo, pela proposição 4.2.1 obtem-se um racional S tal que $0 < S < K$. Fazendo agora a translação em sentido inverso, obtem-se o ponto racional R , tal que $A < R < B$ (ver Figura 4.14)*

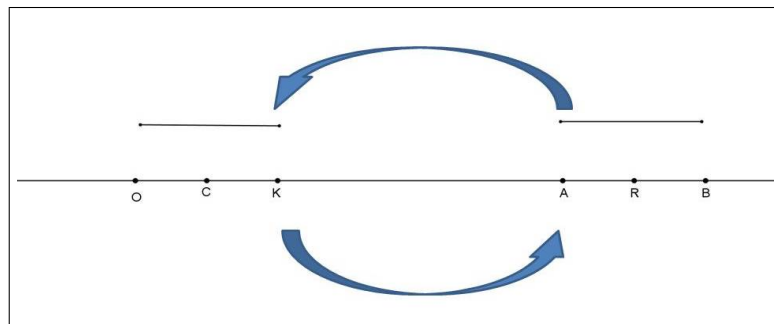


Figura 4.14 imagem geométrica de $A < R < B$

Proposição 4.2.3. *Sejam A e B dois pontos da reta real (com $A < B$), existe $R \in \mathbb{Q}$ tal que $A < R < B$.*

Demonstração 4.2.3. *Similar à proposição 4.2.2, usando o processo de translação.*

Proposição 4.2.4. *Sejam A e B dois pontos da reta real (com $A < B$), o conjunto $\{R \in \mathbb{Q} : A < R < B\}$ é infinito.*

Demonstração 4.2.4. *Consideremos dois pontos P e Q do intervalo (A, B) , com $Q > P$. Suponhamos que não exista nenhum ponto entre P e Q , ou seja, Q é sucessor de P em \mathbb{Q} , logo $\nexists x \in \mathbb{Q} / P < x < Q$. O que é contraditório pela (proposição 4.2.3). Portanto se entre P e Q existem A e B também existem infinitos pontos, logo $\{R \in \mathbb{Q} : A < R < B\}$ é infinito.*

Capítulo 5

DISTRIBUIÇÃO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS NA RETA REAL

Para se obter um número irracional Y , podemos utilizar o processo elementar $(m - 1)$ vezes, com m natural maior que 1, e designaremos por $m.Y$ o número real obtido.

Considerando W um número irracional, e n um número natural, podemos agora definir W/n , utilizando o mesmo processo que foi usado para introduzir a imagem geométrica de $\frac{1}{n}$.

A figura abaixo nos permite entender melhor o processo de construção de W/n , e evidencia que, se $X = \frac{W}{n}$, então $n.X = W$.

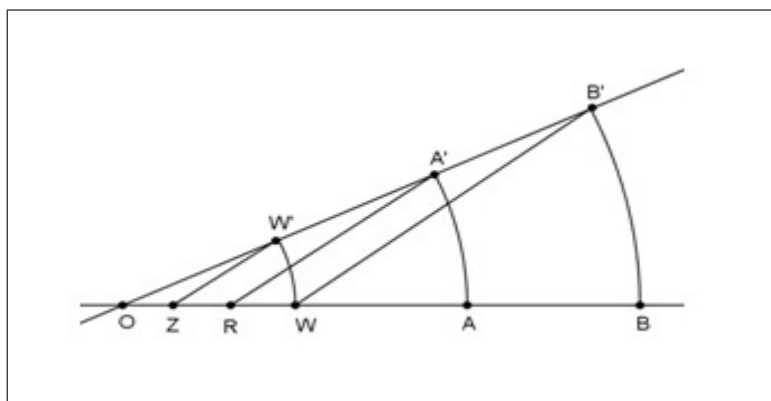


Figura 5.1 *imagem de $X = \frac{W}{n}$*

Assim, sendo X um número irracional e, $m, n \in \mathbb{N}$, se:

$$\frac{mX}{n} = L$$

Equivale dizer que,

$$mX = nL$$

e finalmente,

$$X = \frac{n}{m}L.$$

A partir daqui, estamos em condições de provar a seguinte proposição:

Proposição 5.0.5. *Se X é um número irracional, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, então $\frac{mX}{n}$ é um número irracional.*

Demonstração 5.0.5. *Façamos a demonstração por redução ao absurdo. Considerando m e n números naturais, e suponhamos que,*

$$\frac{mX}{n}$$

É um número racional, o qual designaremos por L . temos então:

$$\frac{mX}{n} = L$$

Logo,

$$X = \frac{n}{m}L.$$

O que sabemos que é absurdo, pois L foi definido como pertencente ao conjunto dos Racionais ($L \in \mathbb{Q}$), temos que $\frac{n}{m}L \in \mathbb{Q}$, o que contradiz o fato de X ser irracional.

Conclui-se que, basta encontrarmos um número Irracional X , podemos então provar que o conjunto de todos os números formados por ele é infinito. Logo, podemos afirmar que todos os números da forma:

$$\frac{X}{n}$$

são irracionais.

Ora, nós já conhecemos um número irracional, o $\sqrt{2}$ podemos então, a partir daqui, provar para os irracionais, uma proposição análoga àquela que mostrava que os racionais estavam muito bem distribuídos na reta (Proposição 4.2.4).

Proposição 5.0.6. *Se A e B (com $A < B$) são dois pontos da reta real, então existe uma infinidade de pontos $R \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tais que $A < R < B$.*

Demonstração 5.0.6. *Antes de demonstrar essa proposição, podemos voltar um pouco, e observar que a proposição 4.2.4 foi obtida através dos resultados das proposições anteriores, (proposição 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3), onde os resultados foram apresentados de forma mais geral. Portanto, a proposição 5.0.2 pode ser feita com algumas ideias análogas às proposições anteriores. Porém, as proposições 4.2.2, 4.2.3 e 4.2.4 continuaram da mesma forma e válidas, e a proposição 4.2.1 será provada com algumas considerações suplementares, a qual veremos a seguir. Sabemos que a escolha de I na reta real foi arbitrária, portanto, se tivéssemos escolhido para imagem geométrica da unicidade, o ponto $\sqrt{2}$, a proposição 4.2.1 continuaria verdadeira. Vejamos então, como fica a proposição 4.2.1 com esta nova escolha:*

- Se $C \in \mathbb{R}^+$, existe um R da forma $\frac{m\sqrt{2}}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$), tal que $0 < R < C$. Mas pela proposição 5.0.1, sabemos que R é irracional.

Capítulo 6

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA E PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES ALGÉBRICAS EM \mathfrak{R}

Até a construção do conjunto dos números racionais Q , foram definidas as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Agora pretendemos defini-las em R .

Para que as definições das operações algébricas em R sejam definidas, é necessário que satisfaça algumas condições, e iremos citar cada uma fazendo referências somente a adição, mas elas são válidas para as outras operações.

- 1- Devemos saber adicionar dois elementos de R ;
- 2- Se os dois elementos a serem adicionados pertencem a Q , então a nova adição deve dar o mesmo resultado que obtínhamos anteriormente em Q ;
- 3- Esta nova adição em R deve satisfazer, se possível, a todas as propriedades que eram verdadeiras em Q .

Como foi dito, essas condições foram citadas somente para a adição, mas servem para as outras operações.

Iremos apresentar agora, as construções geométricas que definem as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão em \mathfrak{R} , as ilustraremos por figuras, e em seguida será descrita o modo como foram obtidas. Para cada construção escolhida, apresentaremos também o argumento que esteve na origem, e que motivou tais construções.

Observação 6.0.1. *Ao apresentarmos as construções, não haverá necessidade de demonstração, pois se tratam de definições.*

Para as construções, usaremos resultados geométricos já conhecidos, em operações sobre adição e subtração, usaremos igualdade de triângulos, e para as operações sobre multiplicação e divisão usaremos semelhança de triângulos.

Nas figuras que utilizaremos para ilustrar cada uma das construções, estará sempre presente uma reta, a qual será a imagem geométrica da reta real, uma representação grosseira da mesma. E nesta reta estarão marcados os pontos 0 e I já conhecidos, e também os pontos X e Y , os quais utilizaremos para aplicar as operações a serem construídas (adição, subtração, multiplicação e divisão). E utilizaremos como imagem geométrica do resultado de cada operação construída, o ponto Z .

Em todas as figuras, além da reta real, foi escolhido também um ponto P não pertencente a R , que determina com o ponto 0 , uma reta que designaremos por r , conforme a figura abaixo:

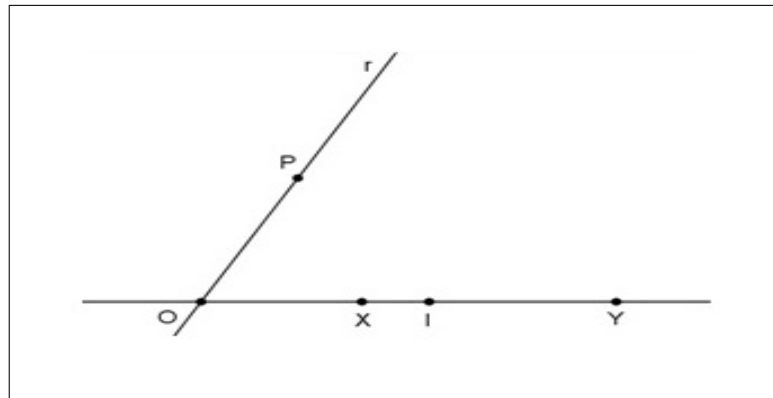


Figura 6.1 *Reta real e reta r*

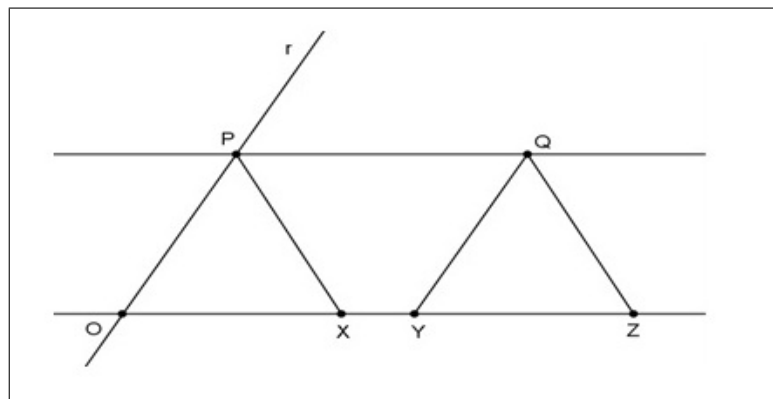
Esta figura, será a qual utilizaremos para definir através dela, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

6.1 Adição

Começemos então, ilustrando com uma figura a adição de X com Y , e designaremos por Z , isto é, $Z = X + Y$.

6.1.1 Passo a passo de como foi obtido Z

- (1) Faça-se passar por P uma reta paralela à reta real.
- (2) Trace-se o segmento de reta XP .
- (3) Faça-se passar por Y uma reta paralela à reta determinada por OP e designe-se por Q o ponto de intersecção desta reta com a reta referida em (1).
- (4) Faça-se passar por Q uma reta paralela à reta determinada por XP em (2).
- (5) Designe-se por Z o ponto de intersecção da reta referida em (4) com a reta real.

Figura 6.2 *imagem geométrica da adição de $X + Y$*

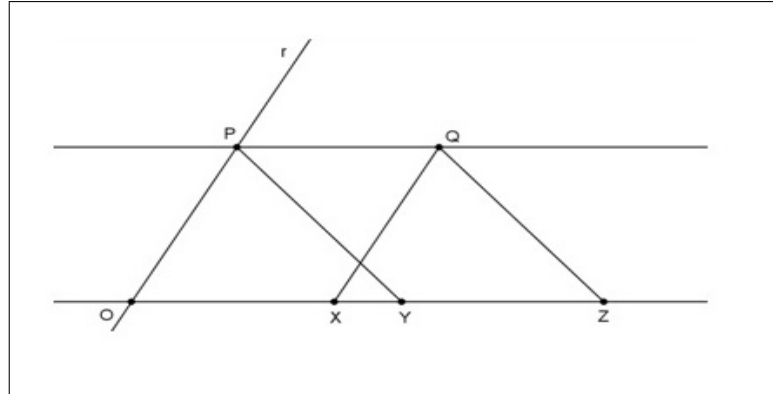
Observe na figura 6.2 que $OY \equiv OQ$ e $OQ \equiv XZ$, como $OZ = OX + OZ$, temos que $OZ = OX + OY$ ou $Z = X + Y$.

Se observarmos, quando foi traçado o segmento XP , poderia ter sido traçado primeiro o segmento YP . Portanto, é indiferente que se comece por marcar tanto o segmento XP , como o segmento YP , pois o ponto Z obtido após as operações de adição seria o mesmo.

Façamos então a construção da segunda maneira citada, a qual apresentará a propriedade da comutatividade da Adição.

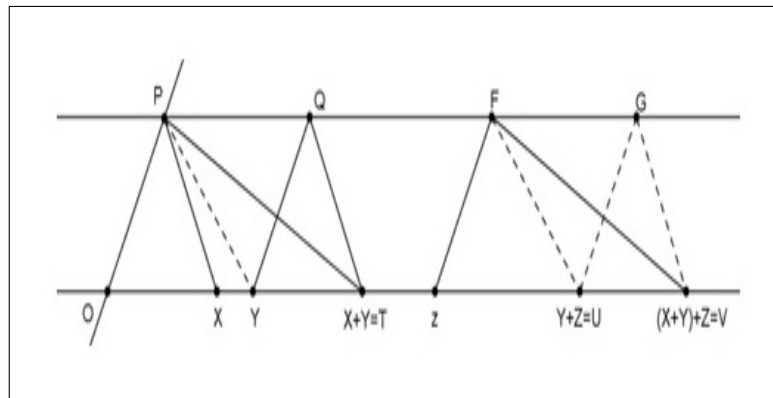
6.1.2 Propriedades da Adição

P1. Comutatividade:

Figura 6.3 Imagem geométrica de $Y + X$

Concluimos após ilustração de $X + Y$ que a propriedade da comutatividade é válida para a adição, ou seja, $Y + X = X + Y$ (ver Figura 6.3).

P2 - Associatividade: Para quaisquer X, Y e $Z \in R$, temos que $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ (ver Figura 6.4)

Figura 6.4 imagem geométrica de $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ **P3 - Existência de um elemento Neutro:**

Para quaisquer $X, Y \in R$, existe um elemento neutro O , tal que $Y + O = Y$ (Ver Figura 6.5) .

6.1.3 Argumento que motivou a construção:

Podemos notar que os triângulos ΔOPQ e ΔYQZ são iguais, e que os segmentos (lados) OP e YQ , e também XP e ZQ são iguais. E mais,

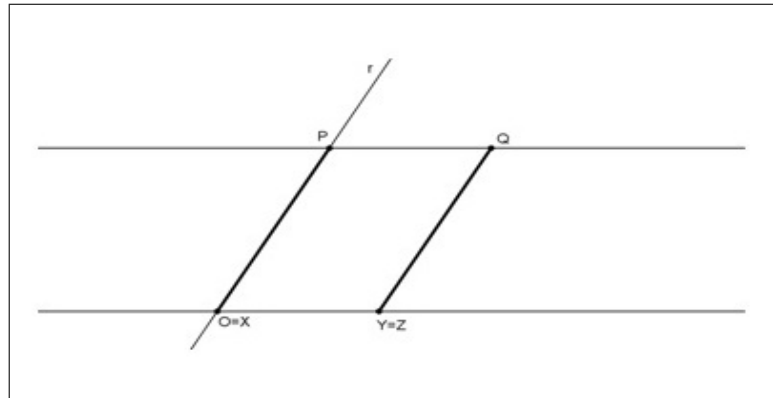


Figura 6.5 *imagem geométrica de $Z = Y + 0$*

os ângulos \widehat{OPX} , e \widehat{YQZ} também são iguais. Portanto podemos concluir que os dois triângulos representados tanto na (figura 6.2) quanto na (figura 6.3) são iguais.

Observação 6.1.1. *Como estamos definindo as operações em \mathcal{R} , façamos então a ilustração dos seguintes exemplos abaixo:*

6.1.4 Alguns casos particulares da adição:

(i) $X \in \mathcal{R}^-$ e $Y \in \mathcal{R}^-$;

1) $Z = X + Y$. Da figura 6.6 vemos que $Z \in \mathcal{R}^-$

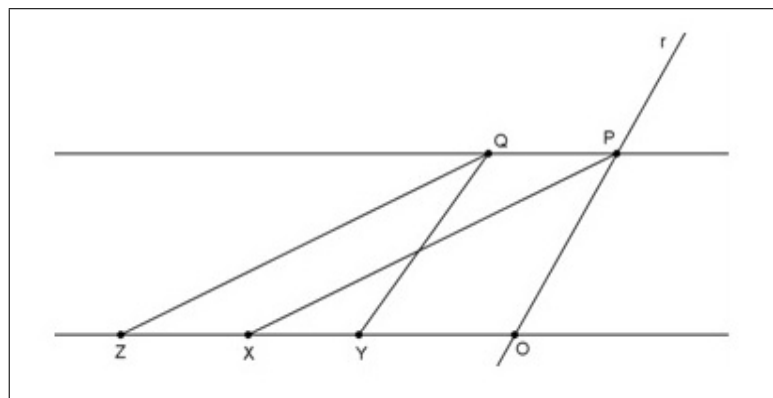


Figura 6.6 *imagem geométrica de $Z = X + Y$*

2) $Z = Y + X$. Da figura 6.7 vemos que $Z \in \mathfrak{R}^-$ e que $X + Y = Y + X$.

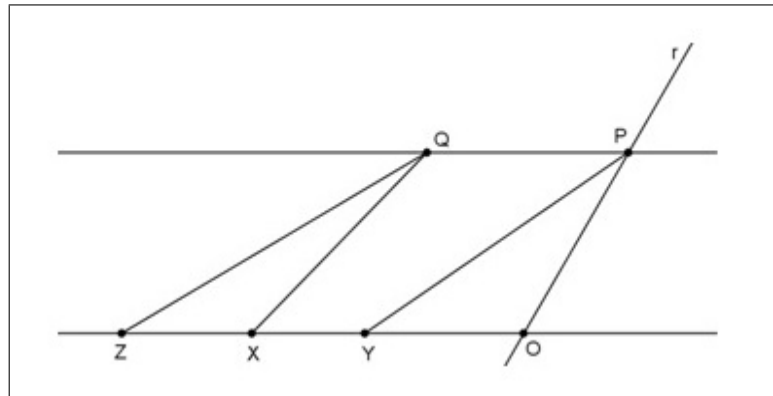


Figura 6.7 *imagem geométrica de $Z = Y + X$*

(ii) $X \in \mathfrak{R}^-$ e $Y \in \mathfrak{R}^+$, com $Y > X$

1) $Z = X + Y$. Da figura 6.8, observa-se que $Z \in \mathfrak{R}^+$.

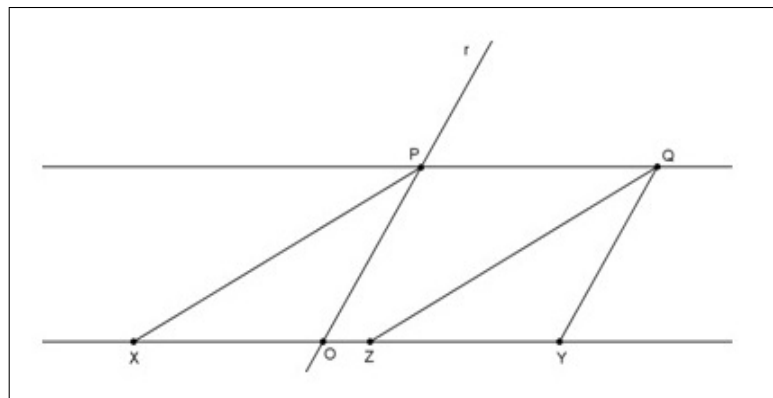


Figura 6.8 *imagem geométrica de $Z = X + Y$*

2) $Z = Y + X$. Da figura 6.9, observa-se que $Z \in \mathfrak{R}^+$ e que $X + Y = Y + X$.

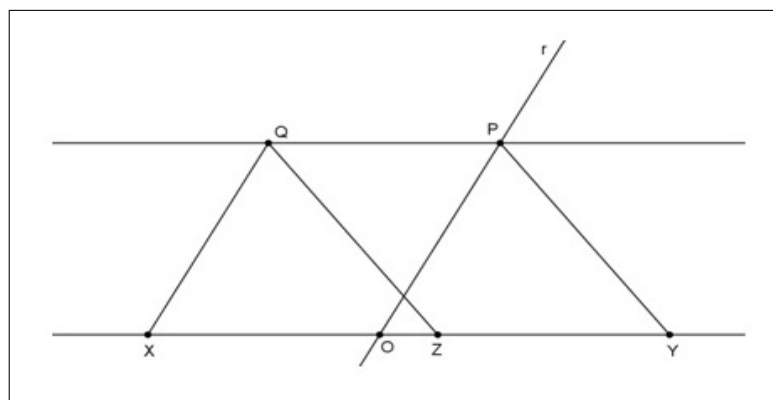


Figura 6.9 *imagem geométrica de $Z = Y + X$*

(iii) $X = 0$ e $Y \in \mathfrak{R}^+$

1) $Z = X + Y$. Da figura 6.10 observa-se que $Z = X + Y = Y$.

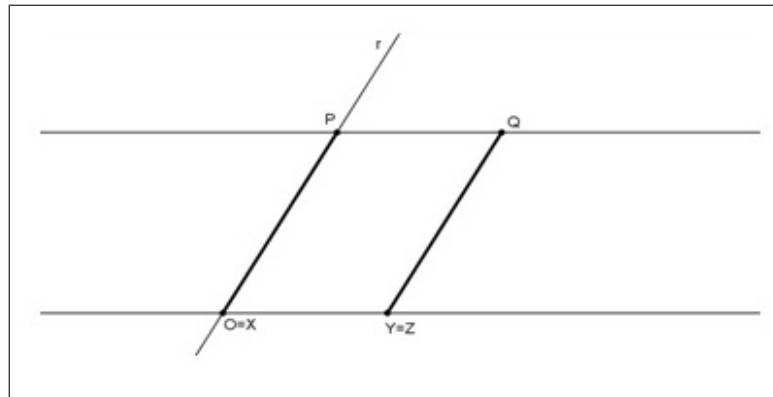


Figura 6.10 *imagem geométrica de $Z = X + Y$*

2) $Z = Y + X$. Da figura 6.11 observa-se que $Z = Y + X = Y$, e portanto $X + Y = Y + X$

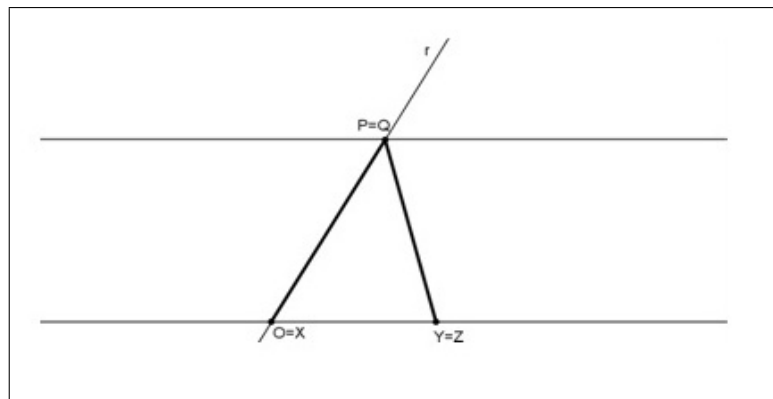


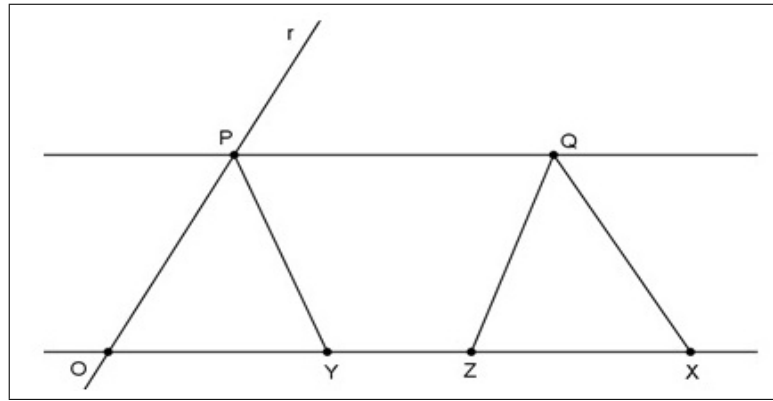
Figura 6.11 *imagem geométrica de $Z = Y + X$*

6.2 Subtração

Analogamente à adição, utilizemos uma figura para a subtração de X por Y , e designemos por Z a diferença entre X e Y , isto é, $Z = X - Y$ (ver figura 6.12).

6.2.1 Passo a passo do modo como foi obtido Z

- 1) Faça-se passar por P uma reta paralela à reta real.
- 2) Trace-se o segmento de reta YP (note-se que se escolheu YP e não XP).

Figura 6.12 Subtração de X por Y

- 3) Faça-se passar por X uma reta paralela à reta determinada por YP e designe-se por Q o ponto de intersecção desta reta com a reta referida em (1).
- 4) Faça-se passar por Q uma reta paralela à reta determinada por OP .
- 5) Designe-se por Z o ponto de intersecção da reta referida em (4) com a reta real.

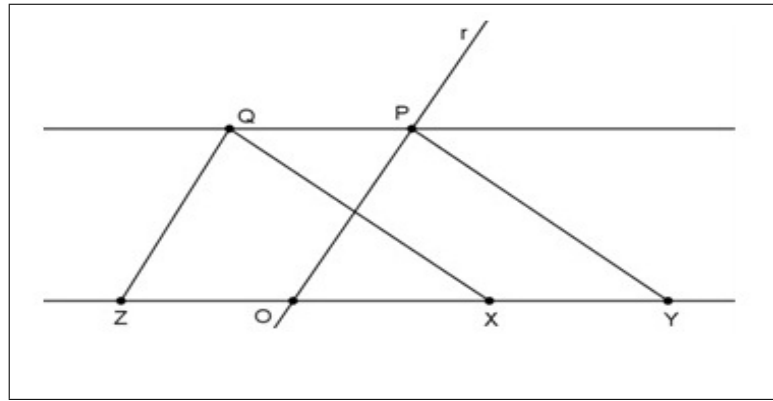
6.2.2 Argumento que motivou a construção:

Podemos notar na figura 6.12 que os triângulos $\triangle OPY$ e $\triangle ZQX$ são iguais, e conseqüentemente temos que o segmento OY é igual ao segmento ZX .

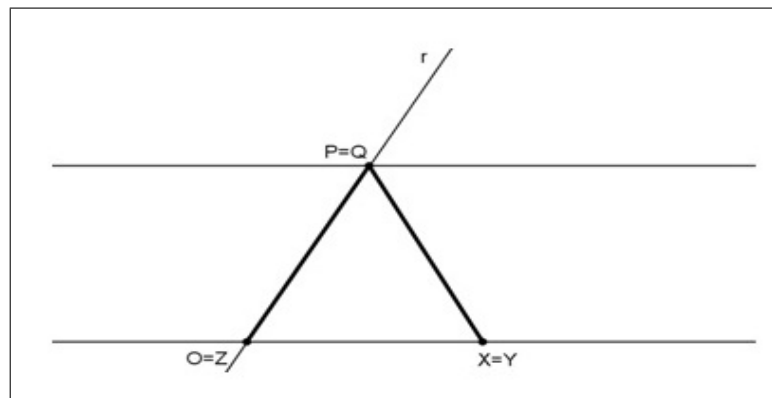
E podemos observar que, no caso da subtração não se pode afirmar que no passo (2), a escolha de X ou de Y seja indiferente, pois, diferente da adição, a subtração não é comutativa.

6.2.3 Alguns casos particulares da subtração:

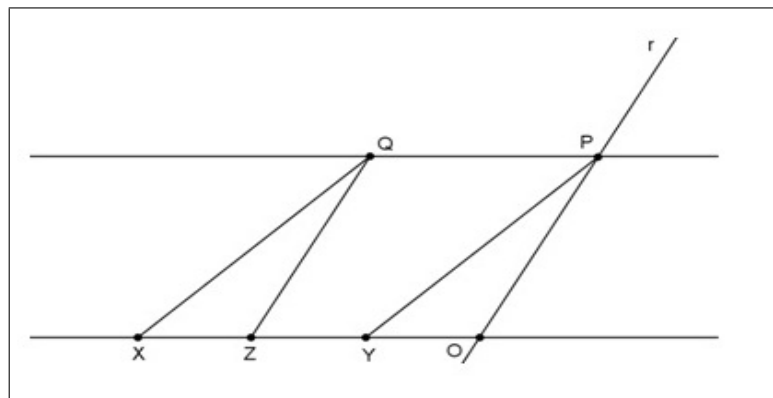
- 1) $X, Y \in \mathfrak{R}^+$ e $X \prec Y$. Da figura 6.13, observa-se que $Z = X - Y \in \mathfrak{R}^-$

Figura 6.13 Subtração de X por Y , com $X < Y$

II) $X, Y \in \mathfrak{R}^+$ e $X = Y$. Da figura 6.14, observa-se que $Z = X - Y = 0$

Figura 6.14 Subtração de X por Y

III) $X, Y \in \mathfrak{R}^-$ e $X \prec Y$. Da figura 6.15, observa-se que $Z = X - Y \in \mathfrak{R}^-$

Figura 6.15 Subtração de X por Y , com X e Y negativos

IV) $X \in \mathfrak{R}^-$ e $Y \in \mathfrak{R}^+$. Da figura 6.16, observa-se que $Z = X - Y \in \mathfrak{R}^-$ e $Z \prec X$.

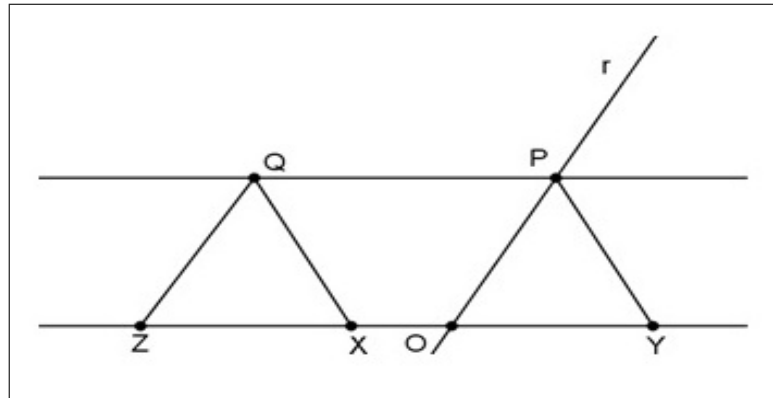


Figura 6.16 de X por Y , com X negativo e Y positivo

Vamos mostrar agora que, para quaisquer X e $Y \in \mathfrak{R}$, $Z = X - Y$ se, e somente se, $X = Z + Y$. Como vimos: em $X - Y$:

(i) $Z = X - Y$. Ver figura 6.17.

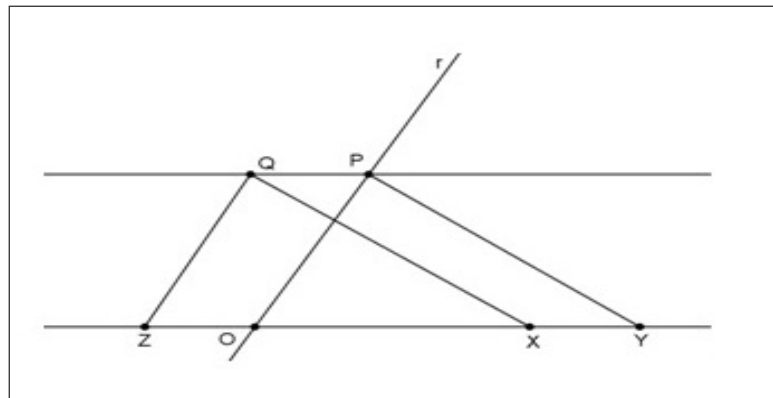


Figura 6.17 imagem de $Z = X - Y$

Portanto vejamos agora o resultado de $X = Z + Y$.

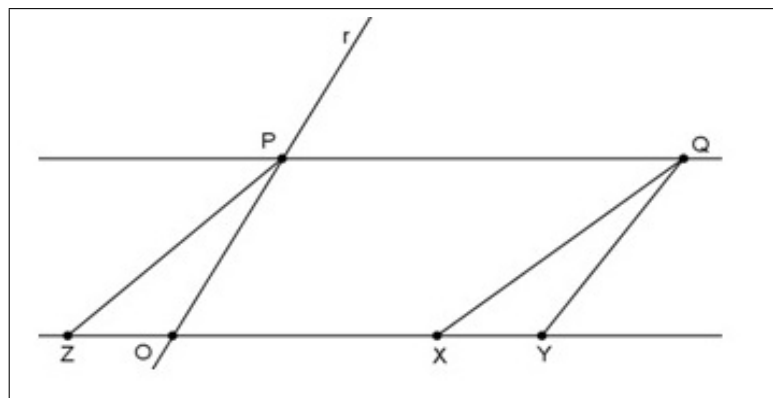


Figura 6.18 imagem de $X = Z + Y$

Das figuras 6.17 e 6.18, observa-se que os dois procedimentos são equivalentes.

6.3 Multiplicação:

Mais uma vez comecemos ilustrando com uma figura a multiplicação de X por Y , onde designemos por Z o produto de X e Y , isto é, $Z = X * Y$.

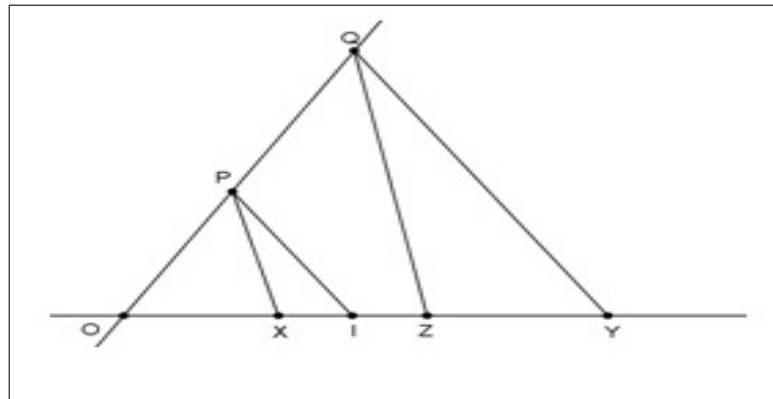


Figura 6.19 multiplicação de X por Y

6.3.1 Passo a passo de como obtido z :

- (1) Trace-se os segmentos de reta XP e IP .
- (2) Faça-se passar por Y uma reta paralela à reta determinada por IP , e designe-se por Q o ponto de intersecção desta reta com a reta determinada por OP .
- (3) Faça-se passar por Q uma reta paralela à reta determinada por XP .
- (4) Designe-se por Z o ponto de intersecção da reta referida em (3) com a reta real. (ver figura 6.19)

6.3.2 Argumento que motivou a construção

Lembremos que, no início deste capítulo foi dito que para representarmos geometricamente as operações de adição e subtração, utilizaríamos algumas definições já conhecidas a cerca de triângulos. Portanto, notemos

que os triângulos ΔPOX e ΔOQZ são semelhantes, onde vale as relações entre os segmentos:

$$\frac{OX}{OZ} = \frac{OP}{OQ}$$

E também vale as relações entre os segmentos dos triângulos ΔOPI e ΔOQY , pois também são semelhantes;

$$\frac{OI}{OY} = \frac{OP}{OQ}$$

Onde temos:

$$\frac{OX}{OZ} = \frac{OI}{OY}$$

Donde,

$$OX.OY = OZ.OI$$

Portanto, podemos interpretar como:

$$X.Y = Z$$

Observação 6.3.1. *Anteriormente vimos no "passo a passo" da descrição do modo como foi marcado o ponto Z , que na adição, quando foi traçado primeiramente o segmento XP , a escolha é indiferente, pois a adição goza da propriedade da comutação. E vimos também que na subtração a escolha não é indiferente, pois a mesma não goza da propriedade da comutação. Mas novamente temos uma situação análoga à adição, pois tanto faz escolhermos primeiramente o segmento XP ou o segmento YP .*

6.3.3 Propriedades da Multiplicação:

P1 - Comutatividade da Multiplicação:

- 1) $X * Y$, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{R}$

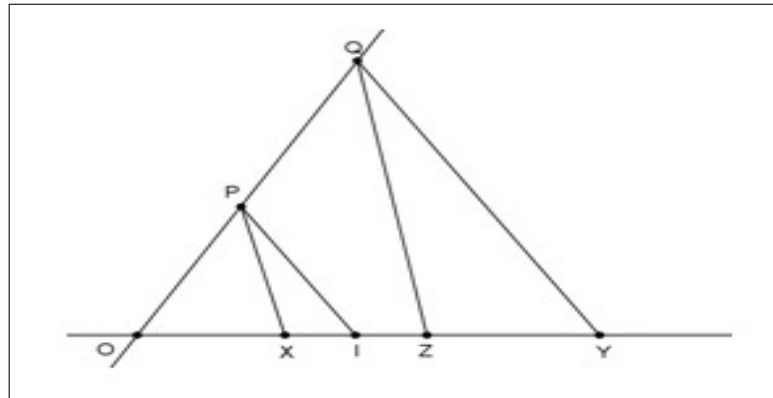


Figura 6.20 *imagem de $Z = X.Y$*

2) Y , para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{R}$.

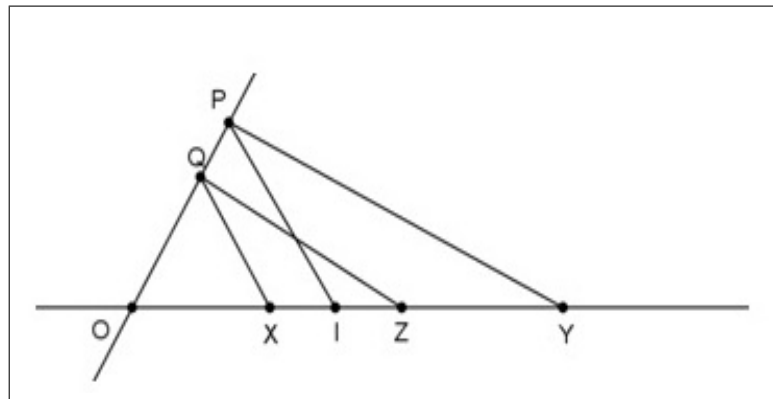


Figura 6.21 *imagem de $Z = Y.X$*

Das figuras 6.20 e 6.21, observa-se que $X * Y = Y * X$

P2- Associatividade:

1) $\forall X, Y \in \mathfrak{R}, \quad X * (Y * Z) = (X * Y) * Z$

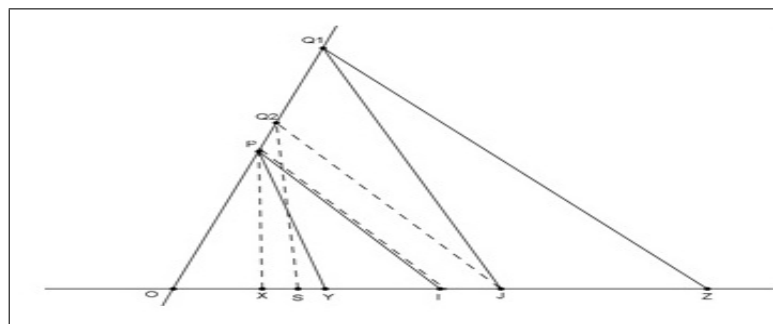


Figura 6.22 *Imagem de $X.(Y.Z) = S = (X.Y).Z$*

P3 - Distributividade:

$$I) \forall X, Y \in \mathfrak{R} * X * (Y + Z) = X * Y + X * Z$$

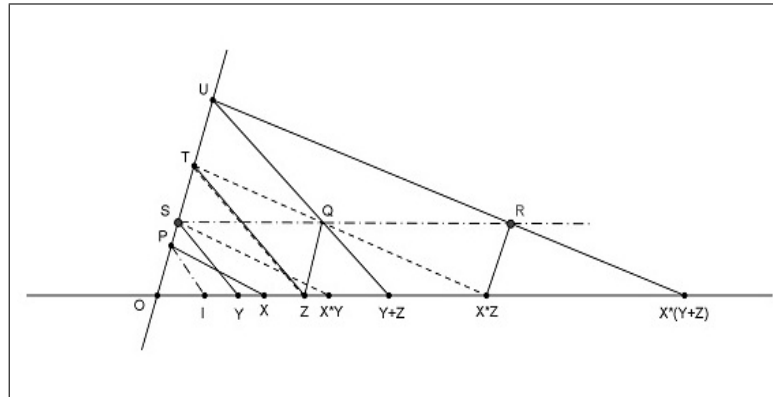


Figura 6.23 *Imagem geométrica de $X * (Y + Z)$ marcado a traços contínuos, e a tracejados a imagem geométrica de $X * Y + X * Z$.*

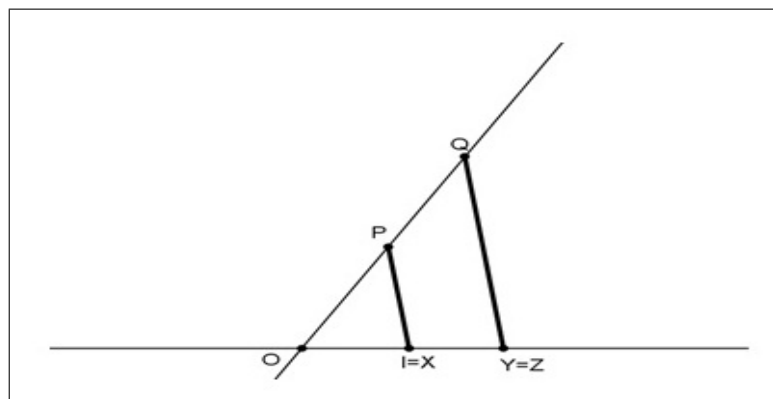
P4 - Existência do Elemento Neutro:

Figura 6.24 *imagem de $Z = X.Y$, com $X = I$*

Portanto, vimos nas figuras (6.20) e (6.21) que é verdadeira a afirmativa de que a comutatividade vale para a multiplicação, pois em $X.Y$ e $Y.X$ o resultado Z é o mesmo.

Vejamos agora alguns casos particulares da multiplicação.

$$I) X \in \mathfrak{R}^- \text{ e } Y \in \mathfrak{R}^-$$

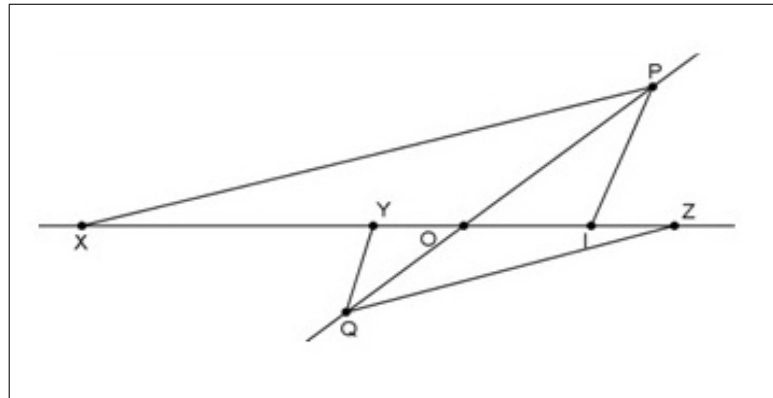


Figura 6.25 *imagem geométrica de $Z = X.Y$, com X e Y negativos*

II) $X \in \mathbb{R}^-$ e $Y \in \mathbb{R}^+$.

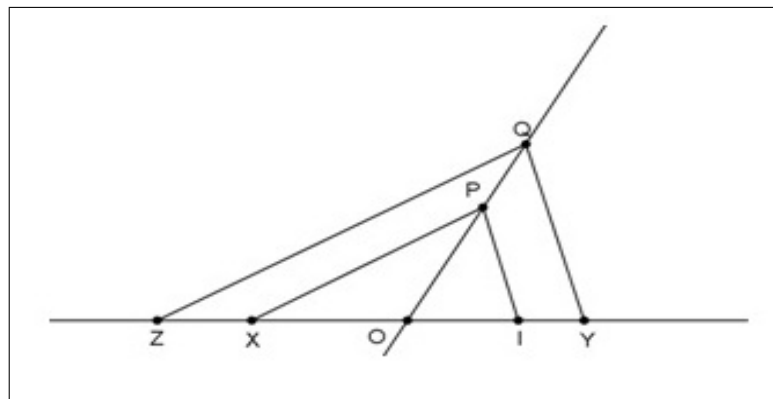


Figura 6.26 *imagem geométrica de $Z = X.Y$, com X negativo e Y positivo*

III) $X = 0$ e $Y \in \mathbb{R}^+$

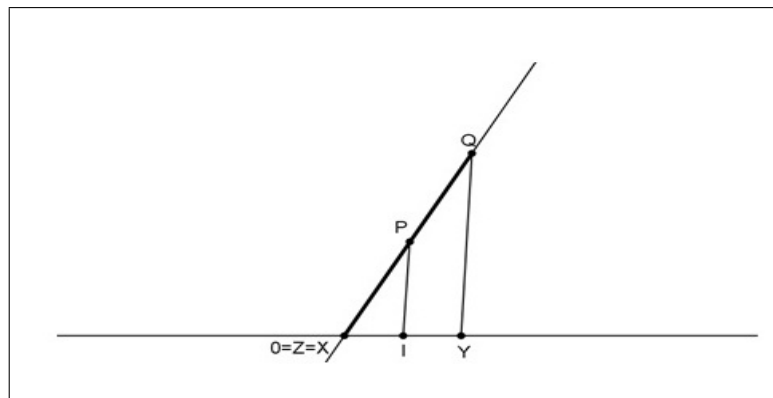
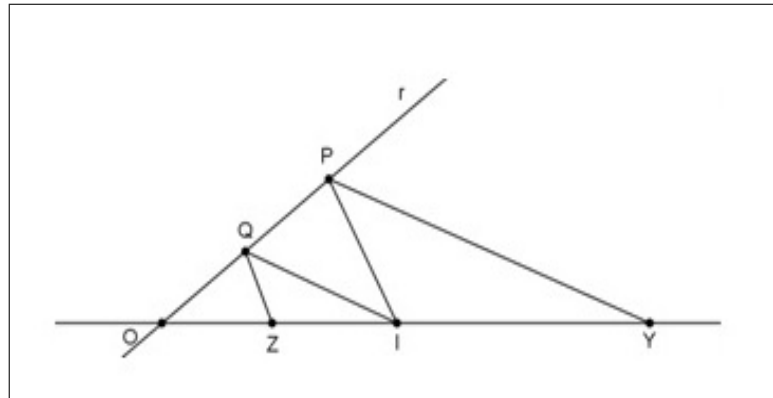


Figura 6.27 *imagem geométrica de $Z = X.Y$, com $X = 0$*

6.4 Divisão

Ilustraremos com uma figura a divisão de I por $Y \neq 0$, designado por $Z = (Z = \frac{I}{y})$.

Figura 6.28 *divisão de I por Y***6.4.1 Passo a passo de como foi obtido Z :**

- (1) Trace-se os segmentos de reta YP e IP .
- (2) Faça-se passar por I uma reta paralela à reta determinada por YP e designe-se por Q o ponto de intersecção desta reta com a reta determinada por OP .
- (3) Faça-se passar por Q uma reta paralela à reta determinada por IP .
- (4) Designe-se por Z o ponto de intersecção da recta referida em (3) com a reta real.

6.4.2 Argumento que motivou a construção:

Podemos notar na figura (6.28) que os triângulos ΔOQZ e ΔOPI são semelhantes, pelo, que

$$\frac{OZ}{OI} = \frac{OQ}{OP}$$

E os triângulos ΔOQI e ΔPYI são semelhantes, pelo que

$$\frac{OI}{OY} = \frac{OQ}{OP}$$

Assim

$$\frac{OZ}{OI} = \frac{OI}{OY}$$

Podemos interpretar com isso que $Z = \frac{I}{y}$.

Vejam como representar $\frac{1}{y}$ nos casos em que

I) $0 < y < I$

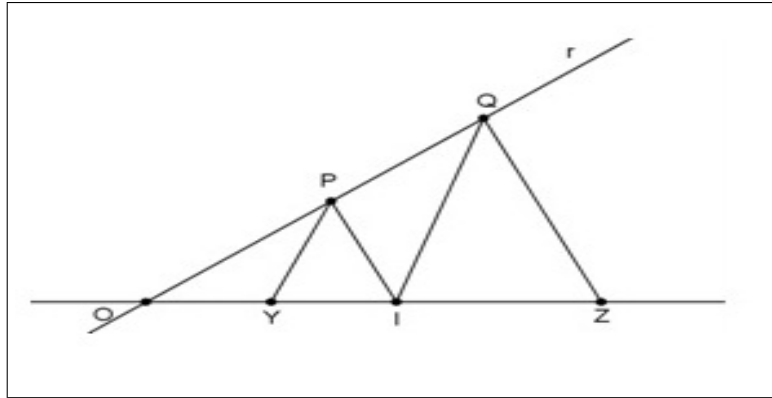


Figura 6.29 imagem da divisão de $Z = \frac{1}{Y}$, com $0 < Y < I$

II) $y \in \mathfrak{R}^-$

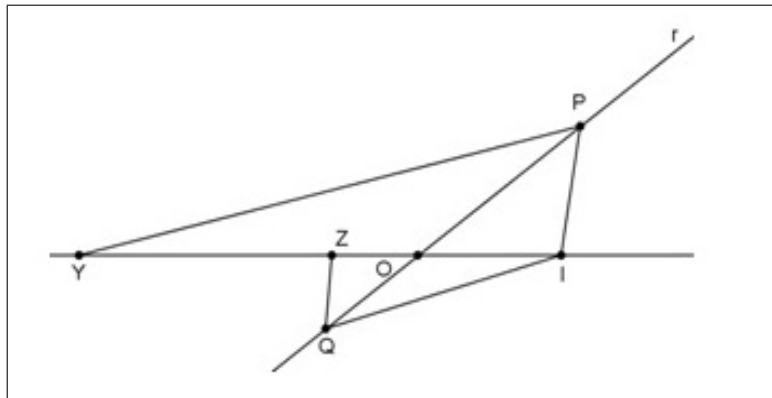


Figura 6.30 imagem de $Z = \frac{1}{Y}$, com $Y \in \mathfrak{R}^-$

Concluindo, portanto, a representação geométrica das quatro operações básicas do conjunto dos números reais, e conseqüentemente concluindo a construção de tal conjunto.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dadas as definições das operações básicas do conjunto dos números Reais \mathfrak{R} , chegamos então a algumas conclusões, nas quais nos deixam um pouco mais clara a ideia que tínhamos a cerca de definições, representações, propriedades, e características de tal conjunto.

Podemos concluir então, que geometricamente os números reais são todos os pontos que podem ser representados na reta real, seja ele Racional, Irracional ou zero. O que podemos nos perguntar é o seguinte: Como posso representar um número Irracional? Já que anteriormente construímos passo a passo como representar um número racional, seja ele Natural, seja ele Inteiro, ou Racional.

Como foi mostrado, o número $\sqrt{2}$ é um número Irracional, pois o mesmo não pode ser representado na Forma $\frac{m}{n}$, com m e n sendo números naturais. Logo, vale dizer que um número Irracional pode ser representado na forma $r.\sqrt{2}$, onde r é um número racional diferente de zero ($\mathfrak{R} \in Q \setminus \{0\}$). Mas podemos deixar essa representão de forma um pouco mais geral. Ora, se $\sqrt{2}$ é um número irracional, podemos perceber, por intuição, que o mesmo não é de fato um elemento pertencente ao conjunto Q , porque o número 2 não é um quadrado perfeito, pois se assim fosse, o mesmo seria chamado de número Racional.

Consequentemente podemos considerar p um número natural qualquer. Logo, podemos representar um número irracional na forma $r.\sqrt{p}$, onde $r \in Q \setminus \{0\}$, e p não é um não quadrado perfeito. E como demonstrar essa afirmação?

Ora, se p é um irracional positivo, então \sqrt{p} também é um irracional. Com efeito, se \sqrt{p} é um irracional, ele pode ser escrito na forma:

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n}, \text{ com } m, n \in N$$

Assim teríamos

$$p = \frac{m^2}{n^2}$$

O que é absurdo, pois p seria racional.

Portanto, de forma mais geral, o conjunto dos números reais é a união de todos os pontos Racionais, Irracionais, na reta real, ou seja, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

As operações básicas da adição, subtração, multiplicação e divisão apresentadas nesta monografia, podem ser aplicadas no ensino dos números, sejam eles, naturais inteiros, racionais ou irracionais. Tem-se uma abordagem geométrica para fixar os conceitos das quatro operações nos alunos do ensino fundamental e médio. As propriedades como comutatividade, associatividade, podem ser apresentadas de forma prática com esta abordagem geométrica.

BIBLIOGRAFIA

- [1] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de Matemática Elementar Volume 1*. São Paulo-SP: Atual Editora LTDA - 7ª edição, 1993, consulta sobre conjuntos numéricos e suas propriedades.
- [2] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de Matemática Elementar Volume 9*. São Paulo-SP: Atual Editora LTDA - 7ª edição, 1993, consulta sobre Semelhança e congruência de triângulos.
- [3] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática Volume Único*. São Paulo-SP: Editora Ática - 1ª edição, 2009, consulta sobre conjuntos numéricos e suas propriedades.
- [4] Site Brasil Escola - disponível em: <<http://www.brasilecola.com/matematica/conjuntos-numericos.htm>>. Consulta sobre informações adicionais de conjuntos numéricos. Acessado em, 10 de abril de 2013.
- [5] Site WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Disponível em <<http://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>>. Consulta sobre a história e características do GeoGebra. Acessado em, 03 de maio de 2013.
- [6] Aubyn, António St...[et al.].- *Números Reais/ Lisboa : Universidade técnico de Lisboa, 2006*.