UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO E GRADUAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

A EVOLUÇÃO DOS MODELOS MATEMÁTICOS PARA DINÂMICAS POPULACIONAIS

MACAPÁ-AP
2011

DIANNE DE ARAÚJO DA SILVA
WILSON VAGNER DA SILVA CARDOSO

A EVOLUÇÃO DOS MODELOS MATEMÁTICOS PARA DINÂMICAS POPULACIONAIS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao colegiado de Matemática da Universidade Federal do Amapá, como parte das exigências para a obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco.

MACAPÁ-AP
2011

Dianne DE Araújo da silva

Wilson Vagner da Silva Cardoso

A EVOLUÇÃO DOS MODELOS MATEMÁTICOS PARA DINÂMICAS POPULACIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para obtenção do titulo de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr.Guzmán Isla Chamilco

Prof. Dr.José Walter Cárdenas Sotil

Prof. Dr. Erasmo Senger

Avaliado em: ____/____/____

MACAPÁ-AP

2011

RESUMO

Neste trabalho nosso objetivo é mostrar o estudo da Evolução de Modelos Populacionais, bem como sua importância e também o que os diferencia entre si e de que forma essa diferença tem influência para com a evolução destes.

Primeiramnte será trabalhado o modelo de Malthus, que segundo sua teoria há uma falta de concordância entre o poder de reprodução da espécie humana e a capacidade de produção dos meios de subsistência e que o excedente deve desaparecer. Sua formulação matemática indica que a variação relativa da população é constante no decorrer do tempo. Em seguida apresentaremos o modelo Logístico Contínuo (Verhurst), o modelo de Verhurst supõe que uma população, vivendo num determinado meio, deverá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar. A equação incorpora a queda de crescimento da população que deve estar sujeita a um fator inibidor de proporcionalidade; o modelo de Vrhurst é, essencialmente o modelo de Malthus modificado, considerando a taxa de crescimento como sendo proporcional à cada instante. Também será estudado o modelo de Gompertz que utiliza a taxa de inibição proporcional ao logaritmo desta variável, ou seja, a taxa de crescimento é grande no início do processo mudando rapidamente para um crescimento mais lento. E por último Montroll o qual propôs um modelo geral para traduzir o crescimento assintótico de uma variável, levando em conta que o posicionamento da variação máxima pode ser qualquer valor entre a população inicial e o valor limite finito de uma população. O principal objetivo deste modelo geral é propor diferentes formas possíveis de decrescimento das taxas de variação. O estudo dos modelos será feito através de EDO, LIMITES, DERIVADAS E INTEGRAIS para as demonstrações das equações, e para os gráficos utilizaremos como ferramenta de apoio o programa Modellus.

ABSTRACT

Our present purpose is show the study of the Evolution of Population Models, as well as its importance and what differentiates them from each other and how this difference has influence with these developments. First will be the working model of Malthus, who according to his theory there is a lack of agreement between the power of reproduction of the human species and production capacity of the means of subsistence and the surplus will disappear. His mathematical formulation indicates that the relative variation of the population is constant in over time. After, we present the Continuous Logistic model (Verhurst), the Verhurst model suppose that a population, living in a certain circle, will grow to a maximum sustainable limit, in other words, tends to stabilize. The equation incorporates the decline of population growth that must be subject to an inhibitory factor of proportionality; the Verhurst model is, essentially the Malthus model changed, considering the growth rate as being proportional to each moment. Will also study the Gompertz model which uses the rate of inhibition proportional to the logarithm of this variable, in other words, growth rate is high in the beginning of this process, changing fast to slower growth. And finally, Montroll, which proposed a general model to translate the asymptotic growth of a variable, considering that the position of the maximum variable can be any value between the initial population and the threshold of a finite population. The main objective of this general model is propose different possible ways of decreasing rates of variables. The study of the models will be done through "EDO, LIMITES, DERIVADAS E INTEGRAIS"to demonstration the equations, and the graphics will use as a tool to support the program Modellus

Agradecimentos

A Deus, pela vida, pelas bênçãos, proteção, por seu Filho Jesus Cristo.

Ao meu orientador professor Gúzman Eulálio Isla Chamilco , pelo apoio, dedicação e confiança.

A todos os professores, pela *ínfima ou suprema* colaboração em nosso aprendizado.

Aos meus colegas de graduação, pela *integração contínua* neste intervalo de $[2007, 2011]$.

Aos nossos pais e meus irmãos, que sempre torceram e oraram por nós de forma *infinitezimal*.

A todos os nossos amigos pelas palavras de apoio e incentivo.

E a todos que participaram direta ou indiretamente deste trabalho, em especial, os primeiros *mestres* da turma de 2007.

Agradecemos a todas as pessoas que nós apoiaram. Em especial, nossos pais que confiaram em nossos objetivos e sonhos.

Educando as crianças de hoje não precisaremos castigar os homens de amanhã.

Pitágoras de Samus.

Sumário

1 Introdução **3**

2 Definições **7**

2.1 crescimento assintótico 7

2.2 taxa 7

2.3 Células Meristemáticas 8

2.4 Ponto de Inflexão 8

2.5 Separação de variáveis 8

2.6 Logaritmo 8

2.7 Limite 9

2.8 Limites Laterais 9

2.9 Derivada 10

2.10 Integral 13

2.11 Fração Parcial 15

2.12 Mudança de Variável na Integral 15

3 Modelos Matemáticos **17**

3.1 Modelo de Malthus 17

3.2 Modelo de Verhulst 19

3.3 Modelo de Gompertz 23

3.4 Modelo de Montroll 26

4 Aplicação **30**

Considerações Finais **32**

Referências Bibliográficas **33**

Lista de Figuras

3.1 Crescimento populacional segundo Malthus 18

3.2 Curva logística de Verhulst com $P_0 < P_\infty$, $P_0 > P_\infty$, $P_0 = P_\infty$ 23

3.3 Curva de Gompertz com $P_0 < P_\infty$, $P_0 > P_\infty$, $P_0 = P_\infty$ 26

3.4 Solução do modelo de Montroll com $azul(\lambda = 1.5; \alpha = 2; P_0 = 1; P_\infty = 5), vermelho(\lambda = 2; \alpha = 0.1; P_0 = 10; P_\infty = 50), verde(\lambda = 0.1; \alpha = 10; P_0 = 15; P_\infty = 25)$ 29

4.1 curva logística de MALTHUS e VERHULST 31

4.2 Fonte IBGE: Dados reais ,Pop.Malthus , Pop. Verhulst 31

Capítulo 1

Introdução

Inúmeras são as teorias que tratam de evolução, a começar pela do próprio universo (BIG BANG). Partindo deste princípio, todas as ciências utilizam-se da evolução histórica para elucidar determinados estudos, e como já era de se esperar, até mesmo as idéias do homem tendem a seguir tais princípios evolutivos.

Num mundo contemporâneo, quase que a totalidade dos conceitos e definições, estão atrelados a sua evolução histórica e no que diz respeito a dinâmica das populações especificamente, temos como objeto de estudo os modelos matemáticos, que apesar de ainda serem bastante rejeitado nos ramos da biologia, hora porque não contemplam todas as variáveis observadas e também por serem esquematizados antes ou independentemente de analises dos fenômenos biológicos. Ainda assim é de se esperar que essa ferramenta matemática possa atingir tamanha relevância na biologia, assim como se tornou indispensável na física; Uma vez que podemos dizer que ela ainda esta em seu estagio embrionário e que atualmente tem sido cada vez mais utilizada com entusiasmo por jovens cientistas em suas pesquisas. Podemos citar o século XVII como data de inicio do processo evolutivo dos modelos matemáticos para dinâmica populacional, mais precisamente no ano de 1798 e não poderíamos começar estes estudos sem antes falar de Tomas Robert Malthus (1766-1834), cujos trabalhos possibilitam a abertura de novos caminhos para que outros estudiosos os aperfeiçoassem com a implementação de modelos matemáticos mais precisos que foram e continuam sendo de extrema importância para estudos demográficos, e no campo das políticas públicas, também exerce papel fundamental no estudo das forças e fenômenos que regem a interação entre a população e seu meio. Através do estudo do envelhecimento, dos fluxos migratório, do crescimento populacional, das dinâmicas fa-

miliares e das projeções populacionais.A ciência demográfica auxilia as ações dos órgãos tomadores de decisões, responsáveis pela implantação de políticas públicas que visem a melhoria das condições sócio-econômicas da população.[1]

O inglês Thomas Robert Malthus, nascido em Rookery, Surrey, no dia 14 de fevereiro de 1766, trabalhou como professor de história e economia política em um colégio das companhias das Índias chamado EAST ÍNDIA COMPANY COLLEGE, também foi estatístico, demógrafo e estudioso das ciências sociais, Malthus foi pastor anglicano. Aos dezoito anos de idade, ele foi admitido na JESUS COLLEGE da universidade de Cambridge. Lá estudou matemática, latim e grego, ao mesmo tempo que recebia sua formação sacerdotal.[3]

Em seu modelo matemático, Malthus não considerou, que vivemos em um sistema biológico fechado e, por isso, toda a população seria forçada a encontrar limitações, mantendo-se assim, estável em um limite máximo de sobrevivência. Já por volta de 1838, a limitação de recursos estudada por Pierre François Verhulst é incorporada ao modelo de Malthus gerando com isso um modelo que ficara conhecido como equação do crescimento populacional ou modelo logístico de verhulst.

Pierre François Verhulst, nascido em 28 de outubro de 1804 em Bruxelas, Bélgica, matemático e doutor na teoria dos números da universidade de Gante. Em 1825 iniciou seus estudos de filosofia clássica, mas logo interessou-se pela matemática.Por algum tempo Verhulst, foi muito engajado politicamente, tendo mesmo por ocasião, uma estada em Roma em 1830, tentando convencer o Papa de conceder uma constituição aos estados da igreja. Teve atividade política também por ocasião da resolução Belga de 1830 e da invasão Holandesa em 1831. Verhulst morreu dia 15 de fevereiro de 1849 em Bruxelas , Bélgica.[4]

Outro estudioso que veio a contribuir de forma significativa no processo de evolução dos modelos foi Gompertz, isso porque assim como verhulst, ele admite que a população esta sujeita a uma inibição no seu crescimento, sendo que para isso ele utiliza uma taxa de crescimento proporcional ao logaritmo da variável. O inglês Benjamin Gompertz, nasceu em 5 de março de 1779 foi um matemático e atuário judeu, que comprovou que a taxa de mortalidade cresce geometricamente. Gompertz desenvolveu os principais estudos sobre mortalidade do século XIX. Em reconhecimento a muitos de seus estudos, no ano de 1819, tornou-se membro da sociedade real de Londres. Em 1825, no estudo On the

Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies,(Na natureza da função expressiva da lei de mortalidade humana, e em um modo novo de determinar o valor de contingências de vida) apresentou uma lei que descrevia o crescimento geométrico da taxa de mortalidade. Este estudo apresentou um avanço em relação aos estudos de Thomas Malthus, voltado ao cálculo de anuidades e seguros contra morte. Gompertz morreu na cidade de Londres, onde nasceu no dia 14 de junho de 1865. O modelo de Gompertz encaixasse perfeitamente para demonstrar o crescimento celular em plantas, bactérias, tumores etc. isso porque no inicio todas as células são meristemáticas e que num curto período de tempo perdem essa propriedade, ou seja, a taxa de crescimento dessas células, é muito grande no inicio e tendem a diminuir rapidamente .[5]

Em 1971 surge no campo da dinâmicas populacionais, com um aprimoramento do modelo de verhulst o italiano Elliott Waters Montroll, que propôs um modelo geral para traduzir o crescimento assintótico de uma variável, levando em conta que a variação máxima pode ser qualquer valor entre a população inicial e a população limite. Montroll nasceu no dia 4 de maio de 1916 em Pittsburgh, Pennsylvania, e recebeu a educação escolar elementar e alta dele nas Escolas públicas de Dormont. Em 1933 ele entrou na Universidade de Pittsburgh e em 1937 ele recebeu um grau de BS em Química. De 1937 até as 1939 ele era um assistente diplomado no Departamento de Matemáticas da Universidade de Pittsburgh e durante o primeiro semestre do calendário escolar 1939-1940 ele levou a cabo, pesquisa no Departamento de Química de Universidade de Columbia. Ele foi premiado Ph.D em matemáticas na Universidade de Pittsburgh em 1939, com uma tese Algumas Notas e Aplicações da Teoria de Valor Característica de Equações Integrantes, nas quais ele aplicou equações integrantes ao estudo de gases imperfeitos.[6]

Neste trabalho serão apresentados os quatro primeiros modelo matemáticos a surgirem como ferramenta para analisar a dinâmica populacional de determinada espécie, onde todo o seu desenvolvimento gira em torno de equações diferenciais ordinárias, é claro que ficará evidente que estes modelos tem suas precisões na maioria das vezes grosseiras e suas aplicações estão voltadas especificamente para a verificação de tendências de dados já observados. Entretanto sabemos que o processo evolutivo não pára, e por conta disso ainda hoje e quem sabe no futuro continuarão surgindo modelos, cada vez mais preciso, que levem em consideração todos os fatores dos quais depende a dinâmica

populacional(fecundidade, mortalidade,habitat, tempo, etc.) sem ignora-los, e este é um estudo que recai sobre as equações diferenciais parciais ou equações diferenciais não homogêneas.

Capítulo 2

Definições

Neste capítulo iremos apresentar alguns conceitos e definições que possibilitarão o melhor entendimento a cerca do tema abordado neste trabalho, bem como a compreensão dos cálculos.

2.1 crescimento assintótico

Chamamos de comportamento *assintótico* o comportamento a ser observado em uma função $f(n)$, quando n tende ao infinito.
Em geral, o custo aumenta com o tamanho n do problema. Para valores pequenos de n, mesmo um algoritmo ineficiente não custa muito para ser executado, por isso é interessante para algoritmos de n entradas com $n > 1$.[8]

2.2 taxa

A *taxa* de crescimento relativo de uma grandeza é dada pela razão de seu crescimento e seu valor inicial. Assim uma grandeza que passa do valor a para o valor b tem taxa de crescimento relativo iguala:

$$\frac{b-a}{a}$$

2.3 Células Meristemáticas

As células meristemáticas são encontradas no tecido meristemático que é basicamente o tecido embrionário de planta adulta que pode se dividir em novas células e produzir novos tecidos. As células meristemáticas são geralmente de parede fina, com muito citoplasma e vacúolos pequeno.[8]

2.4 Ponto de Inflexão

Em Cálculo Diferencial, um *ponto de inflexão* ou simplesmente inflexão, é um ponto sobre uma curva na qual a curvatura (a derivada de segunda ordem) troca o sinal. A curva troca de curvatura, de côncava para cima (curvatura positiva), para côncava para baixo (curvatura negativa), ou vice-versa.[8]

2.5 Separação de variáveis

*E*m Matemática, separação e variáveis é qualquer um dos diversos métodos para resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais, no qual a Álgebra permite reescrever uma equação de tal modo que cada uma das duas vaiáveis aparecem de lados diferentes da equação. Suponha que uma equação diferencial possa ser escrita na forma

$$\frac{d}{dx}f(x) = g(x)h(f(x))$$

que possa ser simplicada considerando $y = f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

No caso de $h(y) \neq 0$, podemos rearranjar os termos para obter:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

no qual as duas variáveis x e y estão separadas.

2.6 Logaritmo

Sendo a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a, o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b.

Em símbolos: se a, $b \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então:

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Em $\log_a b = x$, dizemos: a é a base do logaritmo, b é o logaritmando, x é o logaritmo.

2.7 Limite

Sejam f uma função ep um ponto do domínio de f ou extremidade de um doa intervalos que compõem o domínio de f. Dizemos que f tem limite L, em p se, para todo $\epsilon > 0$ dado, dado $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$.

$$0 <\mid x - p \mid< \delta \Longrightarrow \mid f(x) - L \mid< \epsilon$$

Tal número L, que quando existe é único, será indicado por $\lim\limits_{x \to p} f(x)$. Assim:

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \quad \epsilon > 0, \ \exists \quad \delta > 0 \ tal \ que, \ para \ todo \ x \in D_f \\ 0 <\mid x - p \mid< \delta \Longrightarrow \mid f(x) - L \mid< \epsilon \end{cases}$$

2.8 Limites Laterais

Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existe b tal que $]p, b[\subset D_f$. Definimos:

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \quad \epsilon > 0, \exists \quad \delta > 0 \ tal \ que, \\ p < x < p + \delta \Longrightarrow \mid f(x) - L \mid< \epsilon \end{cases}$$

O número L, quando existe, denomina-se limite lateral à direita de f, em p. Quando x tende a p, pela direita, $f(x)$ tende a L:

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L$$

Suponhamos, agora, que exista um real a tal que $]a, p[\subset D_f$.

Definimos:

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \quad \epsilon > 0, \ \exists \quad \delta > 0 \ tal \ que, \\ p - \delta < x < p \Longrightarrow \mid f(x) - L \mid< \epsilon \end{cases}$$

O número L, quando existe, denomina-se limite lateral à esquerda de f, em p. Quando x tende a p, pela esquerda, $f(x)$ tende a L:

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L$$

É uma consequência imediata das definições de limite e de imites laterais que se

$$\lim_{x \to p} g(x) = L$$

e se, para algum $r > 0$, $f(x) = g(x)$ em $]p, p + r[$, então

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = L$$

. Se ocorrer $f(x) = g(x)$ em $]p - r, p[$, então

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = L$$

.

2.9 Derivada

Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O seu limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$ (leia: f linha de p). Assim:

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Se f admite derivada em p, então diremos que f é derivável ou diferenciável em p.

a) *Derivação de Função Composta* Sejam $y = f(x)$ e $x = g(t)$ duas funções deriváveis, com $\text{Im}g \subset D_f$. Nosso objetivo, a seguir, é provar que a composta $h(t) = f(g(t))$ é derivável e que vale a regra da cadeia

$$h'(t) = f'(g(t))g'(t) \tag{2.1}$$

$t \in D_g$

Vejamos como fica a regra da cadeia na notação de Leibniz. Temos:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

e

$$\frac{dx}{dt} = g'(t)$$

Sendo a composta dada por $y = f(g(t))$, segue de 2.1 que:

$$\frac{dy}{dt} = f'(g(t))g'(t)$$

ou

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)g'(t)$$

onde $x = g(t)$

Assim,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

onde $\frac{dy}{dx}$ deve ser calculado em $x = g(t)$.

Suponhamos $y = f(x)$ derivável em p, x=$g(t)$ derivável em t_0, com $p = g(t_0$, e Im$g \subset D_f$.

Seja $h(t) = f(g(t))$. Vamos provar que

$$h'(t_0) = f'(g(t_0))g'(t_0)$$

Para isto, consideremos a função T dada por:

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$$

Fazendo:

$$f(x) = T(x) + E(x)$$

ou

$$f(x) - f(p) = f'(p)(x - p) + E(x) \; x \in D_f \tag{2.2}$$

Onde $E(x)$ é o erro que se comete ao aproximar $f(x)$ por $T(x)$. $E(x) = \rho(x)(x - p)$, $x \in D_f$, onde $\lim_{x \to p} \rho(x) = 0 = \rho(0)$. Fazendo em 2.2 $x = g(t)$ e $p = g(t_0)$ e, em seguida, dividindo ambos os membros por $t - t_0.(t \neq t_0)$, obtemos

$$\frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} = f'(g(t_0))\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} + \frac{E(g(t))}{t - t_0}$$

Temos:

$$\lim_{t \to t_0} f'(g(t_0))\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = f'(g(t_0))g'(t_0)$$

Por outro lado, $E(x) = \rho(x)(x - p)$ segue $E(g(t)) = \rho(g(t))(g(t) - g(t_0)$. Temos

$$\lim_{t \to t_0} \rho(g(t)) = \lim_{x \to p} \rho(x) = 0$$

Daí

$$\lim_{t \to t_0} \frac{E(g(t))}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \rho(g(t))\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = 0 \cdot g'(t_0) = 0$$

Portanto

$$h'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(g(t)) - f(g(t_0)}{t - t_0} = f'(g(t_0))g'(t_0)\cdot$$

b) *Regras de L'Hospital*

As regas de L'Hospital, aplicam-se a cálculos de limites que apresentam indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

1ªREGRA DE L'HOSPITAL: Sejam f e g deriváveis em $]p - r, p[$ e em $]p, p + r[$ $(r > 0)$, com $g'(x) \neq 0$ para $0 <| x - p |< r$. Nestas condições, se

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0, \lim_{x \to p} g(x) = 0$$

e se

$$\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existir (finito ou infinito), então

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existirá e

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2ªREGRA DE L'HOSPITAL: Sejam f e g deriváveis em $]m, p[$, com $g'(x) \neq 0$ em $]m, p[$. Nestas condições, se

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \to p^-} g(x) = +\infty$$

e se

$$\lim_{x \to p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existir (finito ou infinito), então

$$\lim_{x \to p^-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existirá e

$$\lim_{x \to p^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2.10 Integral

Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e L um número real. Dizemos que

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \triangle x_i$$

tende a L, quando máx $\triangle x_i \longrightarrow 0$, e escrevemos

$$\lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \triangle x_i = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ que só dependa de ϵ mas não da particular escolha dos c_i, tal que

$$| \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \triangle x_i - L | < \epsilon$$

Para toda partição P de $[a, b]$, com $\max \triangle x_i < \delta$. Tal número L, que quando existe é único, denomina-se Integral (de Riemann) de f em $[a, b]$ e indica-se por $\int_a^b f(x)dx$. Então, por definição,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \triangle x_i$$

Se $\int_a^b f(x)dx$ existe, então diremos que f é integrável(segundo Riemann) em $[a, b]$.

É comum referirmo-nos a $\int_a^b f(x)dx$ como integral definida de f em a, b.

Observação: Pomos ainda , por definição:

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

e

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx (a > b).$$

1) *Propriedades da Integral*

Teorema: Sejam f, g integráveis em $[a, b]$ e k uma constante. Então

a) $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

b) kf é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

c) Se $f(x) \geq 0$ em a, b, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

d) Se $c \in]a, b[$ e f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$ então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2) *Primitivas Imediatas*

Sejam $\alpha > 0$ e c constantes reais. Das fórmulas de derivação seguem as seguintes de primitivação:

a) $\int c\ dx = cx + k$

b) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k\ (\alpha \neq -1)$

c) $\int \exp^x dx = \exp^x + k$

d) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k\ (x > 0)$

e) $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + k\ (x < 0)$

f) $\int \frac{1}{x} dx = \ln \mid x \mid + k$

g) $\int \cos x\ dx = \sin x + k$

h) $\int \sin x\ dx = -\cos x + k$

i) $\int \sec^2\ x\ dx = \tan x + k$

j) $\int \sec\ x \tan\ x\ dx = \sec x + k$

l) $\int \sec\ x\ dx = \ln \mid \sec\ x + \tan\ x \mid + k$

m) $\int \tan\ x\ dx = -\ln \mid \cos\ x \mid + k$

n) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan\ x + k$

o) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin\ x + k$

2.11 Fração Parcial

Dada a integral:

$$\int \frac{(4x-1)}{(x-1)^2} dx$$

Resolvendo por frações parciais temos:

$$\frac{4x-1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

Multiplicando tudo por $(x-1)^2$, temos:

$$(4x-1) = A(x-1) + B$$

Para $x = 2$, temos: $7 = A + B$

Para $x = 0$, temos: $-1 = -A + B$

De onde sai que $2B = 6$, portanto $B = 3$ e $A = 4$.

$$\therefore \int \frac{(4x-1)}{(x-1)^2} dx = \int \frac{4}{(x-1)} dx + \int \frac{3}{(x-1)^2} dx$$

$$= 4 \int \frac{dx}{(x-1)} + 3 \int \frac{dx}{(x-1)^2} = 4 \cdot \ln \mid x-1 \mid - \frac{3}{(x-1)} + C$$

2.12 Mudança de Variável na Integral

Seja f contínua num intervalo I e sejam a e b dois reais em I. Seja $g : [c, d] \to I$, com g' contínua em $[c, d]$, tal que $g(c) = a$ e $g(d) = b$. Nestas condições

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du$$

Demonstração

Como f é contínua em I, segue que F admite uma primitiva F em I. Assim,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{2.3}$$

A função $H(u) = F(g(u))$, $u \in [c, d]$, é uma primitiva de $f(g(u))g'(u)$; de fato,

$$H'(u) = [F(g(u))]' = F'(g(u)))g'(u)$$

ou seja,

$$H'(u) = f(g(u))g'(u)$$

pois, $F' = f$. Segue que

$$\int_c^d f(g(u))g'(u)du = [F(g(u))]_c^d = F(g(d)) - F(g(c)).$$

Por hipótese, $g(d) = b$ e $g(c) = a$. Tendo em vista (2.5), resulta

$$\int_c^d f(g(u))g'(u)du = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = ?$$

$$x = g(u); dx = g'(u)du$$

$$x = a; u = c, ondeg(c) = a$$

$$x = b; u = d, ondeg(d) = b$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du$$

Capítulo 3

Modelos Matemáticos

3.1 Modelo de Malthus

O modelo de Malthus é baseado na idéia de que a taxa de crescimento de uma população é proporcional à própria população em cada período de tempo[1], desta forma pode-se modelar a população usando uma função derivável P, que aumenta a uma taxa proporcional ao tamanho da população, matematicamente, temos que:

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

onde r é a diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade.
Ou seja,se $P = P(t)$ mede a população em um determinado tempo, temos que:

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) \tag{3.1}$$

Resolvendo a E.D.O.(3.1) por separação de variáveis, Chegaremos a função que descreve o crescimento da população em relação ao tempo.

$$\frac{1}{P(t)}dP(t) = rdt$$

(Integrando)

$$\ln P(t) = rt + k \tag{3.2}$$

Considerando a população inicial $P(0) = P_0$, ou seja, para $t = 0$, k só pode ser $\ln P_0$

,visto que:

$$\ln P(0) = r(0) + k \Rightarrow \ln P_0 = k$$

Substituindo essa constante em (3.2)

$$\ln P(t) = rt + \ln P_0$$
$$\ln P(t) - rt = \ln P_0$$

Aplicando exponencial em ambos os membros

$$\begin{aligned} e^{\ln P(t) - rt} &= e^{\ln P_0} \\ \frac{e^{\ln P(t)}}{e^{rt}} &= e^{\ln P_0} \\ P(t) &= P_0 e^{rt} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dependendo do valor de r , a população tende a seguir três rumos

i) Para $r > 0$ a população cresce de forma exponencial.

ii) Para $r < 0$ a população tende a se extinguir.

iii) Para $r = 0$ a população inicial não se altera.

Ou seja, a população tem comportamento conforme a figura (3.1).

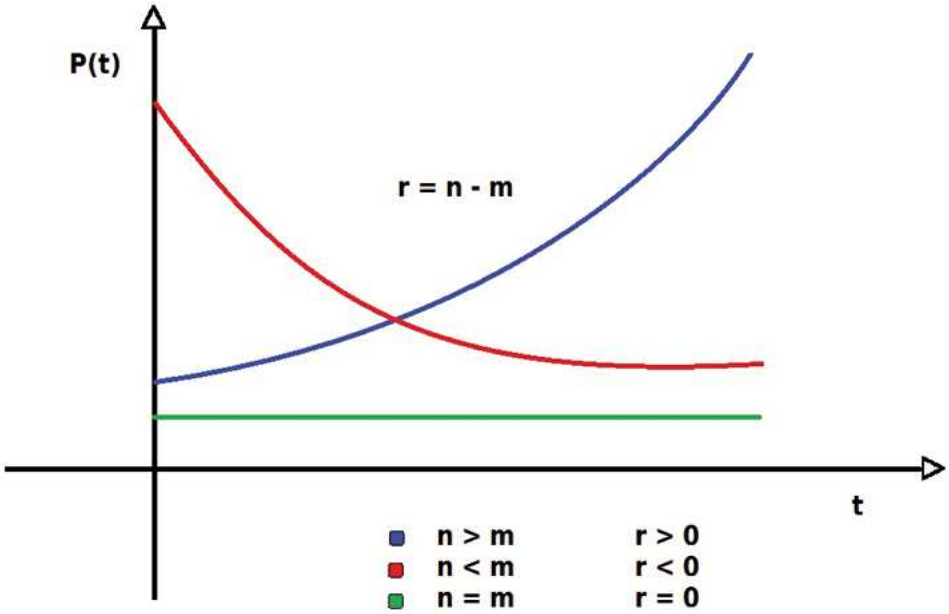

Figura 3.1: Crescimento populacional segundo Malthus

3.2 Modelo de Verhulst

O modelo de *Verhulst* é, essencialmente o modelo de Malthus modificado, considerando a taxa de crescimento como sendo proporcional à população em cada instante [1], desse modo

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P)P \tag{3.4}$$

Sendo $\beta(P) = r(\frac{P_\infty - P}{P_\infty})$, com $r > 0$ e P_∞ , o valor limite da população.
Desta forma $\beta(P)$ Tende zero quando $P \to P_\infty$. [1]
Tornando $\beta(P)$ Explicito em (3.4) e supondo que $P(0) = P_0$ seja dado, temos

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} & = & rP\left(1 - \dfrac{P}{P_\infty}\right) \\ P(0) & = & P_0, \quad r > 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

A solução analítica de (3.5) é obtida por integração após a separação de variáveis, isto é;

$$\int \frac{dP}{P(1 - \frac{P}{P_\infty})} = \int r dt \tag{3.6}$$

A integral do primeiro membro pode ser resolvida , usando a técnica das frações parciais, ou seja,

$$\int \left(\frac{dP}{P(1 - \frac{P}{P_\infty})}\right) \Longrightarrow \int \left(\frac{A}{P} + \frac{B}{1 - \frac{P}{P_\infty}}\right) dP \tag{3.7}$$

Igualando,

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{1 - \frac{P}{P_\infty}} = \frac{1}{P\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)}$$

$$A\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) + PB = 1$$

Devemos determinar os valores de A e B para substituir em (3.7).

$$A - \frac{PA}{P_\infty} + PB = 1$$

$$A + P\left(\frac{-A}{P_\infty} + B\right) = 1$$

para $A = 1$, temos que $P\left(\frac{-A}{P_\infty} + B\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad B = \frac{1}{P_\infty}$
Substituindo:

$$\int \left(\frac{A}{P} + \frac{B}{1 - \frac{P}{P_\infty}}\right) dP = \int \left(\frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{P_\infty}}{1 - \frac{P}{P_\infty}}\right) dP$$

$$\int \left(\frac{1}{P}\right) dP + \int \left(\frac{\frac{1}{P_\infty}}{1 - \frac{P}{P_\infty}}\right) dP$$

$$\int \left(\frac{1}{P}\right) dP - \int \left(\frac{-\frac{1}{P_\infty}}{1 - \frac{P}{P_\infty}}\right) dP$$

$$\ln|P| - \ln\left|1 - \frac{P}{P_\infty}\right|$$

Voltando a equação (3.6), temos que sua integral é da forma:

$$\ln|P| - \ln\left|1 - \frac{P}{P_\infty}\right| = rt + k$$

Logo,

$$\ln\left|\frac{P(t)}{1 - \frac{P(t)}{P_\infty}}\right| = rt + k \tag{3.8}$$

Usando a condição inicial $P(0) = P_0$, $(t = 0)$ podemos determinar o valor da constante de integração k.

$$k = \ln\left|\frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{P_\infty}}\right| = \ln\left|\frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0}\right|$$

Portanto, substituindo k , em (3.8),

$$\ln\left|\frac{P(t)}{1-\frac{P(t)}{P_\infty}}\right| = rt + \ln\left|\frac{P_0P_\infty}{P_\infty - P_0}\right|$$

$$\ln\left|\frac{P(t)}{\frac{P_\infty - P(t)}{P_\infty}}\right| - \ln\left|\frac{P_0P_\infty}{P_\infty - P_0}\right| = rt$$

$$\ln\left|\frac{P(t)P_\infty}{P_\infty - P(t)}\right| - \ln\left|\frac{P_0P_\infty}{P_\infty - P_0}\right| = rt$$

$$\ln\left|\frac{\frac{P(t)P_\infty}{P_\infty - P(t)}}{\frac{P_0P_\infty}{P_\infty - P_0}}\right| = \ln\left|\frac{P(t)(P_\infty - P_0)}{P_0(P_\infty - P(t))}\right| = rt$$

$$e^{\ln\left|\frac{P(t)(P_\infty - P_0)}{P_0(P_\infty - P(t))}\right|} = e^{rt} \qquad \Rightarrow \qquad P(t)(P_\infty - P_0) = e^{rt}P_0(P_\infty - P(t))$$

$$\frac{P(t)}{P_\infty - P(t)} = e^{rt}\frac{P_0}{P_\infty - P_0} \qquad (dividindo \quad por P(t))$$

$$\frac{1}{\frac{P_\infty}{P(t)} - 1} = \frac{P_0}{(P_\infty - P_0)e^{-rt}} \qquad \Rightarrow \qquad (P_\infty - P_0)e^{-rt} = P_0\left(\frac{P_\infty}{P(t)} - 1\right)$$

$$(P_\infty - P_0)e^{-rt} = \frac{P_0P_\infty}{P(t)} - P_0 \qquad \Rightarrow \qquad (P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0 = \frac{P_0P_\infty}{P(t)}$$

$$P(t) = \frac{P_0P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0} \tag{3.9}$$

A expressão (3.9) é a solução analítica do modelo de Verhulst e dela podemos observar que:

a. Se $P_0 < P_\infty$ então $P_0 < P(t) < P_\infty$ e $P(t)$ tende a P_∞, crescendo. Neste caso a equação (3.5) mostra claramente que $\frac{dP}{dt} > 0$;

b. Se $P_0 > P_\infty$ então $P(t)$ tende a P_∞ , decrescendo , neste caso $\frac{dP}{dt} < 0$;

c. Da equação (3.5) temos que

$$\frac{dP}{dt} = rP - r\frac{P^2}{P_\infty}$$

Ou seja, $\dfrac{dP}{dt}$, como função de P , é uma parabola com concavidade voltada para baixo, cujas raízes $P = 0$ e $P = P_\infty$ são as soluções de equilíbrio da equação diferencial (3.5) , pois $\frac{dP}{dt} = 0$ nestes pontos.

d. Como $r < 0$, temos que $\frac{dP}{dt}$ é crescente se $0 < P(t) < \frac{P_\infty}{2}$ e decrescente se $\frac{P_\infty}{2} < P(t) < P_\infty$. O máximo valor de $\frac{dP}{dt}$, em relação a P , é alcançado quando $P = \frac{P_\infty}{2}$, isto é, quando a população for igual à metade da população limite.

e. Se considerarmos em (3.9) ,$P(t) = \frac{P_\infty}{2}$, podemos determinar o instante t_m em que a população atinge a máxima variação:

$$\frac{P_\infty}{2} = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0} \quad \Rightarrow e^{rt} = \frac{P_\infty - P_0}{P_0}$$

Portanto, aplicando logaritmo

$$\ln^{e^{rt}} = \ln^{\frac{P_\infty - P_0}{P_0}} \quad \Rightarrow \quad t_m = \frac{1}{r}\ln\left|\frac{P_\infty - P_0}{P_0}\right|$$

Considerando $P_0 < P_\infty$. Assim para $t = t_m$, temos:

(i) $P(t_m) = \frac{P_\infty}{2}$

(ii) $\dfrac{dP}{dt}|t = t_m = r\dfrac{P_\infty}{2}\left(1 - \dfrac{\frac{P_\infty}{2}}{P_\infty}\right) = \dfrac{r}{4}P_\infty > 0$

(iii) $\dfrac{d^2P}{dt^2}|t = t_m = r\dfrac{dP}{dt} - \frac{2r}{P_\infty}P\frac{dP}{dt} = r\frac{dP}{dt}\left(1 - 2\dfrac{P}{P_\infty}\right)_{|P=\frac{P_\infty}{2}} = 0$

Logo,para $t = t_m$ é um ponto de inflexão P_t.Desta forma

Se $P_0 = \frac{P_\infty}{2} \Rightarrow t_m = 0$

Se $\frac{P_\infty}{2} < P_0 < P_\infty \Rightarrow$ a curva não tem ponto de inflexão

Podemos então observar o comportamento da curva gerada pela expressão (3.9)conforme os valores de P_0 e k.

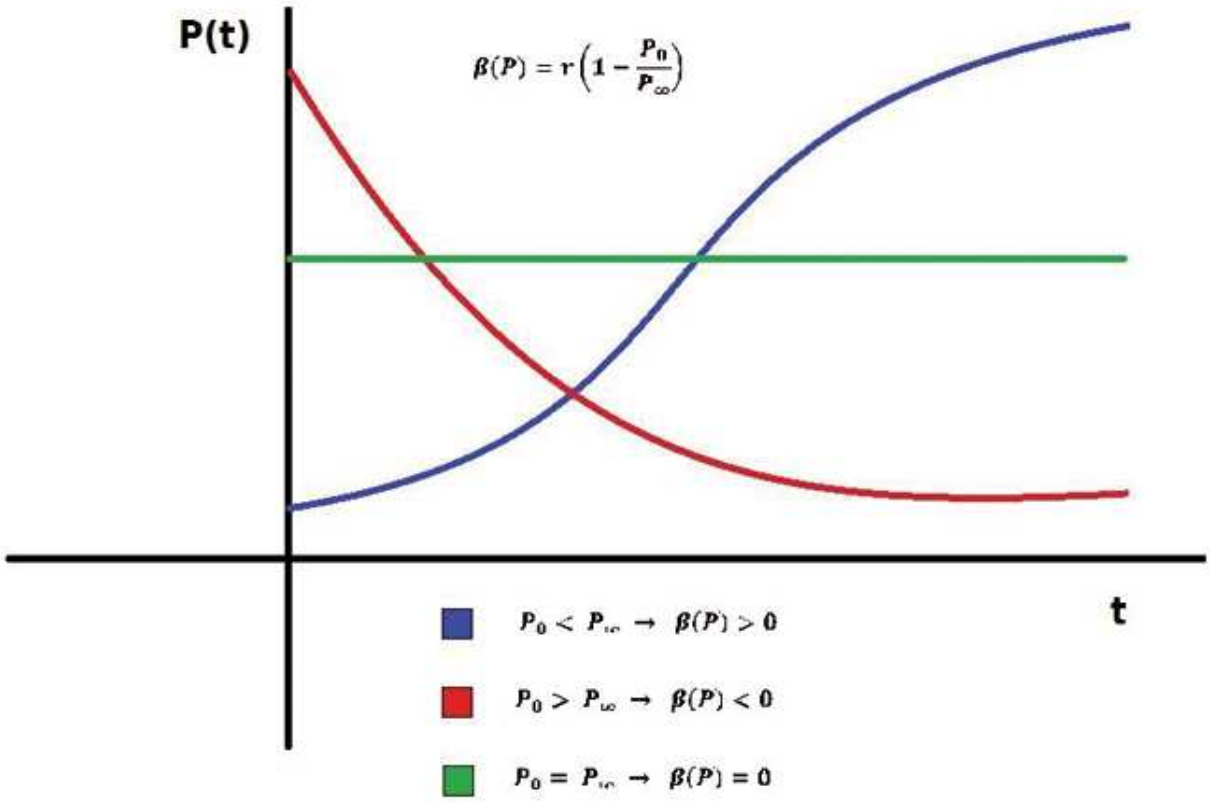

Figura 3.2: Curva logística de Verhulst com $P_0 < P_\infty$, $P_0 > P_\infty$, $P_0 = P_\infty$

3.3 Modelo de Gompertz

O modelo de Gompertz , utiliza uma taxa de inibição da variável de estado proporcional ao logaritmo desta variável.Isto significa que a taxa de crescimento é grande no início do

processo, mudando rapidamente para um crescimento mais lento. É um modelo bastante adequado para traduzir crescimentos celulares, haja vista que, no início todas as células são meristemáticas, perdendo esta propriedade num intervalo de tempo relativamente pequeno.

O modelo de Gompertz é dado pelo problema de cauchy (equação diferencial com condição inicial). [1]

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} &= aP - bP\ln P \Rightarrow P(a - b\ln P) \\ P(0) &= \quad P_0 \qquad com \quad a > 0 \quad e \quad b > 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

A taxa de crescimento $r(P) = a - b\ln P > 0$ decresce com P e o valor de estabilidade de P é obtido considerando-se $r(P) = 0$, isto é,

$$\frac{dP}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a - b\ln P) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_\infty = e^{\frac{a}{b}} \quad com \quad P > 0$$

Observamos que quando P é muito pequeno , $r(P)$ é muito grande pois

$$\lim_{P \to 0^+} r(P) = +\infty$$

Agora, como $0 = a - b\ln P_\infty$, podemos tomar $a = b\ln P_\infty$ na equação (3.10) e rescrevê-la como

$$\frac{dP}{dt} = bP\ln P_\infty - b\ln P = bP\ln\left(\frac{P_\infty}{P}\right) = P\ln\left(\frac{P_\infty}{P}\right)^b$$

e neste caso, $r(P) = \ln(\frac{P_\infty}{P})^b$

A solução de (3.10) é obtida considerando-se a mudança de variável $z = \ln P$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = a - bz$$

(integrando com mudança de variável)

fazendo

$$u = a - bz \quad \Rightarrow \frac{du}{dz} = -b \quad \Rightarrow dz = -\frac{du}{b}$$

Temos

$$\int \frac{dz}{a - bz} = \int dt = \int \frac{-\frac{du}{u}}{u} = \int dt$$

$$-\frac{1}{b}\int \frac{du}{u} = \int dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{b}\ln|u| = \int dt$$

daí, substituindo u

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{b}\ln|a-bz| = t+k$$

Para $t=0$, obtemos $k = -\frac{1}{b}\ln|a-b\ln P_\infty|$.
Portanto , $\ln|a-b| = -bt + \ln|a-b\ln P_0|$,

$$a-bz = (a-b\ln P_0)e^{-bt} \qquad \Leftrightarrow \qquad z(t) = \frac{1}{b}[a-(a-b\ln P_0)e^{-bt}].$$

Voltando à variável $P = e^z$, obtemos

$$P(t) = e^{\frac{a}{b}}\exp\left[-\left(\frac{a}{b}-\ln P_0\right)e^{-bt}\right] \Rightarrow P(t) = P_\infty\left(\frac{P_0}{P_\infty}\right)^{e^{-bt}}$$

Pois, fazendo $P_\infty = e^{\dfrac{a}{b}}$, temos que

$$P(t) = P_\infty e^{-(\frac{a}{b}-\ln P_0)e^{-bt}} = P_\infty(e^{-\frac{a}{b}}e^{\ln P_0})^{e^{-bt}}$$

$$P(t) = P_\infty\left(\frac{1}{e^{\frac{a}{b}}}P_0\right)^{e^{-bt}} \quad = \quad P_\infty\left(\frac{P_0}{P_\infty}\right)^{e^{-bt}} \tag{3.11}$$

A curva (3.11)tem um ponto de inflexão quando

$$t = t_m = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{a}{b}-\ln P_0\right)$$

e a população nesse instante t_m é

$$P(t_m) = \frac{1}{e}P_\infty = \frac{1}{e}e^{\frac{a}{b}} = e^{\frac{a-b}{b}}$$

O modelo de Gompertz descreve as curvas conforme a figuras (3.3) de acordo com P_0 e P_∞.

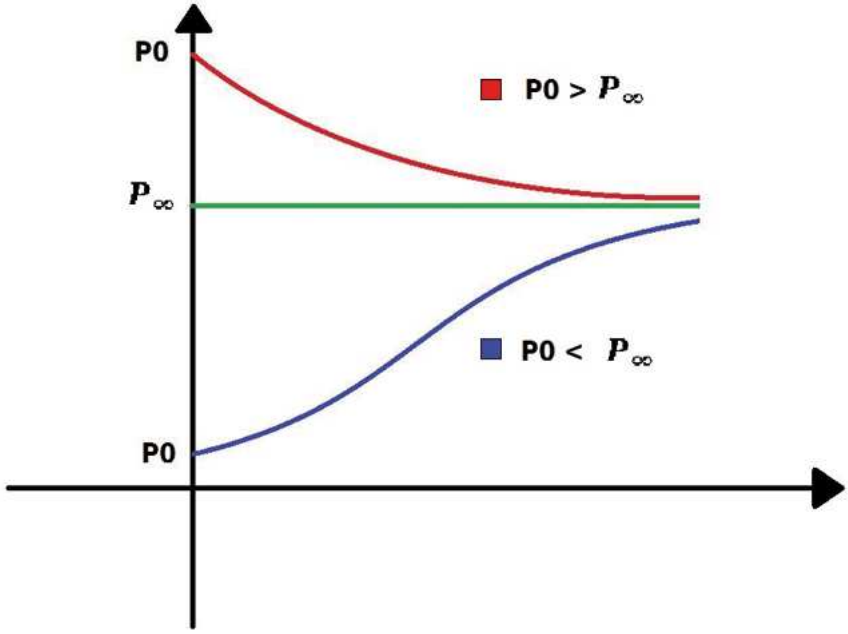

Figura 3.3: Curva de Gompertz com $P_0 < P_\infty$, $P_0 > P_\infty$, $P_0 = P_\infty$

3.4 Modelo de Montroll

Em 1971 , Montroll propôs um modelo geral para traduzir o crescimento assintótico de uma variável , levando em conta que o posicionamento da variação máxima pode ser qualquer valor entre P_0 e P_∞.

Sendo P_∞ o valor finito de uma população $P = P(t)$ e λ a sua taxa de crescimento relativa quando P é pequeno . o modelo de Montroll é dado pela equação diferencial não linear

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty}\right)^\alpha\right] \qquad \lambda > 0 \qquad e \qquad \alpha > 0 \tag{3.12}$$

O valor do parâmetro α é indicador da posição do ponto de inflexão da curva. Quando $\alpha = 1$, a equação (3.12) é simplesmente o modelo de Verhulst.

Para determinar a posição do ponto P_m , onde o crescimento é máximo , é suficiente

considerar a equação $\dfrac{d^2P}{dt^2} = 0$, uma vez que $\dfrac{dP}{dt} > 0$ pois $0 < P < P_\infty$.

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= \lambda\frac{dP}{dt}\left(1-\frac{P}{P_\infty}\right)^{\alpha} - \alpha\lambda\frac{P}{P_\infty}\left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{\alpha-1}\frac{dP}{dt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= \lambda\frac{dP}{dt}\left[1-\left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{\alpha} - \alpha\left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{\alpha}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Logo, \frac{d^2P}{dt^2} &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1} \Leftrightarrow \frac{P}{P_\infty} = \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Portanto, P_m &= P_\infty\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Assim, dado P_∞ o valor de P_m depende somente do parâmetro α .

$$\begin{aligned}
\alpha &= 3 \rightarrow P_m = 0.6299P_\infty \\
\alpha &= 2 \rightarrow P_m = 0.5773P_\infty \\
\alpha &= 1 \rightarrow P_m = 0.5P_\infty \qquad (ModelodeVerhulst) \\
\alpha &= 0.5 \rightarrow P_m = 0.4444P_\infty \\
\alpha &= 0.25 \rightarrow P_m = 0.4096P_\infty
\end{aligned}$$

O objetivo principal deste modelo geral é propor diferentes formas possíveis de decrescimento das taxas de variação . Podemos considerar estas taxas como sendo dadas pela expressão:

$$r = f(P,\alpha)\lambda\left[1-\left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{\alpha}\right] \qquad (3.14)$$

observamos de (3.14) que quando $\alpha > 0$ decresce , o ponto de inflexão P_m também decresce e tende a um valor positivo igual a $\frac{P_\infty}{e} \cong 0.3678P_\infty$. De fato , tomando $\alpha \rightarrow 0$ por valores

positivo ($\alpha \to 0^+$) , temos

$$\lim_{\alpha\to 0^+} P_m = P_\infty \lim_{\alpha\to 0^+} \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Do calculo diferencial , Sabemos que se $F(x)$ é uma função contínua no intervalo (a, b) , então

$$F(\lim_{x\to\alpha^+})g(x) = \lim_{x\to\alpha^+} F(g(x))$$

.

Usando este fato, podemos escrever

$$\ln\left[\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] = \lim_{\alpha\to 0^+}\left[\ln\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] = -\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$$

Aplicando a regra de L'Hôspital , vem

$$-\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = -\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1+\alpha}{\alpha} = -1$$

Logo,

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \cong 0.3678$$

Quando $P_m = \frac{1}{e}P_\infty$ temos o modelo de Gompertz de 1825. Entretanto , quando α cresce , o ponto P_m tende ao próprio valor P_∞.Isso porque

$$\lim_{\alpha\to\infty+}\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 1$$

.

Os pontos de estabilidade do modelo geral de Montroll são obtidos considerando $\dfrac{dP}{dt} = 0$ na equação (3.12) , isto é,

$$\lambda P\left[1-\left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{\alpha}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = 0 \quad ou \quad P = P_\infty$$

A solução do modelo de Montroll é dada pela expressão:

$$P(t) = \frac{P_0 k}{[P_0^\alpha + (k^\alpha - P_0^\alpha)e^{-\alpha t}]^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{3.15}$$

E seu gráfico tem comportamento conforme a figura a seguir:

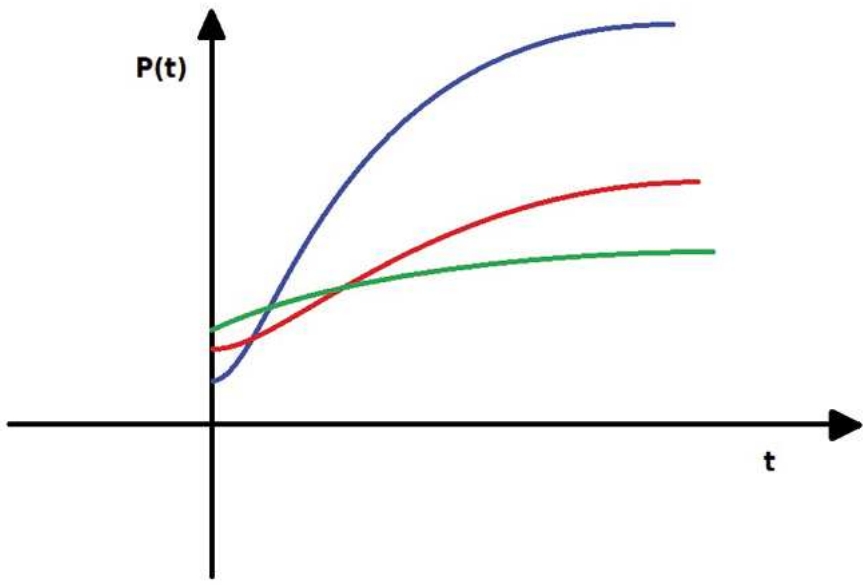

Figura 3.4: Solução do modelo de Montroll com $azul(\lambda = 1.5; \alpha = 2; P_0 = 1; P_\infty = 5), vermelho(\lambda = 2; \alpha = 0.1; P_0 = 10; P_\infty = 50), verde(\lambda = 0.1; \alpha = 10; P_0 = 15; P_\infty = 25)$

Capítulo 4

Aplicação

Um exemplo bem simples do modelo de Malthus e Verhurst foi desenvolvido pelo Grupo de Estudos de Matemática na cidade de Passo Fundo em São Paulo. Eles usaram a mesma taxa de crescimento para fazer a estimativa da população com os dois modelos os dados reais da taxa de natalidade n e mortalidade m no período de $1981a1991$ possibilitaram a obtenção por meio de uma média aritmética desta taxa de crescimento

$$\alpha = n - m = 0,019077181$$

. Para o modelo de Verhurst ´se fez necessário encontrar o valor de suporte da população P_∞ , e esse valor foi encontrado por meio da comparação entre a linearização do modelo de Verhurst e o ajuste linear dos dados reais pelo método dos mínimos quadrados. O valor encontrado para P_∞ que permitiu o melhor ajuste do modelo foi $P_\infty = 7601993,668$.
Utilizando os parâmetros α e P_∞, foram calculadas as populações dos anos de 1981 a 1991.
A simulação da dinâmica populacional segundo Malthus apresentou resultados bastante próximos do real, mas o que melhor aproximação simulação foi obtida através do modelo de Verhurst.
Analisando os resultados da Tabela 4, percebe-se que os modelos descreveram satisfatoriamente o processo real da dinâmica populacional urbana da cidade no período de 1981 a 1991, apresentando erro máximo de $2,9\%$ acima do real (o IBGE considera como margem aceitável erro de 5%).[9]

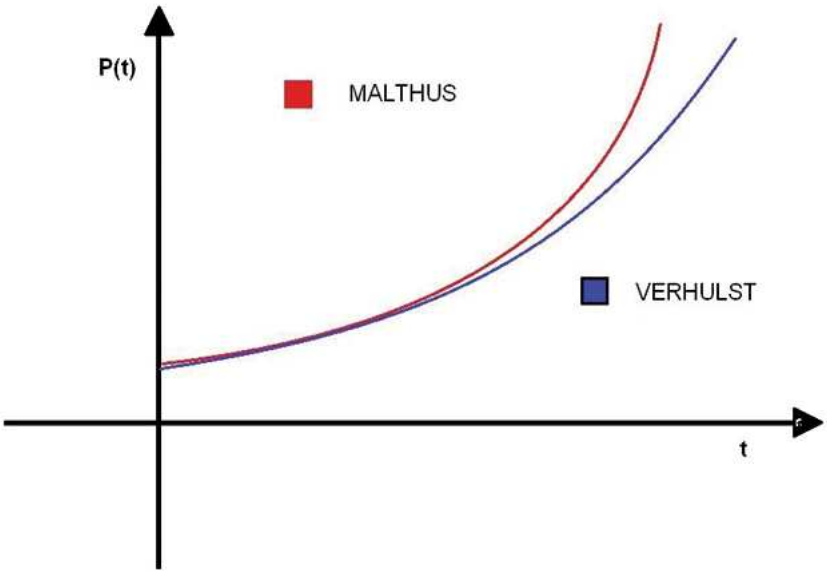

Figura 4.1: curva logística de MALTHUS e VERHULST

T	Ano	Pop.Real	Pop.Malthus	Pop.Verhurst
0	1981	124301	124301	124301
1	1982	127287	126695	126655
2	1983	130182	129135	129053
3	1984	132938	131622	131496
4	1985	135923	134158	133984
5	1986	138915	136741	136518
6	1987	141363	139375	139099
7	1988	143804	142060	141728
8	1989	145881	144796	144406
9	1990	147639	147584	147134
10	1991	149757	150427	149912

Figura 4.2: Fonte IBGE: Dados reais ,Pop.Malthus , Pop. Verhulst

Considerações Finais

O estudo da dinâmica populacional dá idéia do processo de evolução dos modelos empregados. Os biossistemas são quase sempre constituídos de um grande número de populações interrelacionadas. Assim, uma população raramente pode ser considerada isolada, a não ser em condições ideais de laboratório ou quando não é possível individualizar no biossistema outra população interagindo com a primeira. Mesmo na análise de populações isoladas, muitos fatores podem contribuir com sua dinâmica, por exemplo fatores abióticos(temperatura, vento, humidade etc.) e fatores de auto-regulação(espaço, alimento, guerra etc.) Em termos práticos, a busca de generalizações deve ser adotada enquanto conseguirmos testar ou medir o grau de influência ou sensibilidade de cada fator utilizado nos modelos. Para o entendimento da dinâmica populacional é preciso considerar que as populações interagem para persistirem, e para tal necessitam aumentar. Com isso percebemos que os quatro modelos matemáticos são de extrema importância para a evolução das dinâmicas populacionais, pois possibilitam projetar populações de diferentes espécies todos com suas particularidades e aplicabilidades, embora seja possível fazer tais projeções é notório que para uma modelagem atingir um nível satisfatório é necessário levar em conta uma série de fatores como já foi citado anteriormente, principalmente os de ambiente, enfatizamos também o que outros autores já mencionaram, de que não existe um modelo pronto que possa modelar um determinado fenômeno sem que seja feito os devidos ajustes.

Referências Bibliográficas

[1] Rodney Carlos Bassanezi, Ubiratan D'Ambrosio, *Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática*.São Paulo, Ed. Contexto

[2] Boyce, W., DiPrima, R.C., *Equações diferenciais Elementares e Problemas de Valores no Contorno*. Rio de Janeiro, Ed. Guanabara, 2004.

[3] pt.wikipedia.org/wiki/Thomas R. Malthus .

[4] pt.wikipedia.org/wiki/Pierre François Verhulst

[5] pt.wikipedia.org/wiki/Curva de Gompertz

[6] en.wikipedia.org/wiki/John Montroll

[7] arquivo/Universidade estadual de Campinas/Dissertacao Juliana Scapim.pdf

[8] http://www.wikipedia.org.com

[9] Apostila modelagem matematica Betine D. Seti/Maria de Fatima B.Betencourte/Neuza T. Oro/Rosana M.L.Kripka/Vera Jussara L. Muhl./pdf

[10] HAMILTON L.GUIDORIZZI/ Um curso de calculo Vol.I/ editora L.T.C