UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Alex Rodrigues de Souza
Jonildo Albuquerque de Jesus
Josué Cardoso Moraes

CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS A PARTIR DOS AXIOMAS DE PEANO

Macapá
2012

Alex Rodrigues de Souza
Jonildo Albuquerque de Jesus
Josué Cardoso Moraes

CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS A PARTIR DOS AXIOMAS DE PEANO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente do Curso de Licenciatura em Matemática - UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção da Graduação em Licenciatura em Matemática.

Área de Concentração: **Teoria dos Números**
Orientador: *Ms.* Márcio Aldo Lobato Bahia.

Macapá
2012

Construção dos Números Inteiros a partir dos Axiomas de Peano

por

SOUZA, Alex Rodrigues
JESUS, Jonildo Albuquerque
MORAES, Josué Cardoso

Este Trabalho de Conclusão de Curso, foi julgado e aprovado, pelo Corpo Docente do Curso de Licenciatura em Matemática - UNIFAP, como requisito parcial para a obtenção da Graduação de Licenciatura em Matemática.

Macapá, 18 de outubro de 2012

Prof. *Ms.* Marcio Aldo Lobato Bahia
Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática - UNIFAP

Banca Examinadora

Orientador: Prof. *Ms.* Márcio Aldo Lobato Bahia.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Membro: Prof. *Dr.* Erasmo Senger.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Membro: Prof. *Esp.* João Socorro Pinheiro Ferreira.
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

A todos aqueles que contribuiram de alguma forma para a realização de mais um sonho nosso.

Agradecimentos

⋆ Agradecemos à Deus, que nos permitiu tudo isso, a quem deu essa oportunidade às nossas vidas. Vem dele tudo o que somos, o que temos e o que esperamos, o maior dentre todos os seres;

⋆ Ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática da UNIFAP;

⋆ Ao professor *Ms.* Márcio Bahia, pelas orientações, dedicação e apoio durante toda esta longa jornada pelo qual passamos;

⋆ Às nossas famílias, pelas orações, conselhos, empenho, estímulo e força para realizarmos este trabalho em todos os momentos em que precisamos;

⋆ Aqueles amigos que fizeram parte dos nossos dias durante todo esse curso e que farão falta por seus estilos de serem;

⋆ Aqueles amigos em que contamos nos momentos mais difícies e também naqueles de lazer e quando precisamos eles estão do nosso lado;

⋆ A todos os professores, que foram em parte os responsáveis pela nossa formação acadêmica, pessoal e profissional;

⋆ Enfim a todos que contribuíram de alguma forma para que este desafio em nossas vidas se concretizasse.

"O problema começa quando consideramos a verdade independente de nossa consciência".

Albert Einsten.

Resumo

Este trabalho tem a fundamentação da Teoria dos Números, que é utilizada para escrever o livro "Número Uma Introdução à Matemática", e descreve de maneira formal os Números Inteiros apartir da axiomática de Giuseppe Peano.

Inicialmente abordamos a linguagem formal utilizada, e o seu valor para a representação matemática, abordamos o contexto histórico para dar a noção da grande importância que tem esse tema para a evolução da matemática ao longo do tempo e dando ênfase ao surgimento dos números.

Após a apresentação da linguagem matemática de forma resumida num contexto de teoria dos números começamos expor as propriedades fundamentais utilizadas na construção dos mesmos tendo como ponto inicial a noção de equivalência: definição e proposição, seguida da definição de Número Inteiro, as operações de "Adição"e "Multiplicação"assim como a relação de "ordem"em $\mathbb{Z}$.

Palavras-chave: Números Inteiros, Axiomas, Propriedades.

Abstract

This work is based on the Theory of Numbers, which is used to write the book "Numbers a introduction to math ", and describes in a formal way the whole numbers from Giuseppe Peano axiomatic.

Initially we address the formal language used, and its value for the mathematical representation, we discuss the historical context to give the notion of the great importance of this issue for the evolution of mathematics over time and emphasizing the appearance of numbers.

After the brief presentation of mathematical language in the context of number theory, we began to expose the fundament properties used in the construction of it having as starting point the notion of equivalence: definition and proposition, then the definition Integer, the operations of "addition" and "Multiplication" as well as the relation with "order" in $\mathbb{Z}$.

Keywords: Numbers Integer, Axiom Properties.

SUMÁRIO

Introdução

O trabaho aqui apresentado tem como objetivo a conclusão do curso e foi criado usando como eixo temático a teoria dos números, cujo foi tirado como tema principal a Construção dos Números Inteiros passando pelos naturais usando os axiomas de Giuseppe Peano. E a construção foi feita focada no livro “Números uma Introdução à Matemática”que foi escrito por Cesar Polcino Milies e Sônia Pitta Coelho e nos apoiando em outras bibliografias que serão citadas nas referências bibliográficas.

Neste trabalho consideramos uma estrutura algébrica que já é muito familiar para aqueles acadêmicos da área de álgebra: A estrutura algébrica do conjunto $\mathbb{Z}$ dos Números Inteiros. Por estrutura algébrica do conjunto $\mathbb{Z}$ entende-se o conjunto de propriedades dos Números Inteiros que dizem respeito às suas duas operações habitual, a adição e a multiplicação, bem como a ordem definida no conjunto $\mathbb{Z}$ pela relação $<$, a chamada relação de ordem “menor”

Entre os vários ramos da matemática, a Teoria dos Conjuntos ocupa um lugar de destaque e, juntamente com a lógica, fundamentam toda a matemática conhecida. Desse modo, os vários ramos da matemática podem ser considerados formalmente incluídos na Teoria dos Conjuntos.

Como consequência desta inclusão, questões fundamentais à cerca da natureza da matemática reduzem-se às perguntas relacionadas à teoria dos conjuntos. Perguntas como: O que é um conjunto? O que é um número? Motivaram grande parte dos matemáticos e dos filósofos dos fundamentos da matemática durante o século XIX e parte do século XX. A caracterização dos Números Inteiros, Racionais e dos Números Reais foi um problema central para as investigações de Weierstrass, Dedekind, Kronnecker, Frege, Peano, Russell, Whitehead, Brower e outros.

Para Peano não tornava-se necessário a definição de número, admitia o conceito de número primitivo, ou seja, não definido. No entanto, a exigência de rigor de Peano não podia deixar o conceito de número sujeito a arbitrariedade. Por este motivo explicita os termos primitivos que serão usados e fixa com os termos utilizados. Peano mostrou que para isso precisaria de 3 conceitos lógicos, além de 5 axiomas. Ele pensou que se encontrasse um sistema lógico partindo dos números naturais, ele seria válido para toda a matemática, já que a matemática pura tradicional, inclusive a geometria analítica, eram derivadas de proposições referentes às propriedades dos números naturais. Em outras palavras, a validade do sistema para os números naturais implica na validade do sistema para todo o resto.

Esta forma teria a preferência de Peano, o qual sempre defendeu (radicalmente) a simbolização como um elemento simplificador, que evita ambiguidades da linguagem comum. De fato, fica claro na forma refraseada que existe uma operação $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, denominada sucessora. Esta operação sucessora origina, indutivamente, a uma nova operação: a operação soma, nos permite, ainda, definir a ordem de um elemento, e então verifica-se que: a aritmética começa, realmente, com os Axiomas de Peano.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Noções Primitivas

A evolução dos números, assim como a dos conjuntos numéricos, ocorreu de modo a colaborar com a necessidade da humanidade. Os números inteiros apareceram quando os números naturais não satisfaziam todas as necessidades , por exemplo, na contagem da medida de temperatura.

Os Números Inteiros positivos foram os primeiros números trabalhados pela humanidade e tinham como finalidade contar objetos, animais, enfim, elementos do contexto histórico no qual se encontravam.

O conjunto dos números inteiros positivos recebe o nome de conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Sendo ele:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...\}$$

Enquanto que o conjunto dos números inteiros contempla também os inteiros negativos, constituindo o seguinte conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{..., -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$$

Os números inteiros estão presentes até hoje em diversas situações do cotidiano da humanidade como, por exemplo, para medir temperaturas, contar dinheiro, marcar horas, etc. Sua importância é indiscutível.

Diante disso, mostraremos todas as propriedades desse conjunto numérico que existe há tanto tempo, formalizada pela axiomática de Giuseppe Peano.

Para que os conceitos primitivos sejam empregados adequadamente torna-se necessário estabelecer regras que regulamentem sua utilização e estabeleçam suas propriedades de maneira formal.

Peano, em sua fundamentação de 1879, admite três entes primitivos: *número natural, zero* e *sucessor*, relacionados entre si por cinco axiomas. Indicaremos por $\sigma(n)$ o "*sucessor*" do número n e, como é usual, utilizaremos o símbolo 0 para indicar o zero.

Vejamos algumas definições:

Axioma: Na matemática, um axioma é uma hipótese inicial as quais outros enunciados são logicamente derivados. Pode ser uma sentença, uma proposição, consideradas como óbvias ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria. Diferentemente de teoremas, axiomas não podem ser derivados por princípios de dedução e nem são demonstráveis por derivações formais, simplesmente porque eles são hipóteses iniciais. Isto é, não há mais nada a partir do que eles seguem logicamente. Em muitos contextos, “axioma”, “postulado”e “hipótese”são usados como sinônimos. A palavra “axioma”vem do grego, que significa “considerado válido ou adequado”ou “considerado auto-evidente”.

Teorema: Um Teorema é uma proposição fundamental. Ou seja, é um resultado importante que se destaca. Usualmente deixa-se o termo “teorema”para as afirmações que podem ser provadas de grande “importância matemática”. São dados outros nomes para os outros tipos dessas afirmações (proposições):

Proposição: Proposição é uma sentença declarativa, que pode ser verdadeira ou falsa. Geralmente, de simples prova e de importância Matemática menor.

Lema: é um “pré-teorema”. Um teorema que serve para ajudar na prova de outro teorema maior. A distinção entre teoremas e lemas é um tanto quanto arbitrária, uma vez que grandes resultados são usados para provar outros. Por exemplo, o Lema de Gauss e o Lema de Zorn são muito interessantes, e muitos autores os denominam de Lemas, mesmo que não os usem para provar alguma outra coisa.

1.2 História dos Números

1.2.1 Primeiros Indícios

Quase quatro mil anos separam as primeiras manifestações de numeração escrita da construção do sistema de numeração posicional decimal que utilizamos, munido do símbolo denominado zero. Esse símbolo foi criado pelos hindus nos primeiros séculos da era cristã. A concepção do zero foi ignorada, durante milênios, por civilizações matematicamente importantes como a dos gregos e dos egípcios.

Até que se iniciasse o desenvolvimento teórico do conceito de número foi lento e complexo, envolvendo diversas civilizações.

O conjunto usado para contagens é o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. De tão natural, $\mathbb{N}$ ganha o nome *Conjunto dos Números Naturais* e é o primeiro conjunto numérico que aparece na história de qualquer civilização ou em qualquer tratado sobre os fundamentos da Matemática. Os números naturais formam um dos conceitos mais antigos conhecidos pelo ser humano. Entretanto, a sua evolução de uma noção intuitiva para um conceito mais elaborado foi muito lenta. Só no final do século XIX, quando os fundamentos de toda a Matemática foram questionados e intensamente repensados, é que a noção de número passou a ser baseada em conceitos da teoria dos conjuntos, considerados mais primitivos.

A noção de número natural, como vimos, desenvolveu-se gradativamente a partir da experiência cotidiana. Seu emprego foi-se generalizando aos poucos e as propriedades das operações foram admitidas como um fato experimental. O mesmo não aconteceu com os números negativos. O primeiro uso conhecido desses números encontra-se numa obra indiana, atribuída a Brahmagupta (628 d.C. aproximadamente), na qual são interpretados como dívidas. Foi preciso a possibilidade de dar diversas interpretações aos números negativos que fez com que eles fossem aceitos aos poucos na coletividade matemática. Porém, desde seu aparecimento, esses números sucitaram dúvidas quanto à sua legitimidade. Em 1543 *Stieffel* ainda os chamava de números absurdos, e Cardano, contemporâneo de Stieffel, denominava-os soluções falsas de uma equação. A noção de número natural (a partir da qual se pode explicitar a noção dos inteiros) foi fundamentada com precisão, pela primeira vez, pelo matemático italiano Giuseppe Peano, em 1889 na sua *Arithmetica Principia Nova Methodo Exposita*. O Método de Peano, com leves variantes, é usado até hoje por numerosos textos.

Segundo esta teoria, a definição de número natural é estabelecida a partir de três conceitos primitivos e cinco axiomas. Que ao longo do tempo foi aplicada também essa fundamentação axiomática para o conjunto dos Inteiros. Mas, afinal, o que são os "números inteiros"assim também como para os outros conjuntos de números presente no leque de ramos da matemática?

Os registros históricos nos mostram a utilização de vários sistemas de numeração, os babilônios de 2000 a.C., desenvolveram o sistema de numeração sexagesimal e empregaram o princípio posicional; os romanos, fizeram história através do uso simultâneo do princípio da adição e do raro emprego do princípio da subtração, os egípcios que já usavam o sistema decimal (não posicional); e os gregos antigos, povos que utilizavam diversos sistemas de numeração. A invenção do zero foi um passo decisivo para a consolidação do sistema de numeração indo-arábico, devido à sua eficiência e funcionalidade em relação aos demais sistemas de numeração.

Podemos inferir que o processo histórico da conceituação de número assemelha-se a nossa própria formação desse conceito. A preocupação em fazer contagens, em diversas situações do dia-a-dia, fez-se à necessidade de criarmos uma estrutura de elementos para o conjunto dos números com que vamos trabalhar.

1.2.2 Giuseppe Peano - Vida e obras

Giuseppe Peano foi considerado o maior matemático italiano da época, nasceu em Spinetta em 1858 e morreu em Turim em 1932. Seus principais trabalhos se distribuem por contribuições teóricas nas áreas de análise matemática, lógica,teoria dos conjuntos, equações diferenciais e análise vetorial. Escreveu vários livros e artigos e é considerado fundador da moderna lógica matemática e teoria dos conjuntos. Sua obra "Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita"de 1889, apresenta os famosos axiomas de Peano, considerados até hoje como a axiomatização padrão dos números naturais. É considerado, ainda, responsável pela criação de um sistema de símbolos que permite a descrição e o enunciado de proposições lógicas sem recorrer à linguagem comum. Durante a maior parte de sua carreira, ensinou matemática na Universidade de Turim.

Giuseppe Peano, é um autor , cujo nome é lembrado até hoje em conexão com os axiomas por ele introduzidos, dos quais dependem tantas construções rigorosas da álgebra e da análise. O que motivou seu trabalho foi o desejo de expressar toda a matemática em termos de um cálculo lógico. Em seu *Formulaire de Mathématiques*, que contém cinco volumes escrito com a participação de colaboradores publicados a partir de 1894, desenvolveu uma linguagem formalizada que continha não só a lógica matemática como todos os ramos mais importantes da matemática.

Atraiu um grande número de colaboradores e discípulos pelo fato de evitar o uso de uma linguagem metafísica e de introduzir símbolos muitos deles usados até hoje. Para seus fundamentos da aritmética ele escolheu três conceitos primitivos - zero, número (que, no contexto, se refere a inteiros positivos), a relação "e sucessor de"satisfazendo os cinco postulados proposto por ele.

Em 1888, introduziu a definição axiomática de espaço vetorial, chamando de sistemas lineares. Os axiomas de Peano, foram formulados pela primeira vez em 1889 na *Arithmetices Principia nova methodo exposita*, que representava a tentativa de reduzir a aritmética comum a puro simbolismo formal. Peano exprimia os postulados em símbolos, em vez das palavras que usamos. O método postulacional atingiu novo nível de precisão, sem ambiguidade de sentido e sem hipóteses ocultas. Ele também desenvolveu a lógica simbólica.

Em 1890, Peano mostrou que a matemática podia surpreender o senso comum quando construiu curvas continuas que enchem o espaço, isto é, curvas dadas por equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, onde f e g são funções reais contínuas no intervalo , cujos pontos preenchem completamente o quadrado unitário . Esse paradoxo combina perfeitamente com a descoberta de Cantor de que não há mais pontos no quadrado unitário que no segmento de reta unitário. Porém, em 1903, Peano se distraiu com a invenção da linguagem internacional que ele chamou Interlíngua ou Latino sine flexione, com vocabulário tirado do latim, francês, inglês e alemão. Esse movimento foi mais efêmero que sua estrutura axiomática da aritmética.

No final do século XIX, com a aritmetização da análise e os axiomas de Peano, a maior parte da matemática conseguiu base estritamente axiomática. Peano foi um dos precursores do logicismo cuja expressão definitiva é a monumental obra *Principia Mathematica* de Whitchead e Russell.

Em seu livro "*Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*", Giuseppe Peano estabeleceu importantes axiomas, os quais permitiram o desenvolvimento da Aritmética e levaram a construções rigorosas em Álgebra e Análise. A motivação foi o desejo de expressar toda a Matemática em termos de um cálculo que envolvesse o raciocínio lógico. Serão apresentados tais axiomas de modo a entender a estrutura do conjunto dos números naturais e demonstrar algumas propriedades básicas por meio da lógica. Estabelecendo uma relação de ordem no conjunto dos números naturais e utilizando a axiomática desenvolvida, é possível obter uma construção lógico formal do conjunto dos números inteiros.

Na obra "*Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*" de 1889, introduziu notações como $\cup$ e $\cap$ para união e intersecção de conjuntos. Descobriu um tipo de curva contínua denominada curva de Peano em 1890. Grande parte da sua vasta obra científica foi dedicada à Matemática e à Lógica, sendo a restante parte à Filosofia e à construção da interlingua.

1.3 Fundamentos

1.3.1 Notações

$\forall$: leia-se "para todo" ou "qualquer que seja".

$\exists$: leia-se "existe (pelo menos) um".

1.3.2 Implicação

Suponhamos, P e Q são "asserções" (ou "propriedades"). Quando escrevemos:

$$\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$$

queremos dizer que:

$$\text{P implica em Q}$$

Ou seja, sempre que P for verdadeiro, também Q será verdadeiro.

Também podemos dizer que (a verdade de) P é condição suficiente para (a validade de) Q.

- Ou Q é condição necessária para P;
- Ou Q vale se P vale;
- Q vale se P vale;
- Se P, então Q.

Temos ainda que:

$$\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q} \text{ significa o mesmo que } Q \Longleftarrow P.$$

Observação 1.3.1. *A seta numa implicação P $\Longleftarrow$ Q não pode ser simplesmente invertida. Se P é condição suficiente para Q, isto é, significa que Q é condição necessária para P, mas não que Q é condição suficiente para P.*

Existem asserções P e Q que ambas implicam na outra, ou seja, as quais satisfazem simplesmente:

$$P \Longleftarrow Q \text{ e } Q \Longleftarrow P.$$

Temos então que P é suficiente para Q e também P é necessário(a) para Q. Dizemos que P é (condição) necessário (a) e suficiente para Q, ou seja, P vale se, e somente se, vale Q.

Indicaremos isto por:

$$P \Longleftrightarrow Q.$$

Dizemos que P e Q são asserções equivalentes, ou ainda, que P constitui uma propriedade de característica para Q (e vice-versa).

Se P é uma asserção, indicaremos por $\overline{P}$ a asserções "não P", a qual é verdadeira se, e somente se, P é falsa. Sejam P e Q duas asserções e suponha:

$$P \Longrightarrow Q.$$

Caso as duas asserções forem falsas, temos:

$$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$$

Ou seja, se P é suficiente para Q, então $\overline{Q}$ é suficiente para $\overline{P}$, ou ainda, se P é suficiente para Q, então $\overline{P}$ é necessária para $\overline{Q}$.

1.3.3 Conceito Primitivos e conjuntos

Como conceitos admitiremos: A noção de elemento, a relação de igualdade "=", a noção de conjunto e a relação da pertencia "$\in$".

Um conjunto A é uma "coleção" ou "família" de "elementos" ou "objetos".

Dado um conjunto A. Para indicarmos que um elemento a pertence a A, escreveremos $a \in A$, enquanto sua negação é escrita $a \notin A$.

Admitimos também que, para qualquer objeto de a ocorre exatamente uma das propriedades:

$$\text{Ou } a \in A \text{ ou } a \notin A.$$

Além disso, para dois elementos $a, b \in A$ teremos exatamente uma das possibilidades:

$$\text{Ou } a = b \text{ ou } a \neq b.$$

Temos que:

$A = \{a|...\}$, é lido: A é um conjunto de todos os elementos a tal que.

1.3.4 Igualdade entre Conjuntos

Definição 1.3.1 (Igualdade entre Conjuntos)**.** *Dados dois conjuntos A e B, são iguais quando eles possuem os mesmos elementos, isto é:*

$$A = B \Longleftrightarrow \forall\ a \in A \Longrightarrow a \in B \ e\ \forall\ b \in B \Longrightarrow b \in A.$$

Exemplo 1.3.1. *Os seguintes conjuntos tem notação padrão e serão sempre usados :*

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ *representa o conjunto dos números naturais.*

$\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ *representa o conjunto dos números inteiros.*

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} | m, n \in Z \ e\ n \neq 0\right\}$ *representa o conjunto dos números racionais.*

$\mathbb{R}$ *representa o conjunto dos números reais.*

1.3.5 A Ordem de um Conjunto

Definição 1.3.2. *Um conjunto A é dito finito quando possui uma quantidade finita de elementos distintos.*

Definição 1.3.3. *A quantidade de elementos distintos pertencentes à um conjunto A qualquer é um número natural e indicado por $\mid A \mid$, é chamado de a ordem de A.*

Definição 1.3.4. *Os conjuntos $A = \{a\}$ que $\mid A \mid = 1$ são chamados de conjunto unitários.*

Definição 1.3.5. *Um conjunto que não possui elementos é denominado de conjunto vazio, representado pelo símbolo ϕ ou $\{\}$.*

1.3.6 Subconjuntos

Definição 1.3.6. *Se A e B são dois conjuntos, dizemos que A é um subconjunto (ou uma parte) de B (também B abrange A), se todo o elemento de A for elemento de B, ou seja, se para todo o elemento a, a implicação*

$$a \in A \Longrightarrow a \in B.$$

se for verdadeira. Escreve-se como $B \supseteq A$ *ou* $A \subseteq B$.

Temos:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Observação 1.3.2. *Considere A,B e C três conjuntos, valem as regras:*

a) *Sempre* $A \subseteq A$;

b) $A \subseteq B$ *e* $B \subseteq A$, *então* $A = B$;

c) *Se* $A \subseteq B$ *e* $B \subseteq C$, *então* $A \subseteq C$.

A negação de A ⊆ B é simbolizada por A ⊈ B.

Se A ⊆ B e A ≠ B, diremos que A é subconjunto próprio de B. Assim, A ⊂ B significa que existe um $b \in$ B tal que B ∉ A.

1.3.7 Diferença e Complementar

Definição 1.3.7. *Dados dois conjuntos A e B, a diferença A menos B é o conjunto,*

$$A \setminus B = \{ \ x | x \in A \text{ e } x \notin B \ \}.$$

Definição 1.3.8. *Quando* $B \subseteq A$, *a diferença* $A \setminus B$ *é denotada por Cptb(B) e é chamada de complementar de B em relação a A. Se* $A = B$, *temos que:*

$$Cpt_B(A) = Cpt_B(B) = \{b \in B / b \notin B\} = \phi \ .$$

Observação 1.3.3. *Se* $A \subseteq B \subseteq C$, *então:*

$$Cpt_C(B) \subseteq Cpt_C(A).$$

Demonstração: *Considere* $A \subseteq B \subseteq C$ *e considere* $x \in Cpt_C(B)$, *daí;*

$$x \in C \text{ e } x \notin B, \text{ então } x \notin A.$$

logo, $x \in Cpt_C(A)$.

Desse modo temos que: $Cpt_C(B) \subseteq Cpt_C(A)$.

■

1.3.8 Reunião e Interseção

Definição 1.3.9. *Dados dois conjuntos A e B, a sua reunião é o conjunto de todos os elementos que pertence a A ou pertence a B, e serão denotados por:*

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B \}$$

Definição 1.3.10. *A interseção de A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A e pertencem a B, e será denotado por:*

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B \}$$

Observação 1.3.4. *Para quaisquer conjunto A,B e C temos:*

i) $A \subseteq A \cup B$ *e* $B \subseteq A \cup B$.

ii) $A \supseteq A \cap B$ *e* $B \supseteq B$.

iii) *Se* $A \subseteq C$ *e* $B \subseteq C$, *então* $A \cup B \subseteq C$.

iv *Se* $A \supseteq C$ *e* $B \supseteq C$, *então* $A \cap B \supseteq C$.

Definição 1.3.11. *Se* $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ *são n conjuntos dados, então:*

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

é o conjunto dos elementos x que pertencem a pelo menos um dos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, *enquanto*

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 ... \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

É o conjunto dos elementos x que pertencem a todos os $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$.

1.3.9 Propriedade Fundamental em $\mathbb{N}$

Admitiremos a adição " $+$ " em $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, a qual da origem a uma ordem natural " $\leq$ " em Z:

$\forall\ m,\ n \in \mathbb{Z}$, temos:

$m \leq n \Longleftrightarrow$ a equação $m + x = n$ possui uma solução $x \in\ \mathbb{N}$.

1.3.10 O Conjunto das Partes

Definição 1.3.12. *Considere um conjunto A, indicamos por:* $2^A = \{X|X \subseteq A\}$ *o confronto de todas as partes de A, ou seja, o conjunto formado por todos os subconjunto de A.*

Observação 1.3.5. *Ver referência[8]*

1.3.11 Produtos Cartesianos

Definição 1.3.13. *Considere* $A_1, A_2, ..., A_m \neq \emptyset$ *conjuntos. O conjunto* $M = A_1 \times A_2 \times ... \times A_m = \{(a_1, a_2, ..., a_m)|a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 ... a_m \in A_m\}$*, chama-se produto cartesiano dos* $A_1, A_2, ..., A_m$ *(nesta ordem). Os elementos* $(a_1, a_2, ..., a_m)$ *em M chama-se m-uplas. O elemento* $a_i \in A_i$ *é a i-nésima coordenada da m-upla* $(a_1, a_2, ..., a_m)(1 \leq i \leq m)$*.*

Para dois elementos $(a_1,a_2, ...,a_m)$ e $(b_1,b_2, ...,b_m)$ em M temos sua igualdade definida por:

$$(a_1, a_2, ..., a_m) = (b_1, b_2, ..., b_m) \Longleftrightarrow a_1 = b_1; a_2 = b_2; ...; a_m = b_m.$$

No caso de m arbitrário e $A_1 = A_2 = ... = A_m = A$ o produto cartesiano passa a ser a potência cartesiana m-ésima de A, indicada por:

$M = A^M = \{(a_1,a_2, ...,a_m)|a_1,a_2, ...,a_m \in A\}$.

Observação 1.3.6. *Se* $C = \{x_1,x_2, ...,x_m\}$ *e* $B = \{y_1,y_2, ...,y_m\}$ *são conjuntos finitos, então temos:*

$$C.B = \left\{ \begin{array}{c} (x_1, y_2), (x_1, y_2)..., (x_1, y_n) \\ (x_2, y_1), (x_2, y_2)..., (x_2, y_n) \\ ... \\ (x_m, y_1)(x_m, y_2)...(x_m, y_n) \end{array} \right\}$$

Portanto, $|C.B| = m.n = |C||B|$*;*

Observação 1.3.7. *Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são conjuntos finitos, então vale:*

$$|A_1 \times A_2 ... \times A_m| = |A_1| \times |A_2| \times ... \times |A_m|$$

Particularmente, se $A_1 = A_2 = ... = A_m = A$, temos :

$$|A^m| = |A|^m$$

Demonstração: *Ver referência[8]*

■

1.3.12 Relações

Definição 1.3.14. *Considere A,B $\neq \emptyset$ dois conjuntos, uma relação R em A e em B um subconjunto de $A \times B$:*

$$R \subseteq A \times B, \text{ ou seja, } R \in 2^{A\times B},$$

em que $2^{A\times B}$ é o conjunto de todas as relações de A em B.

Para indicar que $(a, b) \in R$ usaremos a notação $a\ R\ b$ (lê-se: "a relaciona-se com b segundo R"), se $(a, b) \notin R$, escrevemos $a \not R\ b$.

Definição 1.3.15. *Chama-se domínio de R o subconjunto de A constituído pelos elementos "a" de A para os quais existe algum b em B tal que a R b, ou seja:*

$$D(R) = \{ a \in A | \exists\ b \in B \text{ com } aRb \} \subseteq A.$$

Exemplo 1.3.2. *Para quaisquer dois conjuntos A,B $\neq \emptyset$, temos que:*

$$A \times B \in 2^{A\times B} \text{ e } \emptyset \in 2^{A\times B}$$

Temos $a(A \times B)b$, $\forall\ a \in A$, isto é, todo o elemento $a \in A$ é $(A \times B)$relacionado com todo $b \in B$.

Portanto, AxB é também denominada a relação universal entre A e B.

Temos a $\emptyset$ b nunca, isto é, nenhum elemento $a \in A$ é $\emptyset$-relacionado com nenhum elemento $b \in B$.

As relações $A \times B$ e $\emptyset$ são relações triviais entre A e B.

Definição 1.3.16. *Considere $A \neq \emptyset$ um conjunto e $R \in 2^{A\times A}$ uma relação em A. Dizemos que R é uma relação*

(i) *Reflexiva, se $a\ R\ a,\ \forall\ a \in A$.*

(ii) *Simétrica, se $\forall\ a, b \in A$: $a\ R\ b \Longleftrightarrow b\ R\ a$.*

(iii) *Anti-Simétrica, se $\forall\ a, b, c \in A$: $a\ R\ b$ e $b\ R\ a \Longrightarrow a = b$.*

(iv) *Transitiva, se $\forall\ a, b, c \in A$: $a\ R\ b$ e $b\ R\ c \Longrightarrow a = c$.*

1.3.13 Relação de Equivalência

Definição 1.3.17. *Uma relação $R \in 2^{A\times A}$ chama-se relação de equivalência em A, se R é ao mesmo tempo:*

(i) *Reflexiva.*

(ii) *Simétrica.*

(iii) *Transitiva.*

O conjunto de todos as classes de equivalência em A denotamos por $Eq(A)$. Temos então, $Eq(A) \subseteq 2^{A\times A}$.

Definição 1.3.18. *Se R é uma relação de equivalência em A e se $a \in A$, então colocamos*

$$\overline{a} = \{\ x \in A \mid x\ R\ a\ \}$$

$\overline{a}$ chama-se classe de equivalência de a mod R (lido: a módulo R).

Denotamos a relação de equivalência R por $\sim$ ou $\equiv$, ou seja, se $(a, b) \in R$ usaremos a notação $a \sim b$ ou $a \equiv b$, que é lido: "a equivalência a b módulo R".

Proposição 1.3.13.1. *Considere $A \neq \emptyset$ um conjunto e $\sim \in Eq(A)$. Então valem para todos os $a, b \in A$.*

a) *$\in \overline{a}$, particularmente, $\overline{a} \neq \phi$.*

b) *$\overline{a} = \overline{b} \Longleftrightarrow a \sim b$.*

c) *$\overline{a} \neq \overline{b} \Longleftrightarrow \overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$.*

d) $\dot{\bigcup\limits_{a\in A}} \overline{a} = A.$

Demonstração:

a) *Pela reflexividade de* $\sim$ *temos* $a \in \overline{a} \neq \phi$, $\forall\ a \in A$.

b) ($\Longrightarrow$) *De* $\overline{a} = \overline{b}$ *segue* $a \in \overline{b} = \{\ x \in A \mid x \sim b\ \}$. *Logo* $a \sim b$. ($\Longleftarrow$) *Considere* $a \sim b$. *Para todo* $x \in \overline{a}$ *temos* $x \sim a \sim b$ *e daí* $x \in \overline{b}$, *segue* $\overline{a} \subseteq \overline{b}$, *da mesma forma:* $\forall\ x \in \overline{b}$ *temos* $x \sim b \sim a$ *e daí* $x \in \overline{a}$. *Segue* $\overline{b} \subseteq \overline{a}$. *Logo* $\overline{a} = \overline{b}$.

c) *Suponhamos* $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ *e seja* $x \in \overline{a} \cap \overline{b}$, *temos* $a \sim x \sim b$ *e daí por b* $\overline{a} = \overline{b} = \overline{x}.$

d) *Claramente,* $\dot{\bigcup\limits_{a\in A}} \overline{a} = A$, *mas como* $a \in \overline{a}$, *temos de fato* $\dot{\bigcup\limits_{a\in A}} \overline{a} = A$.

■

1.3.14 Relação de Ordem

Definição 1.3.19. *Uma relação* $R \in 2^{A\times A}$ *chama-se relação de ordem sobre* A, *se* R *é ao mesmo tempo:*

(i) *Reflexiva.*

(ii) *Anti-Simétrica.*

(iii) *Transitiva.*

Capítulo 2

A Construção dos Números Naturais

Neste capítulo iremos considerar que os números naturais podem ser ordenados em uma sequência, em que cada elemento tem um "sucessor", permitindo, assim, construir um conjunto que satisfaça os axiomas de Peano.

2.1 Axiomática de Peano

Peano considera três entes primitivos: *número natural, zero e sucessor*, correlacionados por cinco axiomas. Indicaremos por $\sigma(n)$ o "*sucessor*" do número n e, para indicar o zero utiliza-se o símbolo 0.

Os axiomas apresentados são o seguinte:

1. 0 é um número natural.
2. Todo número natural n tem um "sucessor" $\sigma(n)$.
3. 0 não é "sucessor" de nenhum número.
4. Se $\sigma(n) = \sigma(m)$, então $n = m$
5. (Princípio da Indução Completa) Considere S um conjunto de números naturais tal que:

   (a) $0 \in S$

   (b) e $n \in S$, então $\sigma(n) \in S$.

   então, S é o conjunto de todos os números naturais.

Os axiomas de Peano sustentam-se nas ideias intuitivas de conjunto e função, em que o conceito primitivo de sucessor indica uma função, isto é, cada número associa-se a outro; e, de acordo com o princípio de indução, essa função está definida em todo $\mathbb{N}$.

Considere que existe um conjunto $\mathbb{N}$ e uma função σ: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$:

P1. Existe um elemento $0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \notin \text{Im}\ (\sigma)$.

P2. A função σ é injetora.

P3. Considere A um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:

(i) $0 \in A$.

(ii) Se $n \in A$, então $\sigma\ (n) \in A$.

então $A = \mathbb{N}$

Denotaremos por $\mathbb{N}^+$ o conjunto dos números naturais diferentes de zero. Observe que $\sigma(0) \in \mathbb{N}^+$ e, de acordo com P.2, tem-se que $0 \neq \sigma(0)$; provando que $\mathbb{N}^+$ é não-vazio, mostrando ainda, que todo natural diferente de zero é sucessor de algum número.

Proposição 2.1.1. $Im(\sigma) = \mathbb{N}^+$

Demonstração: *Considerando o conjunto* $A = 0 \cup Im(\sigma)$. *Nota-se que,* $0 \in A$ *e, se* $n \in A$*, então* $\sigma(n) \in A$ *(pois* $\sigma(n) \in Im(\sigma)$*).*

Pelo axioma P.3 temos que $A = \mathbb{N}$. *Desta forma, dado um natural* $n \in \mathbb{N}$, *como* $n \in A$ *e* $n \neq 0$, *tem-se* $n \in Im(\sigma)$.

■

Definição 2.1.1. *Considerando um natural* $n \neq 0$, *o número natural* m *tal que* $\sigma(m) = n$ *denomina-se o antecessor de* n, *e* n *denomina-se o sucessor de* m.

2.2 Operações com Números Naturais

Mostraremos que é possível definir as operações Soma e Produto no conjunto dos números naturais, demonstraremos ainda, as propriedades dessas operações.

2.2.1 Soma de Números Naturais

Proposição 2.2.1. $Im(\sigma) = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ é diferente de zero}\} = \mathbb{N}^+$.

Demonstração: *Considerando o conjunto*

$$A = \{0\} \cup Im(\sigma)$$

note que, $0 \in A$ *e, se* $n \in A$*, então* $\sigma(n) \in A$ *(pois* $\sigma(n) \in Im(\sigma)$*). Pelo axioma* $P.3$ *temos que* $A = \{0\} \cup Im(\sigma) = \mathbb{N}$*. Desta forma, dado um natural* n *não nulo, como* $n \in A$ *e* $n \neq 0$*, tem-se* $n \in Im(\sigma)$*, já que* $\{0\} \cap Im(\sigma) = \phi$ *devido ao axioma* $P1$*.*

Definição 2.2.1. *Considere* n *um natural não nulo, o número natural* m *tal que* $\sigma(m) = n$ *denomina-se o antecessor de* n*, e* n *denomina-se o sucessor de* m*.*

Designamos $m + n$ a adição de todo par de números m, $n \in \mathbb{N}$, Considere um m arbitrariamente fixado, indicaremos $m+n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. De acordo com o axioma de Indução, a adição $m + n$ está definida para todo par de números naturais.

Definição 2.2.2. *Considere* $m \in \mathbb{N}$ *um número natural dado. Então:*

(i) $m + 0 = m$.

(ii) $m + \sigma(n) = \sigma(m + n)$.

Com isso, é possível somar m com 0, a segunda condição nos permite somar m com o sucessor de 0, com o sucessor do sucessor de 0. Somando m a todos os números naturais. Temos:

Proposição 2.2.2. *Considere* $m \in \mathbb{N}$ *um número natural. Então, a soma* $m + n$ *está definida para todo número natural* n*.*

Demonstração: *Considere* A *o conjunto de naturais "n", no qual a soma* $m + n$ *está definida. De acordo com a condição (i) da definição, tem-se que,*

$$0 \in A,$$

e da condição (ii) tem-se que, se a soma $m + n$ está definida, então, $m + \sigma(n)$ também define-se em A. Ou seja, se, $n \in A$, então $\sigma \in A$.

De fato: temos que,

$$0 \in A \text{ e se } n \in A, \text{ então } \sigma(n) \in A,$$

pois,

$$m + \sigma(n) = \sigma(m + n),$$

Portanto, por indução temos que $A = \mathbb{N}$, como m é arbitrário,

$$A = \mathbb{N}, \text{ para todo } m \in \mathbb{N},$$

ou seja $m + n$ está definida para todo par (m, n) de números naturais.

■

Proposição 2.2.3. *Para toda terna m, n, p de números naturais arbitrários, são verdadeiras as afirmações:*

$$m + (n + p) = (m + n) + p.$$

Demonstração: *Considere S o conjunto dos números naturais p tais que,*

$$m + (n + p) = (m + n) + p$$

para todo par de naturais m, n. Devemos provar que $S = \mathbb{N}$, temos que:

$$m + (n + 0) = m + n = (m + n) + 0.$$

Portanto, $0 \in S$.

Supondo a validade para $p \in S$,ou seja:

$$m + (n + p) = (m + n) + p.$$

Mostraremos também para

$$\sigma\ (p) \in S.$$

De fato:

$$m + (n + \sigma(p)) = m + \sigma(n + p) = \sigma(m + (n + p)) = \sigma((m + n) + p) =$$
$$= (m + n) + \sigma(p).$$

■

Proposição 2.2.4. *Para qualquer número natural m, tem-se que:*

$$m + 0 = m = 0 + m.$$

Demonstração: *Considere* $A = \{m \in \mathbb{N} \mid 0 + m = m\}$. *Logo,* $0 \in A$.

Se $0 + m = m$. *Temos que:*

$$0 + \sigma(m) = \sigma(0 + m) = \sigma(m)$$

Portanto, por hipótese de indução, temos que:

$$A = \mathbb{N}.$$

Definição 2.2.3 (Elemento neutro aditivo)**.** *O número natural e que satisfaz*

$$e + n = n + e = n,$$

para todo natural n é dito elemento aditivo.

Afirmação: É fácil ver que $0 = e$, *é o elemento neutro multiplicativo, pois:*

$$0 + n = n + 0 = n,$$

Portanto, 0 é elemento neutro aditivo.

Proposição 2.2.5. *O neutro aditivo é único.*

Demonstração: *Suponha u um elemento neutro e consideremos a soma,*

$$0 + u,$$

como,

$$u, \text{ é neutro},$$

por hipótese, temos,

$$0 + u = 0.$$

Como provamos que 0 é neutro da soma, verifica-se que:

$$0 + u = u,$$

Portanto, temos que:

$$0 = u.$$

Assim, 0 *é o único elemento neutro para a operação soma.*

Para demonstrar a próxima proposição introduziremos o elemento 1.

Definição 2.2.4. *Indicaremos por 1 o número natural que é o sucessor de 0, isto é,* $1 = \sigma(0)$.

Proposição 2.2.6. *Para qualquer natural m, tem - se, que* $\sigma(m) = 1 + m$.

Demonstração: *Considere o conjunto:*

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid \sigma(m) = 1 + m\}.$$

Note que $0 \in A$*, pois* $\sigma(0) = 1 + 0 = 1$*. Suponha que* $m \in A$*. Mostraremos que:*

$$\sigma(m) \in A.$$

como,

$$\sigma(m) = 1 + m$$

consequentemente,

$$\sigma(\sigma(m)) = \sigma(1 + m) = 1 + \sigma(m).$$

ou seja:

$$\sigma(m) \in A.$$

pelo Princípio de indução, temos que:

$$A = \mathbb{N}.$$

■

Proposição 2.2.7. *Para quaisquer m, n de números naturais, tem-se que:*

$$m + n = n + m.$$

Demonstração: *Considere o conjunto:*

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid m + n = n + m, \forall\ n\ \mathbb{N}\}.$$

Note que $0 + n = n + 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*,daí* $0 \in A$*. Suponha agora que* $m \in A$*. Provaremos que* $\sigma(m) \in A$*. Temos:*

$n + \sigma(m) = \sigma(n + m) = \sigma(m + n) = 1 + m + n = \sigma(m) + n.$

Desta forma, do axioma P.3 segue, que:

$$A = \mathbb{N}.$$

■

Proposição 2.2.8 (Lei do Cancelamento da Soma)**.** *Para toda terna* a, b, c *de números naturais, se* $a + c = b + c$*, então* $a = b$*.*

Demonstração: *Considere*

$$A = \{z \in \mathbb{N} | se\ a + z = b + z\ \text{então}\ a = b\}.$$

obviamente $0 \in A$*. Considere então* $m \in A$*. Mostraremos que* $\sigma(m) \in A$*.*

Se $a + \sigma(m) = b + \sigma(m)$*, então* $\sigma(a + m) = \sigma(b + m)$*. Como* σ *é injetora, vem que* $a + m = b + m$*. Como* $m \in A$*, segue que* $a = b$*.*

Pelo principio de indução decorre que

$$A = \mathbb{N}.$$

■

2.2.2 Produto de Números Naturais

Definição 2.2.5. *Considere* $m \in \mathbb{N}$ *um natural dado, então:*

(i) $m \cdot 0 = 0.$

(ii) $m \cdot \sigma(n) = m \cdot n + m$.

Observação 2.2.1. *Em (ii) acima faça* $n = 0$, *daí* $m \cdot \sigma(0) = m \cdot 0 + m$

$$m \cdot 1 = 0 + m$$
$$m \cdot 1 = m, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

■

Proposição 2.2.9. *Considere* $m \in \mathbb{N}$ *um número natural dado. Então, o produto* $m \cdot n$ *está definido para todo número naturais* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: *Considere* A *como sendo o conjunto de números "n" para os quais o produto* $m \cdot n$ *está definido, isto é,*

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid m \cdot n \ está \ definido\}$$

Conforme (i) da definição 2.2.4 temos que $m \cdot 0 = 0$, *ou seja,* $0 \in A$.

Suponha que $m \cdot n$ *está bem definido. Daí* $m \cdot \sigma(n) = m \cdot n + m$ *está bem definida, pois a soma* $m \cdot n + m$ *está bem definida.*

Portanto, $\sigma(n) \in A$, *e pelo princípio de indução*

$$A = \mathbb{N}$$

■

Proposição 2.2.10. *Para todo natural "n" vale que*

$$1 \cdot n = n = n \cdot 1.$$

Demonstração:

(i) $1 \cdot n = n$, *de fato:*

Considere A *como sendo o conjunto formado por todos os naturais* m *tais que* $1 \cdot n = n$, *isto é,*

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \cdot n = n\}.$$

Note que da definição 2.2.4 condição (i) segue que $1 \cdot 0 = 0$, *basta tomar m = 1, assim 0* $\in$ *A. Temos também que 1* $\in$ *A, pois* $1 \cdot 1 = 1$ *σ(0)* $= 1 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$.

Suponha que $1 \cdot n = n$. *Daí* $1 \cdot$ $\sigma(n)$ $= 1 \cdot n + 1 = n + 1 =$ $\sigma(n)$.

Portanto,

$$\sigma(n) \in A.$$

Logo,

$$A = \mathbb{N}.$$

(ii) $n \cdot 1 = n$, *de fato;*

De forma análoga tome

$$A = \{\ n \in \mathbb{N} \mid n \cdot 1 = 1\}.$$

daí conforme condição (i) da condição 2.2.4 tome m = 0, logo, $0 \cdot 0 = 0$, *isto é, 0* $\in \mathbb{N}$. *Temos que* $1 \cdot 1 = 1 \cdot$ $\sigma(0)$ $= 1 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$, *isto é,*

$$1 \in A.$$

Suponha que $1 \cdot n = n$, *daí*

$\sigma(n) \cdot 1 = (n+1) \cdot 1 = (n+1) \cdot \sigma(n) = (n+1) \cdot 0 + (n+1) = 0 + (n+1) = \sigma(n)$.

Logo, $\sigma(n) \in A$.

Portanto,

$$A = \mathbb{N}.$$

■

Definição 2.2.6 (Elemento neutro multiplicativo)**.** *O número natural e que satisfaz* $e \cdot n = n \cdot e = n$, *para todo natural n é dito elemento multiplicativo.*

Afirmação: É fácil ver que 1 = e, é o elemento neutro multiplicativo, pois:

$$1 \cdot n = n \cdot 1 = n.$$

Portanto, 1 é elemento neutro multiplicativo.

Proposição 2.2.11. *O elemento neutro multiplicativo é único.*

Demonstração: *Considere 1, 1' dois números naturais tais que,*

$$1 \cdot m = m = m \cdot 1 \text{ e } 1' \cdot m = m \cdot 1'$$

para todo número natural m. daí $1 = 1 \cdot 1'$ *pois 1' é o elemento neutro, por outro lado* $1 \cdot 1' = 1'$, *pois 1 é também elemento neutro, logo* $1 = 1 \cdot 1' = 1'$, *portanto 1 = 1'.*

■

Proposição 2.2.12. *Considere a terna m, n, p de naturais, então:*

$$(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p.$$

Demonstração: *Considere o seguinte conjunto*

$$A = \{p \in \mathbb{N} \mid (m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p\}.$$

Daí note que

$$(m + n) \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = m \cdot 0 + n \cdot 0,$$

isto é, 0 $\in A$.

Note também

$$(m + n) \cdot 1 = (m + n) \cdot \sigma(0) = (m + n) \cdot 0 + (m + n) = m + n = m \cdot 1 + n \cdot 1.$$

logo 1 $\in \mathbb{N}$

Suponha que $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$. *Daí,*

$$(m + n)\ \sigma(p) = (m + n) \cdot p + (m + n) = m \cdot p + n \cdot p + m + n =$$
$$= m \cdot p + m + n \cdot p + n = m\ \sigma(p) + n,$$

Logo,

$$A = \mathbb{N}.$$

Proposição 2.2.13. *Considere m, n dois naturais, então:*

$$m \cdot n = n \cdot m$$

Demonstração: *Considere*

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid m \cdot n = n \cdot m, \forall\ m \in \mathbb{N}\}.$$

Daí $m \cdot 0 = 0 \cdot m$, *logo 0* $\in A$, *e vale também* $m \cdot 1 = 1 \cdot m$, *isto é, 1* $\in A$. *Suponha que* $m \cdot n = n \cdot m$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$. *Daí,*

$$m \cdot \sigma(n) = m \cdot n + m = n \cdot m + 1 \cdot m = (m+1) \cdot m = \sigma(n) \cdot m,$$

isto é, $\sigma \in A$.

Portanto,

$$A = \mathbb{N}.$$

■

Observação 2.2.2. *Como consequência da proposição 2.2.11. Vale para toda terna m, n, p de naturais que:* $p(m+n) = p \cdot m + p \cdot n$.

Demonstração: *Imediato.*

Proposição 2.2.14. *Considere m, n dois naturais, então* $m \cdot n = n \cdot m$.

Demonstração: *Considere*

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid m \cdot n = n \cdot m, \forall\ m \in \mathbb{N}\}.$$

daí $m \cdot 0 = 0 \cdot m$, *logo* $0 \in A$, *e vale também* $m \cdot 1 = 1 \cdot m$, *isto é,* $1 \in A$. *Suponha que* $m \cdot n = n \cdot m$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$. *Daí*

$$m \cdot \sigma(n) = m \cdot n + m = n \cdot m + 1 \cdot m = (m+1) \cdot m = \sigma(n) \cdot m,$$

isto é, $\sigma \in A$.

Portanto,

$$A = \mathbb{N}.$$

■

Proposição 2.2.15. *Para toda terna m, n, p de naturais, tem-se*

$$(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p).$$

Demonstração: *Considere o seguinte conjunto*

$$A = \{p \in \mathbb{N} \mid (m \cdot n)p = m \cdot (n \cdot p)\}.$$

daí $(m \cdot n)0 = 0 = m \cdot 0 = m(n \cdot 0)$, *isto é,* $0 \in A$, *temos também que*

$$(m \cdot n) \cdot 1 = (m \cdot n) \cdot \sigma(0) = (m \cdot n) \cdot 0 + m \cdot n = 0 + m \cdot n = m \cdot n = m(n \cdot 1),$$

ou seja, $1 \in A$. *Suponha que* $(m \cdot n)p = m(n \cdot p)$, *para algum* $p \in \mathbb{N}$. *Daí,*

$$(m \cdot n) \cdot \sigma(p) = (m \cdot n)p + m \cdot n = m \cdot (n \cdot p) + m \cdot n = m \cdot (np \cdot n) = m \cdot (n \cdot \sigma(p)).$$

Logo $\sigma(p) \in A$.

Portanto,

$$A = \mathbb{N}.$$

■

2.3 Relação de Ordem sobre $\mathbb{N}$

Definição 2.3.1. *Dados* m, n *dois números naturais quaisquer, diz-se que* m *é menor do que ou igual a* n, *que simbolizamos por* $m \leq n$, *se existe algum natural* r *tal que* $m + r = n$. *Ou seja,*

$$m \leq n \text{ se existi } r \in \mathbb{N} \text{ tal que } m + r = n$$

Proposição 2.3.1. *Para quaisquer* a *e* b *números naturais, verifica-se apenas uma das condições:*

(i) $a = b$;

(ii) *Existe* $x \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$, *tal que* $b = a + x$.

(iii) *Existe* $y \in \mathbb{N}$, $y \neq 0$, *tal que* $a = b + y$.

Demonstração: *Primeiro mostraremos que não podem ocorrer duas condições simultaneamente. De fato, se ocorrem (i) e (ii), segue que* $a = a + x$ *ou* $a + 0 = a + x$*. Da proposição 2.2.14, vem que* $x = 0$*, uma contradição.*

Similarmente, não podem ocorrer (i) e (iii).

Suponhamos, então, que ocorrem (ii) e (iii).

Então, $b = a + x = (b + y) + (y + x)$*. Como acima,* $y + x = 0$*. Como* $x \neq 0$*, vem que* $x = \sigma(x')$*, para algum* $x' \in \mathbb{N}$*. Então,* $y + x = y + \sigma(x') = \sigma\ (y + x') = 0$*, e está na imagem de* σ*, o que contradiz a proposição 2.1.1.*

Provaremos agora que deve acontecer uma das três condições. Considere então "a" um natural dado, e

$$A = \{z \in \mathbb{N} \mid \text{ou } z = a + x, \text{ para algum } x \neq 0, \text{ ou } a = z + y \text{ para algum } y \neq 0\}.$$

Obviamente, $0 \in A$*, pois ou* $0 = a$ *ou* $0 \neq a$ *e, neste último caso, segue que* $a = 0 + a$*; isto é, 0 verifica a última condição.*

Considere então $m \in A$*, e mostraremos que* $\sigma(m) \in A$*. Se* $m = a$*, então*

$$\sigma(m) = \sigma(a) = a + 1,$$

e verifica-se a segunda condição. Considere então $m \in A$*, e mostraremos que* $\sigma(m) \in A$*. Se* $m = a$*, então* $\sigma(m) = \sigma(a) = a + 1$*, e verifica-se a segunda condição. Se* $m = a + x$*, então* $\sigma(m) = \sigma(a + x) = a + \sigma(x)$*, e novamente a segunda condição. Suponhamos, então, que* $a = m + y$*. Como* $y \neq 0$*, vem que* $y = \sigma(y')$*, para algum* $y' \in \mathbb{N}$*. Logo* $a = m + y = m + \sigma(y') = m + y' + 1 = m + 1 + y' = \sigma(m) + y'$ *Se* $y' = 0$*, vale a primeira condição para* $\sigma(m)$*. Se* $y' \neq 0$*, vale a terceira condição. Pelo princípio de indução, temos que* $A = \mathbb{N}$*. Suponhamos, então, que* $a = m + y$*. Como* $y \neq 0$*, vem que* $y = \sigma(y')$*, para algum* $y' \in \mathbb{N}$*. Logo,*

$$a = m + y = m + \sigma(y') = m + 1 + y' = \sigma(m) + y'$$

Se $y' = 0$*, vale a primeira condição para* $\sigma(m)$*. Se* $y' \neq 0$*, vale a terceira condição. Pelo princípio de indução, temos que*

$$A = \mathbb{N}.$$

■

Proposição 2.3.2. *A relação $\leq$ definida em $\mathbb{N}$ satisfaz os seguintes axiomas.*

A. 1 *Tricotomia: Dados dois inteiros quaisquer "a" e "b", tem-se que ou $a < b$ ou $a = b$ ou $b < a$.*

A. 2 *Para toda terna a, b, c de inteiros, se $a \leq b$, então $a + b \leq b + c$.*

A. 3 *Para toda terna a, b, c de inteiros, se $a \leq b$ e $0 \leq c$, então $ac \leq bc$.*

Demonstração:

A. 1 *Observe que, segundo a definição 2.3.1, $a < b$ se e somente se existe $r \in \mathbb{N}, r \neq 0$, tal que $b = a + r$. De acordo com proposição 2.3.2, decorre que ou $a = b$, ou $a \leq b$ ou $b \leq a$.*

A. 2 *Imediato.*

A. 3 *Imediato.*

Proposição 2.3.3. *A relação $\leq$ para o conjunto $\mathbb{N}$, satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) *Reflexiva*

(ii) *Anti-simétrica*

(iii) *Transitiva*

ou seja, a relação $\leq$ é uma relação de ordem sobre $\mathbb{N}$.

Demonstração:

(i) *Reflexiva: Note que $a = a$, portanto, $a \leq a$.*

(ii) *Anti-simétrica: Se a, b são naturais tais que $a \leq b$ ou $b \leq a$, então $a = b$.*

A prova é imediata, pois $a \leq b$ significa $b < a$ ou $b = a$, logo $a = b$.

(iii) *transitiva: Para toda terna a, b, c tem - se que, se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$*

Lema 2.3.1. *Considere x, $y \in \mathbb{N}$. Então,*

(i) *Se $x \neq 0$, $x \geq 1$.*

(ii) *$x < \sigma(y)$ se e somente se $x \leq y$.*

(iii) *$\sigma(y) \leq x$ se e somente se $y < x$.*

Demonstração: *Para (i), suponhamos por absurdo que $x < 1$. Logo, $1 = x + y$, com $v \in \mathbb{N}$, $v \neq 0$. Como $v \neq 0$, tem-se que $v = \sigma(v')$, com $v' \in \mathbb{N}$. Substituindo vem*

$$1 = x + v = x + \sigma(v') + 1.$$

da lei do cancelamento para a soma, da preposição 2.3.1, vem $x + v' = 0$. Como $x \neq 0$, tem-se que $x = \sigma(x')$, com $x' \in \mathbb{N}$. Então:

$$\sigma(x') + v' = \sigma(x' + v') = 0.$$

e 0 está na imagem do σ, o que contradiz a proposição 2.1.1.

Para (ii), suponhamos primeiro que $x \leq y$, isto é, $x < y$ ou $x = y$. No primeiro caso, vem que $x = y + r$, com $r \in \mathbb{N}$. Logo, $\sigma(y) = \sigma(x + r) = x + \sigma(r)$, e $x < \sigma(y)$. No segundo caso, tem-se que $\sigma(y) = \sigma(x) = x + 1$, e $< \sigma(y)$.

Reciprocamente, suponhamos que $x < \sigma(y)$. Logo, $\sigma(y) = x + s$, com $s \neq$. Fazendo $s = \sigma(s')$, $s' \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\sigma(y) = x + s = x + \sigma(s') = \sigma(x + s')$$

e, consequentemente, $y = x + s'$. Portanto, $x \leq y$.

Para (iii), suponhamos primeiro que $y < x$ e que $y < x$ e que $x\, \sigma(y)$. De (ii), vem que $x \leq y$, um absurdo. Suponhamos agora que $\sigma(y) \leq x$ e que $x \leq y$. De (ii), segue-se que $x < \sigma(y)$, novamente uma contradição.

A relação $\leq$ verifica a relação de Boa Ordem.

Proposição 2.3.4. *Todo conjunto não-vazio de inteiros não negativos contém um elemento mínimo.*

Demonstração: *Considere $A \subset \mathbb{N}$ um tal conjunto, e suponhamos por absurdo que A não tenha mínimo.*

Considere então

$$B = \{\ x \in \mathbb{N} \mid x < y, \forall\ y \in A\}.$$

então, $B \cap A = \emptyset$. De fato, suponhamos que exista $B \cap A$, então $x < x$, que contradiz a anti- simetria da proposição 2.3.4.

Provaremos agora que $B = \mathbb{N}$ o que implica $A = \emptyset$, uma contradição.

De fato, 0 $\in B$, pois 0 $\leq y, \forall\ y \in A$, e se 0 pertencesse a A, seria seu elemento mínimo, contra nossa proposição de absurdo. Logo, 0 $< y, \forall\ y \in A$.

Suponhamos agora que $x \in B$, e mostraremos que $\sigma(x) \in B$. Para todo $y \in A$, tem-se que $x < y$. Logo, pelo lema(iii), $\sigma(x) \leq y$. Se $\sigma(x) \in A$, então $\sigma(x)$ seria o elemento mínimo de A, novamente um absurdo. Logo $\sigma(x) < y, \forall\ y \in A$, e $\sigma(x) \in B$. Pelo princípio de indução temos que

$$B = \mathbb{N}.$$

Capítulo 3

A Construção Dos Números Inteiros

Para construir o conjunto $\mathbb{Z}$ dos Números Inteiros a partir do conjunto $\mathbb{N}$ dos Números Naturais, vamos seguir uma estratégia apoiando-nos na noção de equivalência. Consideramos inicialmente o conjunto:

$\mathbb{N}X\mathbb{N} = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{N}\}$ De todos os pares ordenados de Números naturais. Nesse conjunto introduzimos uma relação, que notaremos por $\equiv$, do seguinte modo:

3.1 Definição (Equivalência)

Dados dois elementos (a,b) e (c,d) do conjunto $\mathbb{N}X\mathbb{N}$, diremos que $(a,b) \equiv (c,d)$ se e somente se $a+d = b+c$.

Por exemplo, notamos que $(4,6) \equiv (7,9)$, pois $4+9 = 6+7$ e da mesma forma, $(0,1) \equiv (5,6)$, já que $0+6 = 5+1$.

3.2 Proposição

A relação definida acima é uma relação de equivalência.

Considere agora o conjunto quociente; isto é, o conjunto de todas as classes de equivalência definidas por essa relação. Denotaremos a classe do par (a,b) pelo símbolo $\overline{(a,b)}$; assim, segue que:

$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N}X\mathbb{N}|(x,y) \equiv (a,b)\}$.

3.3 Definição $\mathbb{Z}$

Denotaremos por $\mathbb{Z}$ o conjunto $\mathbb{N}X\mathbb{N} \cong \left\{\overline{(a,b)}|(a,b) \in \mathbb{N}X\mathbb{N}\right\}$. e chamaremos números inteiros os elementos desse conjunto.

O próximo passo será introduzir operações em $\mathbb{Z}$.

3.4 Definição (Soma)

Considere $\alpha = \overline{(a,b)}$ e $\beta = \overline{(c,d)}$ elementos de $\mathbb{Z}$. Definimos a soma de α e β por.

$$\alpha + \beta = \overline{(a+c, b+d)}.$$

A primeira providência será mostrar que essa soma está bem definida; isto é, que ela independe dos representantes escolhidos.

3.5 Lema

Considere $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$ números inteiros. Então,

$$\overline{(a+c, b+d)} = \overline{(a'+c', b'+d')}.$$

Demonstração:

Da hipótese, tem-se que:

$a + b' = a' + b$

$c + d' = c' + d$. Logo,

$(a+c) + (b'+d') = (a'+c') + (b+d)$, segue que,

$\overline{(a+c, b+d)} = \overline{(a'+c'), (b'+d')}$.

3.6 Proposição

A soma em $\mathbb{Z}$ tem as seguintes propriedades:

(i) Associativa: Para toda terna $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, tem-se que

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

(ii) Existência de neutro: Existe um único elemento, que denotaremos por $0 \in \mathbb{Z}$, tal que

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Existência de Oposto: Para cada inteiro α existe um único elemento, que chamaremos seu oposto e denotaremos por $-\alpha$ tal que

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$$

(iv) Comutativa: Para todo par α, $\beta \in \mathbb{Z}$ tem-se que

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

É importante observar que o elemento neutro da soma é $\overline{(0,0)}$, que também pode ser representado como $\overline{(a,a)}$, para qualquer $a \in \mathbb{Z}$. Note ainda que, se $\alpha = \overline{(a,b)}$, então $-\alpha = \overline{(b,a)}$.

Demonstração:

Associativa.

Se $m = \overline{(a, b)}$, $n = \overline{(c, d)}$, $r = \overline{(e, f)}$ são elementos quaisquer de $\mathbb{Z}$, então:

$(m + n) + r = \overline{(a + c, b + d)} + \overline{(e, f)} = \overline{((a + c) + e, (b + d) + f)} =$

$\overline{(a + (c + e), b + (d + f))} = \overline{(a, b)} + \overline{(c + e, d + f)} =$

$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} + \overline{(e, f)} = m + (n + r)$.

Comutativa.

Se $m = \overline{(a, b)}$ e $n = \overline{(c, d)}$ são elementos quaisquer de $\mathbb{Z}$, então:

$m + n = \overline{(a + c, b + d)} = \overline{(c + a, d + b)} = n + m$.

Elemento Neutro.

Seja $m = \overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$. Temos

$m + \overline{(0, 0)} = \overline{(a, b)} + \overline{(0, 0)} = \overline{(a + 0, b + 0)} = \overline{(a, b)} = m$.

Claramente, $\overline{(a, a)} = \overline{(0, 0)}$, para todo $a \in \mathbb{N}$. Usaremos a Notação: $0 = \overline{(0, 0)}$.

Elemento oposto.

Seja $m = \overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$. Então mostremos que existe $m' \in \mathbb{Z}$ tal que $m + (m') = 0$.

Veremos que $m' = \overline{(b, a)}$ e ultilizaremos a notação:

$-m = m' = \overline{(b, a)}$.

Como $\overline{(a, b)} + \overline{(b, a)} = \overline{(a + b, b + a)} = \overline{(a + b, a + b)} = 0$, segue que $m = \overline{(a, b)} \Rightarrow m' = \overline{(b, a)}$.

3.7 Proposição

Lei do cancelamento da adição em $\mathbb{Z}$.

Se $m + r = n + r$ em $\mathbb{Z}$, então $m = n$

Demonstração.

temos que

$m = m + 0 = m + [r + (-r)] = (m + r) + (-r) = (n + r) + (-r) =$

$n + [r + (-r)] = n + 0 = n$.

3.8 Definição (Subtração em $\mathbb{Z}$)

Para cada par $m, n \in \mathbb{Z}$, a diferença entre m e n, $m - n$, é o elemento $m + (-n) \in \mathbb{Z}$:

$$m - n = m + (-n).$$

A subtração em $\mathbb{Z}$ não é associativa, nem comutativa e não admite elemento neutro.

3.9 Definição (Produto)

Considere $\alpha = \overline{(a,b)}$ e $\beta = \overline{(c,d)}$ números inteiros. Definimos o produto de α por β por

$$\alpha\beta = \overline{(ac + bd, ad + bc)}.$$

3.10 Lema

Considere $\overline{(a,b)} = \overline{(a'b')}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$ números inteiros. Então,

$$\overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(a'c' + b'd', a'd' + b'c')}.$$

Demonstração.

vamos fazer a demonstração em duas etapas. Afirmamos primeiro que

$$\overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(a'c' + b'd', a'd' + b'c')}.$$

Para provar essa afirmação, notamos que, da hipótese, temos

$$a + b' = b + a'.$$

Multiplicando essa equação por c, obtemos

$$ac + b'c = a'c + bc$$

e, multiplicando-a por d e trocando a posição dos membros, obtemos

$$bd + a'd = ad + b'd.$$

Somando as duas equações obtidas, resulta

$$ac + bd + a'd + b'c = ad + bc + a'c + b'd,$$

donde

$$\overline{(ac + b'd', a'd' + b'c)} = \overline{(a'c + b'd, a'd + b'c)},$$

o que prova nossa primeira afirmação.

Afirmamos agora que

$$\overline{(a'c + b'd, a'd + b'c)} = \overline{(a'c' + b'd, a'd + b'c)}.$$

Novamente, da hipótese, vem que

$c + d' = c' + d.$

Multiplicando essa equação por b', obtemos

$b'c + b'd = b'c + b'd$

e, multiplicando-a por a' e trocando a posição dos membros, obtemos

$a'c' + a'd = a'c + a'd'.$

Somando essas equações, resulta

$a'c' + b'd' + a'd + b'c = b'c' + a'd' + b'd + a'c,$

donde

$\overline{(a'c' + b'd', a'd' + b'c')} = \overline{(a'c + b'd, a'd + b'c)},$

o que prova nossa segunda afirmação.

De ambas as afirmações segue, por transitividade, o resultado que queriamos demonstrar.

3.11 Proposição

A multiplicação em $\mathbb{Z}$ tem as seguintes propriedades:

(i) Associativa: Para toda terna $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ tem-se que:

$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$

(ii) Existência de Neutro: Existe um único elemento, que denotaremos por $1 \in \mathbb{Z}$, tal que:

$1\alpha = \alpha 1 = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$.

(iii) Cancelativa: Para toda terna $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, com $\alpha \neq 0$, se

$\alpha\gamma = \alpha\gamma$, então $\beta = \gamma$.

(iv) Comutativa: Para todo par $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, tem-se que

$\alpha\beta = \beta\alpha.$

(v) Distributiva: Para toda terna $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, tem-se que

$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$

Gostariamos de observa que $1 = \overline{(1, 0)} = \overline{(a + 1, a)}$, $\forall a \in \mathbb{Z}$.

Agora, vamos introduzir uma relação de ordem em $\mathbb{Z}$.

3.12 A relação de ordem em $\mathbb{Z}$

Se $m \in \mathbb{Z}$, então $m = \overline{(a, 0)}$ ou $m = \overline{(0, a)}$, para algum $a \in \mathbb{N}$. Assim, se colocarmos

$\overline{(0, 0)} = 0$; $\overline{(1, 0)} = +1$; $\overline{(2, 0)} = +2$,

$\overline{(0,1)} = -1; \overline{(0,2)} = -2$ etc,

será válido escrever $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, +1, +2, ...\}$.

Notações:

$\mathbb{Z}_+ = \{+0, +1, +2, +3, ...\}$

$\mathbb{Z}_+^* = \{+1, +2, +3, ...\}$

$\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$

$\mathbb{Z}_-^* = \{..., -3, -2, -1\}$

3.13 Definição (Ordem)

Considere $m, n \in \mathbb{Z}$. Dizemos que m é menor do que ou igual a n e denotamos $m \leq n$ se $n = m + u$, para algum $u \in \mathbb{Z}$.

Podemos também escrever $n \geq m$, onde lemos "n é maior do que ou igual a m".

se $n = m + u$, onde $u \in \mathbb{Z}_+^*$, então m é dito menor do que n e denotamos $m < n$. Da mesma forma, $n > m$ indica que n é maior do que m.

Particularmente, $0 \leq u$, $\forall u \in \mathbb{Z}_+$, pois $u = u + 0$ e $v \leq 0$, $\forall v \in \mathbb{Z}_-$, pois $0 = v + (-v)$. Ainda, $0 < u$, $\forall u \in \mathbb{Z}_+^*$ e $v < 0$, $\forall v \in \mathbb{Z}_-^*$.

3.14 O princípio do menor Inteiro

Considerando $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(a) = \overline{(a,0)}$, para todo $a \in \mathbb{N}$, é possível considerarmos $\mathbb{N}$ como parte de $\mathbb{Z}$. Na verdade, no que se refere aos aspectos algébricos e à ordenação, é posivel mostrar que $\mathbb{Z}_+$ é uma cópia de $\mathbb{N}$.

Definição

Seja $S \subset \mathbb{Z}$, $S \neq \emptyset$. Um elemento $c \in \mathbb{Z}$ é dito cota inferior de S se $c \leq x$,para todo $x \in S$.

A próxima proposição mostra que $\leq$ é uma relação de ordem compatível com a operação de $\mathbb{Z}$.

3.15 Proposição

(i) Reflexiva: para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$, tem-se que:

$\alpha \leq \alpha$.

(ii) Simétrica: Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$, então

$\alpha = \beta$.

(iii) Transitiva: Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$, então $\alpha \leq \gamma$.

(iv) Tricotomia: Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, tem-se que ou $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\beta < \alpha$, (aqui $\alpha < \beta$ significa que $\alpha \leq \beta$, com $\alpha \neq \beta$).

(v) Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, se $\alpha \leq \beta$ então:

$\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

(vi) Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, se $\alpha \leq \beta$ e $0 \leq \gamma$, então:

$\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

(vii) Seja $S \subset \mathbb{Z}$, $S \neq \emptyset$. Se S admite uma cota inferior, então S possui elemento mínimo.

Um inteiro $\alpha = \overline{(a, b)}$ diz-se positivo se $\alpha > 0$ e diz-se negativo se $\alpha < 0$. Note que α é positivo se e somente se $a > b$ e ngativo se e somente se $b > a$. Note ainda que os inteiros positivos podem ser representados na forma $\alpha = \overline{(m, 0)}$, em que $m = b - a$, e os negativos, na forma $\alpha = \overline{(0, m)}$, que $m = b - a$.

Também é interessante observar que o conjunto de inteiros não-negativos é uma "cópia"de $\mathbb{N}$, no sentido que explicitaremos a seguir.

Seja $\mathbb{Z}^+ = (a, 0)|a \in \mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros não-negativos. Consideramos a função $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^+$ definida por

$a \in \mathbb{N}\underline{\Phi}\overline{(a, 0)} \in \mathbb{Z}^+$.

Verifica-se facilmente que Φ é bijetora e que ela "copia"também as operações e ordem; mais precisamente, para todo par $a, b \in \mathbb{N}$, tem-se que

(i) $\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$.

(ii) $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$.

(iii) se $a \leq b$, então $\Phi(a) \leq \Phi(b)$.

Note que isso significa, em particular, que vale o axioma P.4 para os inteiros não-negativos.

Para mostrar que o conjunto $\mathbb{Z}$ aqui definido satisfaz todos axiomas que foram admitidos no Capítulo 1, falta apenas provar que vale o Princípio da Boa ordem.

3.16 Proposição(Princípio da Boa Ordem)

Seja $A \subset \mathbb{Z}$ um conjunto não-vazio de inteiros não-negativos.

Então, A contém um elemento mínimo (isto é, existe um elemento $a_0 \in A$ tal que $a_0 \leq a, \forall a \in A$).

Considerações Finais

Com este trabalho realizado, constatou-se a importância da contribuição dos diversos tópicos estudados para a construção dos números inteiros, utilizando os Axiomas de Peano e a veracidade das propriedades a qual foram demonstradas. É importante ressaltar ainda que, a construção dos Números Inteiros a partir dos axiomas esclarece uma nova abordagem para a conceituação que resulta na manipulação imediata das propriedades e suas extensões.

Nesse sentido verificou-se que os axiomas atendem a uma nova descoberta para caracterizar que realmente são válidas tais propriedades, concretizando a sua aplicação através dos Números Inteiros. Além disso, este trabalho visa padronizar a ideia de que os Números Inteiros podem ser obtidos a partir dos Axiomas, e compreendidos como um modelo de extensão dos Números Naturais, em que a verificação das propriedades de fato define as operações de Adição, multiplicação e a relação de ordem; além do Princípio da Boa Ordenação, satisfazendo os Axiomas de Peano. Sendo assim, esses Axiomas foram fundamentais na Construção dos Números Inteiros.

Por outro lado, comparando os inteiros com o Conjunto dos Números Naturais, vimos que apesar dos números realmente usados no processo de contagem natural serem os inteiros positivos, os inteiros negativos conseguiram preencher uma lacuna que existia, quando se pensava em comparação de medidas e grandezas. Assim, os Números Inteiros foram fundamentais para o desenvolvimento não só da matemática, mas de toda a ciência.

BIBLIOGRAFIA

[1] MILIES,C.P.; COELHO,S.P. *Números - Uma Introdução à Matemática.* 3ª ed., São Paulo: Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

[2] Domingues,H.; H. *Fundamentos de Aritmética* . São Paulo: Atual, 1991.

[2] Filho,E. A. *Teoria Elementar dos Números.* 2ª ed., São Paulo: Nobel 1985.

[3] EVARISTO,J.; PERDIGÃO,E. *Introdução à Algebra Abstrata.* 2ª ed., Maceió: Formato Digital, 2010.

[4] FERREIRA, Jamil. *A Construção dos Números.*1ª ed., Rio de Janeiro: SBM (Coleção Textos Univesitários), 2010.

[5] Jornal do Professor de Matemática.*Laboratório do Ensino da Matemática.* Maio, 2006. Disponível em http://www.ime.unicamp.br/lem (20/11/2010).

[6] LIMA, E.L. *Análise Real.* vol.1. 9ª ed., Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[7] LIMA, E.L. e outros. *A Matemática do Ensino Médio.* vol.1. 9ª ed., Rio de Janeiro: SBM (Coleção do Professor de Matemática), 2006.

[8] MAIER, R.R., *Álgebra I. (Álgebra Abstrata). Textos de Aula.* 1995.

[9] Hefez,A. *Curso de Álgebra Vol. 1 Série Matemática Universitária da Sociedade de Matemática.* 1993.

[10] Garcia,A. Lequain,Y. *Elementos de Álgebra Projeto Euclides* . 2002.

[11] Domingues,Hygino H. *Álgebra Moderna: volume único/ Hygino H.Domingues, Gelson Iezzi* . 4ª ed reform., São Paulo: Atual , 2003.

[12] Jhone, Caldeira. Silva. *A Aritmética de Peano e a Construção do Conjunto dos Números Inteiros.* Instituto de Matemática e Estatística - IME Goiás.

[13] Alencar, filho, Edgar de. *Elementos de Álgebra Abstrata* . São Paulo: Nobel. 1978.

[14] Dias, Barroso, Claudia. *Construção dos Números Naturais* . Macapá, 2011