



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ - UNIFAP
PROGRAMA MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



LUIZ DA SILVA FERREIRA

“UMA ABORDAGEM SOBRE MÉDIAS E SUAS APLICAÇÕES NO
ENSINO MÉDIO”

MACAPÁ – AP
2017

LUIZ DA SILVA FERREIRA

Dissertação apresentada ao Corpo Docente
do Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT – UNIFAP,
como requisito parcial para obtenção título
de Mestre em Matemática, sob orientação
do Profº. Dr. José Walter Cárdenas Sotil.

MACAPÁ – AP
2017

LUIZ DA SILVA FERREIRA

**“UMA ABORDAGEM SOBRE MÉDIAS E SUAS APLICAÇÕES NO
ENSINO MÉDIO”**

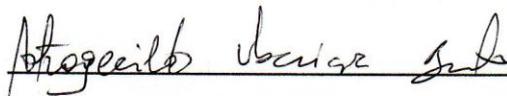
Dissertação apresentada ao Corpo Docente
do Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT – UNIFAP,
como requisito parcial para obtenção título
de Mestre em Matemática.

Defesa 03 / 03 / 2017

Banca Examinadora



Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil – UNIFAP



Prof. Me. Astrogecildo Ubaiara Brito - IFAP



Prof. Dr. Guzman Eulalio Isla Chamilco – Unifap



Prof. Dr. Erasmo Senger - UNIFAP

Dedico a Deus por me conceder a vida. A
minha mãe (in memoriam). A Francisca
Borges, minha esposa e aos meus filhos.
Abraços e beijos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus por toda sabedoria e humildade concedida a mim e está sempre comigo nos momentos difíceis.

À Universidade Federal do Amapá UNIFAP, que nos oportunizou a realização de um sonho.

À todos os professores e ao coordenador deste curso que contribuíram direta e indiretamente pelos ensinamentos que levarei por toda a vida.

Ao profº João Batista Góes (UFPA) pela contribuição de suma importância para o direcionamento deste trabalho.

Ao orientador deste estudo, professor Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil que abraçou a ideia e contribuiu generosamente para a conclusão deste trabalho.

Aos colegas de turma, pelo vínculo de amizade que construímos durante as aulas e os dias e noites de estudos que sempre estiveram dispostos a colaborar e me incentivaram em todos os momentos que precisei de apoio.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma sequência didática para ser adotada por professores de Matemática no intuito de promover a compreensão por parte dos alunos do assunto de Médias Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática. Esta proposta objetiva tornar as aulas mais dinâmicas e atraentes para a fixação do conteúdo e construção do conhecimento e propõe ser aplicada nas escolas (para alunos do Ensino Médio) uma vez que em diversas provas como ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), OBMEP (Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas) e processos seletivos aparecem situações-problema com este assunto. Nesta perspectiva, este estudo traz uma proposta de aplicação de atividades práticas de Médias. O trabalho traz um enfoque diferenciado das tradicionais aulas de Matemática, quebrando a rotina da sala de aula e permitindo uma abordagem mais interativa no ensino dessa disciplina.

Palavras-Chave: Médias. Aplicação das médias. Ensino.

ABSTRACT

In this work, we present a didactic sequence to be adopted by Mathematics teachers in order to promote students' understanding of Arithmetic, Geometric, Harmonic and Quadratic Matters. This proposal aims to make classes more dynamic and attractive for the content fixation and construction of knowledge and proposes to be applied in schools (for high school students) since in several tests like ENEM (National High School Examination), OBMEP (Brazilian Mathematics Olympiad of public schools) and selective processes appear problem situations with this subject. In this perspective, this study presents a proposal of practical activities of Averages. The work brings a different approach to traditional Mathematics classes, breaking the classroom routine and allowing a more interactive approach in teaching this subject.

Keywords: Averages. Application of averages. Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação da Média Aritmética.....	21
Figura 2: Representação da Geométrica	22
Figura 3: Representação da Média Harmônica	24
Figura 4: Representação da Média Quadrática	25
Figura 5: Representação das Médias Q, A, G e H	25
Figura 6: Escola Estadual Tessalônica -2016. Acervo pessoal.	26
Figura 7: Turma do 3º ano E.E Tessalônica - 2016. Acervo Pessoal	27
Figura 8: Turma do 3º ano realizando teste de nivelamento - 1. Acervo Pessoal.....	31
Figura 9: Aluna fazendo a leitura da apostila. Acervo Pessoal – 2016	31
Figura 10: Aluna jogando o Bingo das Médias. Acervo Pessoal -2016.....	32
Figura 11: Exemplo das fichas e da cartela do bingo	33
Figura 12: Alunos da turma assistindo ao Vídeo. Acervo Pessoal - 2016.....	33
Figura 13: Aluna resolvendo questão de Média Harmônica. Acervo Pessoal - 2016.....	34
Figura 14: Aluno resolvendo questão. Acervo Pessoal - 2016	34
Figura 15: Aplicações de questões do ENEM. Acervo Pessoal - 2016.....	35
Figura 16: Aplicação do teste de nivelamento 2. Acervo Pessoal - 2016	35
Figura 17: Gráfico da Média de Acertos	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Roteiro das Atividades	28
Tabela 2: Resultado do teste de nivelamento 1	39
Tabela 3: Resultado do teste de nivelamento 2.....	40

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
MEC	Ministério da Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
UNIFAP	Universidade Federal do Amapá
OBEMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
IDH	Índice de Desenvolvimento Humano
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Básico

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
1. A EDUCAÇÃO PARA PENSAR	14
2. MÉDIAS.....	18
2.1 MÉDIA ARITMÉTICA	18
2.2 MÉDIA PONDERADA.....	19
2.3 MÉDIA GEOMÉTRICA	19
2.4 MÉDIA HARMÔNICA.....	20
2.5 MÉDIA QUADRÁTICA	20
2.6 PAPUS, CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DAS MÉDIAS.....	20
2.6.1 REPRESENTAÇÃO DA MÉDIA ARITMÉTICA.....	21
2.6.2 REPRESENTAÇÃO DA MÉDIA GEOMÉTRICA	21
2.6.3 REPRESENTAÇÃO DA MÉDIA HARMÔNICA.....	22
2.6.4 REPRESENTAÇÃO DA MÉDIA QUADRÁTICA	24
2.6.5 DESIGUALDADES ENTRE AS MÉDIAS	25
3. METODOLOGIA.....	26
3.1 DELIMITAÇÃO DA PESQUISA.....	26
3.2 DIAGNÓSTICO DA TURMA	26
3.3 CRONOLOGIA DAS ATIVIDADES.....	27
3.4 EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA	28
3.5 DESENVOLVIMENTO DA METODOLOGIA	31
4. RESULTADOS DA PESQUISA	39
4.1 COMPARANDO OS RESULTADOS.....	42
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	46
ANEXO I	11
ANEXO II	13
ANEXO III	14

INTRODUÇÃO

É de conhecimento geral que certos problemas de matemática representam grandes desafios para quem tenta resolvê-los. Sabe-se que durante a evolução do ensino, a matemática sempre foi tida como difícil e, em muitos casos, rejeitada pelos alunos de todas as classes sociais e em todos os níveis de escolaridade, seja na cidade ou campo, apesar de ser indispensável no cotidiano.

“A Matemática é uma disciplina que se destaca em relação às outras, muito mais pela dificuldade que representa para muitos alunos do que pela sua importância enquanto área de conhecimento. Dificuldade entendida como algo complexo, complicado, custoso de entender e de fazer”. (Thomaz, 1999).

Desse fato, surgiu a ideia de aplicarmos uma metodologia diferenciada acerca do estudo das médias. Um conteúdo pouco abordado e quando é, aparece de maneira simplista. Tivemos a oportunidade de estudar essa temática de modo mais abrangente na disciplina Matemática Discreta (MA12), no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, polo Macapá.

Assim, o presente trabalho foi aplicado na escola Estadual Tessalônica, localizada na zona rural de Macapá. Com a intenção de desenvolver um projeto que contemplasse a população que vive no campo, pois a LDB preconiza que deve-se trabalhar conteúdos curriculares e metodologias que atenda às necessidades e interesses de estudantes da zona rural. Neste sentido, focamos em aplicar este trabalho nesta localidade, para oportunizar uma melhor educação e acesso ao conhecimento de maneira a valorizar seu saber.

A escolha de uma abordagem sobre o estudo das Médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, deu-se por ser um tema que desempenha papel essencial, pois proporciona ferramentas para análise, leitura e interpretação de dados, tabelas e gráficos, além de possuir grande aplicabilidade em outras áreas do conhecimento. No campo pessoal, ela estimula o raciocínio crítico que ajuda a resolver situações nas quais é necessário coletar, organizar, interpretar e estabelecer resultados.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), recomenda-se que desde o Ensino Fundamental, se aborde noções básicas de estatística para que o aluno seja confrontado com situações concretas e o mesmo possa compreender conceitos fundamentais dos fenômenos do cotidiano. Entre esses conceitos destaca-se a importância da média de uma sequência de valores numéricos.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN – Matemática, p.29 – 1997).

“Ao relacionar ideias matemáticas entre si, podem reconhecer princípios gerais, como proporcionalidade, igualdade, composição e inclusão e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e dedução estão presentes tanto no trabalho com números e operações como em espaço, forma e medidas. O estabelecimento de relações é tão importante quanto a exploração dos conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, os conteúdos podem acabar representando muito pouco para a formação do aluno, particularmente para a formação da cidadania...”

Porém, observa-se que os alunos, quando chegam ao Ensino Médio, seu conhecimento sobre as Médias é incipiente e uma consequência disso é que os conteúdos prévios para o Ensino Médio contidos nos Parâmetros Curriculares Nacionais são postos e de maneira abstrata e conteudista, baseado em repetições de exercícios, que pouco desenvolvem o saber matemático, de acordo com Garcia (2009).

Para alcançar os objetivos propostos realizamos práxis didática, com a utilização de vários recursos com a finalidade de desenvolver nos alunos habilidades em Matemática, buscando encontrar soluções para o processo ensino aprendizagem. Segundo Garcia (2009) diferentes tipos de abordagem trazem melhoria no ensino e aprendizagem, pois a “Matemática é construção humana, linguagem, pensamento, conceitos e técnicas criadas a partir do mundo, para auxiliar na compreensão do mundo”.

No primeiro capítulo foi realizado um estudo sobre a evolução da Educação no campo, a trajetória percorrida para proporcionar o direito ao saber e respeito as especificidades de quem mora na zona rural. Além disso, foi abordado como o Estado do Amapá vem tratando as populações que moram em lugares de difícil acesso, de como a educação chega até eles.

O segundo capítulo trata das Médias Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática que pouco é vista no Ensino Médio. Definimos cada uma delas, além de fazer a representação de tais médias geometricamente segundo **Papus**, utilizando diversas construções e aplicando relações e conceitos matemáticos, permitindo a percepção de forma lúdica entre as desigualdades das médias.

No terceiro capítulo, apresentamos a experiência em sala com aplicação de questionários. O primeiro questionário foi aplicado versando questões sobre médias. E, antes da aplicação do segundo questionário, foi trabalhado os conceitos de médias, bem como jogo, vídeo e resoluções de exercícios. Finalizando com o segundo questionário para avaliar e compreensão a respeito da temática.

O quarto capítulo configurou-se com a confrontação do estudo realizado com a metodologia aplicada. Visando sugerir uma proposta de ensino das médias que seja passível de aplicação prática.

1. A EDUCAÇÃO PARA PENSAR

O Estado do Amapá não alcançou nota suficiente para atingir a meta do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) em nenhuma das séries e anos dos ensinos Médio e Fundamental em 2015. No 3º ano do Ensino Médio foi 3,3 o índice divulgado, no portal do Instituto de Estudos e Pesquisas Educacionais (Inep).

Com base nesses dados, infelizmente, é notório que nossas escolas públicas têm passado por muitas dificuldades, e uma delas é a desmotivação dos alunos causada pelo ensino conteudista e repetitivo, sem algo que desperte o interesse em aprender. Logo, é visível a redução significativa de alunos no Ensino Médio em salas de aula. Somado a tudo isso, ainda encontramos a difícil realidade encontrada pela população do campo. Toda essa situação contribui severamente para o baixo rendimento e, muitas vezes, a assustadora evasão escolar.

Nosso estado não foge à realidade brasileira que passa por problemas crônicos na educação como um todo, constituindo um desafio a ser enfrentado pelo Sistema Educacional, para que tenhamos uma melhoria qualitativa e quantitativa.

Novas metodologias, novas formas de aprender e ensinar são cada vez mais urgentes. Cada indivíduo tem sua prática. Todo professor, ao iniciar sua carreira, vai fazer na sala de aula, basicamente, o que ele viu alguém que o impressionou fazendo. E vai deixar de fazer algo que viu e não aprovou, num primeiro contato. Incorporando-se à prática docente, mas, essa prática, por sua vez, vai novamente solicitar e alimentar teorizações que irão refletir em sua modificação, contribuindo para um melhor desempenho do ser humano no desenvolvimento de suas habilidades, aumentando assim, o entusiasmo e interesse do educando pelo ensino.

1.1 Educação do Campo

A Educação do Campo é resultado de intensos movimentos e articulações em defesa de um projeto educativo que atenda às necessidades do meio rural. Nesse sentido, buscou-se defender o direito de políticas públicas que respeitassem as especificidades dos povos do campo, uma vez que as pessoas têm o direito de acesso e permanência à uma escola pública de qualidade sem precisar sair do meio onde vivem.

Dessa forma, incorporou-se uma identidade as escolas do campo que foram expressamente definidas nas Diretrizes Nacionais (art. 2º, parágrafo único CNE/CEB, 2002)

(...) pela sua vinculação às questões inerentes à sua realidade, ancorando-se na temporalidade e saberes próprios dos estudantes, na memória coletiva que sinaliza futuros, na rede de ciência e tecnologia disponível na sociedade e nos movimentos sociais em defesa de projetos que associem as soluções exigidas por essas questões à qualidade social da vida coletiva no país.

Porém, infelizmente, as populações rurais ainda sofrem com indicadores de IDH menos favoráveis em comparação à população urbana e o índice de diferença da qualidade de ensino entre os estudantes do campo e da cidade confirmam a necessidade de superá-la.

Sabe-se que existe uma visão urbanocêntrica – visão de educação pautada no modelo didático-pedagógico utilizado na cidade sendo transferido para as zonas rurais – no qual o campo é visto como um lugar de atraso, tendendo ao desaparecimento, secundário. Esse modelo de educação é ofertado no Brasil desde o século XX, mesmo nosso país sendo originalmente agrário, pois acreditava-se que as técnicas de cultivo não necessitavam de trabalhadores rurais com alguma preparação ou mesmo alfabetização.

A escola brasileira, de 1500 até o século XX, serviu e serve para atender as elites, sendo inacessível para grande parte da população rural. Para as elites do Brasil agrário, as mulheres, indígenas; negros (as) e trabalhadores (as) rurais não precisavam aprender a ler e escrever, pois, para desenvolver o trabalho agrícola o letramento era desnecessário. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (2010, p.16)

Diante desse paradigma, a educação torna-se fundamental para transformar a realidade da população rural, uma vez que é nesse espaço que esses homens e mulheres terão acesso ao conhecimento produzido pela humanidade. Logo, existe a real necessidade de superar o antagonismo entre cidade x campo, passando a encará-los como duas partes de uma única sociedade, interdependentes e de igual valor, superando a visão de que o melhor é sempre urbano e que o progresso de um país se mede pela diminuição da população que vive no campo.

Nessa perspectiva, a escola é vista como espaço emancipatório, desde que associada à construção da democracia e de uma sociedade mais justa e igualitária, onde se levantarão as bases de uma escolarização de qualidade as populações menos favorecidas.

É com tal propósito que surgiu o Ensino Modular do Estado do Amapá que veio como uma resposta às necessidades das comunidades do Interior que não tinham a possibilidade de serem assistidos pelo Estado.

1.2 Projeto SOME

O Sistema de Organização Modular de Ensino – SOME, surgiu em caráter experimental, como proposta pedagógica alternativa visando proporcionar um ensino de qualidade, tendo como ponto de referência a problemática sociocultural, econômica e política do contexto onde será desenvolvido, garantindo novos conhecimentos a partir das experiências de vida e da valorização dos recursos econômicos existentes em cada comunidade.

Partindo da concepção de que cada comunidade possui necessidades e particularidades próprias, mas entendendo também que o processo educativo tem como foco a “Formação integral do indivíduo”, as ações pedagógicas do SOME são planejadas considerando a escola como um lugar aberto, dinâmico e criativo com autonomia capaz de gestar e gerir o ato educativo em consonância com toda comunidade escolar.

Com referencial partimos da premissa dos conhecimentos empíricos dos alunos, na mediação do professor como orientador do processo. Dessa forma, aluno e professor passam a ser juntos, sujeitos que constroem, elaboram e transformam o próprio ato de conhecer. Todo esse processo ocorre em “50 dias” letivos por módulo e “200 dias” letivos anuais com “800 horas / aulas” em cada série / ano, preservando-se o que determina a LDB 9394/96 e tendo como pressuposto que a educação se faz na contradição sócio-cultural-econômica e política, características específicas de uma concepção “Dialética” da sociedade.

Como forma de garantir este acesso ao conhecimento nas diversas localidades do Estado em que não seja possível estruturar o ensino regular, em razão do quadro e dificuldades apresentadas no processo educacional do Estado, foi implantado em caráter experimental o Sistema de Organização Modular de Ensino SOME, garantindo o ensino sistemático à Zona Rural do Estado do Amapá (localidades de fácil e difícil acesso), respaldado na Lei 9394/95, art. 81 da Lei de diretrizes e Bases da educação (LDB) onde “É permitido organização de cursos ou instituição de ensino experimental, desde que obedecidas às disposições desta lei”.

Levando em consideração a especificidade e amplitude do Projeto SOME a Gerência do Projeto tem como finalidade coordenar, monitorar, avaliar e assegurar as condições necessárias para o pleno êxito da execução, garantindo assim o ensino de maior qualidade à população nos vários Municípios do Estado do Amapá.

Nessa Perspectiva, O “Projeto Some” afirmou-se definitivamente como uma alternativa coerente e compromisso político-social do Estado para com as comunidades interioranas no sentido amplo do exercício consciente da cidadania.

É dentro desse projeto que esta pesquisa se desenvolveu, como forma de trabalhar de maneira lúdica um assunto preterido nas provas de ENEM, OBEMEP e Concursos, devido a real deficiência dos resultados dos alunos da escola rural nas respectivas provas.

Médias Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática são hoje conteúdos pouco trabalhados, mas muito importantes no dia a dia bem como requisitados em diversas provas e níveis. Nesse sentido, propõe-se uma metodologia apropriada a atender as dificuldades desses alunos, uma vez que a educação rural é muitas vezes limitada, seja pela negação de sua importância, seja pelos poucos recursos destinados as escolas que existem.

O objetivo será de oportunizar um conhecimento ao aluno da zona rural e distanciar o desnivelamento entre o aluno do campo do aluno da cidade, oferecendo oportunidade de acesso ao conhecimento de forma a usar no meio em que vive, bem como disputar provas de que será submetido do decorrer de sua vida em caráter de igual concorrência.

2. MÉDIAS

O conceito de médias é muito utilizado no cotidiano, principalmente associado a dados estatísticos que apontam onde se concentra uma tendência de distribuição de certa característica. As médias são essenciais para fazer estimativas de tendências de crescimento populacional, de taxas de rendimento em investimentos ao longo de um dado tempo.

Neste capítulo, apresentaremos uma breve introdução das principais médias. Segundo MORGADO (2014), as médias estão associadas a uma lista de números e um valor que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar uma certa característica da lista.

Dessa forma, seja uma sequência finita de números $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e uma operação $*$ sobre os números dessa sequência, então uma Média dos elementos dessa sequência com respeito á operação $*$ é um número real M tal que:

$$x_1 * x_2 * x_3 * \dots * x_n = \underbrace{M * M * \dots * M}_{n \text{ termos}}$$

- Mantem a sua soma, dizemos que M é a média aritmética desse conjunto de números.
- Mantem o seu produto, dizemos que M é a média geométrica.
- Mantem a soma de seus inversos, dizemos que M é a média harmônica.
- Mantem a soma de seus quadrados, dizemos que M é a média quadrática.

Uma propriedade importante da média segundo Cauchy, que não poderíamos deixar de comentar é que a média é, de fato um número intermediário, entre o menor e o maior elemento da sequência. Isto é.

$$\min\{x_i\} \leq M \leq \max\{x_i\},$$

Com $i = 1, 2, \dots, n$. Obviamente, se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, a média é igual a estes números.

2.1 Média Aritmética

A média aritmética de uma sequência de números reais (x_1, x_2, \dots, x_n) , para $n > 1$, chamamos de média aritmética o número real, que indicamos por A , tal que

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = A + A + \dots + A = n.A.$$

Portanto,

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Segue que:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Podemos verificar na sequência de números reais (x_1, x_2, \dots, x_n) a ocorrência de valores iguais, nos levando a definição de uma média aritmética onde $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ tem pesos. Então, se agruparmos os termos iguais e multiplicarmos pela frequência de cada um deles, terá a conhecida média aritmética ponderada.

2.2 Média Ponderada

A média aritmética ponderada de uma sequência de números (x_1, x_2, \dots, x_n) com pesos (p_1, p_2, \dots, p_n) , com $p_i > 0$, é o número P tal que.

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = p_1 P + p_2 P + \dots + p_n P.$$

Portanto,

$$P = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

2.3 Média Geométrica

A média geométrica de uma sequência de números reais positivos (x_1, x_2, \dots, x_n) é o número G com respeito à operação de multiplicação, desta forma.

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \underbrace{G \cdot G \cdot \dots \cdot G}_{n \text{ termos}} = G^n.$$

Portanto,

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

2.4 Média Harmônica

A média harmônica de uma sequência de números reais não nulos (x_1, x_2, \dots, x_n) é o número H com respeito a operação de soma dos inversos, desta forma.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{H} + \frac{1}{H} + \dots + \frac{1}{H}}_{n \text{ termos}} = \frac{n}{H}$$

Portanto,

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

2.5 Média Quadrática

A média quadrática de uma sequência de números reais não nulos (x_1, x_2, \dots, x_n) é o número Q com respeito a operação de soma dos quadrados, desta forma.

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \underbrace{Q^2 + Q^2 + \dots + Q^2}_{n \text{ termos}} = nQ^2$$

Portanto,

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$$

2.6 Pappus, Construções Geométricas das Médias

O grego Pappus de Alexandria, que viveu no século IV, é descrito como um matemático habilidoso, elegante e com muitas ideias. Viveu em uma época em que a matemática grega estava em declínio, mas isto não o impediu de, no ano 320 aproximadamente, escrever sua obra Coleção matemática, composta por oito livros.

Focando nossa atenção no livro III da Coleção Matemática, onde Pappus trata da teoria das médias, onde oferece a construção geométrica simples, onde representa geometricamente em um semicírculo a média aritmética, a média geométrica e a média harmônica.

2.6.1 Representação da Média Aritmética

Sejam a e b dois segmentos distintos, construir a média aritmética (A) conforme orientação a seguir:

- Construa dois segmentos colineares \overline{AB} e \overline{BC} de comprimentos a e b , respectivamente;

- Marque o ponto médio O do segmento \overline{AC} ;

- Construa um semicírculo com centro em O , tendo \overline{AC} como diâmetro, onde $D = a + b$;

- Por construção, resulta que \overline{AO} (ou \overline{OC}) é o raio do semicírculo que é a média aritmética de a e b , uma vez que;

$$D = a + b$$

$$D = 2r$$

$$2r = a + b$$

$$r = \frac{a + b}{2}$$

Logo, AO é a média aritmética A , assim $A = \frac{a + b}{2}$

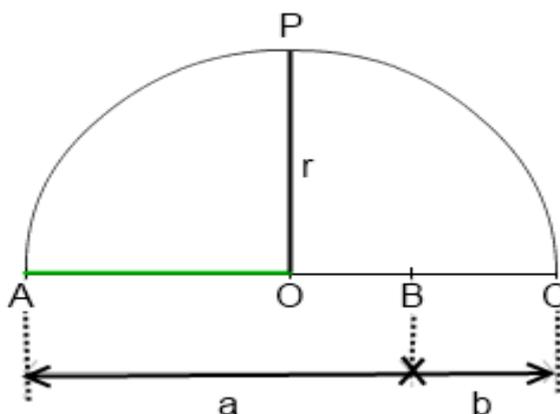


Figura 1: Representação da Média Aritmética

2.6.2 Representação da Média Geométrica

- A partir do semicírculo construído na figura 1, traçaremos por B um segmento perpendicular ao diâmetro \overline{AC} e denotando por D o ponto de interseção deste segmento com o semicírculo;

- Construa os segmentos \overline{AD} e \overline{CD} ;

- Como o triângulo ADC está inscrito no semicírculo e que seu lado \overline{AC} é o diâmetro do semicírculo, logo esse triângulo é retângulo em $\hat{A}DC$, assim temos que $\hat{D} + \hat{B} = 90^\circ$;

- Utilizando-se das relações métricas no triângulo retângulo, temos que. A altura elevado ao quadrado, será igual ao produto das projeções \overline{AB} e \overline{BC} ;

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}$$

Resulta que \overline{BD} é a média geométrica G , e que $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$, então temos que:

$$G = \sqrt{a \cdot b}$$

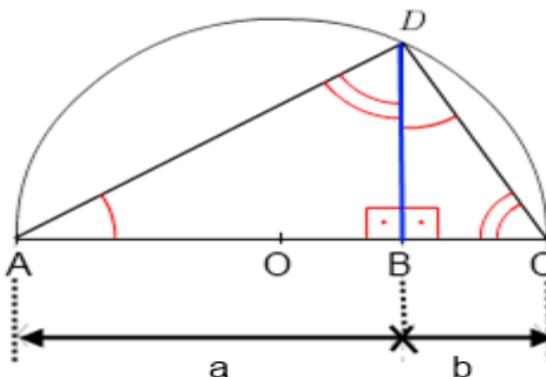


Figura 2: Representação da Geométrica

2.6.3 Representação da Média Harmônica

- A partir do semicírculo construindo na figura 2, trace o raio \overline{OD} . Que vai do centro até o ponto D ; sendo que $\overline{OD} = r = \frac{a+b}{2}$;

- A partir de B , trace um segmento perpendicular ao raio \overline{OD} . Denotando por F o ponto de interseção deste segmento com o raio \overline{OD} ;

- Considere que os triângulos OBD e DFB são semelhantes, visto que o ângulo com vértices em D é ângulo comum a estes triângulos, e que estes triângulos DFB e DBO possuem, respectivamente, o ângulo reto com vértices em F e B .

Então, desta relação temos :
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{O\hat{D}B} = \widehat{F\hat{D}B} \\ \widehat{D\hat{B}O} = \widehat{D\hat{F}B} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{D\hat{O}B} = \widehat{D\hat{B}F}, \text{ e que:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{O\hat{D}B} = \widehat{F\hat{D}B} \\ \widehat{D\hat{B}O} = \widehat{D\hat{F}B} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta OBD \sim \Delta DFB$$

Então, pela semelhança temos que:

$$\Delta DOB \sim \Delta DBF \Rightarrow \frac{OD}{BD} = \frac{BD}{FD} = \frac{OB}{BF}$$

Onde temos que:

$$\overline{BD} \cdot \overline{BD} = \overline{OD} \cdot \overline{FD}$$

Em que $\overline{BD} \cdot \overline{BD}$ representa a média geométrica e OD é o raio do semicírculo, assim teremos que:

$$\overline{BD} \cdot \overline{BD} = \overline{OD} \cdot \overline{FD} \Rightarrow a \cdot b = \frac{a+b}{2} \cdot \overline{FD} \Rightarrow \overline{FD} = \frac{a \cdot b}{\frac{a+b}{2}} = \frac{1}{\frac{a+b}{2a \cdot b}} \Rightarrow \overline{FD} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{a \cdot b} + \frac{b}{a \cdot b} \right)}$$

Segue que:

$$\overline{FD} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{a \cdot b} + \frac{b}{a \cdot b} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}} = \frac{2}{\frac{a+b}{a \cdot b}} = \frac{2a \cdot b}{a+b}$$

Resulta que \overline{FD} é a média Harmônica H de a e b , pois.

$$\overline{FD} = \frac{2a \cdot b}{a+b} \Rightarrow H = \frac{2a \cdot b}{a+b} \Rightarrow H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

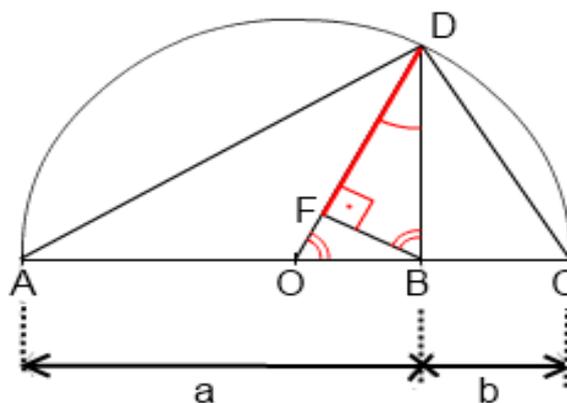


Figura 3: Representação da Média Harmônica

2.6.4 Representação da Média Quadrática

- A partir do semicírculo construindo na figura 1, construir o segmento l , de extremidades onde D toca a circunferência saindo do ponto B ;

- Seja o segmento \overline{OB} formado pela diferença dos segmentos \overline{OC} e \overline{BC} , sendo que

$\overline{OC} = \frac{a+b}{2}$ e $\overline{BC} = b$. Assim teremos;

$$\overline{OB} = \overline{OC} - \overline{BC}$$

$$\overline{OB} = \frac{a+b}{2} - b \Rightarrow \overline{OB} = \frac{a-b}{2}$$

Logo o triângulo OPB é retângulo, de hipotenusa l e catetos \overline{OB} e \overline{PB} , aplicando o teorema de Pitágoras nesse triângulo retângulo, onde temos;

$$\overline{PB}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{OB}^2$$

$$l^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$l^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Resulta que \overline{PB} é a média Quadrática Q de a e b , onde;

$$\overline{PB} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

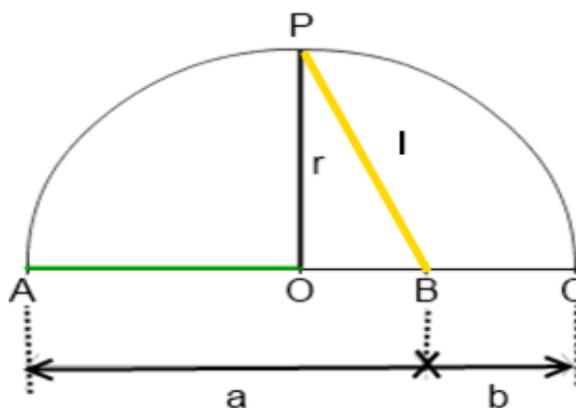


Figura 4: Representação da Média Quadrática

2.6.5 Desigualdades entre as Médias

A partir das construções realizadas chegamos aos seguintes resultados para as médias:

- \overline{DO} é a média Aritmética (A);
- \overline{DB} é a média Geométrica (G);
- \overline{DF} é a média Harmônica (H),
- \overline{PB} é a média Quadrática (Q)

Podemos verificamos esses resultados na figura 5 que:

$$A \geq G$$

$$G \geq H$$

$$Q \geq A$$

↓

$$Q \geq A \geq G \geq H$$

Portanto;

$\overline{PB} > \overline{DO} > \overline{DB} > \overline{DF}$, ou seja $(Q) > (A) > (G) > (H)$, valendo a igualdade,

$(Q) \geq (A) \geq (G) \geq (H)$, apenas quando $a = b$.

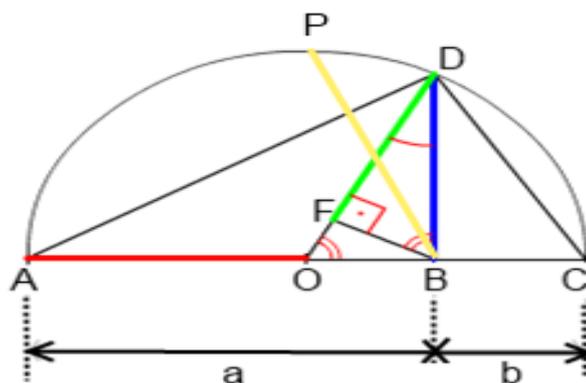


Figura 5: Representação das Médias Q, A, G e H

3. METODOLOGIA

3.1 Delimitação da pesquisa

O estudo desenvolveu-se na Escola Estadual Tessalônica (figura 6) localizada na Zona Rural de Macapá-Ap, Km 40 da Br 156, Vila Tessalônica . O trabalho foi realizado com um grupo de 12 alunos da turma de 2016 do 3º Ano do turno da noite.



Figura 6: Escola Estadual Tessalônica -2016. Acervo pessoal.

Funcionamento e Estrutura Física

A escola funciona em dois sistemas de ensino, sendo regular para o Ensino Fundamental 1 e Modular que atende o Fundamental II e o Ensino Médio. Sua estrutura abrange: 4 salas de aulas; sala de diretoria; sala da secretaria; biblioteca; banheiros; refeitório e sala para atendimento educacional especializado (AEE). A escola possui em média 21 funcionários, distribuídos em administrativo, pedagógico, docentes e serviço de apoio. A escola dispõe: computadores administrativos; equipamento de som; impressora; equipamentos multimídias; aparelho Dvd; antena parabólica e data show .

3.2 Diagnóstico da turma

A presente pesquisa foi aplicada em uma turma de 12 alunos do 3º ano do Ensino Médio do turno da noite, sendo 10 sexo feminino e 2 do sexo masculino (figura 7). Esta turma,

de uma forma geral, é participativa demonstrando interesse nas atividades desenvolvidas em sala de aula. Apesar de apresentarem níveis de conhecimento diferentes - uma vez que muitos possuem dificuldades nos conhecimentos prévios em Matemática - os alunos demonstraram ser solidários com os colegas que possuem maior dificuldade, favorecendo assim uma interação e maior proveito do que está sendo estudado. Sobre as condições de vida, sabe-se que os mesmos são provenientes de famílias com poucos recursos financeiros, mas que se esforçam pra mudar essa realidade por meio do estudo.



Figura 7: Turma do 3º ano E.E Tossalônica - 2016. Acervo Pessoal

3.3 Cronologia das atividades

Descrição dos dias e das atividades da turma que fizeram parte do estudo, realizado no turno da tarde, no horário de 13h00min às 16h00min.

Data	Local	Descriminação da Atividade
12/12/16	E.E TESSALÔNICA	Aplicação de um questionário para determinar o nível de conhecimento da turma sobre o tema e aplicação de um bingo denominado Bingo das Médias. Anexo 1
13/12/16	E.E TESSALÔNICA	Aplicação de vídeo sobre médias e atividade relacionada às médias (questões de concursos). Anexo 2
14/12/16	E.E TESSALÔNICA	Aplicação de atividade relacionada às médias: OBEMEP e SAEB. Anexo 3

15/12/16	E.E TESSALÔNICA	Aplicação de atividade relacionada às médias: ENEM
16/12/16	E.E TESSALÔNICA	Aplicação de um questionário para determinar o nível final de conhecimento das médias

Tabela 1: Roteiro das Atividades

3.4 Experiência em sala de aula

No primeiro momento foi utilizado um questionário para determinar o nível de conhecimento dos alunos sobre o assunto, com sete questões de múltipla escolha, trabalhando conceitos básicos de Médias. Neste, optou-se por questões de múltipla escolha por favorecer uma análise mais objetiva dos resultados e facilitar a comparação entre porcentagens de acertos, bem como utilizar os resultados do questionário como forma de análise da metodologia aplicada.

Cada questão continha cinco alternativas, sendo uma delas “não sei”. As questões foram divididas em: duas de Média Aritmética, duas de Média Geométrica e duas de Média Harmônica e uma de Média Quadrática, sendo que a primeira é uma questão conceitual. O Teste de Nivelamento aplicado aos alunos foi o seguinte:


UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ-UNIFAP

QUESTIONÁRIO 01 APLICADO AOS EDUCANDOS DA ESCOLA ESTADUAL TESSALÔNICA, ZONA RURAL DE MACAPÁ.



Aluno(a): _____

1) Qual a definição correta de média aritmética?

- A) () Soma dos valores de um determinado conjunto de medidas, dividindo-se o resultado dessa soma pela quantidade dos valores que foram somados.
- B) () A média aritmética é usada para atingir um valor médio de vários valores. Seu valor é calculado por meio da multiplicação dos números somados pela quantidade deles.
- C) () Média aritmética de dois ou mais termos é o produto do resultado da divisão da soma dos números dados pela quantidade de números somados.
- D) () É a Multiplicação dos valores de um determinado conjunto de medidas, dividindo-se o resultado pela quantidade dos valores que foram multiplicados.
- E) () Não sei.

2) João deseja calcular a média das notas que tirou em Matemática, de acordo com a tabela.

Matemática	
1ª prova	8,0
2ª prova	9,0
3ª prova	6,0
4ª prova	5,0

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) Não sei.

3) calcule a média geométrica de 2 e 8.

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) Não sei.

4) Calculando a média geométrica entre 2, 4 e 8, obtemos.

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) Não sei.

5) Qual a média harmônica de 3 e 6?

- (A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) Não sei

6) A média harmônica entre 15 e 5 é.

- (A) $\frac{2}{15}$ (B) $\frac{15}{2}$ (C) $\frac{4}{15}$ (D) $\frac{2}{15}$ (E) Não sei

7) Qual a média quadrática de 1 e 7?

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 8

(E) Não sei

Gabarito:

1. A

2. C

3. A

4. D

5. B

6. B

7. C

3.5 Desenvolvimento da metodologia

- Aula 1 (3 horas aula):

A aula iniciou-se explicitando aos alunos que se tratava de um projeto de pesquisa e que seria importante a atenção em suas respostas. O objetivo seria verificar os conhecimentos prévios por meio de um teste de nivelamento sobre médias aritméticas, geométrica, harmônica, geométrica e quadrática em nível de Ensino Médio (Figura 8). Em seguida foi entregue aos mesmos um material apostilado contendo os conceitos fundamentais e aplicações do assunto em questão (Figura 9) dando início a aula expositiva-dialogada, no qual os mesmos direcionaram sua atenção tirando dúvidas.



Figura 8: Turma do 3º ano realizando teste de nivelamento - 1. Acervo Pessoal



Figura 9: Aluna fazendo a leitura da apostila. Acervo Pessoal – 2016

Ao final, foi aplicado um bingo denominado “Bingo das Médias” (figura 10), de minha autoria, com intuito de trabalhar de forma lúdica o assunto proposto. Neste, os alunos entusiasmaram-se e puderam aplicar o que aprenderam nesse dia.



Figura 10: Aluna jogando o Bingo das Médias. Acervo Pessoal -2016

Aula prática nº 01: Bingo das Médias

a) **Objetivos:** Que o/a aluno seja capaz de:

- Resolver médias;
- Desenvolver sua capacidade de fazer cálculo mental;
- Fixar o conteúdo das médias tais como: média aritmética, média geométrica e média harmônica.

b) **Material:**

- Fichas contendo as médias, para serem calculadas – marcadores (Figura 11),
- 12 cartelas de bingo;
- 1 caixa-depósito para as fichas contendo as médias do bingo;
- Quadro, pincel, papel, caneta;
- 3 Caixas de bombons.

c) **Como Jogar:**

- As cartelas apresentam três linhas, sendo a primeira linha correspondente à média aritmética, e a segunda linha a média geométrica e a terceira a média harmônica (Figura 11).
- O professor lerá as médias que contém nas fichas, e o/a jogador/a deverá marcar em sua cartela as respostas que conter;
- O professor determinará o tempo que aguardará até a resolução do cálculo;
- Ganhará o/a jogador/a quem preencher primeira toda a sua cartela. Além disso, o professor pode estabelecer ganhadores/as com o preenchimento apenas de uma linha ou cartela cheia.

FICHAS	CARTELA				
MA: 2 e 4	3	MA	5	MA	12
MG: 20 e 45	MG	6	MG	30	MG
MH: 40 e 60	4	MH	9	MH	48

Figura 11: Exemplo das fichas e da cartela do bingo

- Aula 2 (3 horas aula):

No segundo dia, a aula iniciou com a exposição do vídeo (Figura 12), como mais uma ferramenta de apoio ao tema, seguida de mais explicações de forma a fixar situações e contextualizações.

De forma a aplicar esse conhecimento, foram trabalhadas questões de Concursos (Anexo I), no qual os alunos tiveram a oportunidade de observar como esse tema é abordado nesse tipo de prova (figura 13).



Figura 12: Alunos da turma assistindo ao Vídeo. Acervo Pessoal - 2016

Tema do Vídeo: Médias - Média aritmética ponderada e geométrica: o vídeo abrange questões que abordam o conteúdo do Ensino Médio através de situações e contextualizações.

Conteúdos: Médias - média aritmética, ponderada e geométrica.

Duração: Aprox. 10 minutos.

Objetivos:

1. Introduzir o conceito de médias: Aritmética, ponderada e geométrica;
2. Apresentar a interpretação frequentista das médias;

A utilização do vídeo como recurso foi bastante proveitosa já que veio pra aprofundar ainda mais a temática e permitir uma visualização diferenciada e dinâmica da temática. Observou-se que a praticidade obtida pelo vídeo serviu para melhor fixar o conteúdo e por ser de duração curta, não se tornou cansativo. As situações-problema mostradas elevou ainda mais a confiança dos alunos, logo, nota-se que o uso de mais esse recurso veio garantir uma integração entre o aluno e o objeto de conhecimento, permitindo aproximar a Matemática das situações vividas no cotidiano, bem como proporcionar momentos de interação durante as aulas.

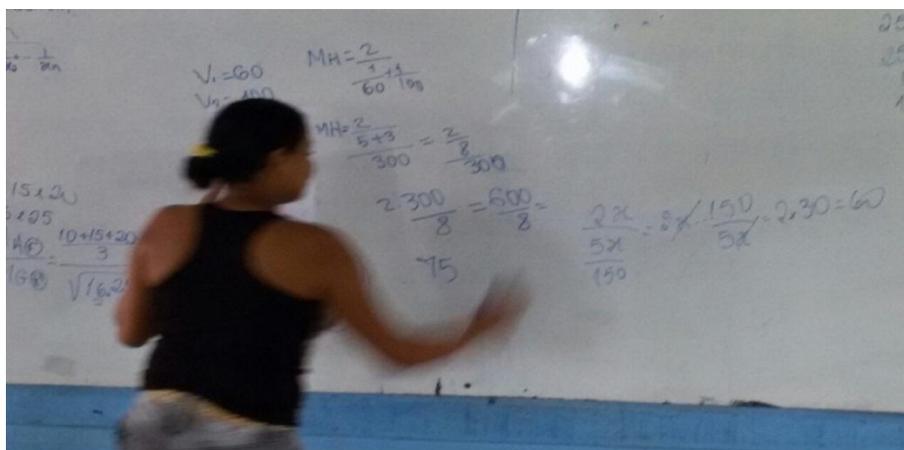


Figura 13: Aluna resolvendo questão de Média Harmônica. Acervo Pessoal - 2016

AULA 3 (3 horas aula):

Resolução de questões extraídas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBEMEP) e Sistema de Avaliação de Educação Básica (SAEB), contidas no (Anexo II) dando explicações e tirando dúvidas com atendimento individual (Figura 14).

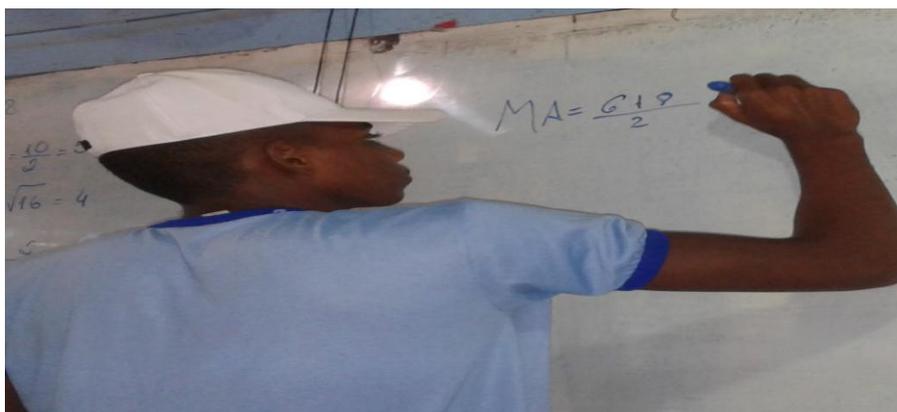


Figura 14: Aluno resolvendo questão. Acervo Pessoal - 2016

AULA 4 (3 horas aula):

Para esta aula foram resolvidas questões retiradas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) contidas no (Anexo III) instigando-os a buscar soluções apropriadas para resolver os problemas e concretizando a aquisição do saber, como mostra a (Figura 14).



Figura 15: Aplicações de questões do ENEM. Acervo Pessoal - 2016

AULA 5 (2 horas aula):

Para encerrar, foi aplicado um teste de nivelamento final (Figura 15) com questões mais trabalhadas e organizadas de forma a aferir os conhecimentos adquiridos pelos alunos.



Figura 16: Aplicação do teste de nivelamento 2. Acervo Pessoal - 2016


UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ-UNIFAP
**QUESTIONÁRIO 02 APLICADO AOS
EDUCANDOS DA ESCOLA ESTADUAL**


Aluno(a): _____

1-(Adaptado) Letícia está pesquisando preços da farinha para comprar mais barato. Ela anotou preços de três lugares diferentes e descobriu que o preço médio da farinha é de R\$ 3,00. Qual a alternativa que representa o possível valor que Letícia encontrou.

- (A) 1, 1, 1 (B) 1, 3, 5 (C) 2, 4, 6 (D) 2,3, 6 (E) Não sei.

2) (Adaptado) Em uma classe da escola Tessalônica com 30 rapazes e 20 moças, foi realizada uma prova de matemática: a média dos rapazes foi 7 e das moças 8. A média da classe foi:

- (A) 7,4 (B) 7,5 (C) 7,6 (D) 7,2 (E) Não sei.

3) (Adaptado) O aluguel de um trator sofreu um aumento de 8% em 2010, depois um aumento de 12% em 2011 e de mais 15% em 2012. Qual foi aproximado o aumento médio anual?

- (A) 11,63 (B) 15,63 (C) 6,6 (D) 5,4 (E) Não sei.

4) Quando três números reais, positivos e não nulos formam uma progressão geométrica, dizemos que o termo do meio corresponde à média geométrica dos outros dois.

Desse modo, qual é a média geométrica entre 4 e 9?

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 9 (E) Não sei.

5) Sejam A e B as raízes da equação $x^2 - 10x + 16 = 0$. Calcule a média aritmética e a média geométrica, respectivamente, de A e B.

- (A) 5 e 4 (B) 5 e 5 (C) 6 e 4 (D) 4 e 8 (E) Não sei.

6) (Adaptado) Uma turma realizou um passeio de ônibus, que vai do Tessalônica a Macapá a uma velocidade média de 50 Km por hora; no retorno sua velocidade média foi de 75 Km/h. Considerando todo o percurso de ida e volta, a velocidade média, em Km/h foi de:

- (A) 60 (B) 62,5 (C) 65 (D) 70 (E) Não sei.

7) Associa-se, em paralelo, três resistores de resistências $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 5\Omega$ e $R_3 = 10\Omega$, O resistor médio vale:

- (A) 5Ω (B) 6Ω (C) 10Ω (D) 15Ω (E) Não sei.

8- ENEM 2011

A participação dos estudantes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) aumenta a cada ano. O quadro indica o percentual de medalhistas de ouro, por região, nas edições da OBMEP de 2005 a 2009:

Região	2005	2006	2007	2008	2009
Norte	2%	2%	1%	2%	1%
Nordeste	18%	19%	21%	15%	19%
Centro-Oeste	5%	6%	7%	8%	9%
Sudeste	55%	61%	58%	66%	60%
Sul	21%	12%	13%	9%	11%

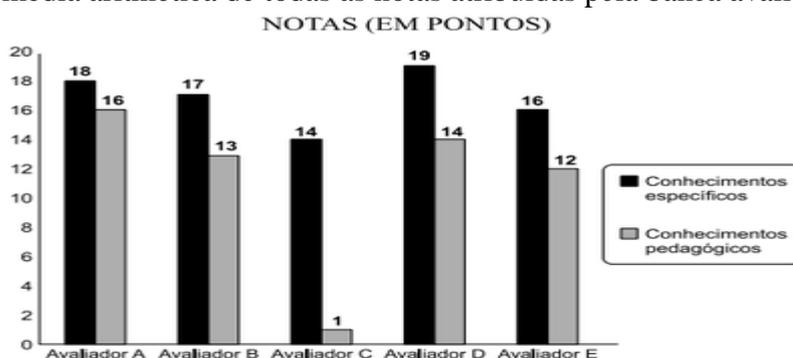
Disponível em: <http://www.obmep.org.br>. Acesso em: abr. 2010 (adaptado). (Foto: Reprodução/Enem)

Em relação às edições de 2005 a 2009 da OBMEP, qual o percentual médio de medalhistas de ouro da região Nordeste?

- A) 14,6%
- B) 18,2%
- C) 18,4%
- D) 19,0%
- E) 21,0%

9- ENEM 2013

As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.



Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é

- A) 0,25 ponto maior.
- B) 1,00 ponto maior,
- C) 1,00 ponto menor.
- D) 1,25 ponto maior.
- E) 2,00 pontos menor

10- ENEM 2014

Ao final de uma competição de ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas química e física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre números inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de química. No dia em que sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas. O quadro apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais.

A menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de química para vencer a competição é:

- A) 18.
- B) 19.
- C) 22.
- D) 25.
- E) 26.

Candidato	Química	Física
I	20	23
II	X	25
III	21	18

Gabarito:

- 1. B
- 2. A
- 3. A
- 4. D
- 5. A
- 6. A
- 7. B
- 8. C
- 9. B
- 10. A

4. RESULTADOS DA PESQUISA

A tarefa realizada pelos alunos no tocante às soluções dos problemas propostos no questionário 1 culminou com os resultados mostrados no quadro seguinte.

Número de acertos e não acertos em cada problema			
	ACERTOS	Erros	Não sei
Problema 1	7	3	2
Problema 2	10	-	2
Problema 3	2	-	10
Problema 4	-	2	10
Problema 5	-	2	10
Problema 6	-	2	10
Problema 7	-	1	11

Tabela 2: Resultado do teste de nivelamento 1

As questões número 1 e 2 tratavam de Média Aritmética. Na primeira foi solicitado o conceito de Média Aritmética, para identificar até que ponto os alunos sabiam acerca desse conceito. Destes alunos, cerca de 58,3% acertaram, 25% erraram e 16,7% não souberam responder. Observou-se então que este tema não era desconhecido, uma vez que pouco mais da metade souberam respondê-la.

Já na segunda questão foi pedida uma aplicação direta de Média Aritmética, onde obtiveram-se 83,3% de acertos em contraposição a 16,7% que não souberam responder. Pode-se dizer que os alunos possuíam certo conhecimento prévio, bem como fazer o cálculo em situações numérica acerca de Média Aritmética.

Analisando as questões 3 e 4 em que se tratava de Média Geométrica, cerca de 83,3% não souberam responder, o que constata-se que uma grande parte da turma não sabe a definição de média Geométrica e nem fazer aplicabilidade em situações de cálculo numérico.

A Média Harmônica foi aplicada nas questões 5 e 6, onde observou-se que os alunos não sabiam a definição e nem como realizar cálculos em situações numéricas, pois cerca de 83,3% responderam que não sabiam.

Na questão 7 abordou-se Média Quadrática, nela o percentual de alunos que não conseguiram responder foi de 91,7%.

Os dados revelam que os alunos apresentaram dificuldades no critério de resoluções dos problemas que exigem aplicabilidade de cálculo de médias Geométrica, Harmônica e Quadrática. Por ser tratar de uma temática pouco abordada na Educação Básica, os estudantes não tinham o conhecimento para a resolução das questões.

Após o levantamento do conhecimento prévio sobre o tema proposto partiu-se para um estudo teórico sobre as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, suas concepções e conceitos. Dentro dessa perspectiva, foi aplicado uma metodologia através de um jogo denominado Bingo das Médias, vídeo e aplicação de exercícios que desenvolvessem a capacidade de entender e analisar criticamente os problemas propostos. Após a realização de todo esse trabalho, foi aplicado o segundo questionário com objetivo de avaliar o grau de aprendizagem da turma. Agora então, faremos uma análise dos dados coletados. A tarefa realizada pelos alunos no tocante às soluções dos problemas propostos no questionário 2 culminou com os resultados mostrados no quadro seguinte.

Número de acertos e não acertos em cada problema			
	ACERTOS	Erros	Não sei
Problema 1	12	-	-
Problema 2	4	2	6
Problema 3	9	1	2
Problema 4	9	2	1
Problema 5	10	1	1
Problema 6	9	3	-
Problema 7	12	-	-
Problema 8	10	2	-
Problema 9	10	2	-
Problema 10	8	2	2

Tabela 3: Resultado do teste de nivelamento 2

A questão 1 trata-se de média. Sua resolução foi bem assimilada atingindo percentual de 100% de acertos. Nesta questão foi analisado a definição de média, em particular do que é média aritmética.

A questão 2 teve um percentual de acertos correspondente a 33,3%. Apesar desta questão ter sido bem trabalhada, alguns alunos não foram exitosos em sua resolução que contemplava o cálculo de Média Aritmética, mostrando a falta de domínio e conhecimento básico.

O percentual de acertos na questão 3 e 4 foi de 75%. Ambas tratavam de Média Geométrica e exigiam aplicação direta da definição. Ficou perceptível que os alunos compreenderam a relação entre o contexto do problema e os cálculos a serem feitos. Vale salientar que na questão 3 o aluno deveria trabalhar com variações percentuais em sequência.

A questão 5 exigia que o aluno soubesse resolver equações quadráticas, para que depois aplicasse a definição de Média Aritmética e Geométrica. Logo, o nível de dificuldade foi elevado, ficando perceptível a evolução dos alunos com um percentual de 83,3% de acertos.

As Médias Harmônica foram cobradas nas questões 6 e 7. Nelas, o aluno deveria saber lidar com os valores inversamente proporcionais. Essas questões envolviam conteúdos de Física, afim de demonstrar a aplicabilidade desse assunto em outros campos do saber, uma vez que oferece suporte matemático para se entender os fenômenos com clareza. Obteve-se nesta na questão 6 um percentual de 75% de acerto e na questão 7 um percentual de 100%.

As questões 8, 9 e 10 foram extraídas do ENEM, as duas primeiras tratavam-se de Média Aritmética e a última de Média Ponderada.

Nas questões 8 e 9 foram utilizados, respectivamente, tabela e gráfico. Nelas, o aluno deveria fazer a leitura e interpretação dos dados e informações, para depois aplicar os critérios de utilização das médias. O alcance de acertos foi de 83,3%.

Finalmente, na questão 10 foi abordado a média ponderada, apresentando uma tabela para análise, de forma que os alunos relacionem as informações e cheguem ao resultado. O percentual de acerto foi 66,7%.

4.1 Comparando os resultados

Após a aplicabilidade dos questionários de nivelamento 1 e 2, faremos agora uma análise comparativa dos resultados visando avaliar o grau de dificuldade para obter informações de habilidades e competências que os alunos precisam desenvolver nos estudos das Médias.

Sabe-se que a contextualização matemática é uma metodologia que visa fortalecer o processo ensino aprendizagem, apresentando-se como uma importante ferramenta na solução de problemas na Matemática. De acordo com Fernandes (2016):

A contextualização, associada à interdisciplinaridade, vem sendo divulgada pelo MEC como princípio curricular central dos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), capaz de produzir uma revolução no ensino. A idéia seria basicamente de formar indivíduos que se realizem como pessoas, cidadãos e profissionais, exigindo da escola muito mais do que a simples transmissão e acúmulo de informações. Exigindo experiências concretas e diversificadas, transpostas da vida cotidiana para as situações de aprendizagem. (FERNANDES, 2016, p. 02)

Com base nisso, foram trabalhadas questões que exigiam análise, leitura e interpretação de tabelas, dados e gráficos que aparecem com frequência na vida cotidiana, procurando contextualizar para despertar a curiosidade e interesse do aluno.

A metodologia desse estudo fundamentou-se num caráter quantitativo e qualitativo, permitindo ao pesquisador estabelecer relações entre os registros e conclusões, não se restringindo apenas ao material estudado, como sugere Minayo (1994). A necessidade de se utilizar a pesquisa bibliográfica visou obter aporte teórico acerca da importância dos conceitos de médias, associada a uma sondagem diagnóstica e aplicação de questionários.

No tocante à questão quantitativa, a pesquisa recebeu tratamento estatístico como suporte da análise qualitativa, com revisão bibliográfica constate, afim de proporcionar uma construção teórica fundamentada.

Segue abaixo as proporções de resposta do questionário 1 e 2.

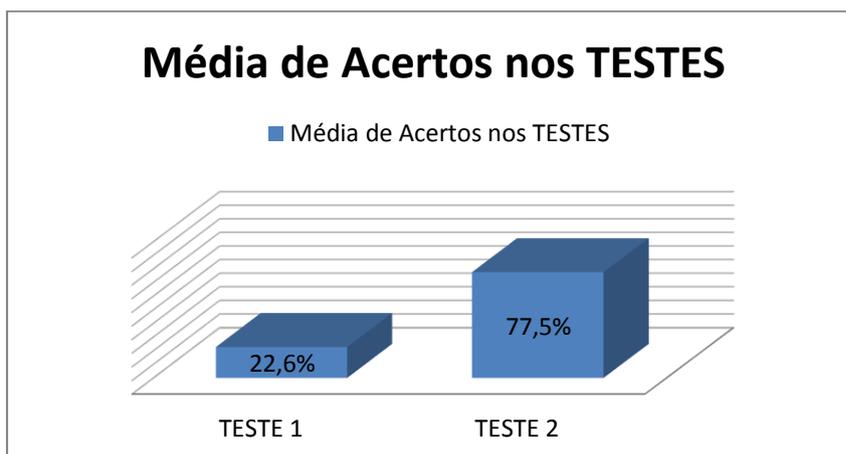


Figura 17: Gráfico da Média de Acertos

O gráfico 1 apresenta os resultados das questões trabalhadas na turma sobre os conceitos e aplicações de Médias: Aritmética, Geométrica, Harmônica, Ponderada e Quadrática, aplicado no primeiro momento da pesquisa, com o objetivo de avaliar o grau de conhecimento sobre o tema. Esperava-se que mesmo que alguns não soubessem resolver as questões corretamente, mas pelo menos obter os requisitos básicos (saber o que é Média, como calculá-la), para então obter uma linha de raciocínio.

As questões, totalizando 7, foram escolhidas por tratar o conceito de Média de forma algorítmica ou imediatista, pois exigiam apenas noções e aplicações simples de fórmulas, não requerendo nenhum tipo de raciocínio mais desenvolvido ou apurado. Porém, apesar desse caráter, elas tiveram um índice médio de 11,9% de erros, evidenciando que os alunos apresentavam uma série de dificuldades.

A primeira delas deveu-se ao tempo de resolução das questões estipulado em 60 minutos, assim eles teriam um pouco mais de 8 minutos, porém eles demoraram mais do que o previsto.

Outra dificuldade foi associar os conteúdos de Matemática ao texto da questão proposta, percebeu-se que eles estavam perdidos sem saber como proceder em cada questão. Muitos, inclusive, um percentual médio de 65,5% optaram em responder “não sei”, confirmando a ausência de conhecimento.

Associar as leituras dos gráficos e tabelas aos problemas foi mais uma dificuldade apresentada por eles, percebeu-se que sua interpretação era coisa nova, não conseguindo se utilizar dos elementos ostensivos no contexto do cálculo de uma Média. A avaliação dos mesmos é que se tratava de questões difíceis e trabalhosas.

Por fim, faltava-lhes melhorar a concentração na leitura do questionário e lembrar os conceitos nela solicitados.

Passado esse momento, como foi referido antes, trabalhamos em cima de suas dificuldades através de uma metodologia que colocasse o aluno no centro do processo de ensino aprendizagem, colocando-o como ser ativo na construção de seu conhecimento. Nessa proposta, o professor passa a ter um papel de orientador e monitor das atividades desenvolvidas (D'Ambrosio, 1989).

Trabalhamos reforçadamente diversas questões no decorrer de alguns dias para então aplicarmos o Questionário 2. Vale dizer que foram, na medida do possível, contextualizadas e que envolviam mais de um conteúdo de Matemática, tal como exige o ENEM, OBEMEP e outras provas.

Segundo Batanero (2002) o ensino das Médias é justificado por ajudar na capacidade de leitura, interpretação de tabelas e gráficos que aparecem nos diversos meios de informação, além de ser útil em muitas profissões e de ajudar no desenvolvimento pessoal, estimulando o raciocínio crítico. Vale lembrar que seu estudo também ajuda a compreender outras disciplinas.

Nos utilizando então de recursos para melhor entendimento do tema, obtivemos um índice médio de acertos de 77,5%, após trabalharmos as estratégias e dificuldades que os alunos precisariam superar, animando-os a prosseguirem o ano letivo e fazendo com que os mesmos sentissem a necessidade de agir, problematizando situações da realidade vivida por eles (Aquino, 1997).

Para obter resultado positivo, foi dedicada uma atenção especial na abordagem do tema para que fosse objetiva e assim evitasse confusão na resolução de uma situação problema, bem como desenvolver maneiras de cativar a atenção do aluno despertando nele o espírito investigativo.

Não se deve esquecer que foram avaliadas o contexto histórico e social do cotidiano do aluno, não ignorando os fatores envolvidos na sua realidade, a contextualização do conteúdo e a confecção de material e recursos eficientes baseadas em fontes de pesquisas diversificadas.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabe-se que a realidade do ensino é precária, repletas de carências e dificuldades e que existe a necessidade de se dar um passo para a construção de um projeto que viabilize a aprendizagem, a construção do conhecimento e o prazer em aprender. Desta forma, o presente trabalho buscou levar o aluno a entender melhor sua realidade, por meio de uma metodologia que teve como intenção cativar a atenção do aluno despertando um maior interesse pela matemática e reduzindo a diferença do saber campo x cidade.

Nesta proposta, buscou-se integrar atividades prática à teoria, procurando mostrar que o ensino de Médias não é só uso de fórmulas, mas acima de tudo ajuda no raciocínio do aluno levando-o a analisar criticamente o meio em que vive. Espera-se que o aluno do Ensino Médio não saiba apenas calcular e se prender ao resultado, mas também entender o raciocínio, dar significado ao conceito, ao resultado e ao próprio algoritmo.

Assim, o resultado do trabalho mostrou que os alunos se identificaram com a temática, visto que puderam relacionar a situações de seu cotidiano. Antes, os mesmos apresentavam muita dificuldade nas questões do Enem, mesmo as requeriam noções básicas do tema. Após o trabalho, o desempenho elevou consideravelmente. Pelas conversas informais durante os dias de aplicação do projeto, houve depoimentos dos alunos que demonstraram um despertar para as questões que envolviam Média, conteúdo hoje indispensável para a formação plena do cidadão.

Percebeu-se que a contextualização foi de suma importância, pois o fizeram perceber que a Matemática está em todos os lugares e objetos, sendo perfeitamente possível trabalhar utilizando o conhecimento prévio de quem mora no campo.

A partir da análise de desempenho dos alunos no Questionário 2, pode-se perceber que, de modo geral, os alunos se familiarizam com os conceitos e procedimentos apresentados durante a realização das atividades propostas, isto pode ser comprovada pelos índices médio de acertos que foram de 22,6% para 77,5%.

O objetivo é que este trabalho possa contribuir para uma abordagem mais ampla a respeito de Médias e suas aplicações e verificar a possibilidade de dar alternativas para as práticas pedagógicas aos professores de Matemática.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AQUINO, J. G. **Erro e fracasso na escola**. São Paulo: Summus, ed.5 p.153, 1997. ISBN 9788532306098.

BATANERO, C. **Significado y comprensión de las medidas de posición central**. Departamento de Didáctica de La Matemática, Universidade de Granada, 25, 41-58. Disponível em <<http://www.ugr.es/~batanero>>. Acessado em 18/11/2016.

BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Matemática**. São Paulo 1998.

D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar ou conhecer**. 5ª Edição. São Paulo: Ática, 1998. 88 p. (Série Fundamentos).

FONTE, ANDRÉ COSTA DA. **Médias, desigualdades e problemas de otimização**. Trabalho de Conclusão do Mestrado Profissional em Matemática. UFRPE, 2013

FERNANDES, S.S. **A contextualização no ensino médio de Matemática** - Um estudo com alunos e professores do ensino fundamental da rede particular de ensino do Distrito Disponível em: <http://www.matematica.ucb.br/sites/000/68/00000081.pdf> . Acesso em: 06 nov. 2016.

GARCIA, Vera Clodilte.; **Fundamentação teórica para as perguntas primárias: O que é matemática? Por que ensinar? Como se ensina e como se aprende?** Porto Alegre, v. 32, n. 2, 2009, p. 176 – 184.

LIMA, E. L. & CARVALHO, P. C. P. & WAGNER, E. & MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**, Vol. 2. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

MINAYO, M.C.S.,organizador. **Pesquisa Social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis:Vozes;1994.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO (MEC); Secretária do Ensino médio. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília 2000.

MORGADO, Augusto C. e CARVALHO, Paulo C. P. **Matemática Discreta**, ed.1^a, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2014. (Coleção PROFMAT).

THOMAZ, T.C. **Não gostar de Matemática: que fenômeno é este?** Cadernos de Educação/UFPel, Pelotas, n. 12, 1999.

SEJAFERAVIDEOS. **Médias - média aritmética ponderada e geométrica:** Duração de aprox. 10 minutos; Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=7SeCSogbDQc>. Acesso em 06/11/16.

ANEXO I

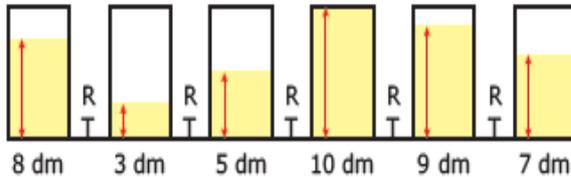


UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ-UNIFAP

**QUESTIONÁRIO MÉDIAS
ESTADUAL TESSALÔNICA, ZONA RURAL DE
MACAPÁ.**



1- (Uerj) Seis caixas-d'água cilíndricas iguais estão assentadas no mesmo piso plano e ligadas por registros R situados nas suas bases, como sugere a figura a seguir:

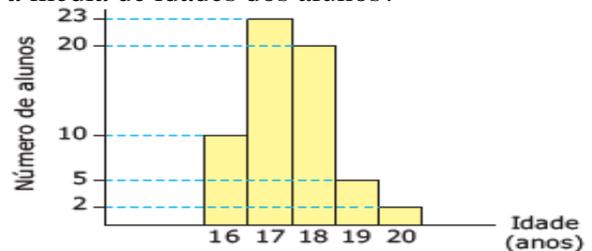


Após a abertura de todos os registros, as caixas ficaram com os níveis de água no mesmo plano. A altura desses níveis, em dm, equivale a:

- A) 6,0 B) 6,5 C) 7,0 D) 7,5

2- (FUVEST-SP) A distribuição das idades dos alunos de uma classe é dada pelo gráfico adiante. Qual das alternativas representa melhor a média de idades dos alunos?

- A) 16 anos e 10 meses
B) 17 anos e 1 mês
C) 17 anos e 5 meses
D) 18 anos e 6 meses
E) 19 anos e 2 meses



3- (Enem-2015) Um concurso é composto por cinco etapas. Cada etapa vale 100 pontos. A pontuação final de cada candidato é a média de suas notas nas cinco etapas. A classificação obedece à ordem decrescente das pontuações finais. O critério de desempate baseia-se na maior pontuação na quinta etapa.

A ordem de classificação final desse concurso é

- A) A, B, C, E, D.
B) B, A, C, E, D.
C) C, B, E, A, D.
D) C, B, E, D, A.
E) E, C, D, B, A.

Candidato	Média nas quatro primeiras etapas	Pontuação na quinta etapa
A	90	60
B	85	85
C	80	95
D	60	90
E	60	100

4- (Enem 2010) Em sete de abril de 2004, um jornal publicou o ranking de desmatamento, conforme gráfico, da chamada Amazônia Legal, integrada por nove estados.

Considerando-se que até 2009 o desmatamento cresceu 10,5% em relação aos dados de 2004, o desmatamento médio por estado em 2009 está entre

- a) 100 km² e 900 km².
b) 1 000 km² e 2 700 km².
c) 2 800 km² e 3 200 km².
d) 3 300 km² e 4 000 km².
e) 4 100 km² e 5 800 km².



Disponível em: www.folhaonline.com.br, Acesso em: 30 abr, 2010 (adaptado).

5- Um professor, dirigindo a 60 km/h, desloca-se do prédio A para o prédio B e em seguida dirigindo a 75km/h do prédio B ao prédio C. Supondo que a distância entre os prédios A e B, B e C, sejam iguais qual é a velocidade média durante os dois deslocamentos?

6- João está fazendo uma viagem. Na primeira metade da viagem, sua velocidade média é 80 km/h. Na segunda metade da viagem, sua velocidade média aumentou para 120 km/h. Qual a velocidade média no total do percurso?

7- Um automóvel subiu uma ladeira a uma velocidade média de 60 km/h e, em seguida, desceu a mesma ladeira à velocidade média de 100 km/h. A velocidade média desse veículo no trajetória inteiro foi de:

- A) 72 km/h
- B) 75 km/h
- C) 78 km/h
- D) 80 km/h
- E) 84 km/h

ANEXO II



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ-UNIFAP

**QUESTIONÁRIO MÉDIAS
ESTADUAL TESSALÔNICA, ZONA RURAL DE
MACAPÁ.**



1- OBMEP-Um quadriculado 3x3 preenchido com números inteiros é chamado de medimágico quando, em cada linha horizontal, vertical ou diagonal, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.

a) Preencha o quadriculado abaixo para que ele seja medimágico.

3		19
8		

b) O quadriculado medimágico abaixo tem os números 7, 9 e 20 nas posições indicadas. Qual é o valor de x?

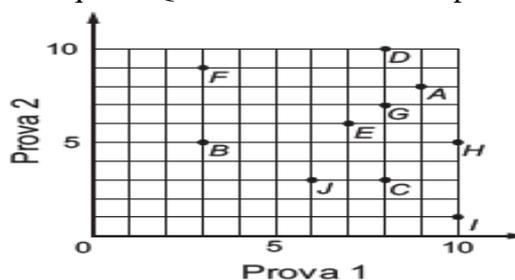
	7	
9	x	
		20

2- OBMEP - Luciano queria calcular a média aritmética dos números naturais de 1 a 15. Ao calcular a soma desses números, ele esqueceu de somar dois números consecutivos. Após dividir a soma dos treze números por 15, obteve 7 como resultado. Qual é o produto dos números que Luciano esqueceu de somar?

- A) 30 B) 56 C) 110 D) 182 E) 210

3- OBMEP - O professor Michel aplicou duas provas a seus dez alunos e divulgou as notas por meio do gráfico mostrado abaixo. Por exemplo, o aluno A obteve notas 9 e 8 nas provas 1 e 2, respectivamente; já o aluno B obteve notas 3 e 5. Para um aluno ser aprovado, a média aritmética de suas notas deve ser igual a 6 ou maior do que 6. Quantos alunos foram aprovados?

- A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10



4- A tabela abaixo apresenta o consumo mensal de água de uma família durante 6 meses. A média do consumo dessa família foi:

- A) 12,2 m³
B) 73,2 m³
C) 11,83 m³
D) 12,05 m³

MESES	Consumo m ³
Janeiro	12
Fevereiro	13,8
Março	12,5
Abril	13
Maiο	11,6
Junho	10,3

ANEXO III



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ-UNIFAP

QUESTIONÁRIO MÉDIAS
ESTADUAL TESSALÔNICA, ZONA RURAL DE
MACAPÁ.



1- **ENEM 2013)** Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual.

O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa.

Empresa	Lucro (em milhões de reais)	Tempo (em anos)
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

- A) F
- B) G
- C) H
- D) M
- E) P

3- (Enem-2015) Um concurso é composto por cinco etapas. Cada etapa vale 100 pontos. A pontuação final de cada candidato é a média de suas notas nas cinco etapas. A classificação obedece à ordem decrescente das pontuações finais. O critério de desempate baseia-se na maior pontuação na quinta etapa.

A ordem de classificação final desse concurso é

- A) A, B, C, E, D.
- B) B, A, C, E, D.
- C) C, B, E, A, D.
- D) C, B, E, D, A.
- E) E, C, D, B, A.

Candidato	Média nas quatro primeiras etapas	Pontuação na quinta etapa
A	90	60
B	85	85
C	80	95
D	60	90
E	60	100

4- (Enem 2010) Em sete de abril de 2004, um jornal publicou o ranking de desmatamento, conforme gráfico, da chamada Amazônia Legal, integrada por nove estados.

Considerando-se que até 2009 o desmatamento cresceu 10,5% em relação aos dados de 2004, o desmatamento médio por estado em 2009 está entre

- a) 100 km² e 900 km².
- b) 1 000 km² e 2 700 km².
- c) 2 800 km² e 3 200 km².
- d) 3 300 km² e 4 000 km².
- e) 4 100 km² e 5 800 km².



Disponível em: www.fofhaonline.com.br, Acesso em: 30 abr, 2010 (adaptado).

5- (ENEM 2014) Um pesquisador está realizando várias séries de experimentos com alguns reagentes para verificar qual o mais adequado para a produção de um determinado produto. Cada série consiste em avaliar um dado reagente em cinco experimentos diferentes. O

pesquisador está especialmente interessado naquele reagente que apresentar a maior quantidade dos resultados de seus experimentos acima da média encontrada para aquele reagente. Após a realização de cinco séries de experimentos, o pesquisador encontrou os seguintes resultados:

Levando-se em consideração os experimentos feitos, o reagente que atende às expectativas do pesquisador é o:

	Reagente 1	Reagente 2	Reagente 3	Reagente 4	Reagente 5
Experimento 1	1	0	2	2	1
Experimento 2	6	6	3	4	2
Experimento 3	6	7	8	7	9
Experimento 4	6	6	10	8	10
Experimento 5	11	5	11	12	11

- A) 1.
- B) 2.
- C) 3.
- D) 4.
- E) 5.

6- (ENEM 2014) A tabela a seguir mostra a evolução da receita bruta anual nos três últimos anos de cinco microempresas (ME) que se encontram à venda.

ME	2009 (em milhares de reais)	2010 (em milhares de reais)	2011 (em milhares de reais)
Alfinetes V	200	220	240
Balas W	200	230	200
Chocolates X	250	210	215
Pizzaria Y	230	230	230
Tecelagem Z	160	210	245

Um investidor deseja comprar duas das empresas listadas na tabela. Para tal, ele calcula a média da receita bruta anual dos últimos três anos (de 2009 até 2011) e escolhe as duas empresas de maior média anual.

As empresas que este investidor escolhe comprar são

- a) Balas W e Pizzaria Y.
- b) Chocolates X e Tecelagem Z.
- c) Pizzaria Y e Alfinetes V.
- d) Pizzaria Y e Chocolates X.
- e) Tecelagem Z e Alfinetes V.