UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS APLICAÇÕES

MACAPÁ-AP

2011

Cicero Deybison da Silva Santos
Micael do Pilar Rodrigues

O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil.

MACAPÁ-AP
2011

Cícero Deybison Da Silva Santos

Micael do Pilar Rodrigues

O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil- Orientador

Prof. Dr. Guzmán Isla Chamilco- Avaliador

Prof. Dr. Erasmo Senger- Avaliador

Avaliado em: 12/12/2011

MACAPÁ-AP

2011

Agradecimentos

Eu Cícero Deybison agradeço a Deus por uma das benções que ele está me proporcionando, a minha família que sempre me consedeu o verdadeiro apoio, especialmente a minha mãe Maria da Silva Santos que é uma pessoa batalhadora e guerreira, a Luana gonçalves da Silva que me ajudou muito com sua compreensão e carinho, aos meus amigos próximos, e amigos de graduação que me ajudaram em meus estudos, o qual formaram a melhor turma de estudo, e que foram uma família para mim. Agradecer aos meus professores de graduação que me proporcionou um ótimo curso. Gostaria de agradecer, também, ao *Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco* pelas contribuições teóricas. Que no decorrer do curso nos colocou a importância e o espírito do curso de matemática. Agradeço em especial meu orientador *Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil* pela paciência e esforço dedicados para a execução deste trabalho. Seu empenho e disciplina serviu de exemplo para tornar-me um melhor profissional no futuro. Deixo registrado todo meu respeito, admiração e gratidão. E novamente, agradeço a todos os professores citados, Pela paciência e compreensão em meu progresso desde os primeiros anos de graduação.

A todos muito obrigado!

Agradecimentos

Eu Micael Pilar, em primeiro lugar agradeço a Deus pela força para vencer mais essa batalha,e por sempre está comigo nas horas mais difíceis. Também aos meus amados familiares em especial meus Pais: Missionária Maria das graças e Pastor Arnaldo Gomes, meus irmãos, minha amada esposa Érida Susana que sempre me deu força para enfrentar esse grande obstáculo. Agradeço aos meus colegas da turma de Matemática de 2007, a todos os professores que me ajudaram muito e tive a honra de aprofundar meus conhecimentos. Quero agradecer de forma carinhosa dois professores que tive no ensino fundamental e médio, graças a eles, pude aprender a gostar desta disciplina: Professor José Maria e a Saudosa Professora Clarice Garcia. Faço um agradecimento todo especial a empresa na qual trabalho em especial os gerentes que tive, a diretoria que de maneira direta proporcionaram o tempo que eu estudasse no período da tarde, em fim a todos que acreditaram e acreditam em mim. aos ilustres professores *Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil* e *Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco*, a todos meus sinceros agradecimentos.

A todos muito obrigado!

"Purifica teu coração antes de permitir que o amor se assente nele, já que o mel mais doce azeda num copo sujo."

(Pitágoras)

O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS APLICAÇÕES

RESUMO

Neste Trabalho de Conclusão de Curso são apresentadas três demonstrações do Teorema de Pitágoras. A primeira demonstração é baseada na interpretação de áreas, e acredita-se que é devida à Escola Pitágorica. A segunda prova é clássica nos textos escolares atuais usando semelhança de triângulos, onde se explora os conceitos teóricos e se perde a utilidade prática do Teorema de Pitágoras. A terceira prova devida a Henry Perigal, na qual se prova geométrica e analiticamente que as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos ocupam exatamente a área do quadrado sobre a hipotenusa. É formulada a recíproca do Teorema de Pitágoras, se generaliza o teorema para figuras semelhantes e são descritas várias aplicações no cálculo de distâncias, áreas e volumes. Demonstramos uma versão do Teorema de Pitágoras sobre triângulos esféricos, relacionando os lados (arcos) do triângulo. Provamos que, quando o raio da esfera cresce (para $+\infty$) a formula do Teorema de Pitagóras na esfera se torna a formula clássica do Teorema de Pitágoras no plano. É também descritos procedimentos para determinar ternos pitágoricos com base em três parâmetros que dependem da diferença entre os catetos e hipotenusa do triângulo retângulo. Finalmente, descrevemos um procedimento gerado em Geogebra 4.0 para construir uma prova geométrica do Teorema de Pitágoras.

Palavras-Chave: Teorema de Pitágoras, Decomposição de Perigal, Triângulos Esféricos, Geogebra 4.0.

O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS APLICAÇÕES

RESUMEN

En esta Monografia se apresentan tres demostraciones del Teorema de Pitágoras. La primera demostracion sigue a interpretación de áreas, la qual probablemente es originada en la Escuela Pitagórica. La segunda prueba es clásica en los libros escolares actuales, usa a semejanza de triangulos, donde se explora los conceptos teóricos y se pierde la utilidad práctica del Teorema de Pitágoras. La tercera prueba es con base en el trabajo de Henry Perigal, en la cual se prueba geométrica y analiticamente que las áreas de los cuadrados construídos sobre los catetos ocupan exactamente la área del cuadrado sobre la hipotenusa. Se formula la recíproca del Teorema de Pitágoras, es generalizado el teorema para figuras semelhantes y se describen várias aplicaciones en el cálculo de distancias, áreas y volumenes. Demostramos una version del Teorema de Pitágoras sobre triángulos esféricos, relacionando los lados (arcos) del triángulo. Probamos que, cuando el radio de la esfera crece (para $+\infty$) la formula del Teorema de Pitagóras en la esfera se torna la formula clásica del Teorema de Pitágoras en el plano. Se describe tambien un procedimiento para determinar trios pitagóricos con base em tres parâmetros que dependen de la diferencia entre los catetos y la hipotenusa del triângulo rectángulo. Finalmente, se describe un procedimiento realizado en el ambiente del Geogebra 4.0 para construir uma prueba del Teorema de Pitágoras.

Palabras-Clave: Teorema de Pitágoras, Descomposición de Perigal, Triángulos Esféricos, Geogebra 4.0.

Sumário

1 Introdução **xiii**

1.1 Antes de Pitágoras (Na Babilônia) xiii

1.2 História de pitagoras xiv

2 Teorema de Pitágoras - Demonstrações **13**

2.1 A demonstração clássica 13

2.2 A demonstração por semelhança de triângulos 15

2.3 A Demonstração de Henry Perigal 17

2.4 A Recíproca do Teorema de Pitágoras 19

2.5 Generalização do teorema de Pitágoras 21

3 Aplicação do Teorema de Pitágoras **23**

3.1 Altura dos triângulos equilátero e isósceles 23

3.2 Distância entre dois pontos no plano cartesianos 25

3.3 Estabelecimento da relação $sen^2\beta + cos^2\beta = 1$ 26

3.4 Diagonal do Cubo e Paralelepípedo 27

3.5 Relação entre altura, apótema de base e apótema de pirâmedes regulares . 28

3.6 Relação entre altura, raio do circulo circunscrito à base e aresta lateral em pirâmides regulares 29

3.7 Relação entre Altura, Geratriz e Raio da base num cone reto 30

4 Outras aplicações do Teorema de Pitágoras **34**

4.1 Triângulos Esféricos 34

4.2 Ternos Pitagóricos 37

5 Demostração do teorema no GeoGebra **42**

Considerações Finais **46**

Referências Bibliográficas **47**

Lista de Figuras

1.1 Tablete xiv

2.1 a) Triângulo retângulo com catetos b e c, b)Quadrado com lado $b+c$ . . 13
2.2 Decomposição do quadrado de lado $b+c$ 14
2.3 a) Triângulo retângulo BAC b) $ABC \sim AHB$ c) $ABC \sim AHC$ 15
2.4 Decomposição de Perigal 17
2.5 Quadriláteros do Método de Perigal 18
2.6 demonstração de perigal 4 19
2.7 1ºcaso 20
2.8 2ºcaso 20
2.9 Generalização do Teorema de Pitágoras 21
2.10 Generalização do teorema de Pitágoras em 3d 22

3.1 Altura do triângulo equilátero 23
3.2 Altura do triângulo isósceles 24
3.3 Distância entre dois pontos 25
3.4 relação 26
3.5 Diagonal do cubo 27
3.6 Diagonal do paralelepipedo 28
3.7 piramide de base hexagonal 29
3.8 Pirâmide de base triangular 29
3.9 cone 30
3.10 cubo 31
3.11 circuferencia 32
3.12 circuferencia 32
3.13 $\triangle ABC$ 33

4.1 figura esferica 35
4.2 tabela dos numeros primitivos 38
4.3 Altura e excesso de um triângulo de Pitágoras 39
4.4 Tabela para h=1 41
4.5 Tabela para h=2 41

5.1 Quadrados de lados iguais aos catetos 42
5.2 Quatro triângulos retângulos congruentes ao original 43
5.3 Encaixe do primeiro triângulo 43
5.4 Encaixe do segundo triângulo 44
5.5 Encaixe dos últimos triângulos 44

Capítulo 1

Introdução

1.1 Antes de Pitágoras (Na Babilônia)

Em [2] e [5], Existem relatos que os babilônios antigos conheciam o teorema de Pitágoras. Muitos tabletes de barro datados do período de 1800 a 1600 a.C. foram encontrados, decifrados e hoje se encontram em diversos museus. Um deles, chamado Plimpton 322 está na Universidade de Columbia e o fragmento que foi preservado mostra uma tabela de 15 linhas e 3 colunas de números. Os pequisadores descobriram que esta tabela continha termos pitagóricos, ou seja, lados de um triângulo retângulo. Como o que restou é apenas um pedaço de um tablete, que deveria fazer parte de um conjunto de tablete, não se sabe como esses números foram encontrados. Mas uma pista, que os babilônios conheciam alguma forma de encontrar esses números, está em um tablete guardado hoje no Museu Britânico. Nesse Tablete está escrito o seguinte:

4 é o comprimento

5 é a diagonal

Qual é a altura?

4 vezes 4 dá 16

5 vezes 5 dá 25

Tirando 16 de 25 o resto é 9?

Quanto vezes quando devo tomar para ter 9?

3 vezes 3 dá 9

3 é a altura

Isto mostra, sem dúvida, que os babilônios tinham conhecimento da relação entre os la-

dos de um triângulos retângulo. Não há nenhuma demonstração, naturalmente, pois isto ainda estava longe de ser uma preocupação dos matemáticos da época. Eles conheciam receita que davam certos e, com elas, resolviam inúmeros problemas.
Um outro tablete que merece atenção está no museu da Universidade de Yale. É o único que contém figuras: Um quadrado e suas diagonais. Neste fragmento de tablete que se pode ver a seguir, o lado do quadrado é tomado como igual a 30 e o comprimento da diagonal aparece como 42, 25 e 35.

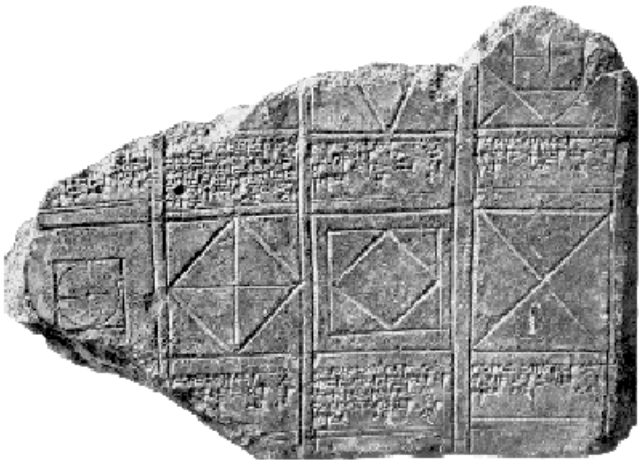


Figura 1.1: Tablete

Como os babilônios escreviam os números na base 60, o comprimento da diagonal é, na nossa notação decimal, $42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{3600} = 42,4263889$. Isto, dividido por 30, da $1,414213...$, uma aproximação excepcional para $\sqrt{2}$ com seis casas decimais corretas.

1.2 História de pitagoras

Em [1].Profeta, místico, filósofo, astrônomo e matemático grego nascido em Sámos, na ilha de Jônia de Sámos, na Anatólia, cidade rival de comercial a cerca de 50km de Mileto, Numas das ilhas do norte do arquipélago do Dodecanesco, próximo hoje ás costas turcas, Pitágoras nasceu por volta de (563-483 a. C). Filho de um rico comerciante de Sámos, Interessado em ciências, filosofia, ele viajou, ao que parece pelo Egito, Fenícia, Babilônia, Índia e Pérsia,Onde absolveu os conhecimentos matemáticos e as idéias religiosas de cada

região. Voltando ao mundo grego, fundou em Crotona (hoje no sudeste da Itália) a Escola ou Sociedade de Estudiosos, que era comunitária e secreta, ou seja, todo conhecimento e descobertas eram comuns e dividido a todos. Os princípios foram determinantes para a evolução geral da matemática e da filosofia ocidentais sendo os principais temas a harmonia matemática, a doutrina dos números e o dualismo cósmico essencial. Acredita-se que Pitágoras tenha sido casado com a física e matemática grega Theano, que foi sua aluna. Supõe-se que ela e as duas filhas tenham assumido a escola pitagórica após a morte do marido. Os pitagóricos interessavam-se pelo estudo das propriedades dos números. Para eles, o número, sinônimo de harmonia, constituído da soma de pares e ímpares - os números pares e ímpares expressando as relações que se encontram em permanente processo de mutação, eram considerados como a essência das coisas, criando noções opostas (limitado e ilimitado) e sendo a base da teoria da harmonia das esferas.
Segundo os pitagóricos, o cosmo é regido por relações matemáticas. A observação dos astros sugeriu-lhes que uma ordem domina o universo. Evidências disso estariam no dia e noite, no alterar-se das estações e no movimento circular e perfeito das estrelas. Por isso o mundo poderia ser chamado de cosmos, termo que contém as idéias de ordem, de correspondência e de beleza. Nesse cosmo visão também concluíram que a Terra é esférica, estrela entre as estrelas que se movem ao redor de um fogo central. Alguns pitagóricos chegaram até a falar da rotação da Terra sobre o eixo, mas a maior descoberta de Pitágoras ou dos seus discípulos (já que há obscuridades em torno do pitagorismo, devido ao caráter esotérico e secreto da escola) deu-se no domínio da geometria e se refere às relações entre os lados do triângulo retângulo. A descoberta foi enunciada no teorema de Pitágoras. Pitágoras foi expulso de Crotona e passou a morar em Metaponto, onde morreu, provavelmente em 496 a.C. ou 497 a.C.. A escola de Pitágoras Segundo o pitagorismo, a essência, que é o princípio fundamental que forma todas as coisas é o número. Os pitagóricos não distinguem forma, lei, e substância, considerando o número o elo entre estes elementos. Para esta escola existiam quatro elementos: terra, água, ar e fogo. Assim, Pitágoras e os pitagóricos investigaram as relações matemáticas e descobriram vários fundamentos da física e da matemática. O pentagrama era o símbolo da Escola Pitagórica.

Dedicado ao estudo da matemática e Filosofia, principalmente. Durante 40 anos ele lecionou, mas foi posto um fim à sua instituição, e ele próprio foi forçado a fugir da cidade,

devido a uma conspiração e rebelião surgidas em decorrência de uma disputa entre o povo de Crotona e os habitantes de Síbaris; ele conseguiu chegar a Metaponto, onde, segundo a tradição morreu mais ou menos em 500 a.C. Como todos os documentos daquela época se perderam tudo que sabemos veio através de referências de outros autores viveram séculos depois. Por isso, Pitágoras é uma figura obscura na história da matemática. Assim, não sabemos se quer se foi o próprio Pitágoras que descobriu o teorema que leva seu nome, naquela época era comum dar todo o crédito de uma descoberta ao mestre. Não conhecemos também qual foi à demonstração original, mas historicamente acreditam que foi com áreas.

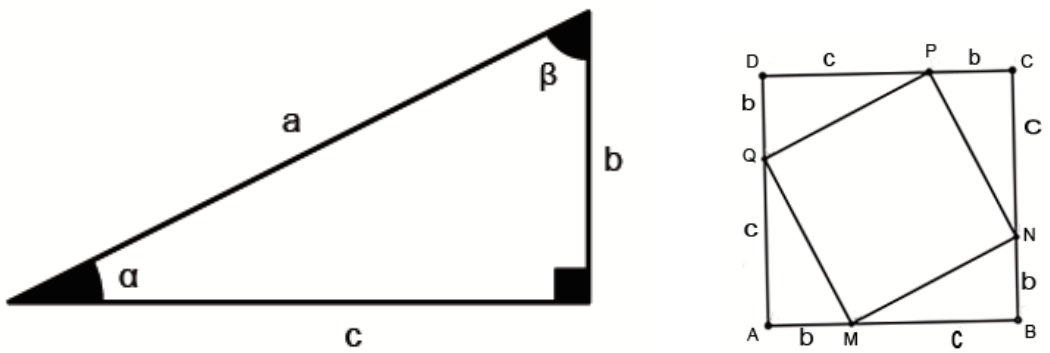
Capítulo 2

Teorema de Pitágoras - Demonstrações

Em [2], [3] e [4]

2.1 A demonstração clássica

Seja o triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, e ângulos agudos α e β como mostra a Figura 2.1(a). Constrói-se um quadrado com lado $b + c$, e sobre os lados desse quadrado são marcados os pontos M, N, P, Q, como na Figura 2.1(b), de modo que:



(a) (b)

Figura 2.1: a) Triângulo retângulo com catetos b e c, b)Quadrado com lado $b + c$

$$\begin{aligned} AN &= BN = CP = DQ = b \\ MB &= NC = PD = QA = c \end{aligned}$$

Pelo caso de congruência LAL os triângulos retângulos QAM, MBN, NCP e PDQ são congruentes ao triângulo retângulo 2.1(a). Daí segue que $MN = NP = PQ = QM = a$. Isso implica que o quadrilátero $MNPQ$ é um losango. Vamos mostrar que, de fato, ele é um quadrado.

Pela congruência dos triângulos QAM, MBN, NCP e PDQ, os ângulos agudos destes triângulos retângulos medem α e β, de acordo com a Figura 2.2. Como $\alpha + \beta = 90^o$ segue que cada ângulo interno do quadrilátero $MNPQ$ deve ser reto, isso demonstra que $MNPQ$ é um quadrado de lado a. Temos provado a seguinte proposição:

Proposição 2.1.1. *Seja o triângulo retângulo ABC, reto em $\hat{A}$, hipotenusa a e catetos b e c. Verifica-se que a área do quadrado de lado $b + c$ é igual a soma da área do quadrado de lado a mais quatro vezes a área do triângulo ABC (ver Figura 2.2).*

Da proposição 2.1.1 temos que:

$$(b+c)^2 = 4\frac{bc}{2} + a^2 \Longrightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2 \Longrightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Temos provado o Teorema de Pitagóras:

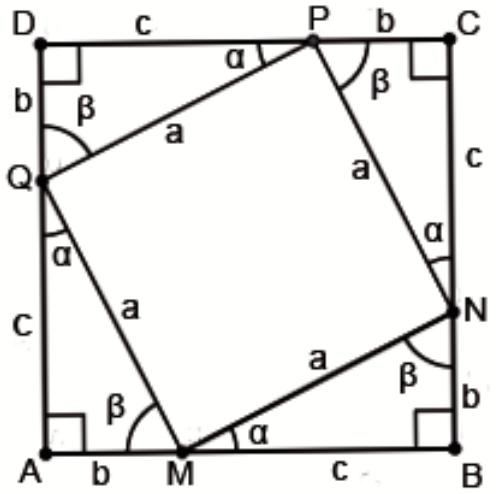


Figura 2.2: Decomposição do quadrado de lado $b + c$

Teorema 2.1.1. *(Teorema de Pitagóras) À área do quadrado construído com lado igual à hipotenusa do triângulo retângulo (a^2) é igual a soma das áreas dos quadrados construídos com lado igual a cada um dos catetos ($b^2 + c^2$).*

2.2 A demonstração por semelhança de triângulos

Seja dado um triângulo retângulo ABC de catetos b e c e hipotenusa a. A altura AH, relativa á base BC, divide esse triângulo em dois outros triângulos retângulos: BHA e CHA (ver Figura 2.3(a)). Como os ângulos agudos de um triângulo retângulo somam 90º, segue-se que os triângulos retângulos ABC, HBA e HAC possuem os mesmos ângulos, logo são semelhantes.

Da semelhança ΔABC $\sim$ ΔHBA (ver Figura 2.3(b)) obtém-se:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m}$$

logo,

$$c^2 = am. \tag{2.1}$$

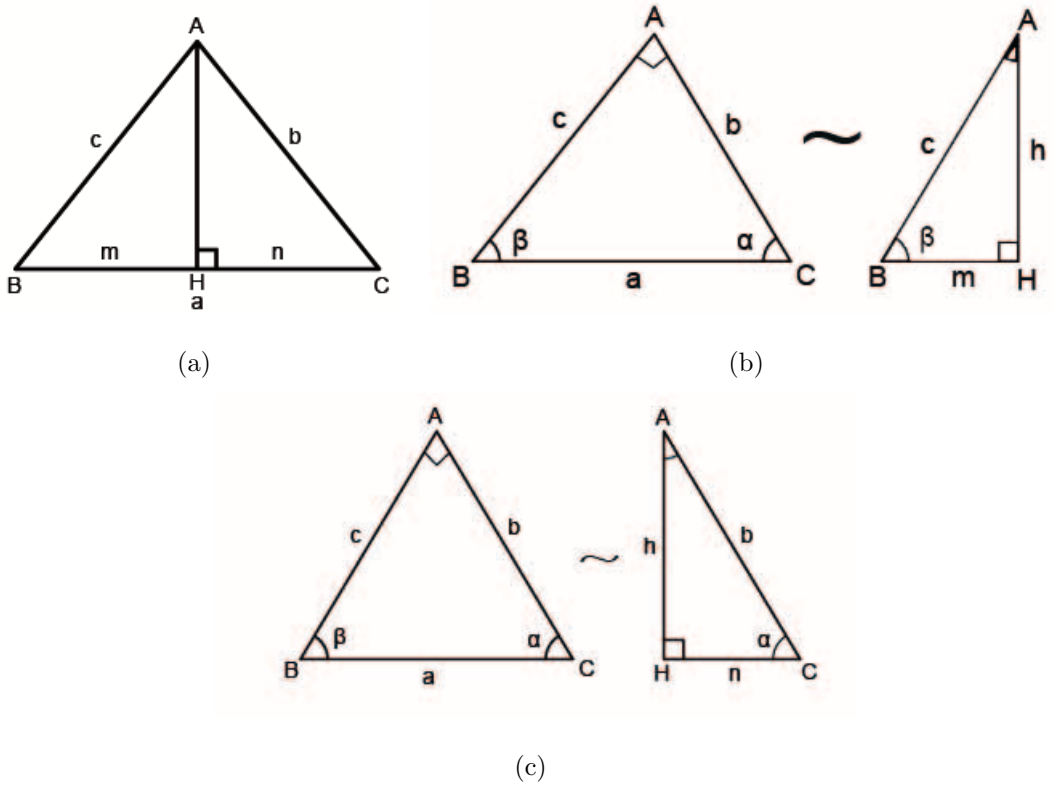


Figura 2.3: a) Triângulo retângulo BAC b) $ABC \sim AHB$ c) $ABC \sim AHC$

Da semelhança ΔABC $\sim$ ΔHCA obtem-se:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$$

logo,

$$b^2 = an. \tag{2.2}$$

De 2.1 e 2.2 temos:

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= an + am \\ b^2 + c^2 &= a \cdot (n + m) \\ b^2 + c^2 &= a^2 \end{aligned}$$

provando novamente o Teorema de Pitagóras 2.1.1.

Esta demonstração por semelhança é hoje a mas frequente nos textos escolares. Permite demonstrar o Teorema de Pitágoras de forma bastante simples, como também encontrar as relações importantes do triângulo retângulo. Além das duas relações, que deram origem a demonstração do teorema, obtemos a relação $bc = ah$, que também se interpreta com conceito de área, e $h^2 = mn$ que revela o importante fato que a altura é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.
Entretanto, a ênfase destes textos é formular o Teorema de Pitágoras como: *em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa e a soma do quadrado dos catetos*, o qual aparece como uma relação matemática sem qualquer interpretação prática.

2.3 A Demonstração de Henry Perigal

Henry Perigal, um livreiro de Londres, publicou em 1873 uma demonstração do Teorema de Pitágoras. A peculiaridade de esta demonstração é que fica geometricamente evidente que as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos preenchem exatamente o quadrado construído sobre a hipotenusa (ver Figura 2.4). Para provar o método de Perigal provamos

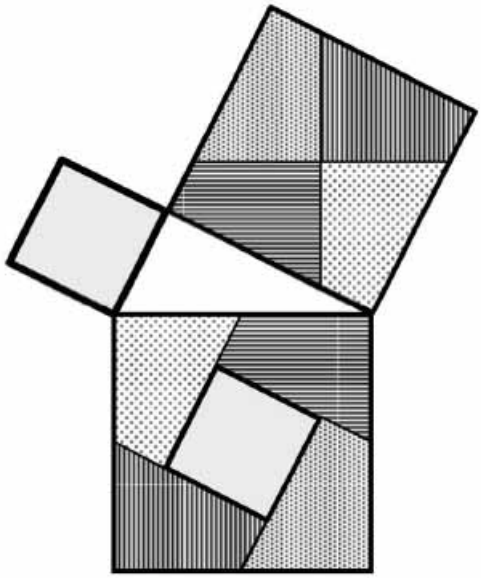


Figura 2.4: Decomposição de Perigal

primeiro o seguinte teorema:

Teorema 2.3.1. *Qualquer reta $\mathcal{L}_1$ que passe pelo centro do quadrado corta ao quadrado em um segmento com ponto médio o centro do quadrado. Ainda mais, a reta perpendicular $\mathcal{L}_2$ perpendicular a $\mathcal{L}_1$ corta ao quadrado em um segmento de comprimento igual ao segmento da reta $\mathcal{L}_1$.*

<u>Prova</u>.

Consideremos o quadrado $ABCD$ da Figura 2.5. A reta $\mathcal{L}_1$ que passa pelo centro do quadrado O o corta nos pontos F e G. Nos triângulos BOG e DOF temos que:

$BO = OD$, pois BD é uma diagonal do quadrado, e

$\hat{D} = \hat{B}$ e $\hat{F} = \hat{G}$, por ser ângulos entre paralelas.

Logo, pelo teorema ALA, os triângulos BOG e DOF, temos que $FO = OG$ e portanto O é ponto médio de FG. Além mais, $DF = BG$ e AF=GB pois $AD = BC$ por serem os

lados do quadrado.

Como a reta $\mathcal{L}_2$ passa pelo centro do quadrado, o argumento anterior prova que $HO = OI$. Da congruência dos triângulos DOH e BOI (Teorema ALA) temos que $DH = BI$ e $HC = AI$. $\square$

Como $AF = DH = CG = BI$, $DF = CH = BG = AI$, $FO = OG = OH = OI$ e os ângulos com vértice em O são retos, então os quadriláteros $AFOI$, $PFOH$, $HOGC$ e $GOIB$ são todos congruentes, temos provado assim o seguinte corolário:

Corolário 2.3.1. *Sejam $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ duas retas que se intersectam no centro de um quadrado. Se as retas são perpendiculares, sua intersecção divide o quadrado em quatro quadriláteros congruentes.*

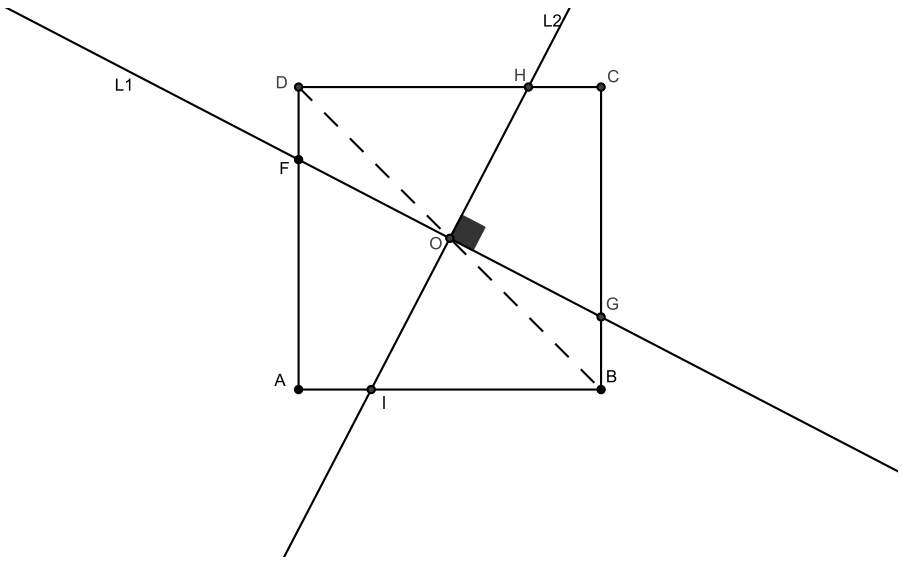


Figura 2.5: Quadriláteros do Método de Perigal

Enunciamos agora o Teorema de Perdigal,

Teorema 2.3.2. *(Teorema de Perigal). Em um triângulo retângulo construe-se quadrados sobre cada um de seus lados. Sobre o quadrado com lado o cateto maior é construída uma reta paralela que passa pelo centro do quadrado e paralela à hipotenusa. Uma segunda reta perpendicular à primeira e que também passa pelo centro do quadrado é construída. Estas duas retas dividem o quadrado com lado sobre o cateto maior em 4 quadriláteros congruentes que junto com o quadrado com lado sobre o cateto menor preenche completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa.*

Prova.

Na Figura 2.6, seja AC=b e AB=c os lados dos quadrados construídos sobres os catetos. Como os quatro quadriláteros enumerados por 2, 3, 4 e 5 são congruentes, chamaremos o segmentos de reta AG=DE=x. Temos também o paralelogramo BCDG, BG=CD, ou seja, $c+x=b-x$, portanto $c=b-2x$. Como HJ=GF=CD e HI=DE temos $HJ-HI=IJ=b-x-x=b-2x=c$. Portanto o quadrado interno ao quadrado maior é congruente com o quadrado menor, o que conclui a prova. □

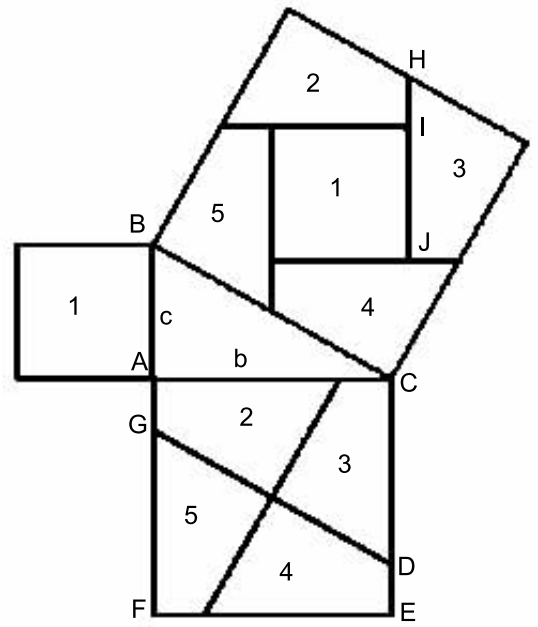


Figura 2.6: demonstração de perigal 4

2.4 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

A pergunta agora é: se a, b e c são reais positivos com $a^2 = b^2 + c^2$ será o triângulo de lados a, b e c retângulo?. Para responder esta questão, considere-se um triângulo ABC com $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$, vamos analisar o caso em que o ângulo $\hat{A}$ é agudo e o caso em que é obtuso.

a) Caso I: $A < 90^o$. Supondo que $a \leqslant c$. Assim, o ponto D é a projeção de C sobre AB cai no interior do lado AB. Sejam $AD = x$ e $CD = h$

Como o triângulo ADC é retângulo, temos: $b^2 = h^2 + x^2$.

Como o triângulo BDC é retângulo, temos:

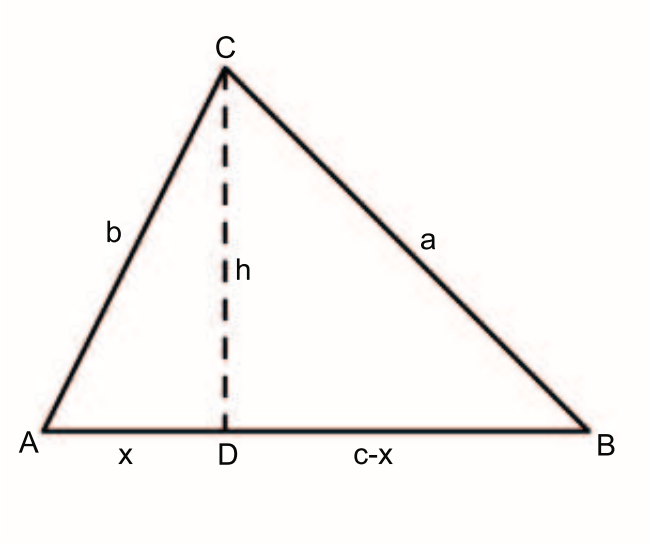


Figura 2.7: 1ºcaso

$a^2 = h^2 + (c - x)^2$ sendo $h^2 = b^2 - x^2$

$a^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2$

$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$

Portanto, $a^2 < b^2 + c^2$

b) Caso II: $A > 90^o$. Agora, o ponto D cai fora do lado AB, como mostra a figura abaixo.

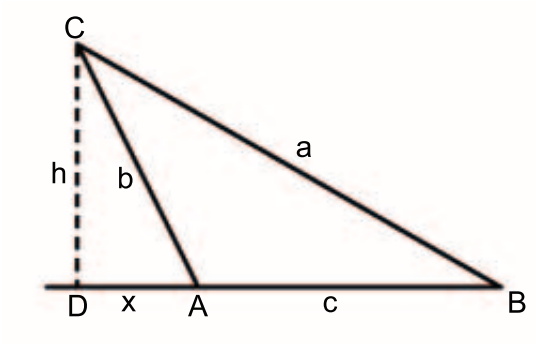


Figura 2.8: 2ºcaso

Logo temos:

$a^2 = h^2 + (c + x)^2$ sendo $h^2 = b^2 - x^2$

$a^2 = h^2 + c^2 + 2cx + x^2$

$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + 2cx + x^2$

$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$

Portanto, $a^2 > b^2 + c^2$.

Temos provado assim o seguinte teorema:

Teorema 2.4.1. *Em um triângulo ABC de lados a,b,c, opostos aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ respectivamente, verifica-se:*

$$A = 90^o \implies a^2 = b^2 + c^2$$
$$A < 90^o \implies a^2 < b^2 + c^2$$
$$A > 90^o \implies a^2 > b^2 + c^2.$$

Este teorema pode-se enunciar também como:

Teorema 2.4.2. *Um triângulo é retângulo se, e somente se, o quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados.*

2.5 Generalização do teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras afirma que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Agora, sejam as figuras semelhantes quaisquer, construídas sobre os lados de um triângulo retângulo (ver Figura 2.9).

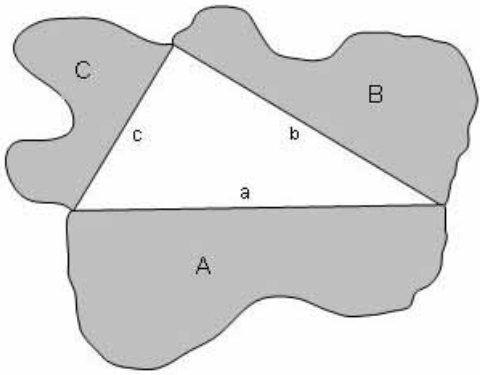


Figura 2.9: Generalização do Teorema de Pitágoras

Sejam então A, B e C as áreas de figuras semelhantes, construídas sobre a hipotenusa a e sobre os catetos b e c de um triângulo retângulo, como mostra a figura acima. Sabemos que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de

semelhanças.

Então,

$$\frac{A}{B}=(\frac{a}{b})^2 \text{ ou } \frac{A}{a^2}=\frac{B}{b^2}$$

$$\frac{A}{C}=(\frac{a}{c})^2 \text{ ou } \frac{A}{a^2}=\frac{C}{c^2}$$

Portanto,

$$\frac{A}{a^2}=\frac{B}{b^2}=\frac{C}{c^2}$$

Pela propriedade das proporções,
$$\frac{A}{a^2}=\frac{B+C}{b^2+c^2}$$

como $a^2=b^2+c^2$, concluímos que $A=B+C$. Temos provado o seguinte teorema.

Teorema 2.5.1. *Generalização do teorema de Pitágoras. Se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos.*

Exemplo 2.5.1. Sobre o triângulo retângulo formamos três paralelepípedos, cada um com base um quadrado formado sobre os lados de triângulo e todos com a mesma altura m (ver Figura 2.10). Verifica-se então que $ma^2+mb^2= mc^2$, isto é, a soma dos volumes dos dois paralelepípedos com base menores é igual ao volume do paralelepípedo com base maior.

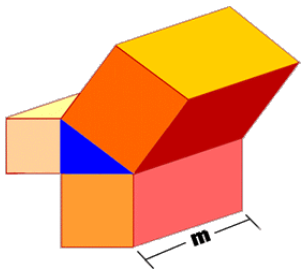


Figura 2.10: Generalização do teorema de Pitágoras em 3d

Capítulo 3

Aplicação do Teorema de Pitágoras

Neste capitulo apresentaremos algumas de muitas aplicações do teorema de Pitágoras entre elas destacam-se.

3.1 Altura dos triângulos equilátero e isósceles

a) Triângulo equilátero.

Seja um triângulo equilátero ABC de lados ℓ e altura h, sendo o ponto H a projeção do vértice C sobre o lado AB conforme a Figura 3.1. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BHC, temos:

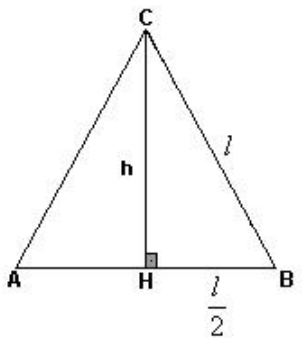


Figura 3.1: Altura do triângulo equilátero

$$
\begin{aligned}
l^2 &= h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\
l^2 &= h^2 + \frac{l^2}{4} \\
l^2 - \frac{l^2}{4} &= h^2 \\
\frac{4l^2 - l^2}{4} &= h^2 \\
\frac{3l^2}{4} &= h^2 \\
h &= \sqrt{\frac{3l^2}{4}} \\
h &= \frac{l\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

b) Triângulo isósceles.

Seja um triângulo isósceles de lados a, altura h e sua base b, dividindo-se a base em dois segmentos iguais a b/2 (ver Figura 3.2). Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pelos catetos h e $b/2$ e hipotenusa a, temos:

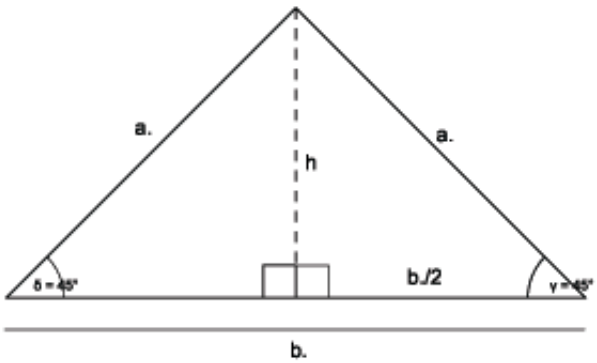


Figura 3.2: Altura do triângulo isósceles

$$
\begin{aligned}
a^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2 \\
a^2 &= \frac{b^2}{4} + h^2 \\
a^2 - \frac{b^2}{4} &= h^2 \\
\frac{4a^2 - b^2}{4} &= h^2 \\
h &= \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{4}} \\
h &= \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}
\end{aligned}
$$

Temos provado assim, a seguinte proposição:

Proposição 3.1.1. *Num triângulo isósceles de base b e lado congruente a, a altura h relativa à base é dada por:*

$$h = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}.$$

Se o triângulo for equilátero $a = b = l$, então a altura h do triângulo é dada por:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

3.2 Distância entre dois pontos no plano cartesianos

No plano cartesiano (x, y), dados os pontos P= (x_p, y_p) e Q= (x_q, y_q), queremos encontrar a distância entre esses pontos (ver Figura 3.3). Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pelos catetos $(x_q - x_p)$ e $(y_q - y_p)$ e hipotenusa conforme a Figura 3.3, temos:

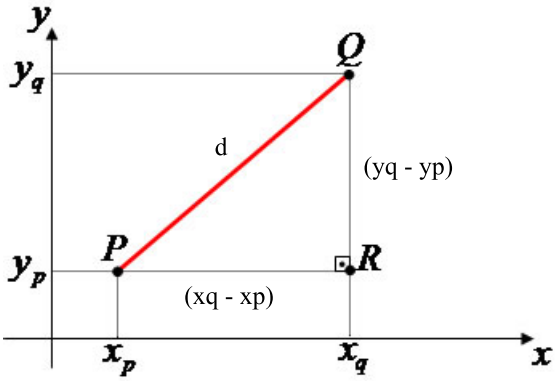


Figura 3.3: Distância entre dois pontos

$$\begin{aligned} d^2{}_{pq} &= (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 \\ d_{pq} &= \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2} \end{aligned}$$

provamos a proposição a seguir:

Proposição 3.2.1. *Seja o triangulo retangulo PRQ no plano cartesiano a Quadrado da distância PQ é igual a soma dos Quadrados das distâncias PR e RQ.*
ou seja: $(PQ)^2$=$(PR)^2$+$(RQ)^2$

3.3 Estabelecimento da relação $sen^2\beta + cos^2\beta = 1$

No circulo trigonométrico de raio 1, seja A um ponto na circunferência com sua Projeção C sobre a reta das abcissas, seja o angulo β formado pelo raio e a reta das abcissas, tem-se o triângulo retângulo OAC de catetos OC= $cos(\beta)$ e AC= $sin(\beta)$ e hipotenusa R= AO= 1,(ver a figura 3.4) aplicando o teorema de pitágoras, temos:

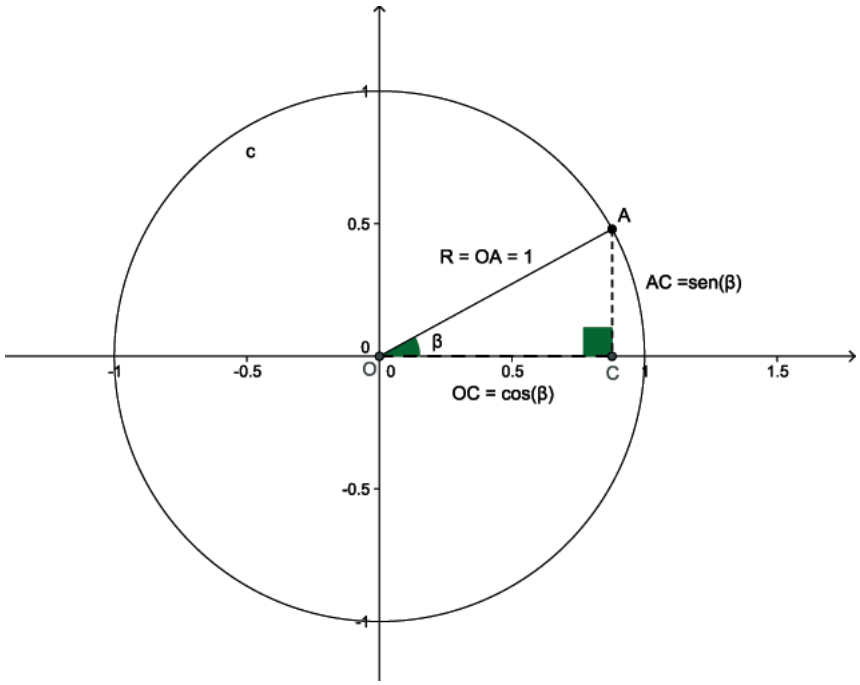


Figura 3.4: relação

Proposição 3.3.1. *Seja um triângulo retângulo OCA, reto em $\hat{C}$, de hipotenusa OA e catetos OC e AC (ver a figura 3.4). Verefica-se que o quadrado do raio OA é igual a soma $OC^2 + AC^2$.*

Da proposição 3.3.1 temos que:

$AC^2 + OC^2$= OA^2

$sen^2\beta + cos^2\beta$= R^2.

como o R=1, concluimos que:

$sen^2\beta + con^2\beta$= 1

3.4 Diagonal do Cubo e Paralelepípedo

a) Diagonal do Cubo.

Seja o cubo $ABCDA'B'C'D'$de aresta:

AB=BC=CD=DA=$A'B'$=$B'C'$=$C'D'$=$D'A'$=AA'=BB'=CC'=DD'=a, calcula-se a diagonal do quadrado ABCD aplicando o teorema de Pitágoras temos, a seguinte relação: DB^2= $AD^2 + AB^2 = f$, logo $f = a\sqrt{2}$, Seja o triangulo retangulo DD'B, de catetos DB e DD'e hipotenusa D'B aplicando o teorema de pitagoras temos: $D'B^2$=$DB^2 + DD'^2$

sendo $D'B$= d e n=a, segue:

d^2= $\left(a\sqrt{2}\right)^2 + n^2$

d^2= $2a^2 + a^2$

d= $a\sqrt{3}$

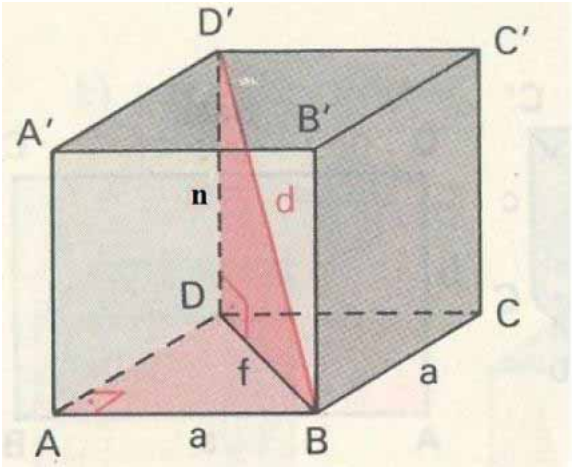


Figura 3.5: Diagonal do cubo

b) Diagonal do Paralelepípedo.

Seja o paralelepípedos ($ABCDEFGH$) de arestas: AB=DC=HF=EF=a, AD=BC=FG=EH=b e AE=BF=CG=DH= c. Calcula-se a diagonal das faces

da seguinte forma, seja o triangulo retangulo ABF pelas arestas de umas das faces,sejam os catetos a e b e hipotenusa d_b, aplicando o teorema de pitagoras temos $d_b = \sqrt{a^2 + b^2}$.

No trianglulo retangulo ADF formado pelos catetos c e d_b e hipotenusa d_p, aplicando o teorema de pitágoras temos:

$d_p^2 = d_b^2 + c^2$

$d_p^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2$

$d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

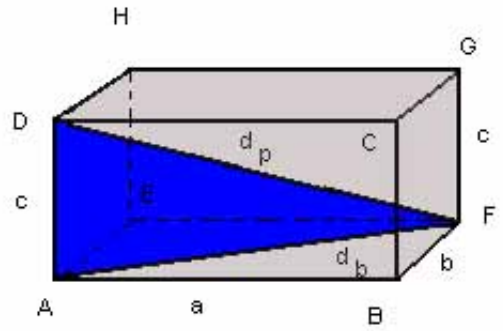


Figura 3.6: Diagonal do paralelepipedo

$D_p{}^2 = D_b{}^2 + C^2$

3.5 Relação entre altura, apótema de base e apótema de pirâmedes regulares

Seja a piramide regular de base hexagonal, aplicamos o teorema de Pitágoras no triangulo retângulo formado pelos catetos h que é a altura da piramide e m que é a apótema da base e a hipotenusa n será a apótema lateral, temos a seguinte relação:

$$n^2 = h^2 + m^2$$

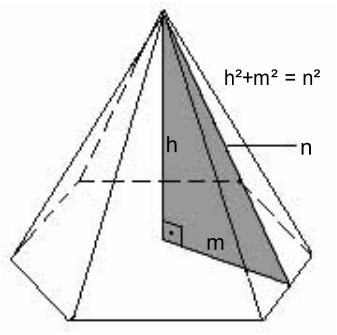


Figura 3.7: piramide de base hexagonal

Proposição 3.5.1. *Na pirâmide regular de base hexagonal, o quadrado da apótema lateral é igual ao quadrados da apótema da base mais o quadrado de sua altura*

3.6 Relação entre altura, raio do circulo circunscrito à base e aresta lateral em pirâmides regulares

Na pirâmide de aresta lateral a e altura h, seja sua base inscrita na circuferência de raio r podemos aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo formado pelos catetos h e r e a hipotenusa a (ver Figura 3.8), temos a relação:

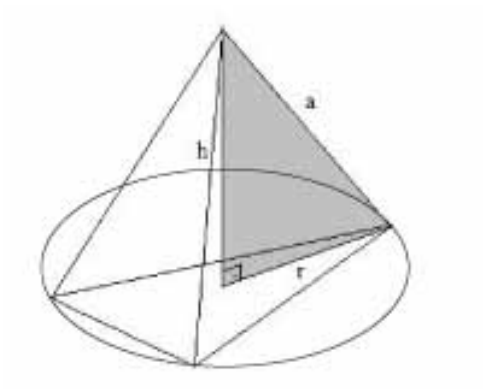


Figura 3.8: Pirâmide de base triangular

$$a^2 = h^2 + r^2$$

Proposição 3.6.1. *No triangulo retangulo formado pela aresta lateral de uma pirâmide com sua base inscrita em uma circunferência de raio r e altura h, o quadrado da aresta é igual ao quadrado do raio somado com o quadrado sua altura.*

3.7 Relação entre Altura, Geratriz e Raio da base num cone reto

Seja g a geratriz de um cone a hipotenusa de um triangulo retângulo formado pelos catetos h que é a altura do cone e r o raio da base, podemos aplicar o teorema de Pitágoras e temos a relação a seguir:

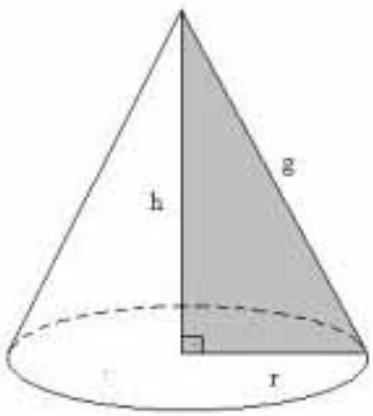


Figura 3.9: cone

$$g^2 = h^2 + r^2$$

Proposição 3.7.1. *O quadrado da geratriz de um cone reto é igual ao quadrado de sua altura somado com o quadrado do raio .*

Exemplo 1 "É possivel cortar um cubo de queijo em duas partes iguais de modo que o corte seja um hexágono regular? justifique."O problema exige que o hexágano seja regular, isto é os lados devem ser congluentes entre si.

Considerando-se os pontos médios das arestas AB, BF, GH, HD, DA como vértices de hexágono, fica resolvido o problema.

justificativa.

No triangulo retângulo MBN, a medida da hipotenusa MN pode ser obitida usando-se o teorema de pitágoras.

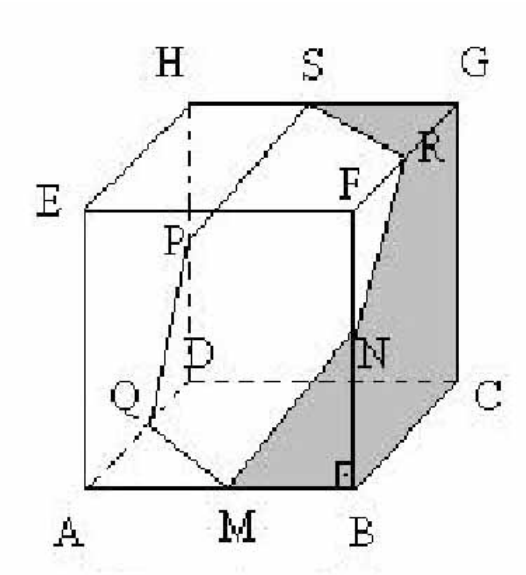


Figura 3.10: cubo

$MN^2 = MB^2 + BN^2$

$MN^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$MN^2 = \frac{(a)^2}{4} + \frac{(a)^2}{4}$

$MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Analogamente, para os demais lados do hexágono.

Exemplo 2 "É dado um círculo de centro O e raio R=6 cm. Inscrevem-se três circulos conforme a figura abaixo. Calcular a área da parte hachurada."(A e B estão no diâmetro de centro O)

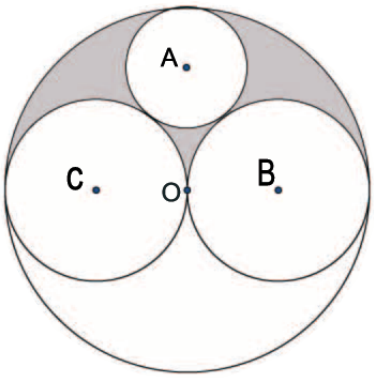


Figura 3.11: circuferencia

Solução: Traçando os raios dos três circulos menores.

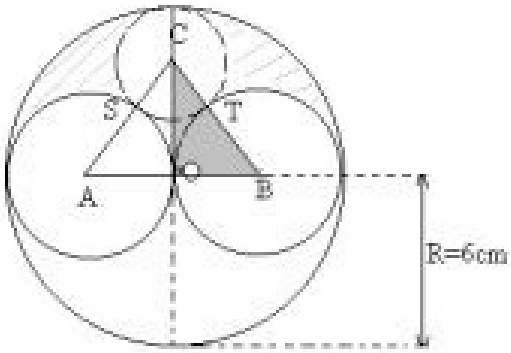


Figura 3.12: circuferencia

Teremos o triangulo isoceles ABC a seguir:

Designando-se o raio do circulo de centro c por r, tem-se:BD=$CT + TB$, pois os circulos são tangentes, porém; CT= r, TB= OB= $\dfrac{R}{2}$ e OC= $R - r$. Então BC= $r + 3$ e OC= $6 - r$

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OBC, tem-se:

BC^2=$OB^2 + OC^2$

$(r + 3)^2$= $3^2 + (6 - r)^2$

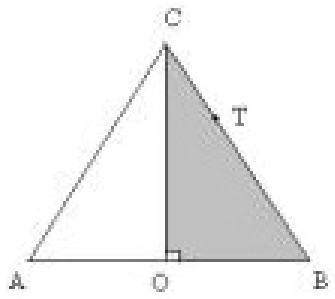


Figura 3.13: $\triangle ABC$

$r^2 + 6r + 9 = 9 + 12r + r^2$

$18r = 36$ portanto $r = 2$

A área da parte hachurada é igual a área do semicirculo de raio $6cm$, subtraida da área do circulo de raio $3cm$, (pois são dois semicirculos), menos a area do circulo de raio $r = 2$.

$A = \dfrac{\pi r^2}{2} - \pi 3^2 - \pi 2^2$

$A = \dfrac{36\pi}{2} - 9\pi - 4\pi$

$A = 5\pi cm^2$.

Capítulo 4

Outras aplicações do Teorema de Pitágoras

4.1 Triângulos Esféricos

Em [6], Os pontos A, B e C sobre a superficie de raio R ($S^2(R)$), quando não pertencem a um mesmo equador, definem um triângulo $\triangle ABC$ esférico. Assim como na geometria euclidiana, na geometria esférica existem relações entre as medidas dos lados com as medidas dos ângulos de um triângulo.

Teorema 4.1.1. *Teorema de Pitágoras Esférico - Seja $\triangle ABC$ um triângulo geodésico sobre a esfera $S^2(R)$ tal que no vértice A o ângulo seja retângulo. Suponha que a hipotenusa mede a, o lado oposto à B mede b e c seja a medida do lado oposto à C. Então,*

$$cos\Big(\frac{a}{R}\Big)= cos\Big(\frac{b}{R}\Big).cos\Big(\frac{c}{R}\Big)$$

Prova. Consideramos o lado AB sobre o equador ψ=$\frac{\pi}{2}$. Em particular, podemos assumir que:

A=$(1,0,0)$, B= $(cos(\frac{c}{R})$, $sen(\frac{c}{R})$, $0)$ e C=$(sen(\frac{\pi}{2}-\frac{b}{R})$,0,$cos(\frac{\pi}{2}-\frac{b}{R})$

i) $< \vec{OB}, \vec{OC} >= \mid \vec{OB} \mid\mid \vec{OC} \mid cos\Big(\vec{OB}, \vec{OC}\Big)= cos\Big(\frac{a}{R}\Big)$

ii) $< \vec{OB}, \vec{OC} >= cos(\frac{c}{R}).sen(\frac{\pi}{2} - \frac{b}{R}) + sen(\frac{c}{R}.0 + 0.cos(\frac{\pi}{2} - \frac{b}{R})=cos(\frac{c}{R}.cos\frac{b}{R})$
Logo temos: $cos(a)= cos(c).cos(b)$

Portanto,

$$< \vec{OB}, \vec{OC} >= cos(\frac{a}{R})= cos(\frac{b}{R}).cos(\frac{c}{R})$$

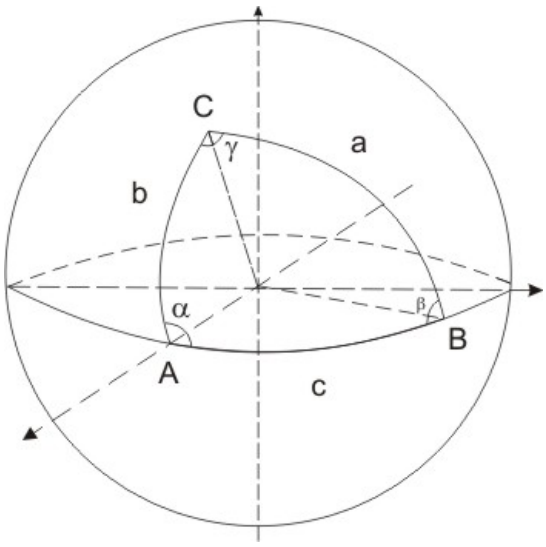


Figura 4.1: figura esferica

Conforme dito anteriormente, a nossa experiência cotidiana mostra que a expressão $a^2= b^2 + c^2$ é adequada para resolvermos problemas de medição quando, por exemplo, queremos medir as dimensões de uma construção, ou de terrenos e até as distâncias dentro de uma cidade. Sendo assim, o Teorema de Pitágoras deve ser obtido a partir da expressão: $cos(\frac{a}{R})=cos(\frac{b}{R}).cos(\frac{c}{R})$, quando os lados a, b e c do triângulo são muito pequenos em relação ao raio R. Por exemplo, para um segmento AB medindo 10 metros sobre a superfície da Terra temos que $\frac{10}{6378,11}$. Vejamos o que ocorre ao assumirmos na expressão provada anteriormente que $\frac{a}{R} \sim 0$, $\frac{b}{R} \sim 0$, $\frac{c}{R} \sim 0$.

Quando $R \to \infty$, $\frac{a}{R} \to 0$, $\frac{b}{R} \to 0$ e $\frac{c}{R} \to 0$

Usando aproximação de Taylor

$cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ (quando $R \to \infty$ ou $x \to 0$)

$$cos\left(\frac{a}{R}\right) = cos\left(\frac{b}{R}\right).cos\left(\frac{c}{R}\right)$$

$$1 - \frac{\left(\frac{a}{R}\right)^2}{2} \approx \left(1 - \frac{\left(\frac{b}{R}\right)^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\left(\frac{c}{R}\right)^2}{2}\right)$$

$$1 - \frac{\left(\frac{a^2}{R^2}\right)}{2} \approx 1 - \frac{\left(\frac{c^2}{R^2}\right)}{2} - \frac{\left(\frac{b^2}{R^2}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{b^2c^2}{R^4}\right)}{4}$$

$$-\frac{\left(\frac{a^2}{R^2}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{b^2}{R^2}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{c^2}{R^2}\right)}{2} \approx \frac{\left(\frac{b^2c^2}{R^4}\right)}{4}$$

$$-\frac{1}{\frac{R^2}{2}}\left(a^2 - b^2 - c^2\right) \approx \frac{\left(\frac{b^2c^2}{R^4}\right)}{4}$$

$$-\frac{1}{2R^2}\left(a^2 - b^2 - c^2\right) \approx \frac{1}{4}\frac{b^2c^2}{R^4}$$

$$a^2 - b^2 - c^2 \approx \frac{1}{4}\frac{b^2c^2}{R^4}(-2R^2)$$

$$a^2 - b^2 - c^2 \approx -\frac{1}{2}\frac{b^2c^2}{R^2} \tag{4.1}$$

Aplicando limite na equação 4.1 Quando $R \to \infty$.

Implica que:

$$a^2 - b^2 - c^2 \approx 0$$

$$a^2 \approx b^2 + c^2$$

Portanto: $a^2 = b^2 + c^2$ (teorema 2.1.1)

Sendo que o Teorema de Pitágoras deve ser aplicado quando os lados do triângulo são muito pequenos em relação ao raio R, embora ele só vale nas situações limites descritas acima ou quando a, b e c são fixos e $R \to \infty$.

4.2 Ternos Pitagóricos

Em [9], Denominamos um terno pitagórico ao trio formado por três números naturais a, b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Se (a,b,c) é termo pitagórico, então (Ka,Kb,Kc) também é um termos pitagórico, para qualquer número natural de k. Um termo pitagórico primitivo é um termo pitagórico em que os três números são primos entre si.

Uma formula que era ternos pitagóricos

Sendo m e n inteiros positivos com m>n considere:

Proposição 4.2.1. *Seja a soma dos quadrados dos catetos c e b igual a hipotenusa a ao quadrado , com (a,b,c)=1 então b,c não têm a mesma paridade. Admitindo que b seja ímpar e que c seja par, conclui-se que a é impar.*

Portanto:

$$c^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - c) \tag{4.2}$$

Mas é verdade que (a+b,a-b)=2, pois a soma e a diferença de dois números ímpares são números pares. Donde:

$$a + b = 2m^2 \tag{4.3}$$

$$a - b = 2n^2 \tag{4.4}$$

Somando as equações (4.3) e (4.4) temos (4.5), subtraindo as mesmas equações temos (4.6).

$$a = m^2 + n^2 \tag{4.5}$$

$$b = m^2 - n^2 \tag{4.6}$$

Aplicando o teorema de pitágoras em (4.5) e (4.6), temos (4.7)

$$c = 2mn \tag{4.7}$$

No livro (Os Elementos), Euclides apresentou os ternos pitagóricos da seguinte forma:

$a{=}m^2 + n^2$, $b{=}m^2 - n^2$, $c{=}2mn$

Veja a tabela a seguir, os ternos pitagóricos, menores que 1000.

m	n	a	b	c	m	n	a	b	c	m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
2	1	3	4	5	3	2	5	12	13	4	1	15	8	17	4	3	7	24	25
5	2	21	20	29	5	4	9	40	41	6	1	35	12	37	6	5	11	60	61
7	2	45	28	53	7	4	33	56	65	7	6	13	84	85	8	1	63	16	65
8	3	55	48	73	8	5	39	80	89	8	7	15	112	113	9	2	77	36	85
9	4	65	72	97	9	8	17	144	145	10	1	99	20	101	10	3	91	60	109
10	7	51	140	149	10	9	19	180	181	11	2	117	44	125	11	4	105	88	137
11	6	85	132	157	11	8	57	176	185	11	10	21	220	221	12	1	143	24	145
12	5	119	120	169	12	7	95	168	193	12	11	23	264	265	13	2	165	52	173
13	4	153	104	185	13	6	133	156	205	13	8	105	208	233	13	10	69	260	269
13	12	25	312	313	14	1	195	28	197	14	3	187	84	205	14	5	171	140	221
14	9	115	252	277	14	11	75	308	317	14	13	27	364	365	15	2	221	60	229
15	4	209	120	241	15	8	161	240	289	15	14	29	420	421	16	1	255	32	257
16	3	247	96	265	16	5	231	160	281	16	7	207	224	305	16	9	175	288	337
16	11	135	352	377	16	13	87	416	425	16	15	31	480	481	17	2	285	68	293
17	4	273	136	305	17	6	253	204	325	17	8	225	272	353	17	10	189	340	389
17	12	145	408	433	17	14	93	476	485	17	16	33	544	545	18	1	323	36	325
18	5	299	180	349	18	7	275	252	373	18	11	203	396	445	18	13	155	468	493
18	17	35	612	613	19	2	357	76	365	19	4	345	152	377	19	6	325	228	397
19	8	297	304	425	19	10	261	380	461	19	12	217	456	505	19	14	165	532	557
19	16	105	608	617	19	18	37	684	685	20	1	399	40	401	20	3	391	120	409
20	7	351	280	449	20	9	319	360	481	20	11	279	440	521	20	13	231	520	569
20	17	111	680	689	20	19	39	760	761	21	2	437	84	445	21	4	425	168	457
21	8	377	336	505	21	10	341	420	541	21	16	185	672	697	21	20	41	840	841
22	1	483	44	485	22	3	475	132	493	22	5	459	220	509	22	7	435	308	533
22	9	403	396	565	22	13	315	572	653	22	15	259	660	709	22	17	195	748	773
22	19	123	836	845	22	21	43	924	925	23	2	525	92	533	23	4	513	184	545
23	6	493	276	565	23	8	465	368	593	23	10	429	460	629	23	12	385	552	673
23	14	333	644	725	23	16	273	736	785	23	18	205	828	853	23	20	129	920	929
24	1	575	48	577	24	5	551	240	601	24	7	527	336	625	24	11	455	528	697
24	13	407	624	745	24	17	287	816	865	24	19	215	912	937	25	2	621	100	629
25	4	609	200	641	25	6	589	300	661	25	8	561	400	689	25	12	481	600	769
25	14	429	700	821	25	16	369	800	881	25	18	301	900	949	26	1	675	52	677
26	3	667	156	685	26	5	651	260	701	26	7	627	364	725	26	9	595	468	757
26	11	555	572	797	26	15	451	780	901	26	17	387	884	965	27	2	725	108	733
27	4	713	216	745	27	8	665	432	793	27	10	629	540	829	27	14	533	756	925
27	16	473	864	985	28	1	783	56	785	28	3	775	168	793	28	5	759	280	809
28	9	703	504	865	28	11	663	616	905	28	13	615	728	953	29	2	837	116	845
29	4	825	232	857	29	6	805	348	877	29	8	777	464	905	29	10	741	580	941
29	12	697	696	985	30	1	899	60	901	30	7	851	420	949	31	2	957	124	965
31	4	945	248	977	31	6	925	372	997										

Figura 4.2: tabela dos numeros primitivos

Outra forma de encontrar os ternos pitagóricos

Teorema de Enumeração

Em [8], Seja h um inteiro positivo (denominado excesso de altura), escrito como pq^2, com p quadrado perfeito e q positivo. Associamos o numero d igual $2pq$ se p é impar e pq se p for par. Definimos a função p que aplica o par (h, k) no terno (a, b, c) de inteiros positivos. pela formula.

$$P(k,h) = (h + d.k + \frac{(d.k)^2}{2h}, h + d.k, d.k + \frac{(d.k)^2}{2h})) = (a,b,c) \tag{4.8}$$

Vamos mostrar que os ternos (a,b,c) são ternos Pitagóricos, os quais serão chamados de ternos pitagóricos primitivos quando MDC (k,h)=1.

Note na figura que h é a altura e d.k é o incremento de p(k,h)

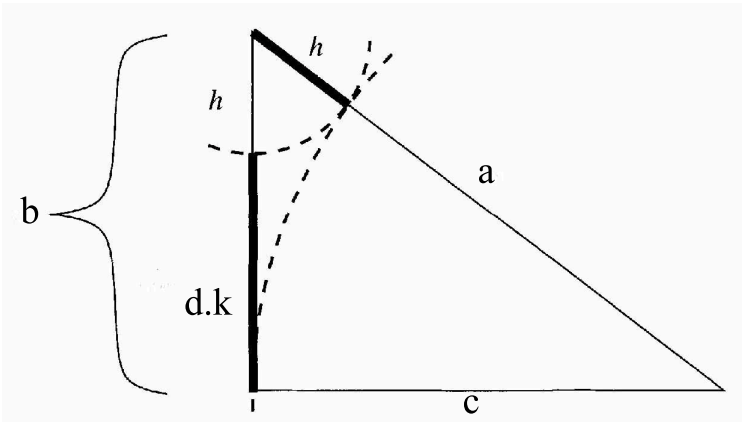


Figura 4.3: Altura e excesso de um triângulo de Pitágoras

Proposição 4.2.2. *Os ternos (a,b,c) em 4.8 são lados de um triângulo retângulo. Isto é,* $a^2 = b^2 + c^2$.

Prova: De $P(k,h) = (h + d.k + \frac{(d.k)^2}{2h}, h + d.k, d.k + \frac{(d.k)^2}{2h}) = (a,b,c)$ temos que $a = h + d.k + \frac{(d.k)^2}{2h}$, $b = h + d.k$, $c = d.k + \frac{(d.k)^2}{2h}$

Segue que:

$$b^2 + c^2 = (h + d.k)^2 + (d.k + \frac{(d.k)^2}{2h})^2 = h^2 + 2hd.k + (d.k)^2 + d.k^2 + \frac{(d.k)^3}{h} + \frac{(d.k)^4}{4h^2}$$

E de outro lado:

$$a^2 = (h + d.k + \frac{(d.k)^2}{2h})^2 = h^2 + 2hd.k + (d.k)^2 + d.k^2 + \frac{(d.k)^3}{h} + \frac{(d.k)^4}{4h^2}$$

portanto: $b^2 + c^2 = a^2$.

Proposição 4.2.3. *Considerando o cateto b menor que o cateto c, verifica-se que* $k > \frac{h}{d}\sqrt{2}$

Prova. Seja o triangulo retângulo de hipotenusa a, cateto menor b e cateto maior c, com a>c>b. Como b<c, onde b=$h + d.k$ e c= $d.k + \frac{(d.k)^2}{2h}$, temos que:

$h + d.k < d.k + \frac{(d.k)^2}{2h}$

$2h^2 < (dk)^2$ aplicando raiz em ambos os lados.

$\sqrt{2}h < d.k$ ou $k > \frac{h}{d}\sqrt{2}$

Esta proposição permite determinar uma cota inferior para o valor k. Na realidade, escolhemos os valores para k de modo que (a,b,c) sejam inteiros. Isto é, como h é inteiro positivo, então eventualmente k pode assumir valores não inteiros para forçar o terno ser inteiro. O algoritmo pode-se resumir da seguinte maneira:

a) Fixar a priori o valor inteiro h

b) Decompor h na forma $h = pq^2$, onde p é quadrado perfeito e q inteiro positivo. Por exemplo se h=1, temos p=1 e q=1. Se h=2, então p=1 e $q = \sqrt{2}$.

c) Se p é impar, definimos d=$2pq$, se p é par definimos d=pq

d) Escolhemos todos os valores de k tais que $k > \frac{h}{d}\sqrt{2}$, de modo que assegure que (a,b,c) sejam inteiros.

e) Calculamos a=$h + d.k + \frac{(d.k)^2}{2h}$; b=$h + d.k$, c=$d.k + \frac{(d.k)^2}{2h}$ para cada valor de k.

Exemplo 4.2.1. Para h=1, temos p=1 e q=1. Como p é impar, então d=$2pq$ = 2.1.1=2 e k deve verificar $k > \sqrt{2}\frac{h}{d} \geq 1$. No caso k=1,2,3,....

Segue para k=1:

$$
\begin{aligned}
b &= h + d.k = 1 + 2.1 = 3 \\
c &= d.k + \frac{(d.k)^2}{2h} = 2.1 + \frac{(2.1)^2}{2.1} = 2 + 4/2 = 4 \\
a &= h + d.k + \frac{(d.k)^2}{2h} = 1 + 2.1 + \frac{(2.1)^2}{2.1} = 1 + 4 = 5
\end{aligned}
$$

Portanto (a,b,c)= (5,4,3).

h	d	K	a	b	c
1	2	1	5	4	3
1	2	2	13	5	12
1	2	3	25	6	24
1	2	4	41	9	40

Figura 4.4: Tabela para h=1

Exemplo 4.2.2. Para h=2.

h=pq^2 implica 2= pq^2, p=1 e q=$\sqrt{2}$, logo 2= $1^2.(\sqrt{2})^2$, então por defunição d= $2pq$= $2(1).\sqrt{2}$=$2\sqrt{2}$ e k>$\frac{h}{d}\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$=1, portanto k>1, segue para k=$\sqrt{2}$:

$$
\begin{aligned}
b &= h + d.k = 2 + 2\sqrt{2}.\sqrt{2} = 6 \\
c &= d.k + \frac{(d.k)^2}{2h} = 2.\sqrt{2}.\sqrt{2} + \frac{(2.\sqrt{2}.\sqrt{2})^2}{2.2} = 4 + 4 = 8 \\
a &= h + d.k + \frac{(d.k)^2}{2h} = 2 + 2\sqrt{2}.\sqrt{2} + \frac{(2\sqrt{2}.\sqrt{2})^2}{2.2} = 8 + 2 = 10
\end{aligned}
$$

Portanto:(a,b,c)= (10,8,6).

h	d	K	a	b	c
2	2√2	√2/2	5	4	3
2	2√2	√2	10	6	8
2	2√2	3√2/2	17	8	15
2	2√2	2√2	26	10	24

Figura 4.5: Tabela para h=2

Capítulo 5

Demostração do teorema no GeoGebra

Em [9], O Geogebra é um software dinâmico de matemática que junta geometria, álgebra e cálculo. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de programadores para o ensino de matemática nas escolas. Neste capitulo vamos construir no Geogebra uma outra prova do Teorema de Pitágoras.
Os seguintes passos são seguidos na construção:

1. Consideremos o triângulo retângulo de hipotenusa com comprimento c, cateto menor de comprimento a e cateto maior de cumprimento b (ver Figura 5.2).

2. Construir no Geogebra um quadrado de lado a e um outro quadrado de lado b (ver Figura 5.1).

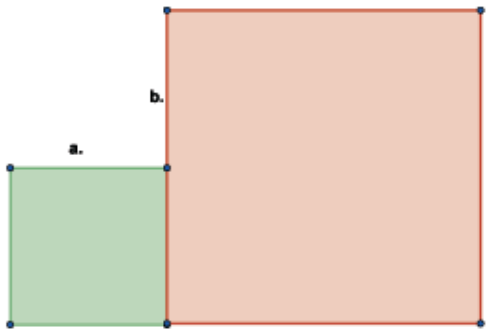


Figura 5.1: Quadrados de lados iguais aos catetos

3. Construir 4 triângulos retângulos similar ao original. Sendo que o cateto a coincide com o lado do quadrado de aresta a, e o cateto b com o quadrado de aresta b (ver Figura 5.2).

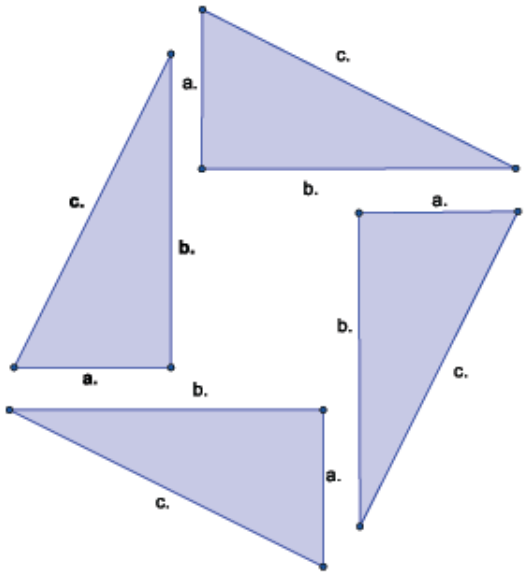


Figura 5.2: Quatro triângulos retângulos congruentes ao original

4. Considerando a Figura 5.1, pegamos um dos triângulos e encaixamos na aresta superior do quadrado de lado a conforme a Figura 5.3.

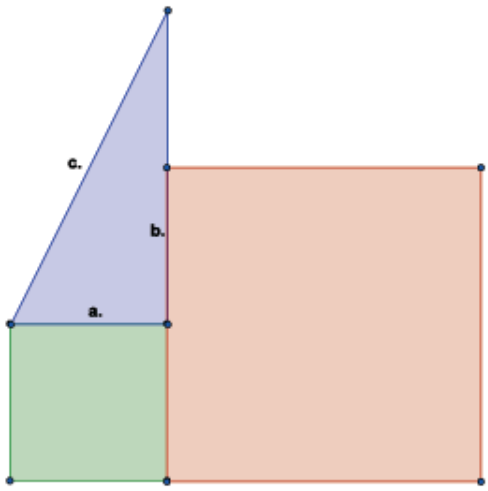


Figura 5.3: Encaixe do primeiro triângulo

5. Pegamos o triângulo de cateto da base igual a b e encaixamos na aresta superior do quadrado de aresta b, como mostra a Figura 5.4.

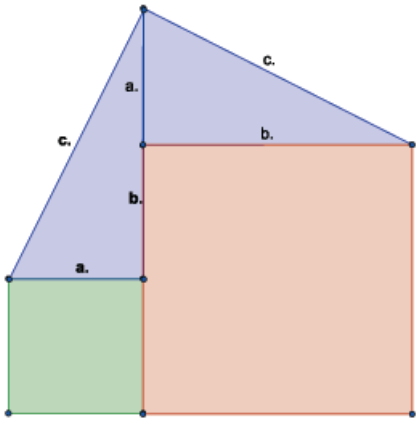


Figura 5.4: Encaixe do segundo triângulo

6. Agora encaixamos os dois triângulos restantes como mostra a Figura 5.5.

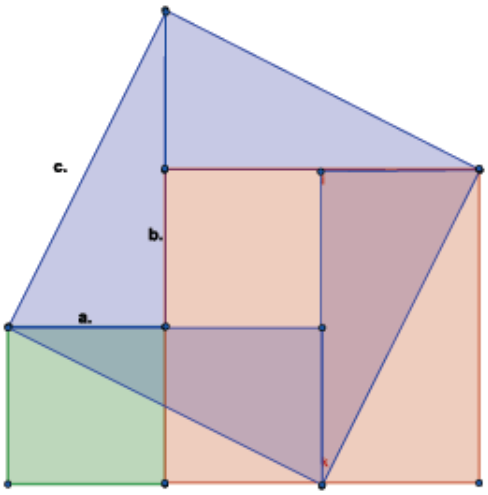


Figura 5.5: Encaixe dos últimos triângulos

7. Logo temos, que o quadrado azul de lado c formado é exatamente 4 vezes a área do

triângulo original mais o quadrado central de lado $b - a$. Isto implica a dizer que

$$\begin{aligned} c^2 &= 4 \cdot \left(\frac{a \cdot b}{2}\right) + (b-a)^2 \\ c^2 &= 2 \cdot a \cdot b + b^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

provando assim o Teorema de Pitágoras.

A decomposição de Perigal e a prova por áreas é implementado facilmente no Geogebra.

Considerações Finais

Neste Trabalho de Conclusão de Curso temos abordado demonstrações do Teorema de Pitágoras e algumas de suas aplicações. Este Teorema é considerado uma obra prima da antiguidade e de vital importância na geometria. Entretanto, observa-se que a praticidade do Teorema não é abordado no ensino fundamental, a prova por semelhança é a mais comum nos textos escolares, onde se prima pelo uso de proporções e construções auxiliares. Quando o aluno escuta que, *o quadrado da hipotenusa e igual à soma dos quadrados dos catetos*, o teorema adquire um contexto abstrato e de nenhuma visibilidade prática. Acreditamos que o enunciado do Teorema de Pitágoras por áreas: *Á area do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas construídas sobre os catetos* , motiva mais ao aluno. A prova abordada neste trabalho é simples e quando complementado com a decomposição de Perigal apresentado no Geogebra, esclarece ao aluno a utilidade e a beleza do Teorema. Além mais, a generalização do Teorema de Pitágoras para figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo, apresentadas neste trabalho, mostra ao aluno como algumas teorias admitem um certo grau de generalização.
Durante a realização do nosso estágio no Ensino médio e fundamental, observamos que em algumas aulas de geometria onde se usava o de Teorema de Pitágoras, os professores em momento algum apresentaram alguma demonstração do Teorema. Então questionamos aos professores sobre o motivo pela qual eles não demonstravam o teorema, a reposta de alguns foi que o aluno não precisava conhecer a demonstração, só precisava aprender as relações do teorema de Pitágoras a^2=$b^2 + c^2$.

Desenvolvemos neste trabalho algumas das inúmeras aplicações do Teorema de Pitágoras, focalizando aplicações no cálculo de distâncias, areas e volumes. O antigo problema de encontrar três números inteiros que verifiquem o Teorema de Pitágoras, ou terno Pitágorico, é desenvolvido com base na geração de três parâmetros que dependem da diferença dos lados do triângulo. Este método é simples e diferente aos métodos apre-

sentados nos textos da SBM, determina-se a altura, o qual é o excesso da hipotenusa em relação ao cateto maior. Com base na altura se determinam os outros dois parâmetros que completam o método.

O ambiente natural do Teorema de Pitágoras é o plano, entretanto baixo certas condições ele foi formulado no espaço tri-dimensional. Na esfera temos os triângulos esféricos, os quais são definidos por três pontos que não se encontram sobre o mesmo circulo maximal. Os lados do triângulo esférico são arcos maximais que unem cada dois vértices. Neste contexto, foi formulado e demonstrado na esfera o equivalente ao Teorema de Pitágoras. Na esfera, o teorema se expressa como cosseno dos lados ou arcos do triângulo. Demonstramos ainda que quando a esfera se expande e o raio cresce para infinito, o Teorema de Pitágoras formulado na esfera se transforma no Teorema de Pitágoras formulado no plano. Pode-se pensar que quando o raio cresce para infinito, um observador na esfera vê no seu entorno um plano e não uma esfera.

A prova do Teorema de Pitágoras realizada no Geogebra é de primordial importância no ensino da geometria nas escolas. Com o investimento da ultima década, as escolas públicas foram dotadas de computadores, e nos próximos anos o objetivo é que cada aluno e professor tenha seu próprio computador. De outro lado, cada dia são disponibilizados diferentes tipos de softwares livres em diversos sistemas operacionais, em particular o linux e o windows se beneficiam destas contribuições. O desafio presente e futuro é o que fazer com o ambiente computacional, presentes nas escolas, para conseguir uma melhoria na educação. O Geogebra é uma das respostas para o ensino da geometria, complementa bem as construções geométricas feitas manualmente e permite que as componentes das proposições e teoremas possam ser construídos, visualizados e modificados pelo próprio aluno.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo Padrões Pitágoricos*. São Paulo: Editora ATUAL, 1993.

[2] WAGNER, Eduardo. *Teorema de Pitágoras e Áreas*. 3ª edição. Iniciação Científica OBMEP, 2006.

[3] LIMA, E.L *Mais uma vez teorema de Pitágoras*. Resvista do professor de matemática,nº13, pp.57-58. S.B.M, 1998.

[4] LIMA, E.L, CARVALHO, P.C.P, WAGNER, E., MORGADO, A.C.*Teorema e Problema Elementares*. S.B.M ,2ºEdição,Capitulo 4, 2005.

[5] EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

[6] DORIA, Celso M. Doria *Se a Terra não é Plana, quais são as Relações Métricas adequadas para determinarmos Comprimentos e Ângulos?*. cmdoria@mtm.ufsc.br

[7] GEOGEBRA. Disponível em: *<http://www.geogebra.org>*

[8] The College Mathematics Journal: *Volume 34, N.2 Março de 2003*

[9] http://pt.wikibooks.org