

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO

MARIA DE FÁTIMA DOS SANTOS BRITO
ROSA EMÍLIA DOS SANTOS OLIVEIRA
WESLEY FURTADO LOPES

A GEOMETRIA FRACTAL PRESENTE EM ELEMENTOS DA NATUREZA: UMA
PROPOSTA METODOLÓGICA NUMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR

MACAPÁ/AP
2011

MARIA DE FÁTIMA DOS SANTOS BRITO
ROSA EMÍLIA DOS SANTOS OLIVEIRA
WESLEY FURTADO LOPES

A GEOMETRIA FRACTAL PRESENTE EM ELEMENTOS DA NATUREZA: UMA
PROPOSTA METODOLOGICA NUMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
curso de Licenciatura Plena em Matemática da
UNIFAP, sob orientação do professor Arlindo
Moreira da Silva Filho.

MACAPÁ/AP
2011

A GEOMETRIA FRACTAL PRESENTE EM ELEMENTOS DA NATUREZA: UMA
PROPOSTA METODOLÓGICA NUMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora, como requisito parcial à
obtenção do grau de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá.

BANCA EXAMINADORA

Profº. Arlindo Moreira da Silva Filho (orientador)

Profª. Ana Claudia
Convidada da Banca Examinadora

Profª. Ana Raquel Possas
Convidada da Banca Examinadora

Nota: _____

Data: __/__/__

Macapá/AP
2011

Dedicamos este trabalho a nossa família, professores, amigos e principalmente a Deus que nos deu força e ânimo em nossa caminhada, além de todos aqueles que direta e indiretamente nos ajudaram nessa jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Deus que sempre nos fortaleceu, aos nossos amigos sempre presentes nas horas difíceis, as nossas famílias que compreenderam nossa ausência sempre apoiando-nos, ao nosso orientador Arlindo Moreira, sempre presente e paciente, a prof^a; Ana Raquel Possas que sempre que precisamos estava pronta a nos ajudar, a gestora da escola Estadual Ruth Bezerra que nos recebeu com cordialidade e nos proporcionou meios para a execução do nosso trabalho Prof^a; Ana Rosa, e aos alunos da escola que foram peça chave do nosso trabalho, colaborando na aplicação do mesmo. Enfim a todos que de uma maneira em geral contribuíram para nossa formação acadêmica.

“Assim como não posso ser professor em me achar capacitado para ensinar certo e bem os conteúdos de minha disciplina, não posso, por outro lado, reduzir minha prática docente ao puro ensino daqueles conteúdos”.

Paulo Freire

RESUMO

O presente trabalho de conclusão de curso procura investigar o processo ensino-aprendizagem da geometria fractal através do reconhecimento de suas formas geométricas encontradas na natureza. Sabendo que a geometria fractal é uma parte da matemática que está presente no cotidiano do educando, então é extremamente importante fazer com que ele perceba as formas geométricas nela encontrados. Dessa forma, a pesquisa será operacionalizada numa abordagem qualitativa de estudos com a utilização de elementos presentes no cotidiano, desenvolvida junto a alunos das 8ª série do ensino fundamental da rede pública estadual. Procura-se analisar a evolução do aprendizado dos alunos em relação à identificação das formas fractais, segundo pressupostos construtivistas, além de, contribuir para a divulgação da geometria fractal, bem como suas aplicações, levando esses conhecimentos até os professores de diversas áreas. Neste sentido, busca-se promover a evolução das concepções intuitivas dos alunos em direção a concepções matematicamente aceitas. Para tanto, utilizamos de atividades que propiciaram o intercâmbio de ideias, a ampliação de significados e a exposição do professor, enquanto representante do conhecimento científico e mediador do processo. Sendo, portanto, o contexto escolar um espaço de construção do conhecimento sistematizado, empregamos vários instrumentos para facilitar o processo ensino-aprendizagem, sendo a geometria fractal vista como uma proposta de aperfeiçoamento do ensino, inclusive no ambiente extra-escolar, com todos os elementos nela encontrados. Nesta perspectiva, entende-se que as atividades extra-escolares como um meio dinâmico que estimula o raciocínio, não apenas na resolução de problemas, mas principalmente nas situações do cotidiano, (FREIRE, 1996). A observação das formas geométricas presentes na natureza permite que o sujeito pratique essa ação extraindo dela elementos da realidade que estão disponíveis na cultura nas mais variadas formas e que o educando frequentemente tem contato e discute na sala de aula.

SUMÁRIO

Introdução	09
Capítulo 1 Estratégia para facilitar a aprendizagem	12
1.1 Processos de aprendizagem na concepção de Ausubel	13
1.1.1 Como tornar a aprendizagem significativa	14
1.2 O processo de aprendizagem na abordagem de Piaget	16
1.3 O processo de aprendizagem na abordagem de Vygotsky	19
1.4 Relações entre as teorias de Piaget e Vygotsky	23
1.5 Contribuições das teorias para a geometria	25
Capítulo 2 O surgimento da geometria	29
2.1 O estudo das formas	30
2.2 O estudo da geometria	31
2.2.1 Aspectos favoráveis no estudo da geometria	34
2.3 A importância da geometria para o ensino	35
2.3.1 A prática pedagógica	37
2.3.2 Objetivos esperados no estudo da geometria	39
Capítulo 3 Geometria fractal	42
3.1 Principais características da geometria fractal	44
• Curva de Koch	46
• Triângulo de Sierpinski	46
• Características do triângulo de Sierpinski	46
• Conjunto de Cantor	46
• Características do conjunto de Cantor	46
• Curva de Peano	47
• Características da curva de Peano	47
Capítulo 4 Como tornar a aprendizagem da geometria fractal válido?	48
4.1 Propostas para o ensino da geometria fractal	50
4.2 Fractais na vida real	53
4.3 Aplicações dos fractais em sala de aula	55
4.4 Resultados e discussões	62
Considerações finais	66

INTRODUÇÃO

A geometria é uma área da matemática responsável pelo estudo das formas e de suas propriedades. Com ela, o homem pode organizar e sistematizar o estudo de áreas. Os postulados de Euclides impulsionaram o estudo dos planos e das três dimensões e deu origem a geometria Euclidiana. Os estudos geométricos fazem parte da vida cotidiana e são amplamente empregados em diversas situações cotidianas. A geometria Euclidiana é estudada durante a vida escolar.

Contudo, há outra parte da geometria que pode ser utilizada como ferramenta de ensino aos estudantes dos níveis fundamental e médio, facilitando o processo de ensino-aprendizagem, a geometria fractal. Essa parte da Geometria não-euclidiana é pouco divulgada e ensinada aos estudantes. Com a aprendizagem do método fractal o aluno torna-se capaz de resolver diversos problemas geométricos não regulares.

A Geometria Fractal expõe o traçado de formas irregulares e fragmentadas que a geometria Euclidiana não apresenta. Por meio de procedimentos sistematizados e lógicos, esta geometria pode ser ensinada e divulgada com a finalidade de se conhecer uma nova construção geométrica e se ter um novo modo para representar e fazer uso em diferentes formas geométricas presentes no cotidiano.

De acordo com MANDELBROT (2004), os fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões completos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita. O autor constatou, ainda, que existe uma curiosa e interessante relação entre estes objetos e aqueles encontrados na natureza, como por exemplo, as flores, as folhas, o caule, os raios, etc.

Como apresentado por MENEZES (2003), existem dois tipos de fractais: os geométricos (determinísticos) e os não-lineares (ou aleatórios). Os geométricos determinísticos repetem padrões continuamente. Os fractais não-lineares, ou aleatórios, guardam a simetria de escala, mas a transformação não é previsível.

Os fractais são resultados de funções simples ou complexas e suas características principais são a auto-semelhança, dimensionalidade fracionária e a complexidade infinita. Sua construção é baseada em interação dos elementos, rotacionando, refletindo ou dilatando-os.

A ideia de utilizar a geometria fractal partiu da necessidade de se explorar uma geometria que se aproxima das formas expostas na natureza e, a partir daí, conseguir subsídios para motivar e embasar vários estudos importantes dentro da Matemática, oferecendo recursos para que os estudantes possam explorar e descobrir novas estratégias para o estudo das formas geométricas irregulares. Tal desafio faz parte da necessidade exigida ao professor da Matemática atual.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem que o Ensino Fundamental da área de Matemática esteja pautada por princípios decorrentes de estudos, pesquisas, práticas e debates desenvolvidos nos últimos anos. O ensino aprendizagem deve focar novas abordagens, metodologias e práticas visando uma aprendizagem significativa que busque as competências mínimas necessárias à formação básica do educando.

A busca desta abordagem diferenciada, a partir da percepção das formas irregulares da natureza, a possibilidade de se utilizar novos recursos encontrados na natureza, aliada ao objetivo de melhorar o processo ensino-aprendizagem nos levaram a estudar as formas fractais. Essa alternativa procurará fugir do estudo tradicional de geometria euclidiana encontrada nos livros didáticos e praticada nas escolas.

Esse desafio, como assinalado anteriormente, procura fugir do tradicional, criando novas perspectivas aos estudiosos da matemática, em especial, aos da geometria fractal, assim como aqueles que se iniciam no mundo fascinante da matemática, os alunos.

Foi aceitando este desafio que Benoit Mandelbrot concebeu e desenvolveu a geometria da natureza implementando seu uso em diversos números de aplicações. A partir desta teoria descreveu vários modelos irregulares e fragmentados que podemos encontrar em nossa volta, através de famílias de formas que chamou fractais. Esta palavra (fractal) vem do latim *'frangere'* que significa 'quebrar', refere-se às características naturais dos objetos que parecem fragmentados, irregulares, complexos. (Barbariz, 1999).

Este trabalho reflete sobre os procedimentos adotados no ensino da geometria e, *a priori*, apresenta-se como estímulo da aprendizagem. Essa nova geometria é capaz de gerar formas diferenciadas, inovadoras. Para enfatizar nossa pesquisa desenvolveremos uma atividade com turmas de 8ª série do ensino fundamental da Escola Estadual Ruth Bezerra, pois é nesta série que é abordado conceitos como o de proporção, simetria, congruência, rotação, semelhança e generalização. Além disso, também acreditamos, como Piaget, que é neste nível de escolaridade que se desenvolve um ambiente propício à realização de experimentos.

Segundo Piaget, em sua classificação dos estágios de desenvolvimento da criança, no estágio de desenvolvimento Operatório Formal (de 12 anos em diante), a representação permite a abstração total, não se limitando ao imediato ou às relações pré-existentes.

Em síntese, objetivamos com este trabalho proporcionar aos professores a possibilidade de tornar o conteúdo significativo, a partir de uma abordagem construtivista, através de construções geométricas realizadas pelos alunos, assim como observações a cerca de elementos com formas fractais presentes na natureza. Ao mesmo tempo em que através desse processo tentaremos avaliar o grau de conhecimento do aluno em relação aos conceitos geométricos.

No capítulo 1, abordaremos a aprendizagem segundo pressupostos de alguns teóricos. No capítulo 2, refletiremos sobre a origem e a importância da geometria no ensino. Já capítulo 3 analisaremos a geometria fractal como uma ferramenta facilitadora metodológica do processo de ensino/aprendizagem da Matemática. No capítulo 4, analisaremos os resultados propostos pela atividade lúdica envolvendo fractais, desenvolvidas com alunos da 8ª série do Ensino Fundamental da Escola Estadual Ruth de Almeida Bezerra.

Na atividade proposta, no capítulo 4 aos alunos da 8ª série do ensino fundamental apresentaremos uma abordagem prática, na qual poderemos experimentar uma nova forma de se trabalhar a matemática de maneira construtiva e significativa, por meio de simulações do mundo real, no curso deste trabalho nosso objetivo de certa forma não está ligado ao resultado, mas ao processo, desenvolvimento e a possibilidade de novas descobertas, a partir de um desafio que foi lançado e aceito pelos aprendizes.

CAPITLO 1 ESTRATÉGIAS PARA FACILITAR A APRENDIZAGEM

Para alcançar os objetivos propostos neste trabalho buscamos empregar novas formas metodológicas já existentes, através das diferentes estratégias utilizadas em teorias cognitivas de aprendizagem, que estão presentes no processo ensino aprendizagem da geometria. O educando tem a possibilidade de desenvolver a capacidade de ativar suas estruturas mentais, facilitando a passagem do estágio das operações concretas para o das operações formais e abstratas.

A geometria é, portanto, um campo fértil para o exercício de aprender a fazer, aprender a pensar, pois a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituem a sua essência. (Herschkovitz, 1987; Fainguelernt, 1990, pág 42).

O conhecimento prévio trazido pelo aluno de suas experiências sensoriais interage com novos conceitos, proposições e imagens que são estruturados com a ajuda do professor. A tarefa do professor é ajudar o aluno na busca de sua autonomia, no gerenciamento dessas informações, para uma aprendizagem relevante.

A geometria, apesar de ser uma matéria de caráter abstrato, seus conceitos e resultados tem origem no mundo real. Ela encontra muitas aplicações em outras ciências e em inúmeros aspectos práticos da vida diária, tais como: na indústria, no comércio e na área tecnológica.

A exploração de diferentes tipos de investigações geométricas podem também contribuir para estabelecer relações entre situações da realidade e situações geométricas, além de, desenvolver outras capacidades, como por exemplo, a visualização espacial de diferentes formas de representação, evidenciando conexões geométricas e ilustrando aspectos interessantes da história e da evolução da geometria.

Dessa forma, estudos a respeito do conhecimento em geometria evidenciam, entre outros itens, o conteúdo que está ou não presente nas diretrizes curriculares das disciplinas. O Conteúdo pode ser definido como “o conjunto de conhecimentos ou formas culturais cuja assimilação e apropriação são consideradas essenciais para o desenvolvimento e socialização do aluno” (Coll,1998, p.12).

No entanto, para que os conteúdos exerçam um papel importante na concretização das interações educativas, entende-se, que no processo de apropriação do conhecimento, a aprendizagem deva ser significativa para o aluno (Pozo, 1998). Pois, aprender geometria é estabelecer relações significativas numa extensa rede conceitual, a qual, quanto mais entrelaçada estiver, maior possibilidade terá de propiciar ao aluno o domínio dessa área do conhecimento.

Portanto, para que se possa avaliar o conhecimento geométrico dos alunos, é importante compreender como ocorre a formação dos conceitos que de uma forma em geral fazem parte do ensino sistemático na escola. Para tanto, nesse trabalho nos baseamos na teoria da aprendizagem de Ausubel, o qual nos remete a uma aprendizagem significativa. Enfatizarmos, também, a teoria cognitiva de Piaget e a desenvolvimentista de Vygotsky, ambas relacionadas ao processo ensino-aprendizagem.

1.1 PROCESSO DE APRENDIZAGEM NA CONCEPÇÃO DE AUSUBEL

A teoria da aprendizagem de Ausubel propõe que os conhecimentos prévios dos alunos sejam valorizados para que possam construir estruturas mentais, utilizando como meio mapas conceituais que permitem descobrir e redescobrir outros conhecimentos. Isso proporciona uma aprendizagem prazerosa e eficaz ao aluno.

Para este autor, aprendizagem é o processo que permite que uma nova informação recebida pelo sujeito deva se relacionar com um aspecto relevante da sua estrutura cognitiva. A nova informação pode, neste processo, interagir com uma estrutura de conhecimento específica, onde existem os chamados conceitos subsunçores. Se existir pouca associação com conceitos relevantes, então a aprendizagem pode ser chamada de mecânica e, portanto, se contrapõe à significativa.

Ausubel define estruturas cognitivas como estruturas hierárquicas de conceitos que são representações de experiências sensoriais do indivíduo. A ocorrência da aprendizagem significativa implica no crescimento e modificação do conceito subsunçor. A partir de um conceito geral (já incorporado pelo aluno) o conhecimento pode ser construído de modo a ligá-lo com novos conceitos. Isso facilita a compreensão das novas informações, o que dá

significado real ao conhecimento adquirido. As ideias novas só podem ser aprendidas e retidas de maneira útil caso se refiram a conceitos e proposições já disponíveis, que proporcionam as âncoras conceituais.

A aprendizagem é muito mais significativa, à medida que, o novo conteúdo é incorporado às estruturas de conhecimento de um aluno e adquire significado para ele a partir da relação com seu conhecimento prévio. Ao contrário, ela se torna mecânica ou repetitiva, uma vez que se produziu menos essa incorporação e atribuição de significado, e o novo conteúdo passa a ser armazenado isoladamente ou por meio de associações arbitrárias na estrutura cognitiva.

1.1.1 COMO TORNAR APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Para que a aprendizagem significativa ocorra é preciso entender e reconhecer a importância que os processos mentais têm no desenvolvimento e modificação do conhecimento. As ideias de Ausubel também se caracterizam por se basearem em uma reflexão específica sobre a aprendizagem escolar e o ensino. Não se pode tentar somente generalizar e transferir à aprendizagem escolar a conceitos ou princípios explicativos extraídos de situações ou contextos diferentes do sujeito cognitivo. É preciso levar em conta o cabedal de conhecimento que o aluno possui, para então haver uma aprendizagem significativa.

Para haver aprendizagem significativa são necessárias duas condições. Em primeiro lugar, o aluno precisa ter uma disposição para aprender: se o indivíduo quiser memorizar o conteúdo arbitrária e literalmente, então a aprendizagem será mecânica. Em segundo, o conteúdo escolar a ser aprendido tem que ser potencialmente significativo, ou seja, ele tem que ser lógico e psicologicamente significativo: o significado lógico depende somente da natureza do conteúdo, e o significado psicológico é uma experiência que cada indivíduo tem. Cada aprendiz faz uma filtragem dos conteúdos que têm significado ou não para si próprio.

Com esse duplo marco de referência, as proposições de Ausubel partem da consideração de que os indivíduos apresentam uma organização cognitiva interna baseada em conhecimentos de caráter conceitual, sendo que, a sua complexidade depende muito mais das relações que esses conceitos estabelecem em si, que do número de conceitos presentes.

Entende-se que essas relações têm um caráter hierárquico, de maneira que a estrutura cognitiva é compreendida, fundamentalmente, como uma rede de conceitos organizados de modo hierárquico, de acordo com o grau de abstração e generalização.

A partir dessa especificação, a aprendizagem escolar passa a caracterizar-se globalmente como a assimilação a essa rede de determinados corpos de conhecimentos conceituais, selecionados socialmente como relevantes e organizados nas áreas de conhecimento.

Para ocorrer a assimilação de um conceito ou proposição potencialmente significativa é necessário que ocorra sob uma ideia ou conceito mais inclusivo, já existente na estrutura cognitiva na forma de um exemplo, extensão, elaboração ou qualificação. Quanto ao desenvolvimento cognitivo, Ausubel (1968) aponta ganhos progressivos no nível de abstração do indivíduo, através de três estágios: o pré-operacional, operacional concreto e operacional abstrato. Esses ganhos se referem ao processo de aquisição dos conceitos, dos significados que emergem desse processo e da abstração e complexidade que estão ao alcance do indivíduo.

O autor analisa a situação de aprendizagem na escola a partir de duas dimensões: uma se refere ao tipo de aprendizagem realizada pelo aluno e a outra à estratégia de instrução planejada para estimular essa aprendizagem. Na primeira dimensão, a aprendizagem se daria num processo contínuo que iria desde aquela por repetição (ou mnemônica) até a plenamente significativa. Na segunda dimensão, o ensino também se daria num contínuo que iria do ensino que proporcionaria a aprendizagem puramente receptiva até aquele que favoreceria a aprendizagem através do descobrimento autônomo por parte do aluno.

Dessa forma, podemos inferir que na aprendizagem significativa os conhecimentos prévios dos alunos devem ser ativados para que aconteça a compreensão dos conceitos. São construções pessoais, embora possam ser compartilhados por outras pessoas, que possuem coerência do ponto de vista do aluno, mas não necessariamente do ponto de vista científico. Podem ter sido formados espontaneamente, na tentativa de dar significado às atividades cotidianas, por exemplo, ao buscar relações de causa a dados recolhidos através da experiência sensorial ou perceptiva. Os conhecimentos prévios também podem ter sido

transmitidos socialmente, ou então formados através de concepções analógicas com outras áreas do conhecimento.

O professor pode ajudar a ativar os conhecimentos prévios dos alunos. Para isso, precisa conhecer suas ideias anteriores relacionadas ao novo material. Precisa proporcionar oportunidades para que os alunos possam refletir sobre as ideias justificando, organizando, comparando de forma a se habilitarem a desenvolver novas concepções – mais próximas daquelas cientificamente aceitas.

Parece ser viável apresentar às crianças objetos do mundo físico vivenciado por elas e associá-los a conceitos geométricos. É esperado que os alunos, manipulando o objeto e sob orientação do professor, descubram propriedades que contribuam para a elaboração conceitual. Ao manipular, por exemplo, uma caixa de sapato, eles podem identificar faces, vértices, arestas, perceber que duas faces se “encontram” em uma aresta, que existem faces que são paralelas, etc.

É importante que o professor, nas atividades de ensino de conceitos geométricos, possa trabalhar com objetos e com figuras, e assim auxiliar os alunos a formarem imagens mentais. Convém lembrar, no entanto, que objetos e figuras são apenas representações dos conceitos. Ficar preso a essas representações é impedir que o aluno alcance níveis mais altos de conceituação.

1.2 O PROCESSO DE APRENDIZAGEM NA ABORDAGEM DE PIAGET

Para Piaget (1971), o conhecimento é construído através das interações do indivíduo com o mundo. O processo de construção tem algumas características básicas: as biológicas (onde se entende a maturação do sistema nervoso); as referentes às transmissões sociais (que podem ocorrer dentro ou fora da escola) e; a que diz respeito às experiências (sejam físicas ou lógico-matemáticas). Isoladamente, nenhum desses três fatores é responsável pela construção, mas é na coordenação entre eles - a equilibração - que a estrutura cognitiva é formada (Piaget, 1967).

Nos estudos de Piaget, a teoria da equilibração, de uma maneira geral, trata de um ponto de equilíbrio entre a assimilação e a acomodação. Assim, é considerada como um

mecanismo auto-regulador, necessária para assegurar à criança uma interação eficiente dela com o meio-ambiente (Wadsworth, 1996). Piaget postula que todo esquema de assimilação tende a alimentar-se, isto é, a incorporar elementos que lhe são exteriores e compatíveis com a sua natureza. Postula também que todo esquema de assimilação é obrigado a se acomodar aos elementos que assimila, ou seja, a se modificar em função de suas particularidades, mas sem perder sua continuidade, seu fechamento enquanto ciclo de processos interdependentes, nem seus poderes anteriores de assimilação. (Piaget, 1975, p.14)

Em outras palavras, Piaget define que o equilíbrio cognitivo implica afirmar a presença necessária de acomodações nas estruturas, bem como a conservação de tais estruturas em caso de acomodações bem sucedidas. Esta equilibração é necessária porque se uma pessoa só assimilasse, desenvolveria apenas alguns esquemas cognitivos, comprometendo sua capacidade de diferenciação. Em contrapartida, se uma pessoa só acomodasse, desenvolveria uma grande quantidade de esquemas cognitivos, porém muito pequenos, comprometendo seu esquema de generalização de tal forma que a maioria das coisas seriam vistas sempre como diferentes, mesmo pertencendo à mesma classe.

Segundo Wadsworth, se a criança não consegue assimilar o estímulo, ela tenta, então, fazer uma acomodação, modificando um esquema ou criando um esquema novo. Quando isso é feito, ocorre a assimilação do estímulo e, nesse momento, o equilíbrio é alcançado (Wadsworth, 1996). Segundo a teoria da equilibração, a integração pode ser vista como uma tarefa de assimilação, enquanto que a diferenciação seria uma tarefa de acomodação, contudo, há conservação mútua do todo e das partes.

É de Piaget o postulado de que o pleno desenvolvimento da personalidade sob seus aspectos mais intelectuais é indissociável do conjunto das relações afetivas, sociais e morais que constituem a vida da instituição educacional. À primeira vista, o desabrochamento da personalidade parece depender sobretudo dos fatores afetivos. Na realidade, a educação forma um todo indissociável e não é possível formar personalidades autônomas no domínio moral se o indivíduo estiver submetido a uma coerção intelectual tal que o limite a aprender passivamente, sem tentar descobrir por si mesmo a verdade: se ele é passivo intelectualmente não será livre moralmente. Mas reciprocamente, se sua moral consiste exclusivamente numa submissão à vontade adulta e se as únicas relações sociais que constituem as relações de

aprendizagem são as que ligam cada estudante individualmente a um professor que detém todos os poderes, ele não pode tampouco ser ativo intelectualmente (Piaget, 1982).

Piaget afirma que adquirida a linguagem, a socialização do pensamento manifesta-se pela elaboração de conceitos, relações e constituição de regras. É justamente na medida que o pensamento verbo-conceptual é transformado pela sua natureza coletiva que ele se torna capaz de comprovar e investigar a verdade (Piaget, 1975, p.115).

Dessa forma, podemos ver a integração em um todo, segundo a teoria da equilíbrio, como uma tarefa de assimilação, enquanto que a diferenciação pode ser vista como uma tarefa de acomodação. Há, contudo, conservação mútua do todo e das partes.

Piaget, quando descreve a aprendizagem, tem um enfoque diferente do que normalmente se atribui a esta palavra. Separa o processo cognitivo inteligente em duas palavras: aprendizagem e desenvolvimento. Segundo MACEDO (1994), citando Piaget, a aprendizagem refere-se à aquisição de uma resposta particular, aprendida em função da experiência, obtida de forma sistemática ou não. Enquanto que o desenvolvimento seria uma aprendizagem de fato, sendo este o responsável pela formação dos conhecimentos.

Com base nesses pressupostos, a educação, na visão Piagetiana, deve possibilitar à criança um desenvolvimento amplo e dinâmico desde o período sensório motor até o operatório abstrato.

A escola deve partir dos esquemas de assimilação da criança, propondo atividades desafiadoras que provoquem desequilíbrios e reequilibrações sucessivas, promovendo a descoberta e a construção do conhecimento.

Desse modo, suas pesquisas recebem diversas interpretações que se concretizam em propostas didáticas também diversas. Piaget não aponta respostas sobre o que e como ensinar. Contudo, sua teoria permite compreender como a criança e o adolescente aprendem, fornecendo um referencial para a identificação das possibilidades e limitações de crianças e adolescentes. Desta maneira, oferece ao professor uma atitude de respeito às condições intelectuais do aluno e um modo de interpretar suas condutas verbais e não verbais para poder trabalhar melhor com elas.

1.3 O PROCESSO DE APRENDIZAGEM NA ABORDAGEM DE VYGOTSKY

Para Vygotsky (1995) existem os conceitos espontâneos (ou cotidianos) e os não espontâneos (ou científicos). Os espontâneos são aqueles que a criança adquire fora do contexto escolar, que não foram apresentados a ela de forma sistemática, embora, sempre mediados por adultos. Os científicos são aqueles apresentados explicitamente por um professor, na forma de um sistema de ideias inter-relacionadas, e que serviriam para entendimento de uma área de conhecimento.

No entanto, para esse autor, os dois processos se relacionam e se influenciam constantemente, fazendo parte de um único processo: o de desenvolvimento da formação de conceitos.

O processo de formação de conceitos é afetado por diferentes condições internas e externas à criança, sendo que a aprendizagem de conceitos em idade escolar é uma poderosa força que direciona todo o desenvolvimento mental da criança (Vygotsky, 1995). Assim, a educação é vista como um dos fatores a produzir o desenvolvimento cognitivo, ideia que contradiz a de Piaget, pois para este último a aprendizagem só se dá em virtude do desenvolvimento.

O ponto de partida desta análise é a concepção vygotskyana de que o pensamento verbal não é uma forma de comportamento natural e inata, mas é determinado por um processo histórico-cultural e tem propriedades e leis específicas que não podem ser encontradas nas formas naturais de pensamento e fala. Uma vez admitido o caráter histórico do pensamento verbal, devemos considerá-lo sujeito a todas as premissas do materialismo histórico, que são válidas para qualquer fenômeno histórico na sociedade humana (Vygotsky, 1993, p.44).

Sendo o pensamento sujeito às interferências históricas às quais está o indivíduo submetido, entende-se que, o processo de aquisição da ortografia, da alfabetização e o do uso autônomo da linguagem escrita são resultados não apenas do processo pedagógico de ensino-aprendizagem propriamente dito, mas das relações subjacentes a isto.

Para Vygotsky, a aprendizagem sempre inclui relações entre pessoas. Ele defende a ideia de que não há um desenvolvimento pronto e previsto dentro de nós que vai se atualizando conforme o tempo passa. O desenvolvimento é pensado como um processo, onde estão presentes a maturação do organismo, o contato com a cultura produzida pela humanidade e as relações sociais que permitem a aprendizagem.

Tendo em vista que é a aprendizagem quem determina o desenvolvimento, Vygotsky formula o conceito de zona do desenvolvimento proximal para explicar como há essa influência entre aprendizagem e desenvolvimento. Para esclarecer esse conceito, Vygotsky afirma que devemos considerar dois níveis de desenvolvimento: 1º - o desenvolvimento efetivo (zona de desenvolvimento real) é o já realizado e que podemos medir; 2º - a zona de desenvolvimento potencial, que é o desenvolvimento que está em via de se efetivar, ou seja, que ainda não é parte do repertório próprio da criança, mas está voltado para seu futuro. A ampliação da zona de desenvolvimento potencial ocorre à medida que acontece uma intencionalidade para realizá-la, ou seja, através da aprendizagem.

O desenvolvimento só se efetiva no meio social e é nele que a criança realiza a apropriação dos comportamentos humanos. Assim, a aprendizagem na escola ou vida cotidiana, atua no sentido de favorecer o desenvolvimento da zona do desenvolvimento potencial.

Vygotsky diz ainda que o pensamento propriamente dito é gerado pela motivação, isto é, por nossos desejos, necessidades, interesses e emoções. Por trás de cada pensamento há uma tendência afetivo-volitiva. Uma compreensão plena e verdadeira do pensamento de outrem só é possível quando entendemos sua base afetivo-volitiva (Vygotsky, 1991, p. 101). Desta forma não seria válido estudar as dificuldades de aprendizagem sem considerar os aspectos afetivos. Avaliar o estágio de desenvolvimento, ou realizar testes psicométricos não supre de respostas as questões levantadas. É necessário fazer uma análise do contexto emocional, das relações afetivas, do modo como a criança está situada historicamente no mundo.

Na abordagem de Vygotsky a linguagem tem um papel de construtor e de propulsor do pensamento, afirma que aprendizado não é desenvolvimento, o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários

processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer (Vygotsky, 1991, p. 101).

A linguagem seria então o motor do pensamento, contrariando assim a concepção desenvolvimentista que considera o desenvolvimento a base para a aquisição da linguagem. Vygotsky defende que os processos de desenvolvimento não coincidem com os processos de aprendizagem, uma vez que o desenvolvimento progride de forma mais lenta, indo atrás do processo de aprendizagem. Isto ocorre de forma seqüencial. (Vygotsky, 1991, p. 102).

O processo de apropriação do conhecimento se dá nas relações reais do sujeito com o mundo. Vygotsky distingue dois tipos de conceitos: o primeiro é o cotidiano e prático, desenvolvidos nas práticas das crianças no cotidiano, nas interações sociais. O segundo é o científico, adquiridos por meio de ensino, pelos processos deliberados de instrução escolar.

Por fim, é necessário ter em mente que, a proposta de Vigotsky é que se intervenha de forma decidida, significativa nos processos de desenvolvimento da criança no sentido de ajudá-la a superar eventuais dificuldades, recuperar possíveis defasagens cognitivas, auxiliando a ativar áreas potenciais imediatas de crescimento e desenvolvimento

Assim, a escola é o lugar onde a intervenção pedagógica intencional desencadeia o processo ensino-aprendizagem, o professor tem o papel explícito de interferir no processo, diferentemente de situações informais, onde a criança aprende por imersão em um ambiente cultural. Portanto, é papel do docente provocar avanços nos alunos e isso se torna possível com sua interferência na zona proximal

Em seguida temos como fator relevante para a educação a importância da atuação dos outros membros do grupo social na mediação entre a cultura e o indivíduo, pois uma intervenção deliberada desses membros, nessa perspectiva, é essencial ao processo de desenvolvimento. Isso nos mostra os processos pedagógicos como intencionais, deliberados, sendo o objeto dessa intervenção, a construção de conceitos.

O aluno não é tão somente o sujeito da aprendizagem, mas, aquele que aprende junto ao outro, o que o seu grupo social produz, tal como: valores, linguagem e o próprio conhecimento.

Vygotsky levantou a questão da relação entre ensino, aprendizagem escolar e desenvolvimento cognitivo, essas três categorias se enquadram nos vários pontos de vista relativos a este assunto. Os psicólogos pertencentes à primeira categoria afirmam, em essência, que a aprendizagem escolar deve seguir o desenvolvimento: as funções psicológicas da criança devem ter atingido determinado nível de amadurecimento antes que o processo de aprendizagem possa começar. O segundo ponto de vista sobre a relação entre aprendizagem e desenvolvimento afirmava que o desenvolvimento cognitivo não se baseia no amadurecimento e que a aprendizagem é a principal força que atua no sentido de promovê-lo. Em última instância, a consequência desta concepção é que o desenvolvimento é considerado como a sombra da aprendizagem.

Dentro desse contexto, Vygotsky leva em consideração dois tipos de desenvolvimento: real e proximal. O desenvolvimento real consiste na solução independente dos problemas. É definido por testes que medem o nível de capacidade mental. As funções mentais da criança nesse nível se estabelecem como resultados de ciclos de desenvolvimento já completados. A zona de desenvolvimento proximal caracteriza a distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial determinado pela solução de problemas sob a orientação ou ajuda de um adulto ou crianças mais capazes. O importante para Vygotsky é, além do que se faz sozinho, o que se faz com a ajuda dos outros.

Dessa forma, a aprendizagem desperta processos internos de desenvolvimento que só podem ocorrer quando o indivíduo interage com outras pessoas. A análise de Vygotsky sob as relações entre desenvolvimento e aprendizagem no que respeita à aquisição da linguagem nos leva a definir o primeiro modelo de desenvolvimento nestes termos: em um processo natural de desenvolvimento, a aprendizagem se apresenta como um meio que fortalece esse processo natural, coloca à sua disposição os instrumentos criados pela cultura que ampliam as possibilidades naturais do indivíduo e reestruturam suas funções mentais.

Segundo a concepção de Vygotsky o sistema de conceitos científicos constitui um instrumento cultural portador, por sua vez, de mensagens profundas e, ao assimilá-lo, a criança modifica profundamente seu modo de pensar.

O processo de aquisição dos sistemas de conceitos científicos é possível através da educação sistemática de tipo escolar. A contribuição da educação organizada e sistemática é, neste ponto, fundamental em comparação com a aquisição da linguagem oral, em que a aprendizagem desempenha um papel construtor, mas que somente requer a presença de adultos que possuam a língua na qualidade de participantes das atividades comuns.

1.4 RELAÇÕES ENTRE AS TEORIAS DE PIAGET E VYGOTSKY

As diferenças entre Piaget e Vygotsky parecem ser muitas, mas eles partilham de pontos de vista semelhantes. Ambos entenderam o conhecimento como adaptação e como construção individual, concordam que a aprendizagem e o desenvolvimento são auto-regulados.

Em relação à aprendizagem e desenvolvimento, assuntos deste estudo, tanto Vygotsky como Piaget, acreditavam no desenvolvimento e aprendizagem, embora, seus pontos de vista sobre o relacionamento sejam diferentes. Vygotsky tem a ideia de que a aprendizagem é a força propulsora do desenvolvimento intelectual, enquanto que para Piaget o próprio desenvolvimento é a força propulsora.

Piaget tem a concepção de que o nível de desenvolvimento colocava limites sobre o que podia ser aprendido e sobre o nível da compreensão possível daquela aprendizagem, onde cada pessoa tem um ritmo, não podendo ir além daquele estágio adquirido.

Vygotsky chamou de zona de desenvolvimento potencial e zona de desenvolvimento proximal. A zona de desenvolvimento potencial é o nível de desenvolvimento em que os estudantes são capazes de solucionar problemas de forma independente, enquanto que a zona de desenvolvimento proximal é o nível em que os estudantes podem resolver problemas com “apoio”(Lester,1994, p.4).

Tomando o ponto de vista educacional, as duas teorias divergem. Embora Vygotsky e Piaget considerassem o conhecimento como uma construção individual, para Vygotsky toda construção era mediada pelos fatores externos sociais. Piaget considerou a construção do conhecimento como um ato individual da criança. Os fatores sociais influenciam a desequilíbrio individual através do conflito cognitivo e apontam que há construção a ser feita.

A verdadeira construção do conhecimento não é medida, no sentido vygotskiano, pelo fator social e ambiente; ele não é copiado de um referencial e modelo. O conhecimento anterior é reconstruído diante da desequilibração socialmente provocada e estimulada.

O papel do professor é visto basicamente como o de encorajar, estimular e apoiar a exploração, a construção e invenção. É óbvio que o professor enquanto organizador permanece indispensável no sentido de criar as situações, de arquitetar os projetos iniciais que introduzam os problemas significativos à criança. Em segundo lugar, ele é necessário para proporcionar contra-exemplos que forcem a reflexão e a reconsideração das soluções rápidas. O que é desejado é que o professor deixe de ser um expositor satisfeito em transmitir soluções prontas. O seu papel deveria ser aquele de um mentor, estimulando a iniciativa e a pesquisa (Piaget, 1973, p16).

Tanto para Piaget como para Vygotsky, o ambiente da sala de aula requer interação social, embora por circunstâncias distintas. Para Vygotsky, o ambiente social é a fonte de modelos dos quais as construções devem se aproximar. É a fonte do conhecimento socialmente construído que serve de modelo e media as construções do indivíduo. A aprendizagem, e o desenvolvimento são adquiridos por modelos e, claro, pela motivação da criança.

Para Piaget, a interação com os colegas e adultos. Vygotsky coloca que no cotidiano, as crianças observam o que os outros dizem, porque dizem, o que falam, porque falam, internalizando tudo o que é observado e se apropriando do que viu e ouviu. Recriam e conservam o que se passa ao redor. Em função desta constatação, Vygotsky afirma que a aprendizagem da criança se dá pelas interações com outras crianças de seu ambiente, que determina o que por ela é internalizado. A criança vai adquirindo estruturas lingüísticas e cognitivas, mediado pelo grupo.

1.4 CONTRIBUIÇÕES DAS TEORIAS PARA A GEOMETRIA

Tanto a teoria de Piaget como a de Vygotsky pode fornecer ideias importantes para a compreensão do modo como os alunos formam os conceitos em geometria, em especial aqueles relacionados às formas geométricas. Parece que a realidade das formas não está nas figuras. Para aprender tais formas, o aluno deve interpretar a realidade, interagindo com ela,

transformando-a. Mas de que forma ocorre o processo que faz o indivíduo transformar a realidade dos objetos em formas, e as formas em conceitos geométricos?

Se Piaget privilegia o estudo de processos no nível do indivíduo, Vygotsky enfatiza a natureza social da consciência, e desloca do individual para o sócio-cultural a origem do funcionamento mental (SMOLKA, 1995).

Segundo Vygotsky é a cultura que proporciona as ferramentas necessárias para o indivíduo modificar o seu meio, adaptando-se ativamente a ele (os atributos necessários e suficientes para definir um conceito são estabelecidos por características dos elementos encontrados no mundo real, selecionados como relevantes pelos diversos grupos sociais).

Além disso, a cultura está constituída de sistemas de sinais. É ele que atua sobre a interação do indivíduo com o seu meio. No caso da geometria os sistemas de sinais estão constituídos por conceitos e estruturas organizadas, que internalizadas pelo indivíduo, atuam para que ele possa interpretar os objetos físicos e geométricos.

Utilizando a classificação de Vygotsky quanto aos conceitos espontâneos e científicos, poder-se-ia dizer que os conceitos geométricos fazem parte da segunda categoria, pois são frutos de instrução específica feita pela escola, na forma de um sistema de ideias inter-relacionadas. Diferem, portanto, dos conceitos cotidianos ou espontâneos, que podem ser adquiridos fora do contexto escolar.

Figuras que, para um especialista, seriam todas chamadas de paralelogramos, podem não ser organizadas e nomeadas dessa maneira pelos alunos. A semelhança, então, não é objetiva, mas fruto de um sistema conceitual. Por isso, dificilmente a semelhança pode explicar, por si mesma, como se forma esse sistema conceitual (Pozo, 1998).

As teorias organicistas, onde se situam Piaget e Vygotsky, rejeitam a ideia de que os conceitos ficam determinados pelas características ou atributos que os definem. O significado de um conceito é estabelecido a partir de relações com outros conceitos, dentro de uma teoria ou estrutura geral. O sujeito interpreta a realidade a partir de seus conhecimentos anteriores, mas não somente isto, os próprios conhecimentos anteriores são construídos sob a forma de estruturas.

Para Piaget, a realidade é transformada por meio dos mecanismos de assimilação e acomodação através do fator equilíbrio.

Para Vygotsky, a realidade é transformada através dos instrumentos de mediação, incluindo os sinais, que são proporcionados pela cultura, pelo meio social. Os dois autores rejeitam a ideia de que os significados estão na realidade e somente é necessário abstrair-los por procedimentos indutivos. Se fosse assim, bastaria que o aluno percebesse semelhanças e diferenças entre as figuras para assim conceituá-las.

Piaget explica a formação dos conceitos através de ações e da coordenação dessas ações, sejam elas sensório-motoras ou ações concretas, individuais. Vygotsky postula que os significados provêm do meio social externo, mas devem ser internalizados por cada criança de forma particular.

Os dois autores coincidem quando consideram que os sinais se elaboram em interação com o meio ambiente. Porém no caso de Piaget esse ambiente está constituído por objetos, alguns dos quais são objetos sociais (como são os nomes das figuras) enquanto que, para Vygotsky, está composto por objetos e por pessoas que, pela linguagem, medeiam a interação com os objetos. Para este, o vetor de desenvolvimento e de aprendizagem iria desde o exterior do sujeito ao interior, seria um processo de internalização ou transformação das ações externas, sociais, em ações internas, psicológicas (Pozo, 1998).

Relacionando as ideias de Piaget e Vygotsky à formação de conceitos em geometria, pode-se imaginar um ambiente formado por figuras geométricas planas e espaciais. A aprendizagem de conceitos só aconteceria através da interação do indivíduo com esse ambiente, e cada um dos dois autores esclarece de maneira diferente o modo como essa interação acontece.

De acordo com Piaget, essa interação com o ambiente se daria através de ações com o material. Essa ação não seria apenas física, pois, mesmo ao manipular um objeto, ou observar um desenho, o aluno poderia estabelecer uma série de relações (e, portanto, ações mentais) que o ajudariam na obtenção do conhecimento físico sobre tais objetos.

A abstração reflexiva envolve a construção de relações entre os objetos (Kamii, 1994). Essas relações não estão na realidade externa, ou seja, nos objetos ou desenhos, e sim no pensamento de quem as faz. Ao juntar um cubo, uma caixa e uma pirâmide, e separar esse grupo da esfera e do cilindro, essa relação “são diferentes” é construção da mente. Se o aluno reunisse um triângulo com um losango porque os dois são pontudos e juntasse um retângulo e um quadrado porque os dois parecem retinhos, essa relação que ele fez (e que não está nos desenhos) é um exemplo de abstração reflexiva que mais tarde deve estar ligada ao conceito geométrico de ângulo.

Ao abstrair, o aluno assimila as características das figuras (por exemplo, ter ou não ter pontas) aos sistemas que possui. No entanto, para que essa nova informação possa ser utilizada para outras figuras, é necessária uma modificação nos esquemas anteriores que o aluno tinha quanto a “pontas”. Essa modificação, chamada de acomodação, só é possível graças à reorganização dos esquemas anteriores.

Portanto, de acordo com Piaget (1993), é na ação sobre os objetos e na coordenação dessas ações que os conceitos geométricos são formados pelos alunos. É desde a tomada de contato perceptiva que se manifesta esta ação, sob a forma de uma atividade sensório-motriz que regula as percepções. Nos níveis das operações concretas, depois formais, a ação é reencontrada, porém, mais rica porque passa a ser reversível e suscetível de composições. O tipo de operação mental que o aluno pode realizar depende do seu desenvolvimento.

De acordo com as ideias de Vygotsky, a interação do aluno com o ambiente descrito anteriormente – formado por figuras planas e espaciais – dar-se-ia mediado por um adulto ou por um professor. A geometria supostamente presente nesse ambiente é um conhecimento cultural. É esse conhecimento, historicamente produzido, que deve proporcionar as ferramentas necessárias para o indivíduo modificar o seu meio, adaptando-se ativamente a ele, reproduzindo o conhecimento, transformando-o e transformando-se.

Analisando o contexto das teorias expostas, percebemos que as ideias de Piaget - sobre desenvolvimento das estruturas cognitivas – estão presentes na teoria de aprendizagem significativa de Ausubel. No entanto, apesar de os significados serem sempre uma construção individual, a maior parte deles são adquiridos em contextos interpessoais de instrução, e nota-se aqui a influência das ideias de Vygotsky.

Assim, muitos conceitos não se formam apenas em função do desenvolvimento, mas sim através da mediação que, no caso da escola, é feita principalmente pelo professor. Embora Piaget admita a importância da experiência e da transmissão social no processo de construção do conhecimento, parece ser Vygotsky o autor que explicita a influência do meio social nessa construção.

São de Vygotsky as ideias de nível de desenvolvimento real e potencial. O primeiro nível se refere ao que o sujeito pode fazer sozinho; o segundo, ao que ele pode fazer com a ajuda de uma outra pessoa. Entre os dois, é definida a zona de desenvolvimento proximal, onde três elementos atuam e se relacionam: o desenvolvimento do sujeito, a sua aprendizagem e o ensino a ele dirigido, estruturado por outras pessoas (Tunes, 1995).

CAPÍTULO 2 O SURGIMENTO DA GEOMETRIA

Após analisar as teorias referentes à aprendizagem, iniciaremos nesse capítulo o estudo sobre geometria contemplando desde sua origem até a sua prática pedagógica. O estudo da Geometria iniciou com Euclides quando escreveu o livro: “*Os Elementos*”, no ano 300 a.c. Foi ele quem primeiro teria organizado de forma lógica a geometria. Seu ensino, nas escolas, aconteceria através do estudo de axiomas e das demonstrações de teoremas. Contudo a geometria surgiu da vida prática e levou muito tempo para se transformar em teoria matemática, pois as origens da Geometria (do grego medir a terra) parecem coincidir com as necessidades do dia a dia.

Partilhar terras férteis às margens dos rios, construir casas, observar e prever os movimentos dos astros são exemplos das atividades humanas que sempre dependeram de operações geométricas. Assim, pode-se inferir que muito antes da compilação dos conhecimentos existentes, os homens criaram, ao sabor da experiência, as bases da Geometria, realizavam operações mentais que, posteriormente, seriam concretizadas nas figuras geométricas que hoje conhecemos.

Para Freudenthal (1973), a geometria começou bem antes de Euclides, quando o homem começou a organizar as suas experiências espaciais. Buscando a natureza destas experiências, poder-se-ia admitir as idéias de Eves (1969), citado por Gerdes (1992), que afirma que o homem, através da percepção, reconhecia e comparava as formas existentes na natureza como, por exemplo, o contorno circular da Lua e as teias de aranha que se parecem polígonos. Ao observar a natureza e perceber regularidades nas formas, a mente reflexiva do homem construiu uma geometria intuitiva que, depois, viria a se tornar uma geometria científica.

No entanto, segundo Engels (1975) citado por Gerdes (1992), a capacidade do homem de geometrizar a realidade nasceu da necessidade do trabalho. Alexandrov (1974) citado por Gerdes (1992) dizia que as formas geométricas já existiam na natureza, e que os homens, através de uma observação ativa, puderam reproduzir estas formas em seus objetos diários. Assim, as melhores formas (curvas para as panelas de barro, retas para as cordas dos arcos) eram reproduzidas para satisfazerem essas necessidades. Só então as formas foram reconhecidas e consideradas como uma abstração do material.

2.1. O ESTUDO DAS FORMAS

O impasse de como a geometria surgiu são muitas, mas o que se sabe é que o homem num determinado estágio de seu desenvolvimento passou a observar a natureza, especialmente, o céu. Inspirado, nele registrou, aquilo que examinava, dependendo do seu grau cultural, pois a natureza exibe uma criação de formas e relações matemáticas sob os mais variados aspectos: triângulos, quadrados, círculos, hexágonos, espirais, polígonos estrelados, cubos, paralelepípedos, cilindros, helicóides, cones, esferas, etc.

A simples observação das formas regulares e perfeitas que muitos corpos apresentam, como as flores, folhas e animais, revelam simetrias admiráveis que deslumbram o espírito. Existe uma infinita variedade de formas geométricas espalhadas pela natureza. No disco do Sol, no arco-íris, na borboleta, no diamante, na estrela-do-mar até em plantas microscópicas. As figuras criadas pela natureza revelam desde as formas geométricas simples até as mais arrojadas e complexas.

O homem transformou elementos da natureza para a sua sobrevivência. Nessa caminhada, levado pela curiosidade, compreendeu muitas coisas. Criou ferramentas e técnicas, construiu objetos, deslocou e modificou o espaço.

As formas estão ao nosso redor, fazendo parte do nosso mundo. Estão em permanente mudança, podem ser vistas e apreciadas por crianças, mas, assim como aconteceu na história da humanidade, talvez não seja apenas pela observação delas que o aluno possa construir os conceitos geométricos.

Apreender a manejar as formas é o âmago da geometria. A compreensão do espaço, sua ocupação e medida, as superfícies, suas formas, regularidades e medidas; as linhas, suas propriedades e medidas; e as relações entre as formas geométricas. Assim para aprender a geometria que é ensinada nas escolas, o aluno, mais do que conhecer formas, deve dominar uma imensa teia de conceitos.

Destaca-se que há muitas áreas da Matemática em que a introdução de um procedimento e uma terminologia geométrica simplifica muito, tanto a compreensão como a apresentação de um determinado conceito ou desenvolvimento. A linguagem da Geometria é

muito mais simples e elegante do que a da álgebra. Às vezes, é possível levar a cabo linhas de raciocínio rigorosas em termos geométricos sem traduzi-las para a álgebra. As imagens geométricas sugeridas freqüentemente levam a resultados e estudos adicionais. Como consequência, se ganha instrumento poderoso de raciocínio indutivo e criativo.

2.2 O ESTUDO DA GEOMETRIA

Partindo do pressuposto histórico da origem da geometria percebemos que a mesma surgiu da atividade prática e da necessidade do homem em descrever seus arredores. Dessa maneira, as formas geométricas foram vagarosamente conceitualizadas até que tomaram um significado abstrato próprio.

Assim, a Geometria pode ser entendida como estudo das formas. Dessa maneira, pode-se encontrar um vasto campo a ser estudado. Contudo, é necessário o ensino dessa parte da matemática aos alunos, pois ela contribui efetivamente na formação do indivíduo como um ser capaz de interpretar, compreender e apreciar o mundo físico que o cerca. Nesse sentido, poderemos resgatar os aspectos geométricos que permeiam a relação entre homem e espaço o qual estamos inseridos.

Em decorrência dos aspectos emergentes do ensino da Geometria, caberia, nesse contexto, delinear reflexões e propor estratégias metodológicas alternativas, que pudessem resolver esses problemas ou minimizá-los. Essas estratégias seriam formas de introduzir os alunos em um dinâmico e efetivo envolvimento com as noções geométricas, possibilitando a compreensão do maravilhoso mundo real das formas tridimensionais, utilizando conceitos inerentes à Geometria para sua integração e adaptação no mundo em que vive.

Segundo análise de estudos baseados na teoria piagetiana sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico, as representações do espaço não se constituem em noções perceptuais, mas sim, são construídas através da organização progressiva das ações motoras internalizadas pelas crianças, resultando em sistemas operacionais. Essas noções piagetianas são fundamentais para nossa pesquisa e representam na nossa concepção sobre o tema.

A organização progressiva das idéias geométricas segue uma ordem lógica e não uma ordem histórica da produção científica. Originam-se pelas relações topológicas, seguidas das relações projetivas e culminam nas relações euclidianas.

Para Piaget e Inhelder, a diferença entre relações topológicas, projetivas e euclidianas refere-se à maneira pelas quais os objetos distintos são relacionados uns aos outros, tais como:

- Topológicas: envolvem relações internas de uma figura particular;
- Projetivas: envolvem relações entre a figura e o sujeito;
- Euclidianas: envolvem relações entre figuras em si mesmas.

Dentro desses pressupostos e na descrição da análise realizada em outros estudos, que serão explicitados nesta pesquisa, foram analisadas as condutas cognitivas de sujeitos em situações práticas de resolução de problemas. Assim, pôde-se constatar o desenvolvimento e a representação do pensamento geométrico através da construção lógica.

Nessa vertente destacamos o papel primordial que a Geometria desempenha no ensino da Matemática, pois, a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituem a sua essência. Mas apesar de sua grande importância, o que se verifica no sistema educacional é quase ausência ou ausência do ensino dessa parte da matemática. Essa lamentável realidade educacional brasileira pode ser confirmada por vários trabalhos como de Perez (1991) e Pavanelo (1993).

As causas de tal omissão são inúmeras, aqui destacaremos apenas duas delas que estão presentes em sala de aula, que são:

A primeira a ser apontado diz respeito à falta de conhecimento necessário a prática pedagógica observado em muitos professores das séries iniciais. Tal afirmação pode ser confirmada pela pesquisa de Lorenzato, “Os Porquês Matemáticos dos Alunos e as Respostas dos Professores”, realizada no ano de 1993, com 255 professores de 1º a 4º série com cerca de dez anos de experiência no magistério (Lorenzato, Revista-SBEM 1º Sem, 1995, nº 4, pg 3-13).

A segunda causa está relacionada ao livro didático, onde em muitos deles a geometria é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações de natureza histórica ou lógica; em outros a geometria é reduzida à meia dúzia de formas banais do mundo físico. Portanto, totalmente desvinculada da realidade.

Cabe ressaltar, ainda, que a geometria é frequentemente apresentada na última parte do livro didático, aumentando assim as chances da mesma ser omitida por falta de tempo durante o ano letivo.

Dessa maneira, a geometria tem sido apresentada no contexto escolar de forma árida, sem significação, desvinculada da realidade, desintegrada as outras disciplinas do currículo e até com a própria matemática.

Assim sendo, poderíamos inferir que a Geometria tem sido vista como um tópico da Matemática que tem provocado um sentimento forte de aversão aos que com ela se deparam. Nota-se também que a riqueza intuitiva dos alunos, em relação à Geometria, foi "sufocada" pelo sistema escolar.

Castelnuovo (1989), em seus estudos na busca de entender os fatores que provocaram esse tipo de "aversão universal" que a Matemática tem causado aos que com ela convivem, optou por um caminho histórico do Ensino da Matemática, destacando entre vários aspectos a importância de se refletir sobre a História da Matemática, buscando entender a "incompreensão da Matemática", a partir de documentos que retratavam métodos de ensino.

Nessa sua investigação, objetivando encontrar os "ramos" que pudessem unificar os países, em relação à "incompreensão da Matemática", nada encontrou na Álgebra e nem tampouco na Aritmética, mas somente no campo da Geometria abstrata.

Ao analisarmos tal problemática, percebemos que a geometria precisa ser vista por uma nova vertente para que seja mostrada sua verdadeira importância tanto no ensino como na aprendizagem, pois é a mais bela página do livro dos saberes matemáticos, além de ter uma inquestionável contribuição para o desenvolvimento cognitivo, principalmente se integrados com outras disciplinas e com outras partes da própria matemática.

Mas para que tal fato ocorra, é necessário que a geometria seja apresentada de forma significativa. Processo pelo qual caberia aos professores darem o primeiro passo para viabilizar novas metodologias alternativas. O que, por sua vez, provocaria assim o interesse tanto na aprendizagem como no ensino da Geometria. Dessa forma, contribuiríamos para o fechamento dessas lacunas negativas que alunos e professores têm em relação à essa parte da

Matemática.

2.2.1 ASPECTOS FAVORÁVEIS NO ESTUDO DA GEOMETRIA

Pode-se perceber que a inserção do estudo da geometria dentro de um contexto histórico, social contemporâneo da própria Matemática, destaca-se por enfatizar a compreensão da relação com o espaço. Assim as atividades geométricas percebidas pelos alunos favorecem:

a) O desenvolvimento da noção de espaço.

A percepção espacial diz respeito à habilidade de orientar-se no espaço, coordenar diferentes ângulos de observação e de objetos no espaço. Essas habilidades contribuem para o melhor desempenho do indivíduo em suas ocupações cotidianas. São exigidas em maior grau em atividades como a cristalografia, bioquímica, cirurgia, aviação, escultura, arquitetura, coreografia, decoração, etc.

b) O desenvolvimento da habilidade de observação do espaço tridimensional e da elaboração de meios de se comunicar a respeito desse espaço.

Isso é importante num mundo onde as fontes de informação utilizam predominantemente a imagem (cinema, televisão, cartazes, jornais e, sobretudo, a internet). Modos de representação tais como a perspectiva, planificações, cortes, projeções e outros são fundamentais para a interpretação das mensagens;

c) O desenvolvimento de uma atitude positiva em relação ao estudo da Matemática.

A escrita dos números envolve a noção de posição. Para efetuar medições, devemos comparar figuras e relacioná-las. Assim, dificuldades de percepção espacial poderão tornar os alunos tensos diante de suas tarefas. O ensino da Geometria poderá prevenir essas dificuldades através atividades com material manipulativo e observação no mundo real, estimulando a participação e ajudando no desenvolvimento de atitudes positivas em relação à Geometria e, por extensão, a Matemática.

d) A integração com outras áreas.

Informações relativas a várias áreas do conhecimento são dadas por medidas que se utilizam de gráficos, tabelas, desenhos em escala, mapas, etc. O estudo da órbita dos planetas, cortes em caules, disposição de flores e folhas nas plantas, decodificar formas da natureza, projetar sólidos de revolução de menor área e maior volume, proporcionam momentos de integração da Geometria com as outras áreas. O estudo da Geometria enriquece o referencial de observação com o qual apreciamos e analisamos um quadro, azulejos, tapeçarias, edifícios.

Tais aspectos apesar de fazerem parte do cotidiano do aluno muitas vezes passam despercebidos, por isso, devem-se buscar práticas pedagógicas que funcionem na apreensão das ideias geométricas e que gerem a consciência de que a Geometria é fundamental para o mundo moderno.

Investigar por que os alunos apresentam tantas dificuldades na aprendizagem de Geometria deve levar em conta não só a atuação didática do professor, mas também, e, principalmente, a participação do aluno na construção do conhecimento. Dessa forma a Geometria pode ter um papel decisivo no ensino e na aprendizagem da Matemática, pois permite resolver problemas do cotidiano e interfere fortemente na estruturação do pensamento, levando à construção do conhecimento.

O estudo da Geometria é, portanto, um forte instrumento para o desenvolvimento do raciocínio lógico. Logo, a escolha da Geometria é justificada por ser considerada uma ferramenta para a compreensão, descrição e inter-relação com o espaço em que vivemos. É, também, à parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada à realidade. Como disciplina escolar, apóia-se no extensivo processo de formatização, realizado durante esses últimos 2000 anos, em níveis cada vez de maior rigor, abstração e generalização.

2.3 A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA PARA O ENSINO

Quanto à importância do ensino da Geometria na escola está em seu papel básico não só na Matemática, mas também em diversas áreas do conhecimento, tais como: Engenharia, Arquitetura, Física, Astronomia, etc.

Hoje, a aula de Geometria é dada, na maioria das vezes, de uma maneira mecânica e, isto, é um dos fatores do aluno não ter interesse pelo conhecimento que está sendo lhe repassado, demonstrando não ter interesse, prazer em aprender a Geometria. Ele não encontra um significado para a compreensão do conteúdo, pois, as aulas são muito repetitivas. Isto é uma consequência da má formação do professor, pois não tem preparação suficiente para passar a matéria para o aluno e, quando surgem problemas no processo ensino-aprendizagem não é capaz de solucioná-los de forma eficaz, causando desinteresse ao alunado.

O inciso II do Artigo 67, da Lei nº 9.394/96, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDBEN, prevê o aperfeiçoamento profissional continuado ao profissional da educação, nos seguintes termos: “aperfeiçoamento profissional continuado, inclusive com licenciamento periódico remunerado para esse fim”. Essa formação continuada de professores é uma premissa da LDBEN que deveria ser cumprida, pois permitiria ao professor manter-se atualizado e, ao mesmo tempo inserido nas inovações que envolvem o processo educativo. Contudo, o aperfeiçoamento do docente de que fala a lei não é implementado o que, por sua vez, reflete de maneira negativa na condução da construção do conhecimento pelo discente.

A linguagem geométrica está de tal modo inserida no cotidiano, mas a consciência desse fato não é explicitamente percebida pelo professor e muito menos pelo aluno. É dever da escola modificar esse quadro, a fim de mostrar que a Geometria faz parte da vida e que vivemos num mundo de formas e imagens que podem ser representadas geometricamente.

Os conteúdos da geometria são trabalhados de forma esparsa e isto contribui para o distanciamento do aluno do conteúdo e, conseqüentemente, da própria matemática.

Quanto à organização dos conteúdos, é possível observar uma forma excessivamente hierarquizada de fazê-lo. A organização é dominada pela ideia de pré-requisito, cujo único critério é a definição da estrutura lógica da Geometria, que desconsidera, em parte, as possibilidades de aprendizagem dos alunos daquilo que supostamente ainda não foi repassado; mas que eles trazem de suas experiências sensoriais e podem ser aplicadas na geometria. Por não se levar em conta esse cabedal de conhecimento que o aluno traz de sua experiência de vida é que a aprendizagem ocorre como se os conteúdos se articulassem como elos de uma corrente, encarado cada um como pré-requisito para o que vai sucedê-lo.

Partindo do manuseio do material concreto, o aluno tem a possibilidade de constatar aspectos inerentes a ele, exercitando então sua criatividade e raciocínio, compreendendo melhor ou de forma mais clara a teoria que margeia os conteúdos aplicados. Essa é apenas uma forma para que a aula seja produtiva, são aulas que juntamente com materiais, podem se transformar em um ótimo momento para o aprendizado. Para descrever o mundo é necessário medir espaços e formas, encontrar regras que os expliquem. O trabalho com o espaço e a forma está intimamente relacionado à percepção espacial.

Além disso, inventaram-se muitas formas desde que os egípcios construíram suas pirâmides. Os artefatos simples e complexos, planejados conscientemente pela humanidade têm sido baseados em sistemas de geometria. A Geometria é uma teoria matemática que visa a criação da abstração do mundo que faz parte de nossa realidade. Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs sinalizam a importância de se trabalhar com a Matemática, em sala de aula, sob dois aspectos:

- 1) As aplicações no cotidiano.
- 2) As aplicações e avanços na própria ciência Matemática.

A Geometria ajuda como já salientado anteriormente, a falar da inserção do homem no espaço, utilização deste espaço, sua divisão e a construção de estratégias para resolver problemas relacionados à forma e ao espaço em que a humanidade está inserida.

2.3.1 A PRÁTICA PEDAGÓGICA.

Na maioria das escolas brasileiras, a prática pedagógica fundamenta-se na transmissão de conteúdos curriculares fragmentados, memorizáveis e mensuráveis, correspondendo aos padrões reconhecidos e aplicáveis no modelo de uma sociedade ultrapassada. É necessário, porém que elas procurem adotar uma prática pedagógica centrada na construção do conhecimento, baseada em teorias cognitivas de aprendizagem, tentando, desta forma, incorporar tendências e comportamentos originários da moderna sociedade da informação.

A prática educacional sustentada no cotidiano do aluno pode contribuir para uma melhor compreensão do conteúdo matemático, ou seja, levar para a sala de aula o que é

vivenciado pelo aluno. Isso dá sentido de o porquê de se estuda a matemática. É importante não deixar de trabalhar o conteúdo programático. Mas é exatamente partindo dele que deverá ser trabalhado o que os alunos observam nas ruas, o que fazem no trabalho, isto é, uma real aplicação da matemática ao cotidiano. Isto possibilita a matemática ser tratada como algo concreto e não tão abstrata, ficando mais fácil de ser ensinada e compreendida.

A contextualização dos conteúdos irá despertar no aluno à vontade de aprender a geometria. Para que isso ocorra é essencial que o aluno manipule os objetos apresentados. O trabalho manipulado associado ao pensamento crítico é fundamental para o desenvolvimento da aprendizagem em geometria. Esse aprendizado tem a intenção de tornar diferente o trabalho com a geometria contextualizada, deixando o aluno usar o seu raciocínio lógico, a sua criatividade.

Uma condição fundamental para o ensino e aprendizagem da matemática é desenvolver a capacidade de aprender, oferecendo um conjunto mais rico de materiais, técnicas e sistemas que visem contribuir significativamente para a incorporação dessa habilidade no aluno. A elaboração de situações-problema contextualizados estimulam a criatividade na resolução de problemas. O trabalho com conteúdos contextualizados enriquece a aula e ajuda a despertar no aluno o gosto pela geometria. Esta relação desenvolve atitudes positivas em relação à matemática.

Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base para a formalização geométrica.

A interação da geometria contextualizada está permitindo a análise crítica e a compreensão dos fenômenos do dia a dia, utilizando e formalizando os conceitos empregados na construção do conhecimento. É uma proposta pedagógica possível e viável que valoriza a geometria de diferentes culturas, sem impor supremacias de pensamentos ou construções teóricas.

Possui como objetivo, o despertar da curiosidade do aluno, motivando-o para o trabalho e para a compreensão dos conceitos geométricos, a partir do seu desenvolvimento

histórico, uma vez que, vai aumentar a participação ativa do aluno no processo de aprendizagem. (Muller, 2000, pág. 46).

Os alunos irão entender, compreender e vivenciar a matéria. Dessa forma, saberá de onde o conteúdo se originou, como foi concebido, e como pode ser solucionada a situação-problema, contrapondo aqueles que são colocados em sua cabeça pelos professores, através de conceitos formulados e regras a serem decoradas. Nessa nova metodologia, o aluno vai aprender “brincando”.

Portanto, trabalhar a geometria de forma contextualizada é fazer a relação desta com o cotidiano e entender que, se a dominarmos, a sua aplicação fica muito fácil e mais significativa, além de ser muito mais prazeroso, respondendo a todos os “porquês?”, “para quê” e “como?” que os alunos fazem aos professores.

2.3.2 OBJETIVOS ESPERADOS NO ESTUDO DA GEOMETRIA

A Matemática vem sendo apresentada aos alunos como ciência pronta e acabada, com conteúdos desvinculados do real e programas obsoletos, não motiva os alunos de um modo geral, gerando sérias dificuldades sob vários aspectos, dificuldades essas refletidas no processo ensino-aprendizagem.

As dificuldades encontradas hoje pelos alunos na aprendizagem da matemática são atribuídas aos professores, alguns dos quais, mesmo sem dominar a disciplina, exigem demasiadamente dos alunos, sobrecarregando-os de tarefas e conteúdos. Os mestres, por sua vez, atribuem as dificuldades encontradas pelos alunos de hoje à sua pouca dedicação ao estudo.

A matemática contextualizada pode ser aplicada no cotidiano do aluno, desenvolvendo aspectos no dia a dia que desperte a curiosidade para o conhecimento, levando-o a ver que esta ciência “exata” não é constituída apenas de fórmulas, números ou equações impossível de ser entendida, mas que ela pode ser interativa.

Conhecimento não se reduz à informação, este é um primeiro estágio. Conhecer implica em um segundo estágio, que é trabalhar as informações classificando, analisando e contextualizando-as.

O terceiro estágio está relacionado à inteligência, consciência e sabedoria. Inteligência tem a ver com a arte de vincular o conhecimento de maneira útil e pertinente, isto é, de produzir novas formas de progresso e desenvolvimento; consciência e sabedoria envolvem reflexão, isto é, capacidade de produzir novas formas de existência de humanização. E é nessa relação que se pode entender as relações entre conhecimento e poder. Portanto não basta produzir conhecimento, mas é preciso produzir as condições de produção do conhecimento. (Pimenta, 1996, pág 30).

No entanto para que essa contextualização matemática aconteça tanto professores quanto à escola devem aprender a aplicar o que é estudado, no que o aluno faz fora da escola. Isso exige do professor mais tempo, dedicação e pesquisa. As avaliações aplicadas aos alunos não são um meio de saber se ele realmente aprendeu, mas experimentos feitos com jogos que trata da matemática podem aguçar os seus sentidos e solidificar mais o seu conhecimento. O uso de materiais alternativos, como jornais, revistas, de uma situação problema referente a um dado conteúdo, filmes, charadas para que possa desenvolver o seu raciocínio lógico e abstrato faz com que o aluno queira se interar mais ao seu estudo.

Melhorar a qualidade de ensino é uma questão defendida, hoje, por governantes, educadores, técnicos e especialistas em educação. Uma das exigências para se alcançar um elevado nível de qualidade na educação é aprimorar o conhecimento sobre os processos de ensino-aprendizagem, de forma a torná-los mais capazes de responder às imposições deste novo tempo.

O educador no geral deve formar cidadãos críticos com disposição de querer sempre mais e levá-los a ter um olhar matemático para várias situações distintas.

Numa sociedade cada vez mais complexa e dinâmica e que depende da Matemática, da ciência, acredita-se que o professor é uma figura central do processo de ensino-aprendizagem. Logo, ele precisa refletir sobre a escola, como instituição que transmite e cria conhecimento, como local que ajuda o aluno a desenvolver seu potencial, ensinando-o a

pensar e a descobrir caminhos para transformar o mundo em que vive entre outras reflexões necessárias ao bom desempenho do professor e do aluno dentro da instituição escola.

Faz-se necessário, portanto, que o professor represente seu papel frente às novas possibilidades que compõe o mundo do conhecimento e da cultura, enfrentando o desafio da formação continuada em cursos de pós-graduação (mestrado e doutorado). Sustentam-se que esses procedimentos concorram para que o educador vivencie sua autonomia intelectual na escolha de metodologias, procedimentos didáticos e paradigmas científicos objetivando melhorar a qualidade do ensino.

O professor tem um papel decisivo e fundamental na vida de cada indivíduo. É um dos profissionais que chega mais próximo do aluno, por isso, as atividades matemáticas devem favorecer a aquisição do conhecimento mediante situações que envolvam problemas do cotidiano. Portanto, o professor para está instrumentalizado e puder contextualizar necessita de capacitação constante e atualizada.

CAPÍTULO 3 GEOMETRIA FRACTAL

Nos capítulos anteriores refletimos sobre a importância da geometria no ensino e a necessidade de se buscar novas metodologias que incluam e facilitem tanto o ensino como a aprendizagem. Assim sendo abordaremos neste capítulo a geometria fractal, que apesar de pouco conhecida no ambiente escolar, é um ramo da matemática, que com a metodologia adequada, pode ajudar no processo de ensino-aprendizagem da geometria, tornando-a mais significativo.

A busca desta abordagem diferenciada a partir da percepção das formas irregulares da natureza e a possibilidade de utilização delas para a melhoria da aprendizagem nos levaram a estudar as formas fractais, fugindo do estudo tradicional de geometria encontrada nos livros didáticos e praticada nas escolas.

Foi para fugir do tradicional que também surgiram os primeiros estudiosos do tema. Por volta da primeira metade do século XIX, começaram os vários questionamentos sobre a Geometria Euclidiana, principalmente ao polêmico quinto postulado de Euclides.

Tal fato ocorreu porque na natureza encontramos formas com um grau de complexidade maior, não sendo possível descrevê-las por meio da geometria euclidiana. Foi então que na segunda metade do século XX, iniciaram-se os estudos sobre as estruturas fractais, a partir dos trabalhos de Benoit Mandelbrot.

Foi esse autor que concebeu e desenvolveu esta Geometria da Natureza, implementando seu uso em diversas aplicações e áreas de conhecimento, tais como: computação, engenharias, biologia, geografia, física, arte, entre outras. Diante dessas condições surge uma nova geometria: a geometria da natureza ou geometria fractal.

Assim sendo a geometria fractal de Mandelbrot reflete sobre a natureza das irregularidades, reentrâncias, saliências, depressões e fragmentação. O senso estético nos fractais está na visualização de simetrias, o que permite sentir o belo. São muitas as definições de Fractal, mas para o trabalho em questão, considerarmos a definição segundo J. Feder (1988), “um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos”.

Neste sentido, podemos classificar os fractais em **geométrico**, quando o todo é uma ampliação exata de uma parte, entres estes, encontram-se o pente de Cantor, a curva do floco de neve, o triângulo de Sierpinski e o tapete de Sierpinski. **aleatórios** também chamados *naturais*, quando o todo é estatisticamente semelhante a uma ampliação de uma parte, como exemplo temos: obra de arte, fenômenos da natureza etc. A palavra (fractal) vem do latim *'frangere'* que significa 'quebrar' e refere-se às características naturais dos objetos que parecem fragmentados, irregulares, complexos. (Barbariz, 1999).

As estruturas fragmentadas, extremamente belas e complexas da geometria fractal, fornecem certa ordem ao caos, o que conclui que a ela está ligada a uma ciência chamada caos. Assim, nos últimos anos essa geometria tem se tornado bastante difundida no meio científico. Devido as suas características ela representa, descreve e mede de forma eficiente situações consideradas imprevisíveis e caóticas.

Dessa forma, num universo cheio de superfícies irregulares, fractal é uma nova linguagem geométrica descoberta através da “Teoria do Caos”. Uma característica que chama a atenção é que a geometria fractal admite a possibilidade de existirem dimensões fracionárias.

A teoria do caos baseia-se em demonstrações matemáticas e teorias que tentam descrever processos em movimento, ou seja, estuda sistemas dinâmicos, como exemplo, pode-se citar o tempo ou a distribuição genética de uma população.

Segundo Mandelbrot, o mundo que nos cerca é caótico, mas podemos tentar limitá-lo no computador. A geometria fractal é uma imagem muito versátil que nos ajuda a lidar com os fenômenos caóticos e imprevisíveis.

Mandelbrot constatou ainda que todas estas formas, padrões possuíam algumas características comuns. Que havia uma curiosa e interessante relação entre estes objetos e aqueles encontrados na natureza.

Mandelbrot questiona o fato de que a Geometria é frequentemente descrita como fria e árida. Argumenta que essa descrição está ligada à sua inabilidade de descrever formas da natureza. O autor acrescenta que “muitos padrões da natureza são tão irregulares e

fragmentados que, comparados com Euclides [...], a natureza exhibe não somente um grau mais alto, mas um nível completamente diferente de complexidade.” (MANDELBROT: 1977. p.1).

A Geometria Fractal traz consigo um forte apelo visual e artístico, mas o seu estudo não deve se limitar apenas a isto. Pois por trás desta beleza visual, se esconde muita Matemática, muitas vezes de fácil compreensão e entendimento devido à simplicidade na lei de formação. E tal simplicidade que nos faz crer ser possível, interessante e muito produtiva a abordagem da Geometria Fractal nas series finais do Ensino Fundamental e Médio.

Segundo Barbosa (2002) a utilização de fractais em sala de aula no Ensino Fundamental e Médio é importante pelas seguintes razões: a) estabelece conexões com várias ciências; b) mostra deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza; c) utiliza a difusão e acesso às tecnologias computacionais nos vários níveis de escolaridade; d) explora a beleza dos fractais para o desenvolvimento do senso estético; e) desenvolve a curiosidade face ao caráter inesperado de cada iteração.

3.1 PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DA GEOMETRIA FRACTAL

Benoît Mandelbrot, em seu livro "The Fractal Geometry of Nature" escreve: "nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, o som do latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta."(MANDELBROT:1982).

Como já citado anteriormente a ciência dos fractais apresenta estruturas geométricas de grande complexidade e beleza infinita, ligadas às formas da natureza, ao desenvolvimento da vida e à própria compreensão do universo. São imagens de objetos abstratos que possuem o caráter de onipresença por terem as características do todo infinitamente multiplicadas dentro de cada parte, escapando assim, da compreensão em sua totalidade pela mente humana.

Visando uma melhor compreensão da Geometria Fractal em termos mais objetivos, iremos explorar alguns dos principais aspectos que a diferenciam da geometria euclidiana tradicional. Os fractais podem apresentar uma infinidade de formas diferentes, não existindo uma aparência consensual. Contudo, existem características muito freqüentes nesta geometria como a auto-semelhança e complexidade infinita.

Dessa forma, é possível enumerar quatro características essenciais, encontradas em Serra e Karas (1997), que estão presentes em todos os fractais e podem servir, pelo menos inicialmente, para caracterizar esse novo conjunto de formas geométricas. A primeira e a segunda estão relacionadas à aparência dos fractais. A terceira se relaciona à maneira como os fractais são construídos. A quarta característica se relaciona a um aspecto responsável pela grande ruptura que a geometria fractal causou na Matemática tradicional. São elas:

Estrutura Fina: o grau de detalhamento de um fractal não diminui ao examinar-se uma porção arbitrariamente pequena dele. Sucessivas ampliações de um fractal levam a mais e mais detalhes, indefinidamente.

Auto-similaridade: um fractal costuma apresentar cópias aproximadas de si mesmo em seu interior. Um pequeno pedaço é similar ao todo. Visto em diferentes escalas, a imagem de um fractal parece similar.

Simplicidade na lei de formação: essa característica dos fractais se refere ao processo de construção que em geral utiliza algum tipo de processo iterativo. Isso significa que, na construção de qualquer fractal, haverá repetição de um determinado procedimento infinitamente, seja este procedimento um conjunto de cálculos algébricos ou uma determinada construção geométrica.

Dimensão: a dimensão espacial é estritamente maior que a dimensão topológica. A dimensão fractal diz respeito à dimensão espacial, ou seja, ao espaço ocupado pela figura.

A Geometria Fractal pode ser utilizada para descrever diversos fenômenos na natureza, onde não podem ser utilizadas as geometrias tradicionais. Nuvens, montanhas, turbulências, árvores, crescimento de populações, vasos sanguíneos e outras formas irregulares podem ser estudadas e descritas utilizando-se as propriedades dos fractais.

Apesar das inúmeras aplicações e utilidades, os fractais ainda têm um longo caminho pela frente. Faltam muitas ferramentas e vários problemas continuam sem solução. Uma teoria completa e unificada é necessária e a pesquisa prossegue neste sentido.

A seguir, estão listados e caracterizados alguns fractais, entre eles: a Curva de Koch, o Triângulo de Sierpinski, o Conjunto de Cantor e a Curva de Peano, os quais serviram de apoio matemático à pesquisa de Mandelbrot.

- **CURVA DE KOCH**

Um dos exemplos de fractais mais simples é a Curva de Koch. Apresentada pelo matemático sueco Helge Von Koch, foi construída por um processo iterativo.

- **TRIÂNGULO DE SIERPINSKI**

No início do século XX, o matemático polonês Wacław Sierpinski (1882-1969) estudou uma figura geométrica que ficou conhecida por Triângulo de Sierpinski que se obtém como limite de um processo iterativo.

- **CARACTERÍSTICAS DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI**

As características fractais citadas anteriormente também são encontradas no Triângulo de Sierpinski. A mais marcante é que pequenas partes da figura repetem a sua forma como um todo. A segunda é a simplicidade no processo de formação. Por fim o processo de construção é feito de forma repetitiva.

- **CONJUNTO DE CANTOR**

Uma das primeiras figuras citadas em praticamente todas as bibliografias relacionadas à Geometria Fractal é o Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor, desenvolvida por Georg Cantor (1845-1918). Esse fractal primitivo está ligado ao trabalho mais relevante de Cantor – a Teoria dos Conjuntos –, apesar de não ser tão atraente como a maioria dos fractais, possui características matemáticas bastante incomuns.

- **CARACTERÍSTICAS DO CONJUNTO DE CANTOR**

O conjunto é obtido pela repetição de um processo iterativo. Se observarmos partes do conjunto, facilmente percebemos que esses repetem a forma do conjunto como um todo.

- **CURVA DE PEANO**

A Curva de Peano foi batizada em homenagem ao matemático Giuseppe Peano (1858-1932) que descreveu a curva em 1890. Até agora, foram analisadas curvas que se caracterizam pela dimensão entre 0 e 2. Esse fato implica que, independentemente do número de iterações realizadas, estas curvas nunca preencheriam todo o plano. Em oposição a isso, a Curva de Peano possui dimensão igual a 2.

De fato, o interesse matemático de Peano ao construir as primeiras curvas dessa família era exatamente esse – curvas contínuas capazes de preencher completamente o plano.

- **CARACTERÍSTICAS DA CURVA DE PEANO**

Pequenas partes da curva repetem a forma da curva como um todo, ou seja, se fizermos uma ampliação de uma região específica da curva, iremos encontrar uma réplica do fractal como um todo.

CAPITULO 4 COMO TORNAR A APREDIZAGEM DA GEOMETRIA FRACTAL VÁLIDA?

O ensino da geometria no Ensino Fundamental e Médio muitas vezes é vago, verifica-se a abordagem de alguns tópicos em aulas de Matemática, Desenho e Educação Artística, mas muito superficial.

Contudo, percebemos a importância de uma aplicação mais significativa para o assunto, uma vez que o conhecimento da geometria Euclidiana se faz necessário, já que as lógicas utilizadas são amplamente empregadas, divulgadas e aceitas pela humanidade como forma, organização, definição e ensinamento da matemática. Por isso, a geometria Fractal pode ser inserida na grade curricular das escolas, a priori, como estímulo de aprendizagem e facilitação do ensino.

Dessa forma, as novas técnicas são aliadas ao ensino da geometria Euclidiana, de forma que essas novas informações poderão ser introduzidas tanto em atividades paralelas com em exercícios conjuntos. Assim a introdução de metodologias diferenciadas, como por exemplo, os fractais, podem diminuir a resistência que os alunos têm em relação à geometria.

O trabalho aqui apresentado tem como objetivo promover a reflexão sobre o ensino de uma nova geometria, mostrando que existem procedimentos simples que podem ser utilizados para a divulgação e aplicação de um assunto pouco difundido, a Geometria Fractal como complemento ao ensino da matemática.

Assim, se a Geometria Euclidiana nos ajuda a entender o universo em que vivemos através de seu vasto emprego e formulações; a Geometria Fractal nos mostra e faz pensar de modo diferenciado, vendo que o acaso é organizado, que deve ser pensado como solução e não como erro matemático.

A irregularidade das formas não deve ser vista como algo imperfeito, mas sim como obra da natureza, podendo ser encontrada no formato das nuvens, copas e galhos das árvores, cadeias de montanhas, corais e vários outros organismos encontrados na natureza. A

apreciação de uma nova geometria só faz enriquecer e transformar a visão dos estudantes sobre os formatos das coisas que se encontra em nosso entorno.

A ideia de utilizar a Geometria Fractal partiu da necessidade de se explorar uma geometria que se aproxima das formas expostas na natureza. A partir daí conseguimos subsídios para motivar e embasar vários estudos dentro da Matemática, oferecendo recursos para que professores e alunos possam explorar e descobrir novos caminhos no processo ensino aprendizagem.

No ensino fundamental, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), para a área de Matemática, propõe a abordagem de novas metodologias e práticas visando uma aprendizagem significativa, a fim de, buscar as competências mínimas necessárias para a formação básica. Entre eles destacam-se:

A Matemática é componente importante na construção da cidadania;

A Matemática precisa estar ao alcance de todos;

A atividade matemática escolar não é “olhar para coisas prontas e definitivas”;

A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado.

Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem.

Dessa maneira, a prática pedagógica utilizada atualmente no ensino da Matemática procura aproximar cada vez mais os fundamentos teóricos da realidade do aprendiz, correlacionando, para isso, conhecimentos empíricos e aspectos observados no mundo em que vivemos para construção do conhecimento.

Dentro desta perspectiva, trazer para a sala de aula atividades que ao mesmo tempo desenvolvam o raciocínio lógico-matemático e utilizem elementos do mundo concreto do aluno, satisfaz plenamente à expectativa que a metodologia aplicada impõem. É importante ressaltar que as atividades a serem realizadas devem ser planejadas de forma a promover a efetiva participação de todo o grupo, levando, de uma forma cooperativa e homogênea, todos às conclusões esperadas.

A busca da interação entre um novo cotidiano – prático e participativo – e uma organização de conteúdos mais abrangente tornará possível a introdução de teorias desenvolvidas mais recentemente, reforçando a ideia de que alunos precisam experimentar a Matemática por caminhos diferentes. A Geometria Fractal vem facilitar a exploração de tais conceitos matemáticos. Assim, esse trabalho mostra que é possível fazer com que alunos do ensino fundamental e médio tenham um primeiro contato com os fractais através da observação das suas variadas formas e do uso de atividades simples, explorando-as em todos os aspectos geométricos.

4.1 PROPOSTAS PARA O ENSINO DA GEOMETRIA FRACTAL

A Geometria Fractal pode ser inserida no ensino, estimulando os alunos a desenvolver formas não encontrada na Geometria Euclidiana. Métodos conhecidos podem ser demonstrados em exercícios iniciais. Existem alguns procedimentos para se desenvolver estruturas fractais. A construção pode ter como base criações existentes.

Como referência, apresentamos a Curva de Koch, as remoções que criam o triângulo de Sierpinski e o fractal pentagonal de Dürer. Em cada fractal veremos seu processo de construção. A partir disso, o docente terá ferramentas para iniciar um trabalho didático com o referido tema, que neste caso será o próprio processo de obtenção do fractal.

A Curva de Koch é desenvolvida a partir de um segmento de reta. Neste caso o segmento é dividido em partes iguais e inicia-se uma iteração em uma das partes divididas. Nota-se, na Figura 1, que o segmento sofre intervenção na parte central e o desenho é gerado tendo a intervenção como referência.



Figura 1: A Curva de Koch

Fonte: Google imagens

O triângulo de Sierpinski é formado com a remoção de partes da figura. Um triângulo equilátero é dividido em quatro triângulos menores e o triângulo central é removido. Na sequência, os três triângulos resultantes são utilizados para preencher o espaço de um dos triângulos anteriores. A Figura 2 apresenta o processo.



Figura 2: O Triângulo de Sierpinski

Fonte: Google imagens

Uma outra forma de compor um fractal é estabelecida na formação do fractal pentagonal de Dürer. Ao construir um pentágono regular, este poderá ser a base para a construção de outros cinco pentágonos regulares, como observado na Figura 3. As interações são sucessivas, tomando-se como referência o nível anterior apresentado.



Figura 3: Fractal pentagonal de Dürer

Fonte: Google imagens

Fractais do tipo árvore podem ser desenvolvidos com o uso de triângulos. Em um primeiro momento utiliza-se o triângulo retângulo fundamental, com lados na proporção 3, 4 e 5. Sobre seus catetos e sobre sua hipotenusa são construídos quadrados. Com a base formada é possível desenvolver o desenho. A sequência é apresentada na Figura 4.



Figura 4: Fractal tipo árvore

Fonte: Google imagens

As demonstrações servem como auxílio para a obtenção de outros desenhos. Assim, fractais são gerados pela fronteira quando o segmento de reta é dividido e sofre iteração. O procedimento foi mostrado com a Curva de Koch. Na Figura 5, um quadrado tem os seus lados divididos em partes iguais. Na divisão central do segmento surge um “dente” e inicia-se a geração da estrutura.



Figura 5: Fractal gerado pela fronteira

Fonte: Google imagens

Apreciado o procedimento que forma o triângulo de Sierpinski, outras figuras são desenhadas. No exemplo da Figura 6, um quadrado é dividido e algumas partes são extraídas. O resultado da divisão e das extrações é utilizado para compor o fractal. A parte geradora foi colocada nos sete quadrados restantes, resultando em 49 novos quadrados.

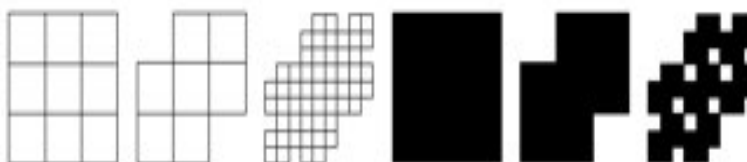


Figura 6: Retângulos transformado em fractal

Fonte: Google imagens

A interação aplicada no fractal pentagonal de Dürer, quando aproveitadas em hexágonos e octógonos, desenvolve novos fractais. A Figura 7 exemplifica as transformações ocorridas em um hexágono regular.



Figura 7: Hexágono transformado em fractal

Fonte: Google imagens

Originar fractais exige uma seqüência lógica de acontecimentos. Um módulo agrupado com outro módulo de mesmo caráter é capaz de formar um fractal. No entanto, há a necessidade de fazer alterações em sua escala e prever a organização das formas no espaço onde a estrutura está se desenvolvendo.

A geometria fractal pode diminuir a resistência que alguns alunos apresentam no estudo da geometria como um todo. Fazer a relação de um desenho gerado com uma forma encontrada na natureza pode ser um exercício muito proveitoso para diminuir a barreira do aluno com a disciplina. A formação de malhas, estudo de simetrias, agrupamentos, ampliação e redução de figura influenciam no desenvolvimento de exercícios semelhantes aos praticados com a Geometria Euclidiana. Porém, eles são realizados tendo em vista as características de formação dos fractais.

Nessa vertente, o professor deve desenvolver junto aos alunos questões desafiadoras envolvendo a construção fractal e auxilia-los a superarem dificuldades que possam surgir. Além disso, devem fazer mediações quando necessárias, levando os alunos a pensar, a construir o conhecimento por meio dos fractais e acompanhar suas explorações. Assim o papel do professor passa de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, mediador, interventor e incentivador da aprendizagem a partir dos tipos de fractais e suas características. Um outro aspecto muito importante é apresentar os fractais no mundo real, favorecendo uma visão extra-escolar, é o que veremos na sessão seguinte.

4.1.2 FRACTAIS NA VIDA REAL

Já vimos que a geometria é a parte da Matemática que estuda as medidas e as formas, tais formas podem ser facilmente observada a natureza sob os mais diferentes aspectos, muitas delas são quebradas, retorcidas e estranhas; mas nem por isso deixam de ser belas. Devido a essas características foram apresentados os fractais como forma geométrica irregular ou fragmentada que são geralmente semelhantes entre si e independentes de escala descrevem muitos elementos do mundo real, que não correspondem a figuras geométricas simples.

Devido a tal pressuposto, o estudo dos fractais não deve se restringir apenas ao campo matemático, mas também deve ser aplicado em outras áreas do conhecimento tais como: Meteorologia, Hidráulica, Física, Geologia e Geografia, Economia e Lingüística. Os linguistas começaram a aplicar a teoria dos fractais na evolução dos dialetos. Na Medicina reconhecem-se características fractais em fenômenos cardíacos e pulmonares.

Não é preciso ir tão longe para encontrar exemplos de fractais. Na natureza encontramos a couve-flor e os brocolos, as redes hidrográficas, as linhas de costas dos países, as nuvens e as rochas entre outros que são autênticos “fractais vivos”. Figuras que no século passado, eram vistas como anomalias matemáticas, hoje têm um papel notável na interpretação da realidade. Vejamos alguns fractais presentes no mundo real.

O reino vegetal é uma das fontes mais ricas de estruturas fractais. Vejamos algumas delas:



Figura 8: Couve flor

Fonte: Google imagens

As estruturas fractais aparecem igualmente nas formações geológicas e outros fenômenos naturais:



Figura 9: Relâmpago

Fonte: Google imagens

Até mesmo no reino animal as estruturas fractais estão presentes.

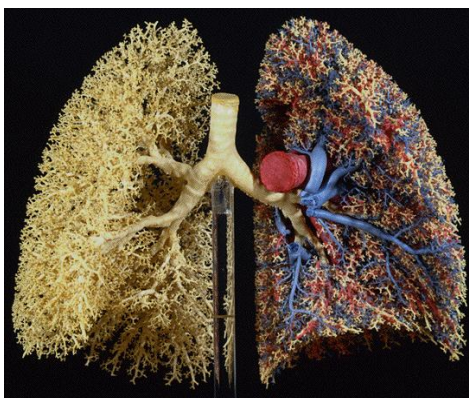


Figura 10: Pulmões Humano

Fonte: Google imagens

Dessa maneira, apresentar ao aluno essa nova geometria parece bastante significativa, pois perceberá que as formas presente em seu redor nem sempre apresentam um aspecto regular como a geometria tradicional impõe.

4.2 APLICAÇÕES DOS FRACTAIS EM SALA DE AULA (METODOLOGIA DE APLICAÇÃO DA PROPOSTA)

Para enfatizar melhor o exposto neste trabalho, o grupo realizou uma pesquisa de campo com turmas da 8ª série da Escola Estadual Ruth Bezerra, cujo objetivo proposto foi o reconhecimento de fractais pelos alunos.

Abordaremos os conceitos de proporção, simetria, congruência, rotação, semelhança, mediatriz e generalização. Além disso, acreditamos que este nível de escolaridade é bastante propício à realização deste tipo de experimento.

Em sua classificação sobre os estágios de desenvolvimento da criança, Piaget afirma que é no operatório formal (12 anos em diante) que a representação permite a abstração total, não se limitando ao imediato ou às relações pré-existentes. Neste período, o indivíduo é capaz de pensar em todas as relações possíveis logicamente, buscando soluções a partir de hipóteses e não apenas pela observação da realidade. As estruturas cognitivas alcançam seu nível mais

elevado, tornam-se capazes de aplicar o raciocínio lógico a todas as classes de problemas. (BARBARIZ, 1999).

Nessa atividade apresentamos uma abordagem prática na qual pudemos experimentar uma forma de se trabalhar a matemática de maneira construtiva e significativa, por meio de simulações do mundo real e, principalmente, com a possibilidade de utilizarmos um experimento para projetar novas situações de aprendizagem, não nos comprometendo com o resultado e sim com o processo. O desenvolvimento e a possibilidade de novas descobertas a partir de um desafio que foi lançado e aceito pelos aprendizes.

Atividade consiste em apresentar aos alunos a geometria fractal, onde deverão ser utilizados ficha de instrução e construção (para registro das percepções dos alunos) e ficha resumo (para um breve relato do assunto). Sendo composta das seguintes etapas:

No 1º momento foi feita uma introdução teórica aos alunos sobre um pouco da origem da geometria, apresentando o conceito de Geometria Fractal, com um breve relato histórico. Para, desta forma, enfatizar o assunto “fractal”.

Esta etapa foi importante, pois era interessante que os alunos conhecessem um pouco sobre a história do fractal, a qual é tão pouco estudada e assim despertar a curiosidade e o interesse.



Figura 11: Turma 811 Introdução do conceito da geometria fractal

Fonte: arquivo próprio

No 2º momento, utilizando um datashow para melhor compreensão do conteúdo, apresentamos aos alunos slides, com o objetivo de fazer o aluno perceber a aplicação dos fractais, ou seja, onde estão presentes na natureza como, por exemplo, plantas, frutas, oceano, reino animal. Assim também apresentamos algumas aplicações em nosso cotidiano.



Figura12: Turma 811 Apresentação dos slides

Fonte: arquivo próprio

No 3º momento, ao analisarmos o grau de aproveitamento da aula ministrada, criamos uma pequena atividade, na qual os alunos deveriam identificar e listar alguns objetos presentes dentro e fora da sala de aula, associando as suas formas às das figuras geométricas euclidianas conhecidas;



Figura13: Turma 831 comparação de dados coletados dentro de sala de aula

Fonte: arquivo próprio

As etapas anteriores serviram de base para abrimos a seguinte discussão: As figuras associadas a objetos observados na natureza têm formas geométricas euclidianas perfeitas?

Assim, a partir das respostas dos alunos, os mesmos fizeram a correlação aproximada das figuras indicada por eles, demonstrando que eram semelhantes, mas não eram iguais.



Figura14: Turma 831 abertura da discussão.

Fonte: arquivo próprio.

No 4º momento foi aplicada uma atividade de construção de objetos euclidianos para analisar o conceito que o aluno adquiriu sobre fractais. Para isso propomos a construção de um fractal a partir de um quadrado e um triângulo equilátero (triângulo de Sierpinski), onde os alunos perceberam algumas das características dos fractais como, por exemplo, a auto-semelhança e a complexidade infinita.

Nesta atividade foi notório que houve uma melhor percepção dos alunos em relação aos fractais, pois os mesmos além de trabalhar com a questão da visualização, também colocaram em pratica o conceito adquirido através da construção, e desta forma passaram a conhecer outra geometria.

Para a realização desta atividade foi utilizado régua, esquadro, borracha, lápis e papel. Abaixo, estão algumas das atividades realizadas pelos alunos:

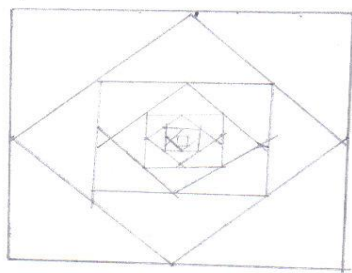
Ilustração 1

$\Rightarrow$ O que é FRACTAL?

auto semelhança ; # complexidade infinita $\rightarrow$ "processo gerador".

ATIVIDADE

1. Construa um fractal a partir de um quadrado.



2. Construa um fractal a partir do triângulo equilátero.

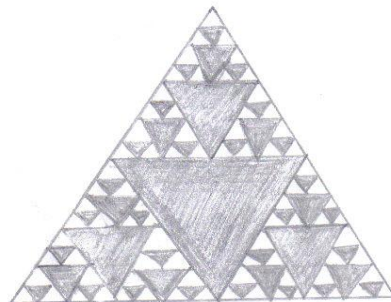
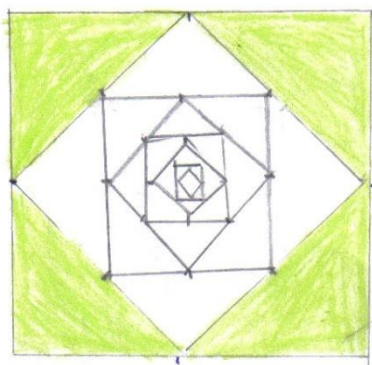
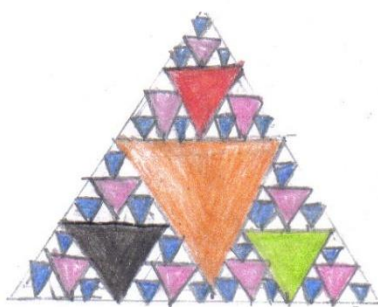


Ilustração 2

O que é um fractal
auto semelhança
complexidade infinita $\rightarrow$ "Processo gradual"
ATIVIDADE



2º construa um fractal a partir de um triângulo equilateral



Marissa Tayane
811

Ilustração 3

Professor:

Aluna: Maria das Graças Abreu Figueiredo. Nº 17

Turma 811

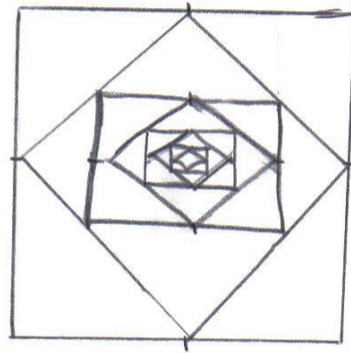
19/11/09
Quinta-feira.

⇒ ^o que é um fractal?

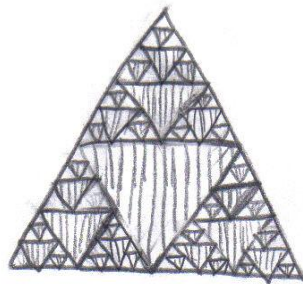
* alta semelhança

* Complexidade infinita → Processo iterador.

1. Construa um fractal a partir de um quadrado. ^{Atividade.}



2. Construa um fractal a partir de um triângulo equilátero.



4.3 RESULTADOS E DISCURSÕES

O objetivo da atividade proposta foi apresentação da Geometria Fractal para que os alunos pudessem sentir a necessidade de uma nova geometria, a fractal.

A atividade aplicada exigiu o pensamento intuitivo dos alunos para a identificação da necessidade de outra geometria, não euclidiana, que pudesse descrever as formas encontradas na natureza, já que, as demais construídas pelo homem, têm reconhecidamente formas euclidianas.

Para esta identificação foi solicitado aos alunos que listasse alguns objetos observados dentro e fora do ambiente da sala de aula, relacionando-os às formas euclidianas. A seguir, para melhor compreensão, tabelamos os objetos citados pelos alunos com suas respectivas formas geométricos (figuras associadas):

ATIVIDADES DE OBSERVAÇÕES DAS FORMAS GEOMÉTRICAS

AMBIENTE OBSERVADO			
Em sala de aula		Fora da sala de aula	
Objetos Observados	Figuras Associadas	Objetos Observados	Fig.Associadas
Quadro	Quadrado/Retângulo	Estrela do mar	Triângulo
Armário	Quadrado/Retângulo/Paralelepípedo	L de refrigerante	Cilindro
Caderno	Quadrado/Retângulo	Sol	Esfera
Dado	Cubo	Bola	Círculo/Esfera
Caneta	Cilindro	Semáforo	Retângulo
Lâmpada	Cilindro	Pão bola	Círculo
Computador	Quadrado/Retângulo	Copo	Cilindro
Fio elétrico	Cilindro	Pia	Paralelepípedo
DVD	Quadrado/Retângulo	Televisão	Retângulo/Cubo
Bandeira	Retângulo	Lata de óleo	Cilindro
Lápis	Cilindro	Couve-Flor	Círculo
Fichário	Quadrado	Montanhas	Círculo
Régua	Retângulo	Vaso	Esfera
Livro	Retângulo	Borboleta	Triângulo
Batom	Cilindro	Olho	Esfera
Apontador	Retângulo	Peteca	Esfera
Cartazes	Quadrado	Poste	Cone
Lixeira	Cone	Celular	Paralelepípedo
Data show	Paralelepípedo	Planta	Triângulo
Bolsa	Paralelepípedo	Nuvem	Fractal
Mesa	Retângulo	Ônibus	Retângulo
Borracha	Quadrado/Retângulo	Muro	Retângulo
Pincel	Cilindro	Bueiro	Cilindro
Pendrive	Retângulo	Flor	Círculo
Janela	Quadrado	Torres	Triângulo
Porta	Retângulo	Pneu	Círculo
Papel	Retângulo	Laranja	Esfera
Mochila	Retângulo/ Paralelepípedo	Maçã	Esfera
Roda	Círculo	Samambaia	Triângulo/fractal
Cadeira	Quadrado/Retângulo	Planeta	Esfera
Ar Condicionado	Quadrado/Retângulo	Abacaxi	Hexagonal

A pesquisa abrangeu um total de 44 alunos da 8ª série do ensino fundamental da Escola Estadual Ruth Almeida Bezerra.

Ao fazer a análise do resultado de nossa investigação através de gráficos, retiramos uma mostragem dos dez objetos mais citados dentro e fora do ambiente escolar. O resultado desta investigação foi à seguinte:

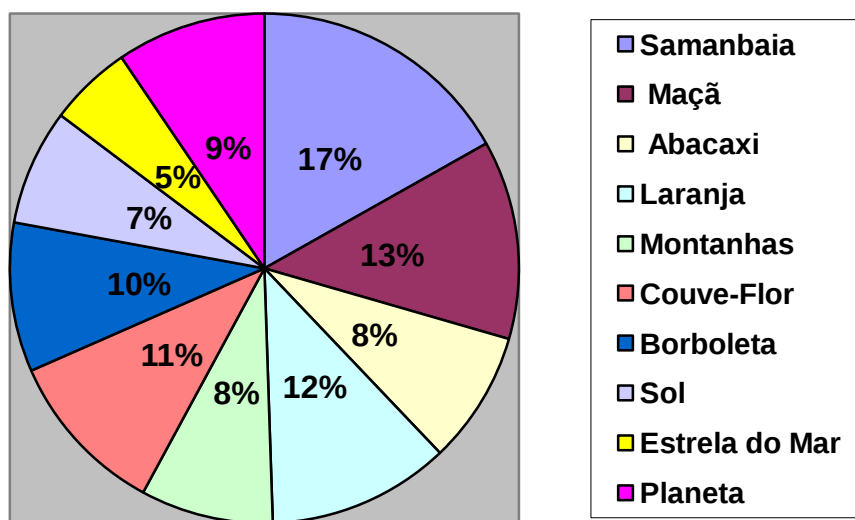


Figura 15: Objetos Observados Fora de Sala de Aula

Fonte: arquivo próprio.

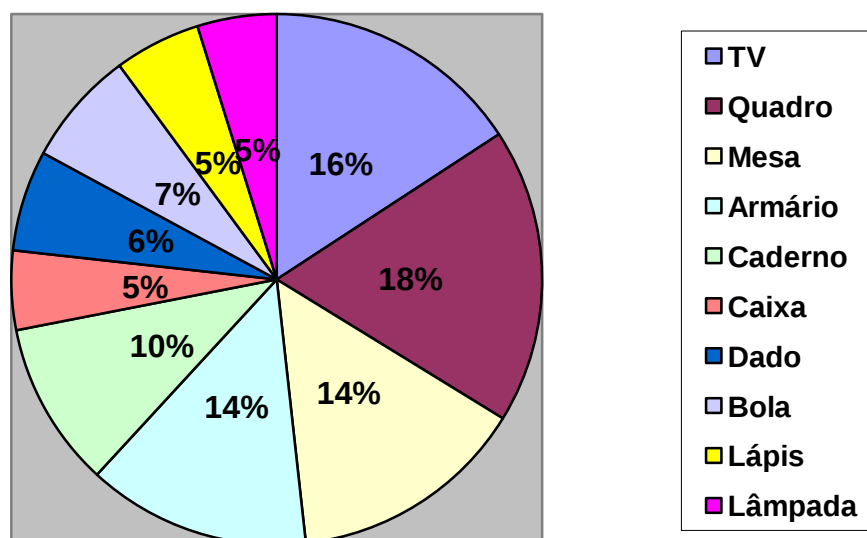


Figura 26: Objetos Observados em Sala de aula

Fonte: arquivo próprio

Analisando os dados coletados percebemos que a maioria dos alunos teve pouca percepção espacial, pois, relacionou a geometria espacial com a plana, como exemplo: tijolo com retângulo, apontador com retângulo, caixa com quadrado.

Assim percebemos que os alunos analisavam o objeto não como o todo e sim por apenas uma de suas dimensões. Além disso, os objetos presente na natureza eram analisados de forma regular, sem levar em conta suas imperfeições, isto é, a maioria associou as figuras a formas euclidianas conhecidas.

Podemos observar ainda que boa parte dos alunos encontrou dificuldade no momento da observação das formas geométricas, pois acreditamos que eles estudam uma matemática muita abstrata.

Dessa forma, percebemos a necessidade de uma nova visão para o estudo da matemática e, conseqüentemente, da geometria. A implantação da geometria fractal pode ser um ponto favorável para diminuição dessa problemática.

Após a observação e a listagem dos objetos, foi aberta uma discussão em sala de aula onde se analisou os principais pontos da observação. Os alunos perceberam a imperfeição das formas geométricas encontradas na natureza pelo fato de possuírem “... *irregularidade própria dela mesmo*” e, ainda, que “ *As formas euclidianas são criadas pelo Homem, são fruto de generalizações*”.

O primeiro objetivo da atividade foi atingido. Em seguida, foram feitas as considerações finais, ressaltando a importância da descoberta que os alunos próprios evidenciaram: a necessidade de uma "outra" geometria que descreva este "quase" euclidiano observado. Além disso, ressaltamos a característica de auto-similaridade dos fractais, exemplificada pela couve-flor, brócolis e galhos das árvores como alguns exemplos de fractais mais simples encontrados na natureza.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho buscou-se uma outra abordagem para o ensino de geometria, analisando as dificuldades encontradas pelos alunos em relação à aprendizagem. Verificamos que o principal entrave está relacionado à falta de compreensão dos seus conteúdos por parte dos estudantes e às vezes pelos próprios professores, o que dificulta o seu ensino, uma vez que o aluno adolescente não percebe o papel que a Matemática desempenha na construção de todo o edifício do conhecimento humano.

Com isso analisamos alguns fatores que influem no aprendizado da Matemática e por extensão da Geometria que são: a participação dos alunos na sala de aula, os meios e as técnicas usadas para o estudo da disciplina. Para que isso ocorra professor e alunos devem estabelecer uma relação de intercâmbio de conhecimentos e experiências, numa busca recíproca do saber. Dessa maneira, devem-se buscar técnicas de ensino capaz de estimular o pensamento crítico do aluno.

Destacamos que a aprendizagem em Matemática e, por conseguinte em Geometria, está relacionada à apreensão do significado. Assim, o tratamento dos conteúdos deve-se dá numa abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. Neste contexto buscamos subsídios nas teorias de Ausubel, Vygotsky e Piaget.

O professor preocupado com a aprendizagem de seus alunos deve está sempre empenhado em utilizar procedimentos que se mostrem eficientes. Tais procedimentos devem ser facilitadores da integração entre o conteúdo em estudo, as experiências e conhecimentos prévios dos alunos. É fundamental que se reveja toda a estrutura que permeia o processo ensino aprendizagem de Geometria em todos os níveis de ensino para propor metodologias adequadas.

Esse trabalho consiste numa proposta metodológica para o ensino da geometria que, dentre outros objetivos, busca orientar o professor para mudar sua prática pedagógica e facilitar o processo ensino-aprendizagem. Para isso o professor deve estar ciente que o aluno não é uma máquina de pensar, arquivo de memória que, mecanicamente, seguir passos. Mas, pode e deve desenvolver seu próprio raciocínio naturalmente, adquirindo habilidades para pensar com independência.

Para tanto, nosso trabalho busca sugerir uma metodologia de ensino, cujo foco maior é diminuir esta barreira na aprendizagem da geometria e também para divulgar uma “nova” geometria, a dos fractais, tema ainda que é pouco difundido no ensino. Trabalhar com os fractais foi um processo que exigiu muita cautela, pois, procurou-se a melhor maneira de aplicá-los de forma que contribuísse no processo de ensino e que fugisse das aulas tradicionais.

Dessa forma, era importante que a metodologia utilizada estivesse vinculada a três elementos importantes: “o ‘saber fazer’, o ‘como fazer’ e ‘para que fazer’ da atividade intelectual” (MANTOAN AT AL: 1998).

A proposta metodológica foi embasada em textos de apoio de vários teóricos e a experiências práticas em sala de aula. As experiências ocorreram com aplicação de atividades para turmas da 8ª série do ensino fundamental envolvendo o assunto. O objetivo era propiciar autonomia ao estudante, para que ele pudesse ser construtor de seu próprio conhecimento. Além de mostrar que a geometria dos fractais pode ser inserida no ensino, a princípio como estímulo para aprendizagem.

Os resultados obtidos nessa experiência foram muito proveitosos. Pudemos verificar não somente um aumento na motivação para o aprendizado, mas, sobretudo, a possibilidade de se trabalhar vários conceitos matemáticos de forma simultânea e muito mais leve e proveitosa. Assim, os alunos chegaram a suas próprias conclusões sobre o tema. Os fractais foi uma ferramenta importantíssima, pois, foi a partir deles que os experimentos puderam ser feitos, com isto, atingir o objetivo desejado.

No decorrer deste trabalho os estudantes tiveram a oportunidade de entender a relação entre conceitos matemáticos e os fractais. O que os levou a reformular o processo de busca pelo conhecimento.

Para finalizar, esperamos ter contribuído de alguma forma para melhorar o quadro para o ensino da Geometria, fornecendo pistas para que outras situações sejam exploradas, estimulando os professores a repensarem suas “práxis” pedagógica.

REFERÊNCIAS

- AUSUBEL, D. P. A aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1968.
- BARBOSA, R. M. Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- BARBARIZ, Taís Alves Moreira. Fractais na Sala de Aula. UERJ. 1999.
- BIANCO, K. F. Fractais Geométricos: características, construção e implementação. Curitiba, a ser apresentada em 20 out. 2007. Monografia de Especialização para professores de Matemática, UFPR.
- BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. PCN+: Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.
- BARBARIZ, Taís Alves Moreira. Fractais na Sala de Aula. UERJ. 1999.
- CASTELNUOVO, Emma, BARRA, Mario (1989) Matematica Nella Realtà. Torino: Editore Boringhieri.
- COLL,C.(1998). Aprendizagem e o Ensino de Procedimentos. In: COLL,C;POZO,J.I.;SARABIA,B; VALLS,E. Os Conteúdos na Reforma. Ensino e Aprendizagem de Conceitos, Procedimentos e Atitudes. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médicas.
- D'AMBROSIO, Ubiratan: Educação Matemática da Teoria à Prática : São Paulo. Papirus Editora, 1997.
- EVES, Howard (1992) Tópicos de história da matemática para uso em sala de Geometria. São Paulo:Atual.
- FEDER, J. Fractals. N. Y.: Plenum Press, 1988.
- FREUDENTHAL,H.(1973). Mathematics as an Educational Task, D.Reidel Publish Company/Dordrecht – Holland
- GERDES, Paulus (1991b) Cultura e o despertar do pensamento geométrico. Maputo, Moçambique: Instituto Superior Pedagógico.
- GERDES, Paulus (1986) Sobre o despertar do pensamento geométrico. Dresden (RDA): Instituto Superior Pedagógico Karl Friedrich Wander. (Tese de Doutorado em Filosofia).
- GERDES,P.(1992).Sobre o despertar do conhecimento geométrico. Curitiba -UFPR.
- GUEDES. E. M. Geometria fractal: que geometria é essa?São Leopoldo, 1998.
- GLEICK, James. Caos: a construção de uma nova ciência. Lisboa: Gradiva, 1994.

KAMII,C.(1994). Aritmética: Novas Perspectivas-Implicações da Teoria de Piaget. tradução de Marcelo Cestari- Campinas: Papirus.

KERN, Jane F. and MAUK, Cherry C.: Exploring Fractals - a Problem-solving Adventure Using Mathematics and Logo: The Mathematics Teacher, March 1990.

LORENZATO, Sergio (1976) Subsídios metodológicos para o ensino da matemática: área de figuras planas. Campinas: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Tese de Doutorado em Educação).

LORENZATO, S.(1993). Por que não ensinar geometria? A Educação Matemática em Revista - SBEM -,1º Semestre.1995. nº 4 .3-13.

MACEDO, L.(1994). Desafios construtivistas ao professor. Construtivismo em revista.Idéias-São Paulo:FDE

MANDELBROT, Benoit: Fractals: Form, Chance and Dimension W. H. Freeman and Company, San Francisco, USA , 1977.

MANDELBROT, Benoit: The Fractal Geometry of Nature: W. H. Freeman and Company, San Francisco, USA, 1982.

MANDELBROT, B. P. The Fractal Geometry of Nature. N. Y.: Freeman, 1977. Objetos Fractais. Lisboa: Gradiva, 2004

MANTOAN, M. T. E, Martins, M. C. e MISKULIN, R. G. S. (1998) “Análise Microgenética de Processos Cognitivos em Contextos Múltiplos de Resolução de Problemas”; In.: Revista Brasileira de Informática na Educação; No. 3; ISSN: 1414 5685; págs. 27-44; setembro

MENEZES, M. S., CUNHA JR, H. A. Formas geométricas e estruturas fractais na cultura africana e afrodescendentes In: DE PRETO A AFRODESCENDENTE: trajetos de pesquisa sobre o negro, cultura negra e relações étnico-raciais no Brasil ed. São Carlos:EduFSCar Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2003, p. 307-320.

MOREIRA, Marco Antonio. Aprendizagem significativa. Brasília: Ed. da UnB, 1998

MÜLLER, I. Tendências atuais de Educação Matemática. unopar Cient., Ciênc. Hum. Educ. Londrina, v. 1, n. 1, jun. 1990.

MURR, et al. Fractais: propriedades e construção. Curitiba: Prodocência UFPR,2007.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS. Matemática: 1a à 4a séries. Brasília-DF, 1998.

PAVANELLO, Regina Maria (1993) O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica. Campinas: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Dissertação de Mestrado em Educação)

PEREZ, Geraldo (1991) Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares. Campinas: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Tese de Doutorado em Educação).

PIAGET, J. “A Práxis na Criança”. In.: Piaget. Rio de Janeiro: Forense, 1971.

PIAGET, Jean. Para onde vai a educação? Rio de Janeiro, Olympio – Unesco, 1973.

PIAGET, J. e GRECO, P. Aprendizagem e conhecimento. São Paulo: Freitas Bastos, 1975.

PIAGET, Jean. A equilibração das estruturas cognitivas. Rio de Janeiro : Zahar, 1967.

PIAGET, Jean e INHELDER, Bärbel. A psicologia da criança. São Paulo : DIFEL, 1982.

PIAGET, J.;INHELDER B.(1993). A representação do espaço na criança. Tradução de Albuquerque.B.M., Porto Alegre: Artes Médicas

PIAGET, Jean. O diálogo com a criança e o desenvolvimento do raciocínio. São Paulo: Scipione, 1997.

PIMENTA, Selma Garrido. O Papel do Estágio na Formação do Professor. São Paulo:Cortez, 1996.

POZO,J,I.(1998). Aprendizagem e o Ensino de Conceitos In: COLL,C; POZO,J,I;

SALLUM, E. M. Fractais no ensino médio. Revista do Professor de Matemática,SBM, São Paulo, n.º 57, p. 1-8, maio/ago. 2005

SALVADOR, Cesar Colle et al. Psicologia do ensino. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

SBEM-ANOI-Nº1-2º Semestre 1993

SBEM-ANOI-Nº31-2º Semestre 1994

SBEM-ANOI-1ºSemestre 1995

SERRA, C. P. e KARAS, E. W. Fractais Gerados por Sistemas Dinâmicos Complexos. Curitiba: Champagnat, 1997.

SMOLKA,A.L.(1995). Conhecimento e produção de sentidos na escola: a linguagem em foco. Cadernos CEDES.Nº35.41-51

TUNES,E.(1995). Os conceitos científicos e o desenvolvimento do pensamento verbal.Cadernos CEDES.Nº35. 29-39

VYGOTSKY, L. S. A Formação Social da Mente. São Paulo, Martins Fontes, 1991

VYGOTSKY, L. S. Pensamento e Linguagem. São Paulo, Martins Fontes, 1993

VYGOTSKY,L.S.(1995).Pensamento e linguagem. Tradução de Jeferson Luiz de Carvalho. São Paulo: Martins Fontes

WADSWORTH, Barry. Inteligência e Afetividade da Criança. 4ª Ed. São Paulo, Enio Matheus Guazzelli, 1996.