UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

STEVE WANDERSON CALHEIROS DE ARAUJO

UMA EXTENSÃO DO MDC E MMC DOS INTEIROS AOS COMENSURÁVEIS

MACAPÁ-AP

2016

STEVE WANDERSON CALHEIROS DE ARAUJO

UMA EXTENSÃO DO MDC E MMC DOS INTEIROS AOS COMENSURÁVEIS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Orientador: Prof. Dr. Gilberlandio Jesus Dias

MACAPÁ-AP
2016

UMA EXTENSÃO DO MDC E MMC DOS INTEIROS AOS COMENSURÁVEIS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, na Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

AVALIADORES

Gilberlandio Jesus Dias

Orientador: Prof. Dr. Gilberlandio Jesus Dias
UNIFAP

Rinaldo V. da S. Jr.

Membro: Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Junior
UFAL

Ingrid Araújo Sampaio

Membro: Prof^a. Me. Ingrid Araújo Sampaio
UFAL - UAB

MACAPÁ-AP
2016

Dedico todas as bençãos e dádivas concedidas a minha vida em particular esta tese ao meu Senhor, meu Rei e Mestre o Filho de Deus Pai Todo Poderoso o Senhor Jesus Cristo, a minha amada esposa e rainha Lanna Sabrina Feitosa da Silva de Araújo e filhos e a minha mãe Srª. Marli Calheiros de Araújo.

AGRADECIMENTOS

Antes de tudo gostaria de agradecer ao meu Pai Celestial o Todo Poderoso a Seu Filho Jesus o Cristo e ao Espírito Santo que é a fonte de toda minha esperança atual e alegria eterna, além de ser fonte de minha fé por seu real amor por mim e minha família e seus filhos aqui na terra.

Em seguida gostaria de considerar o imenso apoio de minha inestimável família: a minha esposa Lanna Sabrina Feitosa da Silva de Araújo e filhos que nos momentos mais difíceis sempre estiveram me dando incentivo e apoio.

A minha mãe Marli Calheiros de Araújo por sua dura e árdua labuta para criar os seus três filhos (Steve Wanderson Calheiros de Araújo, Marcus Douglas Calheiros de Araújo e Deivis Stuart Calheiros de Araújo este já não se encontra entre nós), sob o ataque de maus tratos de meu pai.

A minha cara aluna e amiga Gisele Natividade por sua lealdade e dedicação ao longo destes anos tem me auxiliado nas atividades secretariais e acadêmicas.

Aos meus companheiros de turma do PROFMAT 2013. A todos os professores do PROFMAT da turma 2013 que contribuíram de forma imensurável na construção de meu aprimoramento.

Ao meu amigo de longas batalhas e travessuras de graduação Rinaldo Vieira Junior que seria impossível esquecer momentos maravilhosos que vivemos ao longo de uma jornada árdua de conquistas e dificuldades. Aqui lembro das dificuldades para comer e até para telefonar como o meu eterno professor Alcindo Teles Galvão, pois não tínhamos recursos.

Ao meu amigo e professor Alcindo Teles Galvão que me encaminhou aos estudos da matemática da qual não tenho como pagá-lo por sua contribuição inestimável.

Aos meus amigos de turma de graduação Clesivaldo vulgo POMPI, Salustiano vulgo BIATO SALU e nossos amigos que não estão mais entre nós, mas que foram grandes companheiros como o Sr. Hélio, Florisvaldo e Alessandro. Aos professores Guzmão (UFAL/MAT), Adonai Pereira Seixas (UFAL/MAT), Perdigão (UFAL/MAT), Amauri (UFAL/MAT), Marcia Pragana Dantas (UFAL/MAT), Sinvaldo Gama (UFAL/MAT), Antonio Carlos (UFAL/MAT), José Carlos (UFAL/MAT) e todos os outros por sua inestimável colaboração.

Ao meu orientador Gilberlandio Jesus Dias que com seu grande conhecimento

e maturidade matemática sempre deixa uma mensagem por trás de suas duras lições. Companheiro de um ano de pós graduação na UFPE e de mais de doze anos de colegiado de matemática da UNIFAP das quais já lutamos ombro a ombro contra muitas dificuldades e, tem e terá, minha eterna gratidão.

"Até um rio aprende a contornar seus obstáculos"

RESUMO

O presente trabalho versará sobre a extensão aos comensuráveis do conceito de menor múltiplo comum (mmc) e maior divisor comum (mdc) dos números inteiros. Para tal dividimos o trabalho em quatro partes a introdução, as preliminares e mais dois capítulos. O primeiro capítulo que é as preliminares com conceitos básicos sobre inteiros, o segundo capitulo com as definições de comensuráveis, maior divisor comum generalizado mdcg e menor múltiplo comum generalizado mmcg que são a extensão do mdc e mmc dos inteiros para os comensuráveis. E concluímos com o capítulo três que trata de resolver alguns exercícios e problemas.

Palavras Chaves: inteiros, divisibilidade, comensurabilidade, maior divisor comum, menor múltiplo comum, maior divisor comum generalizado e menor múltiplo comum generalizado.

ABSTRACT

The present work will deal with the extension to the commensurable of the concept of smaller common multiple (mmc) and largest common divisor (mdc) of integers. For this we divided the work into four parts the introduction, the preliminaries and two more chapters. The first chapter which is the preliminaries with basic concepts about integers, the second chapter with the commensurable definitions, largest common divisor common mdcg and smaller common multiple generalized mmcg which are the extension of mdc and mmc from integers to commensurable. And we conclude with chapter three that tries to solve some exercises and problems.

Keywords: integer, divisibility, commensurability, greater common divisor, smaller common multiple, larger generalized common divisor and smaller generalized common multiple. generalized.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 1

1 PRELIMINARES 2

2 NÚMEROS REAIS COMENSURÁVEIS 14

2.1 O MAIOR DIVISOR COMUM E O MENOR MÚLTIPLO COMUM GENERALIZADO 18

3 APLICAÇÕES E EXERCÍCIOS 27

REFERÊNCIAS 32

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como base central o artigo intitulado por “O Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum Generalizado” dos ilustríssimos professores Doutores Cydara Cavedon Ripoll, Jaime Bruck Ripoll, Alveri Alves Sant’Ana do instituto de Matemática- UFRS que foi publicado na revista Matemática Universitária, N^o 40, junho/2006-pp. $59 - 74$ e versará sobre a extensão aos comensuráveis do conceito de menor múltiplo comum (mmc) e maior divisor comum (mdc) dos números inteiros. Para tal, no primeiro capítulo digo nas preliminares trataremos dos conceitos mais elementares e essências que são os de múltiplo, divisor, maior divisor comum - mdc e menor múltiplo comum - mmc. Apenas para frisar informamos que neste presente trabalho não temos a intenção de fazer um tratado sobre o assunto, mas de abordar como preliminares estes conceitos básicos para dar suporte aos demais capítulos. Então no primeiro capítulo digo nas preliminares ao definirmos o mdc percebemos que é possível fazermos uma equivalência onde recorremos ao importante teorema de Bachet Bizú. Além de sentir a necessidade de provar a existência do mesmo por meio do importante e belo, mas simples Algoritmo de Euclides que dentre outras coisas mostra a existência do mdc entre números inteiros. Após isso ainda nas preliminares mostramos os principais resultados sobre mdc e mmc para inteiros. E por fim usando a fatoração em números primos mostrasse o DNA dos números finalizando este capítulo com três resultados essências que faz uso da fatoração de números primos. Em seguida no capítulo dois trataremos da definição de comensuráveis e algumas propriedades, assim como a definição do maior divisor comum generalizado mdcg e mínimo múltiplo comum generalizado mmcg que são a extensão do mdc e mmc dos inteiros para os comensuráveis, além de exibir resultados importantes sobre estes. Ressalto que neste capítulo faço singelas e pequenas mudanças na demonstração de alguns teoremas apresentados pela autora do artigo supracitado. A conclusão findará com o capítulo três do trabalho com exercícios e problemas.

1 PRELIMINARES

Neste capítulo definiremos de forma bastante natural os conceitos mais primitivos de aritmética. Que são os de múltiplo, divisor, menor múltiplo comum e maior divisor comum para números inteiros. Assim como mostraremos o Algoritmo de Euclides onde praticamente sua forma original se preserva há 2000 anos, isto para mostrar a existência do maior divisor comum entre dois inteiros e as principais propriedades que decorrem imediatamente destas definições.

Definição 1.1. *Dados a e b com $b \neq 0$ dizemos que o inteiro a é divisível pelo inteiro b ou que b é um divisor de a, e escrevemos $b|a$, sempre que existir um inteiro n tal que $a = nb$.*

Observe que, de acordo com a Definição 1.1, $|b| \leq |a|$ e se a e b são positivos, teremos

$$b \leq a. \tag{1.1}$$

De fato, considerem a e b como na definição acima de forma que b divide a, isto é, $a = nb$, para certo inteiro n. Como a, b são inteiros temos que $|b| \leq |a|$.

Agora vejamos alguns exemplos.

1. 0 é divisível por qualquer número inteiro diferente de 0. Pois, sempre podemos escrever $0 = 0k$, para qualquer inteiro $k \neq 0$. Assim,

   $$k \neq 0, \text{ então } k|0.$$

2. O número 1 divide todo inteiro k. Com efeito, basta observar que qualquer número inteiro k pode ser escrito como $k = k \cdot 1$. Assim,

   $$1|k.$$

3. 2 divide qualquer número par. Com efeito, considere a um número par. Então, podemos escrevê-lo como, $a = n \cdot 2$ para algum inteiro n. Assim, $2|a$.

4. os números 1, 2 e 4 dividem 16 e 12, observe nos últimos exemplos que o maior destes divisores comuns a 16 e 12 é 4. Isto nos induz às definições que seguirão nas próximas páginas.

Quando um número inteiro c divide dois números a e b, inteiros, diremos que c é divisor comum de a e b.

Definição 1.2. *Dados dois inteiros a e b, dizemos que um inteiro d é o maior divisor comum (mdc) entre a e b, e escreveremos $d = (a, b)$, se:*

1. *d é um divisor comum de a e b, isto é, d é divisor tanto de a como de b.*
2. *d é o maior dos divisores comuns, no sentido de que se c é um divisor comum de a e b, então $c \leq d$.*

O mais interessante e mais complexo é mostrar que a definição acima é equivalente a:

(ii') d é divisível por todo divisor comum de a e b.

A condição (ii') acima pode ser reescrita como se segue:

(ii") Se c é um divisor comum de a e b, então $c|d$.

De fato, para fixar as ideias tomemos sem perda de generalidade, c e d naturais, onde c é um divisor comum de a e b e d é tal que $c|d$, isto é, $d = nc$, para certo inteiro n. Como d, $c > 0$ e inteiros temos que $c \leq d$.

Agora à volta, ou seja, vamos mostrar que "O maior divisor comum d de a e b é o divisor positivo de a e b o qual é divisível por todo divisor comum."Esta volta da equivalência é o conteúdo do importante teorema conhecido por Bachet-Bézout.

Teorema 1.1 (Bachet-Bézout)**.** *Considerem $a, b \in \mathbb{Z}$. Então existem $x, y \in \mathbb{Z}$ com*

$$ax + by = (a, b) \tag{1.2}$$

Portanto, se $c \in \mathbb{Z}$ é tal que $c|a$ e $c|b$, então, $c|(a, b)$.

Demonstração. O caso $a = b = 0$ é trivial (temos $x = y = 0$). Nos outros casos, considere o conjunto de todas as combinações de a e b como abaixo. Considerem $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Definimos o conjunto de todas as combinações de a e b

$$J(a, b) = \{x \in \mathbb{Z}^*; \exists\ u \text{ e } v \in \mathbb{Z}, x = ua + vb\}.$$

Observe que este conjunto contém sempre os números a e b para quaisquer a e b. Como $J(a, b) \subseteq \mathbb{Z}$ e é não vazio podemos considerar $d = au_0 + bv_0$ o menor elemento positivo de $J(a, b)$. Afirmamos que d divide todos os elementos de $J(a, b)$. De fato, se tomarmos $m = au + bv \in J(a, b)$, sejam $q, r \in \mathbb{Z}$ o quociente e o resto na divisão euclidiana de m por d, de modo que

$$m = dq + r \text{ e } 0 \leq r < d.$$

Temos

$$r = m - dq = a(u - qu_0) + b(v - qv_0) \in J(a, b).$$

Mas,como $r < d$ e d é o menor elemento positivo de $J(a, b)$, segue que $r = 0$ e portanto $d|m$. Em particular como $a, b \in J(a, b)$ temos que $d|a$ e $d|b$, então pela definição temos que $d \leq (a, b)$. Note ainda que se $c|a$ e $c|b$, então $c|(au_0 + bv_0) \Leftrightarrow c|d$. Tomando $c = (a, b)$ temos que $(a, b)|d$, isto é, pela definição novamente temos que $(a, b) \leq d$ o que juntamente com a desigualdade $d \leq (a, b)$, mostra que $d = (a, b)$. $\square$

É claro que $(a, b) = (b, a)$.

Agora vamos mostrar a existência do (mdc) em alguns casos particulares antes que mostremos que sempre existe o maior divisor comum entre dois inteiros quaisquer não simultaneamente nulos.

1. $(a, 0) = a$

De fato, pois $a|a$ e $a|0$, ou seja, a é divisor comum de a e 0. Agora suponha que a não seja o mdc de a e 0. Isto é, $(a, 0) = d$. Então $d|a$ e $d|0$, mas se a é divisor comum de a e 0 segue de acordo com a definição que $a|d$, então $d = k_1 \cdot a$ e $a = k_2 \cdot d$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ consequentemente $k_1 = k_2 = 1$.

Portanto $a = d$.

2. $(a, 1) = 1$

De fato, pois $1|a$ e $1|1$, ou seja, 1 é divisor comum de a e 1. Agora suponha que 1 não seja o mdc de a e 1. Isto é, $(a, 1) = d$. Então $d|a$ e $d|1$, mas do fato de que 1 é divisor comum de a e 1 temos que $1|d$ e com isso $d = 1$.

3. $(a, a) = a$

De fato, pois $a|a$, ou seja, a é divisor comum de a. Agora suponha que a não seja o mdc de a e a. Isto é, $(a, a) = d$. Então $d|a$ e $d|a$, mas de $a|a$ temos que $a|d$, isto é, $d = k_1 \cdot a$ e $a = k_2 \cdot d$, onde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Daí tem-se que $1 = k_1 k_2$, ou seja, $k_1 = k_2 = 1$. E com isso tem-se que $d = a$.

Mas vejamos como fica no caso geral.

Dados dois números inteiros a e b ambos não nulos podemos associar a cada um deles seu conjunto de divisores positivos, D_a e D_b respectivamente. Daí, temos as seguintes afirmações.

1. $D_a \cap D_b \neq \varnothing$.

2. $D_a \cap D_b$ é finita.

3. Como $D_a \cap D_b$ é finita, então existe o elemento máximo que é o maior divisor comum de a e b.

Prova 1. Basta observar que $1 \in D_a \cap D_b$.

Prova 2. Para mostrar que está intersecção é finita basta verificar que se $d|a$, então $a = 0$ ou $|d| \leq |a|$, pois daí tem-se que D_a é finito e analogamente teremos que D_b é finito e como a intersecção de conjuntos finitos é finito teremos $D_a \cap D_b$ é finita. De fato, para tal vamos supor que $a \neq 0$. E neste caso, $a = dq$ com $q \neq 0$, assim $|q| \geq 1$ e $|a| = |dq| = |d||q| \geq |d|$. Portanto, $|d| \leq |a|$. Donde concluímos que $D_a \cap D_b$ que é finita.

Prova 3. O fato de que $D_a \cap D_b$ é finita nos permite dizer que este conjunto tem elemento máximo. Seja $d =$máx.$D_a \cap D_b$, então $d|a$ e $d|b$ e tomemos $c \in D_a \cap D_b$. Assim $c|a$ e $c|b$ e como $d =$máx.$D_a \cap D_b$, temos que $c \leq d$, e, portanto, $d = (a, b)$ de acordo com a definição.

Outra maneira de mostrar a existência é por meio do algoritmo de Euclides. Para tal necessitamos antes demonstrar o Lema de Euclides e para mostrá-lo iremos exibir duas propriedades que decorrem diretamente da definição de *mdc*. Esta maneira de mostrar a existência é salutar fazer, pelo fato, de nos ensinar uma maneira prática de calcular o mdc entre dois inteiros, e, além disso, o fato de este algoritmo estar em muitos livros didáticos do ensino fundamental. Para tal faremos alguns pequenos resultados e o lema de Euclides.

Proposição 1.1. *Se $c|a$ e $c|a + b$, então $c|b$.*

Demonstração. Da hipótese temos que $a = k_1 c$ e $(a + b) = k_2 c$, com k_1 e $k_2 \in \mathbb{Z}$. Substituindo a primeira equação na segunda temos,

$$(k_1 c + b) = k_2 c$$

$$b = k_2 c - k_1 c$$

$$b = c(k_2 - k_1)$$

$$b = ck$$

Donde concluímos que $c|b$. $\square$

Proposição 1.2. *Se* $a|b$*, então* $(a,b) = a$.

Demonstração. Ora $a|a$ e $a|b$ por hipótese, então a é divisor comum de a e b. Suponha que $(a,b) = d$, segue que $d|a$ e $d|b$. Mas, como a é divisor comum de a e b, tem-se por definição que $a|d$ e, portanto $d = a$. □

Corolário 1.1. *Se* $(a,b) = 1$ *e* $a|bc$*, então* $a|c$.

Demonstração. Como $(a,b) = 1$, existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $ax+by = 1 \Rightarrow a\cdot cx+(bc)\cdot y = c$. Do fato de a dividir cada termo do lado esquerdo, temos que $a|c$. □

Lema 1.1. *Considerem* $a, b, n \in \mathbb{Z}$ *com* $a < na < b$*. Se existe* $(a, b - na)$*, então* (a,b) *existe e*

$$(a,b) = (a, b - na). \tag{1.3}$$

Demonstração. Considere $d = (a, b-na)$, daí $d|a$ e $d|(b-na)$, então $d|(b-na+na)$, pois se $d|a$ implica que $d|na$. Assim, d é um divisor comum de a e b. Agora tomemos c um divisor comum de a e b, segue que c é divisor comum de a e $b - na$, com isso $c|d$. Assim pela generalidade de c temos que $d = (a,b)$. □

Veja a citação abaixo de A. Hefez em seu livro elementos de aritmética página 54.

> O lema de Euclides é efetivo para calcular mdc, conforme veremos nos exemplos a seguir, e será fundamental para estabelecermos o algoritmo de Euclides, que permitirá, com muita eficiência, calcular o mdc de dois números inteiros quaisquer. (Elementos de aritmética, A. Hefez, SBM. Pág. 54)

A seguir, apresentaremos a prova construtiva da existência do mdc entre dois inteiros quaisquer. Veja o que diz A. Hefez em seu livro elementos de aritmética página 56.

> “ ...dada por Euclides (Os Elementos, Livro VII, Proposição 2). O método, chamado de Algoritmo de Euclides, é um primor do ponto de vista computacional e pouco conseguiu-se aperfeiçoá-lo em mais de dois milênios.”

Agora passamos ao algoritmo propriamente dito.

Considerem $a, b \in \mathbb{Z}$, podemos supor sem perda de generalidade que $a \leq b$. Se $a = 1$ ou $a = b$,ou ainda $a|b$, já vimos que $(a,b) = a$. Então vamos apenas verificar o caso em que $a, b \in \mathbb{Z}$, seja tal que $a < b$ e que $a \nmid b$. Dai pela divisão euclidiana, podemos escrever,

$$b = aq_1 + r_1, \text{ com } r_1 < |a|.$$

Aqui temos duas possibilidades:

a) $r_1|a$, e, em tal caso, pelo Lema de Euclides,

$$r_1 = (a, r_1) = (a, b - q_1a) = (a, b),$$

e termina o algoritmo, ou

b) $r_1 \nmid a$, e, em tal caso, podemos efetuar a divisão de a por r_1, obtendo

$$a = r_1q_2 + r_2, \text{ com } r_2 < r_1$$

Novamente, temos duas possibilidades:

a') $r_2|r_1$, e, em tal caso, novamente pelo Lema de Euclides tem-se

$$r_2 = (r_1, r_2) = (r_1, a - q_2r_1) = (r_1, a) = (b - q_1a, a) = (b, a) = (a, b),$$

E paramos, pois termina o algoritmo, ou

b') $r_2 \nmid r_1$, e, em tal caso, podemos efetuar a divisão de r_1 por r_2 obtendo

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \text{ onde } r_3 < r_2.$$

Este procedimento não pode continuar indefinidamente, pois teríamos uma sequência de números naturais $a > r_1 > r_2 > \dots$ que não possui menor elemento o que não é possível pelo pricípio da boa ordem, Isto é, para algum n tem-se que $r_n|r_{(n-1)}$, o que implica que $(a, b) = r_n$. Veja a seguinte citação sobre o algoritmo de Euclides.

> "Além de servir de ferramenta computacional para o cálculo do mdc a divisão euclidiana tem consequências teóricas importantes". Tópicos de Teoria dos Números, MOREIRA, Carlos Gustavo Tamm de Araújo, página 22, rio de Janeiro: SBM, 2012.

Agora vamos ver o conceito de múltiplo.

Definição 1.3 Dizemos que um inteiro a é múltiplo de um inteiro b, se

$$a = nb,$$

para algum inteiro n. E diremos que m é múltiplo comum de dois inteiros a e b se m é múltiplo de a e b.

Exemplos.

5. Observe que o 0 é múltiplo de todos os números. Mas 0 não é divisor de número algum de acordo com a definição acima.

6. O número 14 é múltiplo de 2. Pois, existe um inteiro que é 7 tal que $14 = 7 \cdot 2$. Assim, 14 é múltiplo de 2.

7. O número -70 é múltiplo de 2. Pois, existe um inteiro que é -35 tal que $-70 = -35.2$. Assim, -70 é múltiplo de 2.

8. Observe que -70 é tanto múltiplo de 2 como de -7, então de acordo com a definição acima temos que -70 é múltiplo comum de 2 e -7.

Esta noção de múltiplo comum sugeri a seguinte definição.

Definição 1.3. *Dizemos que m é o menor múltiplo comum (mmc) entre a e b e escrevemos $m = [a, b]$ se:*

1. $a = b$, então $a = [a, b]$.

2. Se $a \neq b$ e $b = 0$, então o *mmc* é definido por $0 = [a, 0]$.

3. Se $a \neq b$ e ambos não nulos a definição é como segue:

    (i) $m > 0$,

    (ii) m é múltiplo comum de a e b,

    (iii) m é o menor dos múltiplos comuns, no sentido de que se m' é um múltiplo comum de a e b e $m' > 0$ então $m \leq m'$.

Uma observação importante é que quase que 100% dos livros didáticos do ensino fundamental e médio quando definem o múltiplo e múltiplo comum entre dois números inteiros ou naturais informam que o 0 é múltiplo de qualquer número e assim ele é excluído de ser o *mmc* entre dois números, pois em caso contrário, sempre o *mmc* entre dois números inteiros seria 0. Desta forma estendemos a definição de *mmc* como feito acima para que seja possível calcular o *mmc* entre dois números iguais inclusive podendo ser nulos, entre um número diferente de 0 e outro qualquer inclusive 0 e dois números distintos ambos não nulos. Assim de acordo com a definição temos os seguintes exemplos:

1. Que $2 = [2, 2]$.

2. Que $0 = [0, 0]$.

3. Que $0 = [0, 2]$.

4. Que $4 = [2, 4]$.

Agora surge naturalmente a indagação: sempre existe o *mmc* entre dois números inteiros quaisquer?

Para responder a tal indagação vamos definir o seguinte conjunto: M_n o conjunto dos múltiplos positivos de n. Pois vamos restringir a prova para os naturais sem perda de generalidade.

1. Dados dois números a e b com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então a intersecção $M_a \cap M_b \neq \varnothing$

2. O conjunto $M_a \cap M_b$ possui elemento mínimo.

3. O conjunto $\min .M_a \cap M_b = [a, b]$.

Demonstração. 1: Como o ab é múltiplo de a e b, isto é, pertencem a $M_a \cap M_b$, então

$$M_a \cap M_b \neq \varnothing.$$

□

Demonstração. 2: Como $M_a \cap M_b \subset \mathbb{N}$ e os naturais são bem ordenados então pelo princípio da boa ordenação $M_a \cap M_b$ tem elemento mínimo. □

Demonstração. 3: Considere $m = \min. M_a \cap M_b$, e $c \in M_a \cap M_b$. Daí pela definição de m tem-se que $m \leq c$. Portanto, $m = [a, b]$. □

Um resultado interessante que conecta os conceitos de *mdc* e *mmc* é o que segue abaixo e é na verdade uma consequênciado teorema *Bachet-Bezout.*

$$[a, b] \cdot (a, b) = |a \cdot b|.$$

Proposição 1.3. *Dados dois números naturais a e b, então*

$$[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b.$$

Demonstração. Escrevendo $d = (a, b)$ e $a = a_1 \cdot d$ e $b = b_1 \cdot d$ onde $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$ são tais que $(a_1, b_1) = 1$. Temos $[a, b] = al$ para algum $l \in \mathbb{N}$, além disso, $b|[a, b] \Leftrightarrow b_1 d | a_1 dl$. Como $(a_1, b_1) = 1$, isto implica que $b_1 | l$. E Pela definição de mínimo múltiplo comum, temos que l deve ser o mínimo número divisível por b_1, assim concluímos que $l = b_1$, e, portanto $[a, b] = b_1 a$. Logo $(a, b) \cdot [a, b] = d \cdot b_1 \cdot a = a \cdot b$. □

Dois outros resultados importantes são:

Proposição 1.4. *Para quaisquer inteiros a, b*

(i) $[-a, b] = [a, -b] = [a, b]$

(ii) $(-a, b) = (a, -b) = (a, b)$.

Demonstração. Observe que $(a, b)|a \Rightarrow (a, b)| - a$ por outro lado temos que $(-a, b)| - a \Rightarrow (-a, b)|a$. Então $(a, b)|(-a, b)$ e $(-a, b)|(a, b)$. Sendo análogo o processo para mostrar que $(a, -b) = (a, b)$ concluímos que

$$(-a, b) = (a, -b) = (a, b).$$

□

Proposição 1.5. *Para quaisquer inteiros a, b e l,*

(i) $[la, lb] = |l|.[a, b]$

(ii) $(la, lb) = |l|.(a, b)$.

Demonstração. Vamos provar (ii) pois (i) é inteiramente análogo. Tomemos $l = 0$ e teremos que

$$(0 \cdot a, 0 \cdot b) = (0, 0) = 0 \cdot (a, b) = |0| \cdot (a, b).$$

Tomemos $l > 0$ pelo teorema Bachet-Bezout temos que (la, lb) é o menor valor positivo de $lau + lbv$, com u, v inteiros, que é igual a l vezes o menor valor positivo de $au + bv$ que é igual a $l(a, b)$. Assim, $(la, lb) = l \cdot (a, b)$, com $l > 0$. Para $l < 0$ temos

$$(la, lb) = -l \cdot (-a, -b) \Rightarrow |(la, lb)| = | - l \cdot (-a, -b)| = | - l| \cdot |(-a, -b)|, \text{ segue que}$$

$$(la, lb) = | - l| \cdot (a, b) \Rightarrow (la, lb) = |l| \cdot (a, b).$$

□

Não é objetivo deste trabalho fazer um tratado sobre mdc e mmc de inteiros por esta razão não iremos abordar resultados importantes como o teorema fundamental da álgebra que dá o suporte de escrever um número qualquer de maneira única decomposto em fatores primos. Mas iremos sim utilizá-lo para apresentar proposições que serviram de base para a extensão. Veja a bela proposição abaixo usando a decomposição em primos cuja demonstração se encontra em [2].

Proposição 1.6. *Considere* $a = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\ldots{p_r}^{\alpha_r}$ *um número natural escrito na forma acima. Se* a' *é um divisor de* a*, então*

$$a' = {p_1}^{\beta_1}{p_2}^{\beta_2}\ldots{p_r}^{\beta_r}$$

onde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$*, para* $i = 1, 2, \ldots, r$*.*

Demonstração. Considere a' um divisor de a e considere p^β a potência de um número primo p que esteja na decomposição de a' em fatores primos. É claro que $p^\beta|a$, segue então que divide algum ${p_i}^{\alpha_i}$ por ser primo com os demais ${p_j}^{\alpha_j}$, e, como consequência, $p = p_i$ e $\beta \leq \alpha_i$. □

A fatoração em números primos de um número natural é como se estivéssemos vendo o seu DNA, pois revela toda a sua estrutura multiplicativa. Desta forma é possível determinar o mdc e mmc de um conjunto de números qualquer. Veja o belo resultado abaixo que na prática é muito utilizado nas escolas de ensino fundamental e médio para determinar o mdc e mmc.

Considerem $a = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\ldots{p_n}^{\alpha_n}$ e $a' = {p_1}^{\beta_1}{p_2}^{\beta_2}{p_n}^{\beta_n}$. Pondo

$$\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}, \quad \delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

tem-se que

$$(a, b) = {p_1}^{\gamma_1}{p_2}^{\gamma_2}\ldots{p_n}^{\gamma_n} \text{ e } [a, b] = {p_1}^{\delta_1}{p_2}^{\delta_2}\ldots{p_n}^{\delta_n}$$

Demonstração. Pela proposição anterior temos que ${p_1}^{\gamma_1}{p_2}^{\gamma_2}\ldots{p_n}^{\gamma_n}$ é divisor comum de a e b. Logo, $c = {p_1}^{\varepsilon_1}{p_2}^{\varepsilon_2}\ldots{p_n}^{\varepsilon_r}$, onde $\varepsilon_1 < \min\{\alpha_i, \beta_i\}$ e portanto, c divide ${p_1}^{\gamma_1}{p_2}^{\gamma_2}\ldots{p_n}^{\gamma_n}$. Do mesmo modo, prova-se para o mmc. □

Exemplo. Qual o é o mmc e mdc entre $a = 2^3 3^4 5^5 7^6$ e $b = 2^2 3^3 5^6 7^7 11^3$.

$$(a, b) = 2^2 3^3 5^5 7^6$$

e

$$[a, b] = 2^3 3^4 5^6 7^7 11^3.$$

Um resultado que não encontra nas referências mas será de grande utilidade para resultados na extensão é apresentando como segue.

Proposição 1.7. *Considerem a, b, c e d inteiros tais que $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ estejam na forma de fração irredutível e além disso, $a' = \frac{a}{(a,c)}$, $b' = \frac{b}{(b,d)}$, $c' = \frac{c}{(a,c)}$ e $d' = \frac{d}{(b,d)}$, então*

$$\frac{ad}{cb} = \frac{a'd'}{c'b'} \text{ e } (a'd', c'b') = 1.$$

Demonstração. Vejamos

$$(a'd', c'b') = \left(\frac{a}{(a,c)}\frac{d}{(b,d)}, \frac{b}{(b,d)}\frac{c}{(a,c)}\right) = \frac{1}{(a,c)(b,d)}(a \cdot d, b \cdot c)$$

Agora basta mostrar que $(a \cdot d, b \cdot c) = (a,c)(b,d)$. Para tal considerem

$$a = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\ldots{p_{r_a}}^{\alpha_{r_a}}, b = {q_1}^{\delta_1}{q_2}^{\delta_2}\ldots{q_{r_b}}^{\delta_{r_b}}, c = {l_1}^{\beta_1}{l_2}^{\beta_2}\ldots{l_{r_c}}^{\beta_{r_c}} \text{ e } d = {t_1}^{\theta_1}{t_2}^{\theta_2}\ldots{t_{r_d}}^{\theta_{r_d}},$$

estes $p_{i_a}, q_{i_b}, l_{i_c}, t_{i_d}$, são primos para

$$1 \leq i_a \leq r_a, 1 \leq i_b \leq r_b, 1 \leq i_c \leq r_c, 1 \leq i_d \leq r_d$$

Daí,

$$\begin{cases} a \cdot d = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\ldots{p_{r_a}}^{\alpha_{r_a}} \cdot {t_1}^{\theta_1}{t_2}^{\theta_2}\ldots{t_{r_d}}^{\theta_{r_d}} \\ b \cdot c = {q_1}^{\delta_1}{q_2}^{\delta_2}\ldots{q_{r_b}}^{\delta_{r_b}} \cdot {l_1}^{\beta_1}{l_2}^{\beta_2}\ldots{l_{r_c}}^{\beta_{r_c}} \end{cases}$$

Como $(a,b) = 1$ $(c,d) = 1$, então os fatores acima de $a.d$ e $b.c$, só podem ter fatores comuns entre os p_{i_a} e os l_{i_c} e entre os t_{i_d} e os q_{i_b} assim, como a decomposição de $(a.d, b.c)$ é composta pelos mesmos expoentes de fatores comuns a $a.d$ e $b.c$, segue que existe fatores comuns à p_{i_a} e l_{i_c} e à q_{i_b} e t_{i_d}, segue com os mesmos expoentes, ou seja, (a,c) e (b,d) posto isso,

$$(a \cdot d, b \cdot c) = (a,c)(b,d).$$

Outra maneira de ver isso seria assim:

Se

$$\begin{cases} (a,c) = {x_1}^{\alpha_1}{x_2}^{\alpha_2}\ldots{x_r}^{\alpha_r}, \text{ x}_i \text{ primos} \\ (b,d) = {y_1}^{\mu_1}{y_2}^{\mu_2}\ldots{y_r}^{\mu_s}, \text{ y}_j \text{ primos} \end{cases}$$

E quando formos calcular o $(a \cdot d, b \cdot c)$ deveremos ter o produto dos fatores comuns entre

$$a \cdot d = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\ldots{p_{r_a}}^{\alpha_{r_a}} \cdot {t_1}^{\theta_1}{t_2}^{\theta_2}\ldots{t_{r_d}}^{\theta_{r_d}} \text{ e } b \cdot c = {q_1}^{\delta_1}{q_2}^{\delta_2}\ldots{q_{r_b}}^{\delta_{r_b}} \cdot {l_1}^{\beta_1}{l_2}^{\beta_2}\ldots{l_{r_c}}^{\beta_{r_c}}$$

com os menores expoentes.

Mas a escolha será então apenas entre os p_i e l_j com os menores expoentes que será ${x_1}^{\varepsilon_1}{x_2}^{\varepsilon_2}\ldots{x_r}^{\varepsilon_r}$, pois b não divide a e também apenas entre os q_i e t_j, e devem ter os menores expoentes que será ${y_1}^{\mu_1}{y_2}^{\mu_2}\ldots{y_r}^{\mu_r}$ pois d não divide c.

Ou seja,

$$(a\cdot d, b\cdot c) = {x_1}^{\varepsilon_1}{x_2}^{\varepsilon_2}\ldots{x_r}^{\varepsilon_r}\cdot{y_1}^{\mu_1}{y_2}^{\mu_2}\ldots{y_r}^{\mu_r} = (a,c)\cdot(b,d).$$

Contudo concluimos que,

$$\frac{ad}{cb} = \frac{a'd'}{c'b'}.$$

$\square$

2 NÚMEROS REAIS COMENSURÁVEIS

Tomemos dois segmentos um medindo digamos 8 unidades e outro medindo 12 unidades de mesma medida. Observe que o mdc das medidas destes segmentos é $(8, 12) = 4$, ou seja, o maior segmento possível que cabe um número inteiro de vezes no primeiro segmento e um outro número de vezes no segundo é o segmento que mede 4 unidades. Mais precisamente 2 vezes no primeiro e 3 vezes no segundo. Então é natural que indaguemos: dados dois segmentos comensuráveis quaisquer, não necessariamente tendo como medida números inteiros, sempre existe um terceiro segmento que cabe um número inteiro de vezes no primeiro e um número inteiro de vezes no segundo? Se existir sempre terá o maior entre eles? De acordo com manuscritos antigos a ideia de comensurabilidade nasce exatamente desta necessidade de comparar segmentos de reta. Nesta secção iremos abordar estes conceitos.

Definição 2.1. *Diremos que dois segmento sde reta AB e CD são comensuráveis quando existe um terceiro segmento de medida k que caiba n vezes em AB e m vezes em CD.*

A ilusão da comensurabilidade durou até o quarto século antes de Cristo. Naquela época, em Crotona, sul da Itália, havia uma seita filosófica-religiosa, liderada por Pitágoras. Um dos pontos fundamentais de sua doutrina era o lema "Os números governam o mundo"(Lembremos que números para eles eram números naturais, admitindo-se tomar razões entre esses números, formando as frações.) (Lima, Elon Lages, A Matemática do Ensino Médio- volume 1, - 9.ed.-Rio de Janeiro: SBM 2006, pág. 53).

Como se vê acima a definição advém de um conceito geométrico. No entanto a comensurabilidade pode ser equivalentemente definida fazendo uma relação entre dois números reais quaisquer.

Definição 2.2. *Dados dois números reais l e s são ditos comensuráveis se existem números inteiros não nulos m e n tais que ml=ns.*

Exemplos.

1. Observe que se ambos forem nulos claramente são comensuráveis. Pois podemos tomar quaisquer inteiros.

2. Dados um real l não nulo e s nulo basta tomar como inteiros $m = 0$ e n pode ser qualquer e teremos:
$$0 \cdot l = n \cdot s = n \cdot 0.$$
Ou seja, são comensuráveis.

3. Os números $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{7}$, são comensuráveis.
   Com efeito, basta tomar $m = 15$ e $n = 14$ e teremos,
   $$15 \cdot \frac{2}{3} = 14 \cdot \frac{5}{7}.$$
   Ou seja, os números $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{7}$ são comensuráveis.

4. Os números 1π e 3π, são comensuráveis.
   Com efeito, basta tomar $m = 3$ e $n = 1$ e teremos,
   $$3 \cdot 1\pi = 1 \cdot 3\pi$$
   Ou seja, os números 1π e 3π são comensuráveis.

5. Pode ocorrer de existir números reais que não são comensuráveis. Por exemplo, os números $\sqrt{2}$ e 1 não são comensuráveis.
   Com efeito, suponha que fossem comensuráveis. Daí existiriam inteiros m e n tais que,
   $$m \cdot \sqrt{2} = n \cdot 1$$
   E elevando-se ao quadrado ambos os membros, teremos,
   $$\left(m \cdot \sqrt{2}\right)^2 = (n \cdot 1)^2$$
   $$m^2 \cdot 2 = 1^2$$
   $$m^2 \cdot 2 = n^2.$$
   Está última igualdade é um absurdo, pois se decompormos os números
   $$m \text{ e } n$$
   em fatores primos teremos no primeiro membro o fator 2 com um expoente ímpar e no segundo membro o fator 2 com um expoente par.

Vamos generalizar e provar o terceiro exemplo com a proposição abaixo.

Proposição 2.1. *Se os números* $\frac{r_1}{r_2}$ *e* $\frac{s_1}{s_2}$ *são racionais quaisquer então são sempre comensuráveis.*

Demonstração. Considerem os racionais $\frac{r_1}{r_2}$ e $\frac{s_1}{s_2}$, então basta tomar como $m = r_2 \cdot s_1$ e $n = r_1 \cdot s_2$ inteiros e teremos:
$$(r_2 \cdot s_1)\frac{r_1}{r_2} = (r_1 \cdot s_2)\frac{s_1}{s_2}.$$
Portanto os racionais $\frac{r_1}{r_2}$ e $\frac{s_1}{s_2}$ são comensuráveis.

□

Com os olhos fitos em sempre que possível querer estender as definições vamos discutir a definição de comensurabilidade que transcrevo *ipsis literes* abaixo:

Definição 2.3. *Dados dois números reais l e s são ditos comensuráveis se existem números inteiros não nulos m e n tais que*

$$ml = ns.$$

Observe que $ml = r$, onde r é real, isto é, de acordo com a definição acima somos induzidos a acreditar que qualquer real pode ser escrito como produto de um inteiro por um outro real. Será?

É lógico que qualquer real é múltiplo inteiro dele próprio, pois poderíamos tomar sempre como o inteiro o número 1. Veja,

$$12 = 1 \cdot 12$$

$$\pi = 1 \cdot \pi$$

$$\sqrt{2} = 1 \cdot \sqrt{2}$$

Então, vamos verificar se há algum exemplo onde o inteiro não é 1. Vejamos,

$10 = 14 \cdot \frac{5}{7}$, isto é, que 10 é um múltiplo inteiro do número $\frac{5}{7}$.

$10 = 15 \cdot \frac{2}{3}$, isto é, que 10 é um múltiplo inteiro do número $\frac{2}{3}$.

$\frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{1}{6}$, isto é, que $\frac{2}{3}$ é um múltiplo inteiro do número $\frac{1}{6}$.

$\sqrt{3} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$, isto é, que $\sqrt{3}$ é um múltiplo inteiro do número $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Os exemplos acima surgem do conceito de comensurabilidade e como vimos acima nos induz a definirmos múltiplo inteiro de um real. Estendendo assim a ideia de múltiplo entre dois inteiros.

Definição 2.4. *Diremos que um número real r é um múltiplo inteiro de um número real l, ou que l é um divisor inteiro de r, se existe um inteiro m tal que $r = ml$.*

Exemplos.

1. $\frac{4}{3} = 4 \cdot \frac{1}{3}$
2. $\sqrt{2} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

Agora veremos alguns resultados que decorrem imediatamente desta definição e a de comensurabilidade.

Proposição 2.2. *Considerem r e l dois números reais não nulos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

Demonstração.

1. Os números r e l são comensuráveis.
2. O quociente $\frac{r}{l}$ é um número racional.
3. Existe um número real t que é múltiplo inteiro comum de r e de l.
4. Existe um número real u que é divisor inteiro comum de r e de l.

Prova. Primeiro vamos mostrar (1) implica (2).

Ora se r e l não nulos são números comensuráveis então de acordo com a definição de comensurabilidade existem números inteiros m e n não nulos tais que:

$$m \cdot r = n \cdot l$$

Daí,

$$\frac{r}{l} = \frac{n}{m}$$

Que são números racionais, pois m e n são inteiros não nulos.

Agora vamos mostrar (2) implica (3).

Para tal, vamos tomar a fração equivalente do racional $\frac{r}{l}$ como $\frac{r}{l} = \frac{r_1}{l_1}$. Daí teremos

$l_1 r = l r_1$ e fazendo $t = l_1 r = r_1 l$, ou seja, $t = l_1 r$ e $t = r_1 l$ como desejado.

Agora vamos mostrar (3) implica (4).

Como t é múltiplo comum de r e de l temos que $t = l_1 r$ e $t = r_1 l$. Segue que $\frac{r}{r_1} = \frac{l}{l_1}$. Então fazendo $u = \frac{r}{r_1} = \frac{l}{l_1}$ teremos que $u = \frac{r}{r_1}$ o que implica que $r = u \cdot r_1$ e de $u = \frac{l}{l_1}$ implica que $l = u.l_1$ como desejado.

Por fim vamos mostrar que (4) implica (1).

Como u é divisor inteiro de r e l temos que existem l_1 e r_1 inteiros tais que

$$r = u \cdot r_1 \text{ e } l = u \cdot l_1.$$

Segue que $u = \frac{r}{r_1}$ e $u = \frac{l}{l_1}$, pois r e l não são nulos, então $\frac{r}{l_1} = \frac{l}{r_1}$ e com isso tem que:

$$r_1 r = l_1 l, \text{ como desejado.}$$

□

2.1 O maior divisor comum e o menor múltiplo comum generalizado

Em toda minha vida escolar estudei, resolvi e ouvi que mdc e mmc eram calculados entre números inteiros. Mas sempre houve situações intrigantes como a de somar duas frações como

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}.$$

E para solucionar dizíamos que se deve tirar o mmc entre os números π e 2π, onde o resultado é 2π. Dai fazíamos,

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} = \frac{2+1}{2\pi} = \frac{3}{2\pi}.$$

De acordo com a definição de mdc e mmc definida para números inteiros isto acima não é verdade, isto é, não foi calculado o mmc entre inteiros. Então o que foi feito?

Na verdade de acordo com a extensão da definição de mmc de inteiros para números comensuráveis o que foi feito acima é sim o mmc para números comensuráveis. O objeto de nosso estudo abaixo é justamente a extensão das definições anteriores. O que justificará o feito acima. Vejamos tais definições.

Definição 2.5. *Sejam r e s dois reais comensuráveis não nulos.*

1. *Dizemos que l é o menor múltiplo comum generalizado entre r e s e escrevemos:*

$$[r, s]_g = l$$

   se:

   a) $l > 0$;

   b) *l é um múltiplo inteiro comum de r e s;*

   c) *se l' é múltiplo inteiro comum de r e s e $l' > 0$, então $l \leq l'$.*

2. *Dizemos que u é o maior divisor comum generalizado entre r e s, e escrevemos:*

$$(r, s)_g = u;$$

   se:

   a) *u é um divisor inteiro comum de r e s;*

b) se u' é divisor inteiro comum de r e de s, então $u' \leq u$;

Exemplo 2.1. *Vamos tentar calcular o menor múltiplo comum generalizado e maior divisor comum generalizado entre os números abaixo usando apenas a definição.*

$$\frac{1}{2} \; e \; \frac{1}{4}$$

De acordo com a definição (2.5) acima:

O nosso primeiro passo a dar de acordo com a definição é encontrar um múltiplo comum positivo dos números acima. Ou seja, queremos encontrar $l > 0$, tal que existam a e b inteiros não nulos tais que:

$$l = a \cdot \frac{1}{2}$$
$$l = b \cdot \frac{1}{4}$$

E para tal deve-se ter

$$a \cdot \frac{1}{2} = b \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

Ou seja, $b = 2 \cdot a$. Desta forma, encontramos uma fábrica para determinar múltiplos comuns dos números $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. Pois podemos escolher qualquer número inteiro não nulo e positivo para representar a o que implica que b fica determinado para que l seja um múltiplo comum inteiro real entre os números $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. Sendo assim podemos escolher para a qualquer número do conjunto dos naturais. Assim, $\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\}$ são múltiplos comuns dos números $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. Como queremos encontrar o menor entre eles, basta tomar o menor valor natural para a, isto é, $a = 1$, ou seja, $\frac{1}{2}$ será o menor múltiplo inteiro comum real positivo entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. Assim

$$\frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right]_g$$

Agora vamos encontrar o maior divisor comum generalizado, usando a definição, entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, ou seja, queremos encontrar número u que seja divisor comum entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. E para tal deve existir a e b inteiro tal que:

$$\frac{1}{2} = a \cdot u$$
$$\frac{1}{4} = b \cdot u$$

Segue daí que ($u \neq 0$)

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{4b} \Leftrightarrow 4b = 2a \Leftrightarrow 2b = a.$$

Ou seja, a deve ser o dobro de b. Isto é, ao escolher um valor inteiro para b fica determinado o valor de a. Assim são divisores comuns inteiros entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ os números $\left\{\ldots, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \ldots\right\}$. Como queremos o maior dentre eles basta tomar o menor valor natural para b que é $b = 1$. Daí teremos,

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)_g = \frac{1}{4}.$$

Duas observações interessantes são as seguintes:

1. 0 continua sendo múltiplo de qualquer real e também é múltiplo comum entre dois comensuráveis quaisquer de acordo com a definição acima.

2. Mas, o número 1 não é divisor comum inteiro de nenhum real que não seja inteiro.

Com efeito, se fosse teríamos:

$$r = a \cdot 1$$

Com r real qualquer e não inteiro e como a deve ser inteiro a equação acima não tem solução para r não inteiro.

Decorre que 1 não é divisor comum de dois comensuráveis que não sejam inteiros. Por exemplo, 1 não é divisor comum entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

Como percebemos no exemplo acima é trabalhoso calcular o *mmcg* e o *mdcg* pelas definições. No teorema que segue obtemos uma fórmula para calcular o *mmcg* e o *mdcg* entre dois reais comensuráveis quaisquer.

Teorema 2.1. *Sejam r e s dois reais comensuráveis não nulos. Então*

$$[r, s]_g = |vr| = |us| \text{ e } (r, s)_g = \left|\frac{r}{u}\right| = \left|\frac{s}{v}\right|,$$

onde $\frac{u}{v}$ é a forma irredutível do racional $\frac{r}{s}$.

Demonstração. Vamos considerar sem perda de generalidade r e s reais comensuráveis não nulos e positivos. Por serem, r e s, comensuráveis existem números inteiros a, b, c e d tais que,

$$ar = bs \text{ e } cr = ds.$$

Agora vamos mostrar que os nossos candidatos a $t = [r, s]_g = |v.r|$ e $t = [r, s]_g = |u.s|$ são ambos maiores que zero. Mas,

$$t = |v.r| = v.r = u.s = |u.s| > 0$$

Assim, atende a primeira condição. Agora vamos mostrar que t é múltiplo de r e s, isto é, $t = mr$ e $t = ns$. Mas, $t = |v.r| = vr$ e $t = |u.s| = u.r$, isto é, são múltiplos de r e de s. Assim, atende a segunda condição. Por fim vamos mostrar que se t atende as duas condições acima, então para qualquer $t^{'} = mr$ tem-se $t^{'} = mr \geq t$. Vejamos: Como t é múltiplo de r e s, então $t = mr$ e $t = ns$, então $mr = ns$. Assim,

$$\frac{r}{s} = \frac{n}{m} = \frac{u}{v}$$

. Como $(u, v) = 1$, então existe a tal que $m = av$ e $n = au$ segue que

$$t^{'} = mr = avr \geq vr = t$$

. Portanto, tem-se:

$$[r, s]_g = |vr| = |us|$$

.

$\square$

Analogamente mostra-se para $(r, s)_g = \left|\frac{r}{u}\right| = \left|\frac{s}{v}\right|$

Exemplos

1. Vamos calcular o *mmcg* e *mdcg* entre os números

$$\frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{4}.$$

Com efeito, seja $r = \frac{1}{4}$ e $s = \frac{1}{2}$ então de acordo com o teorema temos que: $\frac{r}{s} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, u = 1$ e $v = 2$ e como $(1, 2) = 1$, ou seja, a fração $\frac{1}{2}$ é irredutível, tem-se que

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]_g = 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

e

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)_g = \left|\frac{\frac{1}{4}}{1}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}}{2}\right| = \frac{1}{4}$$

Observe que é bem mais prático que calcular pela definição.

2. Vamos calcular o *mmcg* e *mdcg* entre os números

$$\frac{2}{3} \text{ e } \frac{5}{6}.$$

Com efeito, seja $r = \dfrac{2}{3}$ e $s = \dfrac{5}{6}$, então de acordo com o teorema temos que:

$$\frac{r}{s} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{12}{15}.$$

Agora observe o que acontece se acharmos que a hipótese de não considerar que a fração obtida deve estar na forma irredutível $\dfrac{4}{5} = \dfrac{12}{15}$, e tomarmos $u = 12$ e $v = 15$. Assim teríamos $u = 12$ e $v = 15$, daí teríamos:

$$\left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]_g = 15 \cdot \frac{2}{3} = 10$$

Onde seguindo o teorema a risca teríamos $\dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$ que é a sua versão irredutível. Assim teríamos:

$$\left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]_g = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

Observe que 10 é de fato um múltiplo inteiro dos racionais $\dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{5}{6}$. Veja:

$$10 = 15 \cdot \frac{2}{3}$$

$$10 = 12 \cdot \frac{5}{6}$$

Mas, não é o menor positivo!

Então percebemos que a singela hipótese de que a fração $\dfrac{r}{s}$ deve estar no modo irredutível para a determinação de u e v é essencial.

Será que esta hipótese é necessária para o *mdcg*?

Vejamos: Tomando $r = \dfrac{2}{3}$ e $s = \dfrac{5}{6}$ e $u = 12$ e $v = 15$

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right)_g = \left|\frac{\frac{2}{3}}{12}\right| = \left|\frac{\frac{5}{6}}{15}\right| = \frac{1}{18}$$

Mas, se $u = 4$ e $v = 5$ teríamos:

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right)_g = \left|\frac{\frac{2}{3}}{4}\right| = \left|\frac{\frac{5}{6}}{5}\right| = \frac{1}{6}$$

Observe que de fato $\frac{1}{18}$ é um divisor comum inteiro dos racionais $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{6}$, mas não é o maior.

Assim a hipótese da fração ser irredutível é essencial.

Uma curiosidade bastante interessante é que:

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]_g = \frac{[1,1]}{(2,4)} = \frac{1}{2}$$

e

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)_g = \frac{(1,1)}{[2,4]} = \frac{1}{4}$$

Ai surge a seguinte indagação. Se sempre que r e s forem racionais será válido o cálculo acima?

Para os casos como no exemplo imediatamente acima de r e s serem números racionais, teremos um caso particular do teorema acima e podem ser reescritas em termos das representações destes racionais em frações irredutíveis. Isto será feito no corolário abaixo.

Corolário 2.1. *Considerem r e s números racionais não nulos e sejam a, b, c e d inteiros tais que $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são as representações para r e s respectivamente, na forma de fração irredutível. Então*

$$[r, s]_g = \frac{[a, c]}{(b, d)}$$

e

$$(r, s)_g = \frac{(a, c)}{[b, d]}$$

Demonstração. Sem perda de generalidade vamos mostrar o caso em que r e s são positivos. Como $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são representações para r e s respectivamente, na forma de fração irredutível, então $(a, b) = (c, d) = 1$. Daí,

$$\frac{r}{s} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{cb}.$$

Agora para aplicarmos o teorema acima devemos ter que $\frac{ad}{bc}$ deve estar na forma irredutível. Para tal usaremos o seguinte artifício.

Faremos,

$$a' = \frac{a}{(a,c)}, b' = \frac{b}{(b,d)}, c' = \frac{c}{(a,c)} \text{ e } d' = \frac{d}{(b,d)}.$$

E agora $\frac{ad}{cb}$ assume a forma

$$\frac{ad}{cb} = \frac{a'd'}{c'b'}$$

Onde $\frac{a'd'}{c'b'}$ é irredutível de acordo com resultado já exibido no capítulo 1. Assim obtendo as hipóteses do primeiro teorema deste capítulo. Daí segue,

$$[r,s]_g = [\frac{a}{b}, \frac{c}{d}]_g = rb'c' = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{(b,d)} \cdot \frac{c}{(a,c)} = \frac{ac}{(b,d) \cdot (a,c)}$$

Agora usando o fato de que $ac = (a,c)[a,c]$, obtemos o desejado.

$$[r,s]_g = \left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right]_g = \frac{[a,c]}{(b,d)}.$$

Agora vamos verificar a prova para o $(r,s)_g$. Usando o teorema (2.1) imediatamente acima temos:

$$(r,s)_g = \frac{r}{(a'c')} = \frac{r}{\frac{a}{(a,c)} \frac{d}{(b,d)}} = \frac{r(a,c)(b,d)}{ad} = \frac{a}{b} \frac{(a,c)(b,d)}{ad} = \frac{(a,c)(b,d)}{bd}.$$

Agora usando o fato de $bd = (b,d)[b,d]$ obtemos o desejado.

$$(r,s)_g = \frac{(a,c)}{[b,d]}.$$

□

Agora utilizando tanto o teorema (2.1) como o corolário (2.2) vamos calcular alguns *mmcg* e *mdcg* dos seguintes exemplos.

1. Vamos calcular o *mmcg* e *mdcg* entre os números $\frac{8}{6}$ e $\frac{5}{12}$. Veja:

$$\left[\frac{8}{6}, \frac{5}{12}\right]_g = \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{12}\right]_g = \frac{[4,5]}{(3,12)} = \frac{20}{3}$$

e

$$\left(\frac{8}{6}, \frac{5}{12}\right)_g = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{12}\right)_g = \frac{(4,5)}{[3,12]} = \frac{1}{12}$$

2. Vamos calcular o *mmcg* e *mdcg* entre os números $\frac{1}{3}$ e 1. Veja:

$$\left[\frac{1}{3}, 1\right]_g = \frac{[1,1]}{(3,1)} = \frac{1}{1} = 1$$

e

$$\left(\frac{1}{3}, 1\right)_g = \frac{(1,1)}{[3,1]} = \frac{1}{3}.$$

3. Vamos calcular o *mmcg* e *mdcg* entre os números $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Veja:

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right]_g = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{2}$$

e

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)_g = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Agora vamos mostrar que as identidades do primeiro capítulo também se generalizam para o *mmcg* e *mdcg*.

Corolário 2.2. *Sejam r e s reais comensuráveis não nulos. Então:*

(i) $[r,s]_g \cdot (r,s)_g = |r \cdot s|$

Dado qualquer real não nulo c temos que cr e cs são ainda comensuráveis. Então:

(ii) $[cr, cs]_g = |c| \cdot [r,s]_g$

(iii) $(cr, cs)_g = |c| \cdot (r,s)_g$

Demonstração. (i) Vamos admitir que r e s sejam não nulos e positivos e c um real positivo qualquer. Como r e s são comensuráveis significa que existem m e n naturais os menores possíveis devidos o princípio da boa ordenação tais que:

$$\frac{r}{s} = \frac{m}{n}, \text{ com } (m,n) = 1.$$

Agora estamos nas hipóteses do teorema. Desta forma aplicando-o temos:

$$[r,s]_g = rn = s \cdot m \text{ e } (r,s)_g = \frac{r}{m} = \frac{s}{n}$$

Agora bastam multiplicar ambos os membros e teremos o desejado, veja.

$$[r,s]_g \cdot (r,s)_g = rn \cdot \frac{s}{n} = r \cdot s$$

(ii) É claro que se r e s são comensuráveis então cr e cs também o são. Desta maneira existem m e n naturais não nulos tais que:

$$\frac{cr}{cs} = \frac{m}{n}, \text{ com } (m,n) = 1.$$

E mais uma vez caímos nas hipóteses do teorema e com isso podemos escrever,

$$[cr, cs]_g = crn = c \cdot [r,s]_g$$

(iii) Usando o teorema para o $(cr, cs)_g$ temos,

$$(cr, cs)_g = \frac{cr}{m} = c \cdot \frac{r}{m} = c \cdot (r,s)_g.$$

□

Outra consequência importante e muito útil nos permitirá calcular o mínimo múltiplo comum generalizado e maior divisor comum generalizado entre dois racionais de expansão decimal finita de uma forma rápida. Não é difícil se convencer que este resultado também vale quando substituímos a base 10 de numeração por uma base b qualquer.

Corolário 2.3. *Se r e s são dois números racionais que podem ser representados por uma fração decimal, digamos,*

$$r = \frac{u}{10^k} \text{ e } s = \frac{v}{10^l}$$

Suponha que $t \geq k$ e $t \geq l$, então

$$[r,s]_g = \frac{[10^t r, 10^t s]}{10^t} \text{ e } (r,s)_g = \frac{(10^t r, 10^t s)}{10^t}.$$

Demonstração. Basta tomar $[r,s]_g$ e multiplicar por $\frac{10^t}{10^t}$, veja,

$$\frac{10^t}{10^t}[r,s]_g = \frac{[10^t r, 10^t s)]_g}{10^t} = \frac{[10^t r, 10^t s]}{10^t}$$

A última passagem se justifica, pois, $t \geq k$ e $t \leq l$, dai os números $10^t r$ e $10^t s$ são inteiros, isto é,

$$[10^t r, 10^t s]_g = [10^t r, 10^t s].$$

Analogamente se prova para o $(r,s)_g$. □

3 APLICAÇÕES E EXERCÍCIOS

Agora de posse do conhecimento de como tcalcular o menor múltiplo comum generalizado e o maior divisor comum generalizado estamos preparados para resolver problemas que necessitem deste conhecimento. Neste capítulo faremos alguns exercícios para colocar em pratica todos os resultados para mmcg e mdcg, e vamos resolver dois problemas.

1. Exercício. Vamos calcular o *mmcg* e *mmdg* entre os números $\frac{1}{\pi}$ e $\frac{1}{2\pi}$ usando todos os resultados obtidos. Para tal observe que $\frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{2\pi}} = \frac{2}{1}$, assim $u = 2$ e $v = 1$.

$$\text{a. } \left[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}\right]_g = \frac{1}{\pi} \cdot 1 = \frac{1}{\pi}$$

$$\text{b. } \left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}\right)_g = \frac{\frac{1}{\pi}}{2} = \frac{1}{2\pi}$$

Agora usando outro resultado. Veja,

$$\text{c. } \left[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}\right]_g = \frac{1}{\pi}\left[1, \frac{1}{2}\right]_g = \frac{1}{\pi} \cdot 1 = \frac{1}{\pi}$$

$$\text{d. } \left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}\right)_g = \frac{1}{\pi}\left(1, \frac{1}{2}\right)_g = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi}$$

Por fim vamos calcular o *mmcg* e *mdcg* usando o resultado que envolve o *mmc* e *mdc* para inteiros. Veja,

$$\text{e. } \left[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}\right]_g = \frac{1}{\pi}\left[1, \frac{1}{2}\right]_g = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{[1,1]}{(1,2)} = \frac{1}{\pi}$$

$$\text{f. } \left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}\right)_g = \frac{1}{\pi}\left(1, \frac{1}{2}\right)_g = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(1,1)}{[1,2]} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi}$$

2. Exercício. Vamos calcular o *mmcg* e *mdcg* entre os números $\frac{2}{100}$ e $\frac{5}{10}$.
   Primeiro vamos calcular usando *mmc* e *mdc* para inteiros das frações equivalentes. Assim,

$$\left[\frac{1}{50}, \frac{1}{2}\right]_g = \frac{[1,1]}{(50,2)} = \frac{1}{2}.$$

e

$$\left(\frac{1}{50}, \frac{1}{2}\right)_g = \frac{(1,1)}{[50,2]} = \frac{1}{50}.$$

Agora vamos calcular usando o último resultado exibido para potências de base dez. Veja,

$$\left[\frac{2}{100}, \frac{5}{10}\right]_g = \frac{\left[100 \cdot \dfrac{2}{100}, 100 \cdot \dfrac{5}{10}\right]}{100} = \frac{[2, 50]}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2},$$

e

$$\left(\frac{2}{100}, \frac{5}{10}\right)_g = \frac{\left(100 \cdot \dfrac{2}{100}, 100 \cdot \dfrac{5}{10}\right)}{10^2} = \frac{(2, 50)}{10^2} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}.$$

3. Exercício. Encontre o *mmcg* e *mdcg* para os comensuráveis $r = \dfrac{3}{2}$ e $s = \dfrac{5}{8}$.

Resolução.

Observe que

$$\frac{r}{s} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{12}{5} = \frac{m}{n}$$

Primeiro vamos calcular *mmcg*, vejamos:

Vamos usar o fato já mostrado que diz, $[r, s]_g = rn$, onde $m = 12$ e $n = 5$, Veja,

$$\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right]_g = \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{15}{2}$$

Ou usando $[r, s]_g = sm$, tem-se,

$$\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right]_g = \frac{5}{8} \cdot 12 = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$$

Ou usando $[cr, cs]_g = c \cdot [r, s]_g = rn$, tem-se,

$$\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[3, \frac{5}{4}\right]_g = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = \frac{15}{2}$$

Ou usando $[cr, cs]_g = c \cdot [r, s]_g = csm$,

$$\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right]_g = \frac{1}{2} \cdot \left[3, \frac{5}{4}\right]_g = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot 12 = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$$

Ou usando $[r, s]_g = \left[\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}\right]_g = \dfrac{[a, c]}{(b, d)}$, onde $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d}$ são as frações irredutíveis de r e s.

$$\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right]_g = \frac{[3, 5]}{(2, 8)} = \frac{15}{2}$$

Agora vamos calcular o mdcg,

Vamos usar $(r,s)_g = \dfrac{r}{m}$, tem-se,

$$\left(\frac{3}{2},\frac{5}{8}\right)_g = \frac{\frac{3}{2}}{12} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{12} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Ou usando $(r,s)_g = \dfrac{s}{n}$, tem-se,

$$\left(\frac{3}{2},\frac{5}{8}\right)_g = \frac{\frac{5}{8}}{5} = \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{8}$$

Ou usando $(cr,cs)_g = c\cdot(r,s)_g = c\cdot\dfrac{r}{m}$, tem-se,

$$\left(\frac{3}{2},\frac{5}{8}\right)_g = \frac{1}{2}\cdot\left(3,\frac{5}{4}\right)_g = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{12} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Ou usando $(cr,cs)_g = c.(r,s)_g = \dfrac{s}{n}$,

$$\left(\frac{3}{2},\frac{5}{8}\right)_g = \frac{1}{2}\cdot\left(3,\frac{5}{4}\right)_g = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{5}{4}}{5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{8}$$

Ou usando $(r,s)_g = \left(\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}\right)_g = \dfrac{[a,c]}{(b,d)}$, onde $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d}$ são as frações irredutíveis de r e s.

$$\left(\frac{3}{2},\frac{5}{8}\right)_g = \frac{(3,5)}{[2,8]} = \frac{1}{8}$$

Problema 1

1. Numa construtora um mestre de obras tem barras de ferro para a construção de vigas cujas medidas destas barras são umas com $20\sqrt{2}m$ e outras com medidas $12\sqrt{2}m$ e é solicitado as seguintes tarefas:

    a. Que o construtor corte duas destas barras com medidas distintas de forma que ambas as barras tenha pedaços o maior possível e comum a ambas. Qual a medida comum a ser cortada destas barras?

    b. Agora necessita-se de pedaços uniformes que devem ser obtidos soldando-se as barras de mesma medida até que as barras de ferro com medidas distintas ao serem soldadas obtenham o mesmo comprimento pela primeira vez. Que medidas devem ter estes pedaços uniformes?

Problema 2

2. Ao fazer uma reforma em um apartamento um mestre de obra se vê numa situação difícil ao tentar atender dois pedidos de seu cliente que são eles.

    a. A sala é um ambiente exatamente retangular de medidas $2,5\pi m$ e $1,5\pi m$ e o cliente quer colocar cerâmicas feita sob encomenda todas quadradas e que sejam a maior possível. Qual será a medida desta cerâmica?

    b. Nesta construção vão utilizar cabos de aço para o uso de energia de alta tensão para tal compraram rolos de $50\pi m$ e $35\pi m$ deseja-se obter cabos uniformes emendando os rolos de mesma medida até que os rolos de medidas distintas ao serem emendados obtenham o mesma medida. Qual deverá ser o comprimento após serem emendados de forma a obter a mesma medida a primeira vez?

Agora vamos resolvê-los:

Resolução do problema 1 a. O construtor deseja encontrar o maior pedaço comum a ambas as barras, isto é, ele quer o maior divisor comum generalizado entre as medidas das barras $20\sqrt{2}m$ e $12\sqrt{2}m$. Sejam, $r = 20\sqrt{2}$ e $s = 12\sqrt{2}$. Assim,

$$\frac{u}{v} = \frac{20\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = \frac{5}{3}$$

e o maior divisor comum generalizado entre r e s é

$$(r, s)_g = (20\sqrt{2}, 12\sqrt{2})_g = \frac{20\sqrt{2}}{5} = 4\sqrt{2},$$

ou seja, os pedaços comuns com maior medida possível deve medir $4\sqrt{2}m$.

Resolução do problema 1 b. Agora o construtor deseja encontrar pedaços uniformes (mesmo tamanho) utilizando barras inteiras e de maneira a fazer o menor número de soldas possível para obtê-las, ou seja, queremos encontrar o menor múltiplo comum generalizado entre as medidas das barras $20\sqrt{2}m$ e $12\sqrt{2}m$. Sejam, $r = 20\sqrt{2}$ e $s = 12\sqrt{2}$. Assim,

$$\frac{u}{v} = \frac{20\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = \frac{5}{3}$$

e menor múltiplo comum generalizado entre r e s é

$$[r, s]_g = [20\sqrt{2}, 12\sqrt{2}]_g = 3 \cdot 20\sqrt{2} = 60\sqrt{2},$$

ou seja, os pedaços comuns com menor medida possível que serão obtidos com o menor número de soldas possível deve medir $60\sqrt{2}m$. Ou seja, com a barra menor conseguisse soldando apenas cinco pedaços de $12\sqrt{2}m$ e com o pedaço de $20\sqrt{2}m$ basta fazer apenas três soldas.

Resolução do problema 2 a. O construtor deseja encontrar a maior cerâmica que se encaixa em ambos os lados da sala. Ele quer então o maior divisor comum generalizado entre as medidas das $2,5\pi m$ e $1,5\pi m$. Sejam $r = 2,5\pi m$ e $s = 1,5\pi m$. Assim,

$$\frac{u}{v} = \frac{2,5\pi}{1,5\pi} = \frac{5}{3}$$

e o maior divisor comum generalizado entre r e s é

$$(r, s)_g = (2,5\pi, 1,5\pi)_g = \frac{2,5\pi}{5} = 0,5\pi,$$

ou seja, as cerâmicas com maior medida possível e quadradas devem ter medida do seu lado de $0,5\pi m$.

Resolução do problema 2 b. O construtor deve encontrar o mínimo múltiplo comum generalizado entre $50\pi m$ e $35\pi m$ daí teremos exatamente quantas emendas deverá ter os rolos de medida $50\pi m$ e os de medida $35\pi m$ para que fiquem com comprimentos iguais. Assim,

$$[50\pi, 35\pi]_g = 5\pi \cdot (10, 7) = 5\pi \cdot (10, 7) = 5\pi \cdot 70 = 350\pi,$$

isto é, devemos emendar 7 vezes os rolos com medida $50\pi m$ e 10 vezes os rolos de medida 35π.

REFERÊNCIAS

[1] RIPOLL, Cydara Cavedon; RIPOLL, Jaime Bruck; SANT'ANA, Alveri Alves; instituto de Matemática- UFRS, *O Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum Generalizado*, Matemática Universitária, N° 40, junho/2006-pp. 59 – 74.

[2] HEFEZ, Abramo, *Elementos de Aritmética*, Coleção Textos Universitários, SBM, Edição 2006.

[3] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo C.P.; WGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C.; *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 1, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2012.

[4] SANTOS, Jose Plinio de Azevedo, *Introdução à Teoria dos Números*, SBM, Coleção Matemática Universitária, 2015.

[5] MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A.; SALDANHA, Nicolau C.; MARTINEZ, Fabio E. B.; *Tópico em Teoria dos Números*, Coleção Profmat, 2012.